

Diseño de un Controlador por el Método del Lugar de las Raíces

Proyecto Final

Zaira Lakeisha Rodríguez González

Kevin Fernando Becerra Núñez

Brandon Olaf Contreras Herrera

Luis Fernando Maravilla Valdivia

Diego Alejandro Sánchez Kelly



Abstract

Utilizando el sistema de demostración IP02 de la marca Quanser, se diseñó un compensador de adelanto para el control de la posición de la planta en el demostrador. El diseño se lleva a cabo utilizando la técnica del lugar geométrico de las raíces, usando MATLAB, Simulink y técnicas manuales.

Ingeniería de Control
Universidad de Guadalajara.

Índice

1. Introducción	2
1.1. Método del Lugar de las Raíces	2
1.2. Descripción de la Planta	3
2. Modelado	4
2.1. Dinámica del Sistema	4
2.2. Función de Transferencia	6
2.3. Polos y Ceros de Lazo Abierto	7
3. Análisis de lazo abierto	10
3.1. Respuesta a Escalón Unitario	10
4. Diseño del Compensador	12
4.1. Marco Teórico	12
4.2. Parámetros de diseño	13
4.3. Ubicación de los Polos Deseados	13
4.4. Condición de Ángulo	14
4.5. Polos y ceros del compensador	15
4.6. Compensador	16
4.6.1. Ganancia del Compensador	17
4.7. Compensador Finalizado	17
4.8. Sistema Compensado en Lazo Abierto	18
5. Sistema Compensado en Lazo Cerrado	19
5.1. Análisis de lazo cerrado	19

1. Introducción

El diseño del controlador comienza con el modelado matemático de la dinámica del sistema seleccionado. Para facilitar el trabajo, el fabricante se ha encargado de proporcionar un análisis de la dinámica del sistema, a continuación, un resumen del mismo.

1.1. Método del Lugar de las Raíces

La intención de este proyecto es la de diseñar un compensador de adelanto por medio del lugar geométrico de las raíces.

En algunos sistemas, el simple hecho de variar la ganancia de un sistema en lazo cerrado será suficiente para modificar los polos de lazo cerrado a una ubicación diferente y deseada.

En la mayoría de sistemas, sin embargo, esto no es suficiente, por lo que es necesario un análisis más profundo sobre las raíces del sistema. Esto permite determinar si es necesario añadir polos o ceros en lazo abierto para modificar la respuesta del sistema a una respuesta deseada.

W. R. Evans diseñó un método conocido como el método de *Root Locus* o *Lugar Geométrico de las Raíces*, en el cual las raíces de la ecuación característica de un sistema se grafican para todos los valores de un parámetro del sistema.

Este parámetro es casi siempre una ganancia K_c , del sistema, lo cuál permite observar modificaciones en la ubicación de los polos de lazo cerrado al añadir ceros o polos de lazo abierto.

Esto permite encontrar una combinación de ganancia, polos de lazo abierto y ceros de lazo abierto que modifican la respuesta del sistema a la forma deseada.

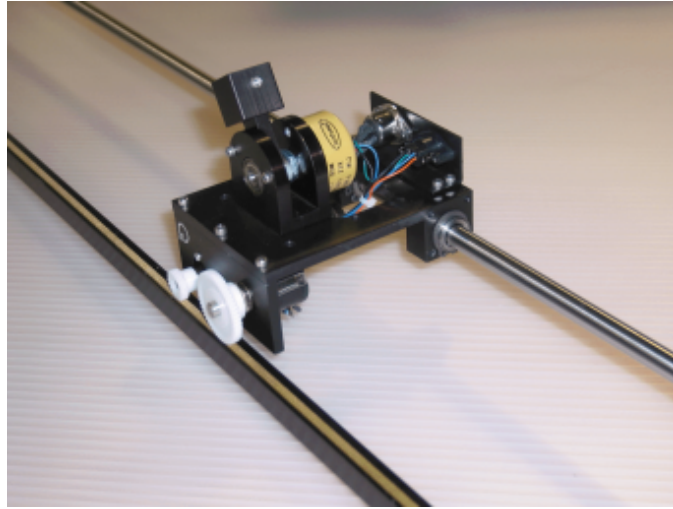


Figura 1: Planta

1.2. Descripción de la Planta

La planta de demostración está compuesta por un carro montado en un eje horizontal de acero, así como un eje secundario que permite estabilizar el movimiento del sistema.

