Homolopy Analysis Method to a Class of Marine Planktonic Ecosystem’ Model

Chen Xiu-rong [1] , Yu Jia-shang [2]

1) Department of Science and Information, Qingdao Agricultural University, Qingdao, Shandong, China (xrchen_100@163.com)

2) The Dean’s Office, Heze College, Heze, Shandong, China (jiashang_yu@163.com)

***Abstract*—Marine planktonic ecosystem's model was considered in this paper by homotopy analysis method. The approximation solution for the model was obtained and compared with the numerical solution, which showed the method be feasible for the Marine planktonic ecosystem's model.**

***Keywords*—Marine planktonic ecosystem, homotopy analysis method, nonlinear**

海洋浮游生态系统模型的同伦分析解法

陈秀荣 [1]　　于加尚 [2]

1) 青岛农业大学理信学院，青岛，山东，中国

2)菏泽学院教务处，菏泽，山东，中国

摘　要　本文利用同伦分析方法研究了海洋浮游生态系统模型，得到了该模型的近似解的表达式。为了检验该该法的有效性，通过实例，将近似解与数值解作了比较。比较结果表明，该方法用于研究海洋浮游生态模型可行。

关键词　海洋浮游生态系统，同伦分析方法，非线性

1．引言

海洋浮游生物不但是海洋生产力的基础，也是海洋生态系统能量流动和物质循环的最重要环节。近年来由于人为因素对海洋浮游生态系统的严重影响以及自然气候的直接或间接影响，海洋环境退化严重，因此对海洋浮游生态系统进行预测以至调节和控制物种的发展过程和发展趋势具有重要意义。近年来，国内外学者对海洋生态系统的研究重点是建立生态模型，通过数值模拟来观测物种的发展过程。目前，王洪礼和冯剑丰[1-3]等研究了浮游生态系统的非线性动力学特征及稳定性和分岔；数值模拟方法主要有伴随同化方法[4-6]，这种方法的优点是统一考虑了动力约束和资料约束，并且能够同时对大量参数进行估计，但这种方法计算量大。而本文意在寻找一种更简便有效的方法对模型的观测值进行模拟。

同伦分析方法（Homotopy analysis method）[7]是一种新的求解强非线性问题的解析近似方法，已成功用于解决工程技术中的许多非线性问题，如非线性振动[8]、深水中的非线性波[9]、非线性演化方程的周期解[10]等。本文利用同伦分析方法求方程（1）的近似解。

2．模型及方法描述

这里考虑如下海洋浮游生态系统模型[3]

$$\begin{cases} x' = a_1 x - a_2 x^2 - a_3 xy - a_4 xz \\ y' = -b_1 y + b_2 xy - b_3 yz \\ z' = -c_1 z + c_2 yz \\ x|_{t=0} = A, y|_{t=0} = B, z|_{t=0} = C \end{cases} \tag{1}$$

其中：　$x(t) > 0$、$y(t) > 0$、$z(t) > 0$ 分别为浮游生物总量、捕捞量、人类捕捞行为产生的污染；$a_1(>0)$ 为浮游生物的内在生长率，$a_2 = a_1 / k$，$k(>0)$ 为浮游生物的承载能力，$a_3(>0)$ 为捕捞频率增大浮游生物总量的减少率，$a_4(>0)$ 为人类捕捞行为产生的污染导致的浮游生物总量减少率，$b_1(>0)$ 为捕捞强度，$b_2 = c\delta$，其中 $\delta(>0)$

978-988-19116-5-0/10/$25.00 ©2011 IIEC
ICIA 2011

为浮游生物在系统中的利用效率，$b_3(>0)$ 为人类捕捞行为产生的污染对捕捞频率的减少率，$c_1(>0)$ 为生态系统自身净化率，$c_2(>0)$ 为随着捕捞频率增大导致的污染率。A、B 和 C 分别 $x(t)$、$y(t)$ 和 $z(t)$ 的初始值。

为了得到方程（1）的近似解，引进同伦参数 $p(0\le p\le 1)$ 和 $X(t,p),Y(t,p),Z(t,p)$，并构造同伦映射：$p:0\to 1$ 时，$X(t,p)\to x(t)$，$Y(t,p)\to y(t)$，$Z(t,p)\to z(t)$，即当 p 从 0 变化到 1 时，$X(t,p),Y(t,p),Z(t,p)$ 分别从初始值 A,B,C 变化到方程（1）的精确解 $x(t),y(t),z(t)$。则方程（1）可改写为

$$\begin{cases} X'-a_1X+p(a_2X^2+a_3XY+a_4XZ)=0 \\ Y'+b_1Y+p(-b_2XY+b_3YZ)=0 \\ Z'+c_1Z+p(-c_2YZ)=0 \\ X(0,p)=A,\ X(0,p)=B,\ Z(0,p)=C \end{cases} \tag{2}$$

为得到式（2）的解，将 $X(t,p)$、$Y(t,p)$、$Z(t,p)$ 展成 p 的泰勒级数

$$\begin{cases} X(t,p)=\sum_{k=0}^{\infty}x_k(t)p^k \\ Y(t,p)=\sum_{k=0}^{\infty}y_k(t)p^k \\ Z(t,p)=\sum_{k=0}^{\infty}z_k(t)p^k \end{cases} \tag{3}$$

