

# Diseño de un Controlador por el Método del Lugar de las Raíces

Proyecto Final

**Zaira Lakeisha Rodríguez González**

**Kevin Fernando Becerra Núñez**

**Brandon Olaf Contreras Herrera**

**Luis Fernando Maravilla Valdivia**

**Diego Alejandro Sánchez Kelly**



Ingeniería de Control  
Universidad de Guadalajara.

## Abstract

Utilizando el sistema de demostración IP01/IP02 de la marca Quanser, se diseñó un controlador de posición para una planta que consiste en un carro con masa montado en un eje lineal. El diseño del controlador se llevó por medio del método del lugar geométrico de las raíces o LGR.

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Descripción de la Planta . . . . .	2
<b>2. Modelado</b>	<b>3</b>
2.1. Lazo Abierto . . . . .	3
2.1.1. Función de Transferencia . . . . .	3
2.1.2. Polos y Ceros . . . . .	4
2.2. Lazo Cerrado . . . . .	5
2.2.1. Polos y Ceros . . . . .	5
<b>3. Análisis de Respuesta en el Tiempo</b>	<b>6</b>
3.1. Escalón Unitario . . . . .	6
<b>4. Diseño del Compensador</b>	<b>7</b>
4.1. Marco Teórico . . . . .	7
4.2. Parámetros de diseño . . . . .	8
4.3. Ubicación de los Polos Deseados . . . . .	8
4.4. Condición de Ángulo . . . . .	9
4.5. Polos y ceros del compensador . . . . .	10
<b>5. Desarrollo del Compensador de Adelanto</b>	<b>13</b>
5.1. Ganancia del Compensador . . . . .	13
5.2. Función de Transferencia Compensada . . . . .	14
<b>6. Análisis del Controlador</b>	<b>15</b>

# 1. Introducción

El diseño del controlador comienza con el modelado matemático de la dinámica del sistema seleccionado. Para facilitar el trabajo, el fabricante se ha encargado de proporcionar un análisis de la dinámica del sistema, a continuación, un resumen del mismo.

## 1.1. Descripción de la Planta

La planta de demostración está compuesta por un carro montado en un eje horizontal de acero, así como un eje secundario que permite estabilizar el movimiento del sistema.

En el eje secundario, el carrito implementa un par de engranajes, que alimentan a un encoder rotatorio de cuadratura o un potenciómetro analógico, según el modelo del dispositivo.

El dispositivo, entonces, permite conocer la posición del carrito por medio de 2 diferentes mecanismos, por extensión, esto también permite conocer la velocidad y aceleración del mismo. La Figura 1 muestra el dispositivo, cortesía del fabricante.

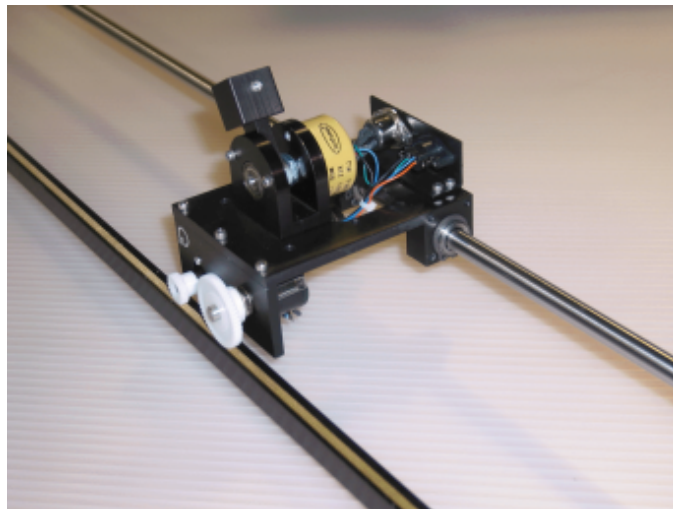


Figura 1: Planta

## 2. Modelado

El modelado del dispositivo en su mayoría es realizado por el fabricante en el manual de usuario, por lo que a continuación se presenta un resumen de los cálculos a partir de los cuales se derivan las funciones de transferencia de lazo abierto y lazo cerrado.