En el eje secundario, el carrito implementa un par de engranajes, que alimentan a un encoder rotatorio de cuadratura o un potenciómetro analógico, según el modelo del dispositivo.

El dispositivo, entonces, permite conocer la posición del carrito por medio de 2 diferentes mecanismos, por extensión, esto también permite conocer la velocidad y aceleración del mismo. La Figura 1 muestra el dispositivo, cortesía del fabricante.

Si bien un motor de corriente directa es, por si mismo, un sistema estable, al añadir el resto de elementos que no necesariamente comparten esta característica, un sistema como este tenderá a ser inestable.

2. Modelado

Para realizar el control de cualquier tipo de planta o sistema, es primero necesario realizar un modelado matemático del sistema.

2.1. Dinámica del Sistema

La parte más relevante del sistema es el motor de corriente directa que se encarga de mover el carrito.

Su modelo matemático es bastante simple en principio, un circuito RLC, sin embargo, como se puede observar en la Figura 2, la salida del motor es una medición angular.

Por lo tanto, es necesario primero aplicar un análisis mecánico. Dejemos que $x(t)$ sea la posición del carro, tal que,

$$M \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + F_{ai}(t) = F_c(t) - B_{eq} \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \quad (1)$$

donde, F_{ai} es la inercia experimentada por el carro debido a la rotación del motor y F_c es la fuerza generada por el motor.

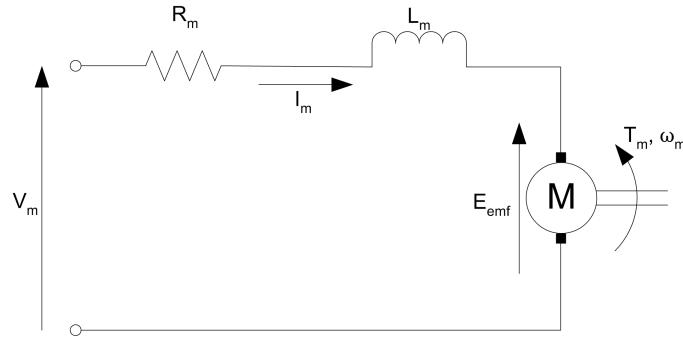


Figura 2: Modelo Eléctrico de la Planta

Respectivamente,

$$F_c = \frac{\eta_g K_g T_m}{r_{mp}} \quad (2)$$

y

$$F_{ai} = \frac{\eta_g K_g T_{ai}}{r_{mp}} \quad (3)$$

Desde 2, entendemos que es posible modelar el motor por medio de las leyes de voltaje de Kirchhoff, así,

$$V_m - R_m I_m - L_m \left(\frac{\partial}{\partial t} I_m \right) - E_{emf} = 0 \quad (4)$$

Dado que $L_m \ll R_m$ podemos simplificar y despejar para obtener,

$$I_m = \frac{V_m - E_{emf}}{R_m} \quad (5)$$

Entonces,

$$F_c = \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t (V_m - K_m \omega_m)}{R_m r_{mp}} \quad (6)$$

Considerando que ω_n es la velocidad angular del motor, podemos reescribir el parámetro en función de la velocidad lineal del carro, esto es útil a la hora del diseño del controlador.