其中 $x_k(t)=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k X(t,p)}{\partial p^k}|_{p=0}$

$$y_k(t)=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k Y(t,p)}{\partial p^k}|_{p=0}$$

$$z_k(t)=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k Z(t,p)}{\partial p^k}|_{p=0}$$

则方程（1）的解为

$$\begin{cases} x(t)=X(t,1)=x_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}x_k(t) \\ y(t)=Y(t,1)=y_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}y_k(t) \\ z(t)=Z(t,1)=z_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t) \end{cases} \tag{4}$$

将（3）代入（2），并比较 p 的 m 次幂级数可得 m 阶形变方程

$$\begin{cases} L_1[x_m(t)]+R_m^x(t)=0 \\ L_2[y_m(t)]+R_m^y(t)=0 \\ L_3[z_m(t)]+R_m^z(t)=0 \\ x_m(0)=\delta_m^0A,\ y_m(0)=\delta_m^0B,\ z_m(0)=\delta_m^0C \end{cases} \tag{5}$$

其中： $\delta_m^0=\begin{cases} 1 & m=0 \\ 0 & m\ge 1 \end{cases}$

$$L_1u=u'-a_1u,\ L_2v=v'+b_1v,\ L_3w=w'+c_1w \tag{6}$$

$$R_m^x=\sum_{j=0}^{m-1}[a_2x_j(t)x_{m-1-j}(t)+a_3x_j(t)y_{m-1-j}(t)+a_4x_j(t)z_{m-1-j}(t)] \tag{7}$$

$$R_m^y=\sum_{j=0}^{m-1}[-b_2y_j(t)y_{m-1-j}(t)+b_3y_j(t)y_{m-1-j}(t)] \tag{8}$$

$$R_m^z=\sum_{j=0}^{m-1}[-c_2y_j(t)z_{m-1-j}(t)] \tag{9}$$

因此，方程（1）的 M 阶近似解为：

$$\begin{cases} x(t)\approx\sum_{k=0}^{M}x_k(t) \\ y(t)\approx\sum_{k=0}^{M}y_k(t) \\ z(t)\approx\sum_{k=0}^{M}z_k(t) \end{cases} \tag{10}$$

3．主要数值结果

这里主要给出二阶近似解，更高阶的近似解（大于等

本文利用同伦分析方法对海洋浮游生态系统的数学模型进行了研究，得到了近似解。并在此基础上进行了数值解与近似解的比较，比较结果表明用同伦分析方法研究海洋生态系统模型是可行的。用同伦分析方法得到的近似解，可以进一步得到与所讨论的自然现象相关的物理量，因而得到更深层的结果，为研究方程的动力性质提供了一种便捷途径。同时也为海洋管理部门制定海洋发展战略、发展规划提供科学依据，从而确保海洋生态系统的健康、可持续发展。

参考文献

[1] Feng Jian-feng,Li Hui-min,Wang Hong-li, “Research on the Nonlinear Dynamics of the Plankton Ecosystem,”*Ocean Technology*, vol. 1,no.3,pp.17~20,2007.

［2］ Wang Hongli ,Ge Gen,Xu Jia,Xiang Jianping, “Nonlinear Dynamic Analysis and Study of a Nutrient Phytoplankton Model with a Variable Parameters,” *Marine Science Bulletin*, vol.26,no.3,pp. 48~52,2007.

[3] Wang Hong-li,Shen Yu-Hang,Ge Gen, “Nonlinear dynamical research of the steady of marine planktonic ecosystem’s model,” *Marine Science Bulletin*, vol.28,no.5,pp.97-101,2009.

[4] Garcia-Gorriz E,Hoepffner N,Ouberdous M, “Assimilation of SeaWiFS data in a coupled physical-biological model of the Adriatic sea,”*Journal of Marine Systems*, vol.40, no.41, pp. 233-252, 2003.

[5] Friedrichs M A M, “Assimilation of JGOFS EqPac and SeaWiF data into a marine ecosystem model the central equatorial Pacific Ocean,” *Deep Sea Research II*, vol.49,pp.289-319, 2002.

［6］Wan Zhen-wen,Yuan Ye-li,Qiao Fang-li, “Study on optimiza of the parameters of a marine ecosystem dynamics model for red tide,”*Oceanologoa et limnologia sinica*,vol.31,no.2,pp.205-209, 2000.

[7] Liao, S.J, *Beyond Perturbation: Introduction to Homotopy AnalysisMethod*. Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton,2003.

[8] LIAO Shi-jun, “An analytic approximate technique for free oscillations of positively damped systems with algebraically decaying amplitude,” *Int J Non-Linear Mechanics* vol.38,pp.1173-1183,2003.

[9] LIAO Shi-jun, CHEUNG K F., “Homotopy analysis of nonlinear progressive waves in deep water,”*Journal of Engineering Mathematics* ,vol.45,no.2,pp.105-116 ,2003.

[10] Shi Yu-Ren,Xu Xin-Jian,Wu Zhi-Xi,etal, “Application of the homotopy analysis method to solving nonlinear evolution equations,”*Acta,Physica Sinica*, vol.55,pp.1555-1559 , 2006.