### 2.1. Lazo Abierto

#### 2.1.1. Función de Transferencia

El fabricante obtiene 2 modelos matemáticos de la dinámica del sistema, por un lado, un modelo simplificado, como ejercicio, y posteriormente un modelo más completo, óptimo para el diseño de un controlador.

La función de transferencia de lazo abierto para el modelo complejo es la siguiente,

$$G(s) = \frac{r_{mp}\eta_g K_g \eta_m K_t}{s^2 (R_m M r_{mp}^2 \eta_g K_g^2 J_m) + s (\eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m + B_{eq} R_m r_{mp}^2)} \quad (1)$$

La sustitución de los parámetros físicos de la planta en la Ecuación 1 produce la siguiente función,

$$G(s) = \frac{1.8063e-4}{s^2 (6.8472e-5) + s (1.2605e-3)} \quad (2)$$

Esto se puede simplificar posteriormente, tal que,

$$G(s) = \frac{2.638}{s^2 + s (18.409)} \quad (3)$$

La anterior operación no modifica la ubicación de los polos y ceros del controlador, sin embargo, si permite que los cálculos posteriores sean más sencillos.

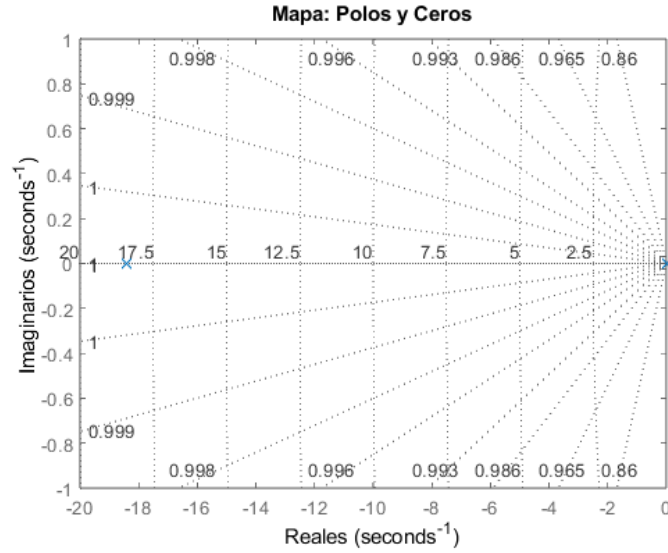


Figura 2: Mapa de polos y ceros, Lazo Abierto

### 2.1.2. Polos y Ceros

La retroalimentación negativa no altera las propiedades de los polos y ceros del sistema, asimismo, no incrementa o reduce su cantidad. Por lo tanto, el análisis de su ubicación se puede realizar antes o después de aplicar retroalimentación negativa.

De la función de transferencia de lazo abierto, se obtiene

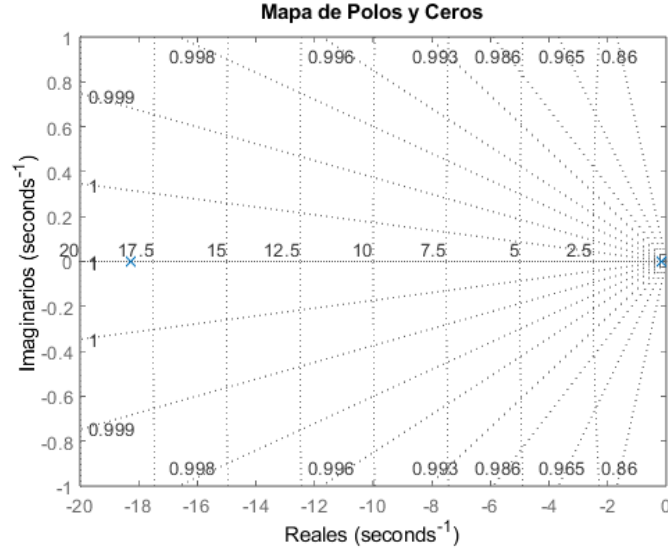
$$s^2 + s(18.4092) = 0$$

$$s^2 = -s(18.4092)$$

de lo anterior,  $s \rightarrow \{0, -18.4092\}$  en el caso de los polos.