Así,

$$\omega_n = \frac{K_g \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)}{r_{mp}} \quad (7)$$

Que finalmente establece que

$$F_c = \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t \left(V_m - K_g K_m \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \right)}{R_m r_{mp}^2} \quad (8)$$

Por otro lado, desde 3, sabemos que la fuerza aplicada será una función del torque, por lo tanto, es posible representar T_{ai} como una función de la posición angular, tal que,

$$T_{ai}(t) = J_m \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta_m(t) \right) \quad (9)$$

Las propiedades del sistema establecen que,

$$\theta_m = \frac{K_g x}{r_{mp}} \quad (10)$$

Por lo tanto, sustituyendo,

$$T_{ai}(t) = J_m \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{K_g x}{r_{mp}}(t) \right) \quad (11)$$

$$F_{ai} = \frac{\eta_g K_g^2 J_m \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{K_g x}{r_{mp}}(t) \right)}{r_{mp}^2} \quad (12)$$

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones 8 y 12 en la Ecuación 1 y reorganizando,

$$\begin{aligned} \left(M + \frac{\eta_g K_g^2}{r_{mp}^2} J_m \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + \\ \left(B_{eq} + \frac{\eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m}{R_m r_{mp}^2} \right) \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) = \\ \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t K_m}{R_m r_{mp}} \end{aligned} \quad (13)$$

2.2. Función de Transferencia

Obtenemos la función de transferencia genérica de lazo abierto de la planta aplicando la transformada de Laplace a la Ecuación 13. Así,

$$G(s) = \frac{r_{mp}\eta_g K_g \eta_m K_t}{s^2 (R_m M r_{mp}^2 \eta_g K_g^2 J_m) + s (\eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m + B_{eq} R_m r_{mp}^2)} \quad (14)$$

Para obtener la función de transferencia final, se sustituyen en la Ecuación 14 los parámetros físicos proporcionados por el fabricante, ubicados en la Figura 3 y la Figura 4.

Al sustituir se obtiene,

$$G(s) = \frac{1.8063\text{e-}4}{s^2 (6.8472\text{e-}5) + s (1.2605\text{e-}3)} \quad (15)$$

Esto se puede simplificar posteriormente, tal que,

$$G(s) = \frac{2.638}{s^2 + s (18.409)} \quad (16)$$

La anterior operación no modifica la ubicación de los polos y ceros del controlador, sin embargo, si permite que los cálculos posteriores sean más sencillos.

2.3. Polos y Ceros de Lazo Abierto

De la Ecuación 16, se obtiene la ecuación característica del sistema, así,

$$\begin{aligned} s^2 + s (18.4092) &= 0 \\ s^2 &= -s (18.4092) \end{aligned}$$

de lo anterior, $s \rightarrow \{0, -18.4092\}$ en el caso de los polos.

Observando el numerador de la función original, es evidente que no existen ceros, por lo que no es necesario realizar el cálculo.

Sin embargo, utilizando el comando `rlocus` en MATLAB, se puede obtener una gráfica del lugar geométrico de las raíces por medio de la cual podemos verificar los cálculos anteriores.

<i>Symbol</i>	<i>Description</i>	<i>Value</i>	<i>Unit</i>
V_{nom}	Motor Nominal Input Voltage	6.0	V
f_{max}	Motor Input Voltage Maximum Frequency	50	Hz
I_{max}	Maximum input current	1.0	A
ω_{max}	Maximum motor speed.	628.3	rad/s
R_m	Motor Armature Resistance	2.6	Ω
L_m	Motor Armature Inductance	0.18	mH
K_t	Motor Torque Constant	0.00767	N.m/A
η_m	Motor Efficiency	100	%
K_{em}	Back-ElectroMotive-Force (EMF) Constant	0.00767	V.s/rad
J_m	Rotor Moment of Inertia	3.90E-007	kg.m ²
K_g	Planetary Gearbox Gear Ratio	3.71	
η_g	Planetary Gearbox Efficiency	100	%
M_{c1}	IP01 Cart Mass	0.52	kg
M_{c2}	IP02 Cart Mass	0.57	kg
M_w	IP02 Cart Weight Mass	0.37	kg
L_t	Track Length	0.990	m
T_c	Cart Travel	0.814	m
P_r	Rack Pitch	1.664E-003	m/tooth
r_{mp}	Motor Pinion Radius	6.35E-003	m
N_{mp}	Motor Pinion Number of Teeth	24	
r_{pp}	Position Pinion Radius	0.01482975	m
N_{pp}	Position Pinion Number of Teeth	56	
K_{EC}	IP02 Cart Encoder Resolution	2.275E-005	m/count

Figura 3: Parámetros Físicos de la Planta, 1 de 2.

<i>Symbol</i>	<i>Description</i>	<i>Value</i>	<i>Unit</i>
K_{EP}	IP02 Pendulum Encoder Resolution	0.0015	rad/count
α_{range}	IP01 Inverted Pendulum Mechanical Range	$\pm 32^\circ$	$^\circ$
K_{PC}	IP01 Cart Potentiometer Sensitivity	0.000	m/V
K_{PP}	IP01 Pendulum Potentiometer Sensitivity	-0.2482	rad/V

Figura 4: Parámetros Físicos de la Planta, 2 de 2.

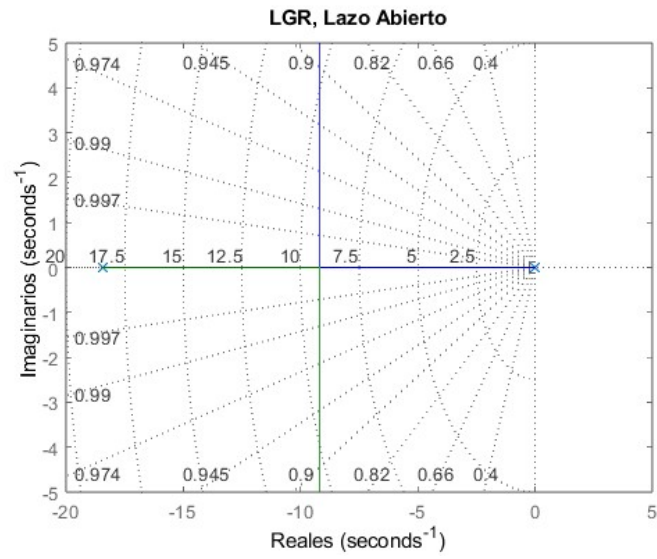


Figura 5: Lugar geométrico de las raíces, Lazo Abierto

Así, en la Figura 5, se comprueba que no existen ceros en la función, y que ambos polos se encuentran en su ubicación esperada.

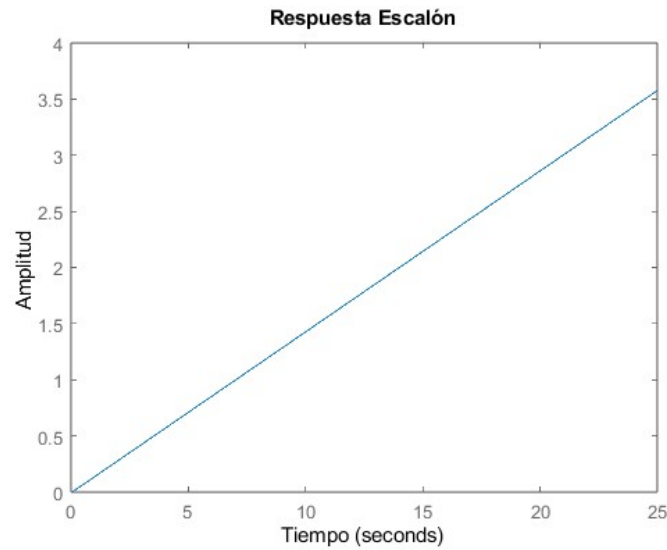


Figura 6: Respuesta Escalón Unitario, Lazo Cerrado

3. Análisis de lazo abierto

Previo a comenzar el diseño del controlador, es necesario conocer la respuesta del sistema a diferentes estímulos o perturbaciones. Esto es relevante ya que nos permitirá determinar el tipo de controlador y sus parámetros de diseño.

Utilizamos el método del lugar geométrico de las raíces, por lo que es necesario realizar el análisis en el dominio del tiempo.

3.1. Respuesta a Escalón Unitario

Utilizando el comando `step` en MATLAB, es posible obtener la respuesta en el tiempo del sistema a un estímulo escalón.