Asimismo, observando el numerador de la función original, es evidente que no existen ceros.

Es posible verificar la ubicación de los polos y ceros en la Figura 2



### 3. Análisis de Respuesta en el Tiempo

Previo a comenzar el diseño del controlador, es necesario conocer la respuesta del sistema a diferentes estímulos o perturbaciones. Esto es relevante ya que nos permitirá determinar el tipo de controlador y sus parámetros de diseño.

El diseño contempla el uso del lugar geométrico de las raíces para diseñar un compensador de adelanto, por lo tanto, el análisis de la respuesta se realiza en el dominio del tiempo y no de la frecuencia.

Entonces, el primer paso es conocer la respuesta transitoria del sistema, comenzando por la respuesta a una función escalón.

#### 3.1. Escalón Unitario

Utilizando el comando `step` en MATLAB, es posible obtener la respuesta en el tiempo del sistema a un estímulo escalón.

La Figura 4 muestra la respuesta en lazo cerrado del sistema a un estímulo constante de amplitud 1. Esta respuesta es característica de un sistema de segundo orden

Como puede observarse, la respuesta del sistema es lenta. Extrayendo los valores de la misma gráfica, el tiempo de subida es de 15.2s, mientras que el tiempo de asentamiento es de 27.1s.

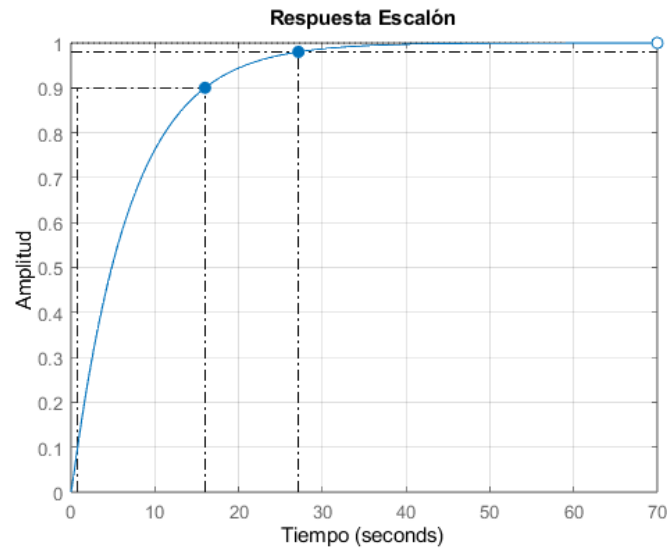


Figura 4: Respuesta Escalón Unitario, Lazo Cerrado

## 4. Diseño del Compensador

Un compensador de adelanto tiene la intención de cambiar la respuesta del sistema introduciendo un polo y un cero. Esto tiene el efecto de mover el LGR para hacerlos pasar por una serie de polos deseados.

Posteriormente, se sintoniza el controlador seleccionando la ganancia adecuada para la cuál la condición de ángulo se cumple.

Los compensadores, ya sean de adelanto, retardo o adelanto-retardo, no son controladores propiamente, sin embargo, permiten implementar acciones de control de forma mucho más sencilla que, por ejemplo, un controlador PID.

A continuación se proporciona contexto sobre el proceso, fórmulas y técnicas de diseño utilizadas para el diseño final del controlador.

### 4.1. Marco Teórico

La teoría de control proporciona una serie de herramientas para moldear la respuesta de un sistema según lo requerido por el diseñador.