Como se puede observar en la Figura 6, la respuesta en lazo abierto del sistema es característica de un sistema inestable.

Se denomina inestable al sistema debido a que un estímulo constante causa que el sistema responda de manera extrema e incontrolable.

Por lo tanto, es necesario diseñar un controlador o compensador que permita

corregir la respuesta del sistema. En este caso, la respuesta escalón es de interés ya que se busca controlar velocidad y posición del carro.

4. Diseño del Compensador

Un compensador de adelanto tiene la intención de cambiar la respuesta del sistema introduciendo un polo y un cero. Esto tiene el efecto de mover el LGR para hacerlos pasar por una serie de polos deseados.

Posteriormente, se sintoniza el controlador seleccionando la ganancia adecuada para la cuál la condición de ángulo se cumple.

Los compensadores, ya sean de adelanto, retardo o adelanto-retardo, no son controladores propiamente, sin embargo, permiten implementar acciones de control de forma mucho más sencilla que, por ejemplo, un controlador PID.

A continuación se proporciona contexto sobre el proceso, fórmulas y técnicas de diseño utilizadas para el diseño final del controlador.

4.1. Marco Teórico

La teoría de control proporciona una serie de herramientas para moldear la respuesta de un sistema según lo requerido por el diseñador.

Para un sistema de segundo orden, (ver Ecuación 16), la forma normal del sistema tiene la siguiente ecuación estándar,

$$G(s) = \frac{K_{dc}\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (17)$$

con polinomio característico,

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (18)$$

También sabemos que los parámetros de sobredisparo y tiempo pico se pueden calcular con las siguientes ecuaciones, respectivamente,

$$P_{osht} = 100 \exp \left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \quad (19)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (20)$$

4.2. Parámetros de diseño

Se proponen los siguientes parámetros de diseño,

Overshoot El sistema debe contar con un porcentaje de sobredisparo de máximo un 7%.

Peak Time El sistema debe alcanzar su punto pico en 110ms.

4.3. Ubicación de los Polos Deseados

Desde 19,

$$\zeta = \frac{-\ln(P_{osht})}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(P_{ovsht})}} \quad (21)$$

y, desde 20,

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (22)$$

entonces, calculando los valores de ζ y de ω_n , obtenemos,

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{-\ln(0.08)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.08)}} \\ \zeta &= 0.64608 \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{\pi}{0.11 \sqrt{1 - \zeta^2}} \\ \omega_n &= 37.42218 \end{aligned}$$

Despejando s en la Ecuación 18, se obtiene que,

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}j \quad (23)$$

y, posteriormente, sustituyendo los valores de ζ y ω_n calculados anteriormente, obtenemos,

$$\begin{aligned} \hat{s} &= (-0.64608)(37.42218) \pm \left(37.42218\sqrt{1 - 0.64608^2}\right) \\ \hat{s} &= -24.17772 \pm 32.69379j \end{aligned} \quad (24)$$

Que es la combinación compleja conjugada de los polos deseados para el compensador de adelanto.

4.4. Condición de Ángulo

Conociendo la ubicación deseada del polo, el primer paso es entonces verificar si este ya se encuentra en el lugar geométrico de las raíces, lo cual requiere de aplicar la condición de ángulo.

La condición de ángulo establece que,

$$\Sigma_{\angle_{poles}} + \Sigma_{\angle_{zeros}} = 180^\circ \quad (25)$$

Calculando,

$$\alpha_1 = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{32.69379}{24.17772}\right) \quad (26)$$

y

$$\alpha_2 = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{32.69379}{24.17772 - 18.40923}\right) \quad (27)$$

lo cual resulta en $\alpha_1 = 126.48367^\circ$ y $\alpha_2 = 100.00627^\circ$.

Podemos calcular el ángulo de deficiencias,

$$\phi = 180^\circ - \alpha_1 - \alpha_2 \quad (28)$$

entonces,

$$\phi = 180^\circ - 126.48367^\circ - 100.00627^\circ \quad (29)$$

por lo tanto, $\phi = 46.48994^\circ$.

Este ángulo, ϕ , corresponde al ángulo que deberá proporcionar el compensador para lograr que el lugar geométrico de las raíces pase por el polo deseado.

4.5. Polos y ceros del compensador

Calculamos la sintonización,

$$\frac{\phi}{2} = 23.24497^\circ \quad (30)$$

por lo tanto,

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_1}{2} = \frac{126.48367}{2} \quad (31)$$

que es, $\alpha_3 = 63.2418$. También,

$$\alpha_4 = \alpha_3 - \frac{\phi}{2} = 63.2418 - \frac{46.4894}{2} \quad (32)$$

que es 39.9968.

Entonces,

$$\tan(39.9968) \frac{32.6937}{d} \quad (33)$$

Calculando d ,

$$d = \frac{32.6937}{\tan(39.9968)} = 38.9672 \quad (34)$$

A partir de lo anterior, es posible calcular el polo compensado,

$$\frac{1}{\alpha} = 38.9672 + 24.1777 = 69.1449 \quad (35)$$

similarmente, podemos calcular el cero compensado,

$$\tan(3.5131) = \frac{y}{32.69379} \quad (36)$$

despejando,

$$y = 32.6937 \cdot \tan(3.5131) = 2.0071 \quad (37)$$

Finalmente,

$$\frac{1}{T} = 24.1777 + 2.0071 = 26.1849 \quad (38)$$

A partir de esto, es posible proceder con la implementación del controlador y la obtención de la función de transferencia final.

4.6. Compensador

La forma estándar de un compensador de adelanto es la siguiente,

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (39)$$

donde α debe encontrarse en la región $0 < \alpha < 1$.

Según lo establecido en la Sección 4.5, sustituimos en la Ecuación 39 para obtener,

$$G_c(s) = K_c \frac{s + 26.18491}{s + 63.1449} \quad (40)$$

4.6.1. Ganancia del Compensador

Desde,

$$0 = 1 + G_c(s) G(s) \quad (41)$$

sustituimos,

$$1 + K_c \left(\frac{s + 26.1849}{s + 63.1449} \right) \left(\frac{2.6389}{s(s + 18.4092)} \right) = 0 \quad (42)$$

y, posteriormente, evaluamos en \hat{s} ,

$$K_c \left| \left(\frac{s + 26.1849}{s + 63.1449} \right) \left(\frac{2.6389}{s(s + 18.4092)} \right) \right| = 1 \quad (43)$$

tal que,

$$K_c = 794.39503 \quad (44)$$

Al proceso anterior se le conoce como la *condición de magnitud*.

4.7. Compensador Finalizado

Finalmente,

$$G_c(s) = 794.39503 \frac{s + 26.18491}{s + 63.1449} \quad (45)$$

4.8. Sistema Compensado en Lazo Abierto

Finalmente,

$$G_c(s) G_s(s) = 794.39503 \left(\frac{s + 26.1849}{s + 63.1449} \right) \left(\frac{2.6389}{s(s + 18.4092)} \right) \quad (46)$$

Simplificando,

$$G_c(s) G_s(s) = 2096.3 \frac{s + 26.185}{s(s + 18.409)(s + 63.145)} \quad (47)$$

5. Sistema Compensado en Lazo Cerrado

Comenzamos por aplicar retroalimentación negativa a la función de transferencia del sistema compensado.

Este proceso se realiza utilizando el comando `feedback(planta, 1, -1)` en MATLAB, que aplica una retroalimentación con ganancia de -1 a la planta compensada.

El cálculo sigue la fórmula,

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s) G_c(s)} \quad (48)$$

y resulta en,

$$G_p(s) G_c(s) = 2096.3 \frac{s + 26.185}{s(s + 33.21)(s^2 + 48.35s + 1653)} \quad (49)$$

con polos ubicados en $s \rightarrow \{-24.1736 \pm 32.6948j, -33.2071\}$, y ceros ubicados en $s \rightarrow \{-26.1894\}$.

La ubicación de estos polos y ceros se puede comprobar en la Figura 7.

Ya que el controlador se encuentra sintonizado, el uso del lugar geométrico de las raíces probablemente no es el más adecuado, por lo que la ganancia no se modificaría.

Sin embargo, se decidió integrar esta gráfica ya que el movimiento de las raíces permite visualizar más claramente la nueva ubicación de los polos y ceros de lazo cerrado en el sistema.

5.1. Análisis de lazo cerrado

Finalmente, es momento de verificar la funcionalidad del compensador en lazo cerrado, para ello, al igual que como se hizo en lazo abierto, se aplica un estímulo escalón unitario al sistema.

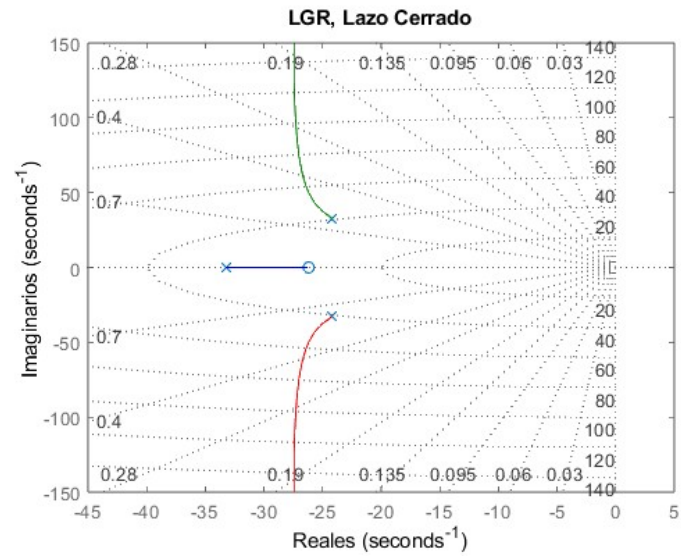


Figura 7: Lugar geométrico de las raíces, Lazo Cerrado

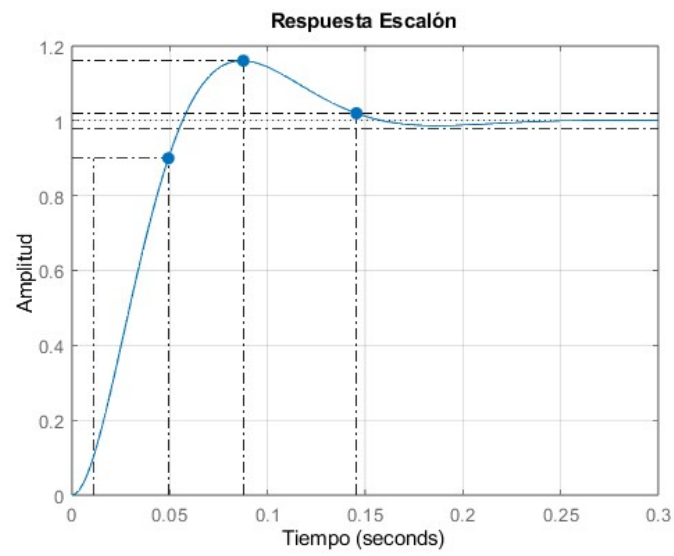


Figura 8: Respuesta escalón, Lazo Cerrado

Como se puede observar en la Figura 8, la respuesta a un estímulo escalón mejora claramente desde una respuesta totalmente inestable a una respuesta característica de segundo orden con poco sobredisparo, un corto tiempo de subida y un corto tiempo de asentamiento, de 16 % y 30ms y 146ms respectivamente.

Comparando esto con los parámetros definidos originalmente, de 110ms para el tiempo de asentamiento y 7 % para el porcentaje de sobredisparo, es claro que los parámetros deseados no se cumplen.

Considerando posible error humano, así como la naturaleza del diseño de compensadores, no es una sorpresa que la respuesta no sea precisamente la deseada.

Sin embargo, la mejora es sustancial y suficiente para el requerimiento de la aplicación.