Para un sistema de segundo orden, (ver Ecuación 4), la forma normal del sistema tiene la siguiente ecuación estándar,

$$G(s) = \frac{K_{dc}\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5)$$

con polinomio característico,

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (6)$$

También sabemos que los parámetros de sobredisparo y tiempo pico se pueden calcular con las siguientes ecuaciones, respectivamente,

$$P_{osht} = 100 \exp \left( -\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \quad (7)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (8)$$

## 4.2. Parámetros de diseño

Se proponen los siguientes parámetros de diseño,

**Overshoot** El sistema debe contar con un porcentaje de sobredisparo de máximo un 7%.

**Peak Time** El sistema debe alcanzar su punto pico en 110ms.

## 4.3. Ubicación de los Polos Deseados

Desde 7,

$$\zeta = \frac{-\ln(P_{osht})}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(P_{osht})}} \quad (9)$$

y, desde 8,

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (10)$$

entonces, calculando los valores de  $\zeta$  y de  $\omega_n$ , obtenemos,

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{-\ln(0.08)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.08)}} \\ \zeta &= 0.64608 \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{\pi}{0.11 \sqrt{1 - \zeta^2}} \\ \omega_n &= 37.42218 \end{aligned}$$

Despejando  $S$  en la Ecuación 6, se obtiene que,

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}j \quad (11)$$

y, posteriormente, sustituyendo los valores de  $\zeta$  y de  $\omega_n$  calculados anteriormente, obtenemos,

$$\begin{aligned} \hat{s} &= (-0.64608)(37.42218) \pm \left(37.42218 \sqrt{1 - 0.64608^2}\right) \\ \hat{s} &= -24.17772 \pm 32.69379j \end{aligned} \quad (12)$$

Que es la combinación compleja conjugada de los polos deseados para el compensador de adelanto.

#### 4.4. Condición de Ángulo

Conociendo la ubicación deseada del polo, el primer paso es entonces verificar si este ya se encuentra en el lugar geométrico de las raíces, lo cual requiere de aplicar la condición de ángulo.

La condición de ángulo establece que,

$$\Sigma_{\angle_{poles}} + \Sigma_{\angle_{zeros}} = 180^\circ \quad (13)$$

Calculando,

$$\alpha_1 = 180^\circ - \tan^{-1} \left( \frac{32.69379}{24.17772} \right)$$

y

$$\alpha_2 = 180^\circ - \tan^{-1} \left( \frac{32.69379}{24.17772 - 18.40923} \right)$$

lo cual resulta en  $\alpha_1 = 126.48367^\circ$  y  $\alpha_2 = 100.00627^\circ$ .

Podemos calcular el ángulo de deficiencias,

$$\phi = 180^\circ - \alpha_1 - \alpha_2 \quad (14)$$

entonces,

$$\phi = 180^\circ - 126.48367^\circ - 100.00627^\circ$$

por lo tanto,  $\phi = 46.48994^\circ$ .

Este ángulo,  $\phi$ , corresponde al ángulo que deberá proporcionar el compensador para lograr que el lugar geométrico de las raíces pase por el polo deseado.

#### 4.5. Polos y ceros del compensador

Calculamos la sintonización,

$$\frac{\phi}{2} = 23.24497^\circ$$

por lo tanto,

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_1}{2} = \frac{126.48367}{2}$$

que es,  $\alpha_3 = 63.2418$ . También,

$$\alpha_4 = \alpha_3 - \frac{\phi}{2} = 63.2418 - \frac{46.4894}{2}$$

,

que es 39.9968.

Entonces,

$$\tan(39.9968) \frac{32.6937}{d}$$

Calculando  $d$ ,

$$d = \frac{32.6937}{\tan(39.9968)} = 38.9672$$

A partir de lo anterior, es posible calcular el polo compensado,

$$\frac{1}{\alpha} = 38.9672 + 24.1777 = 69.1449$$

similarmente, podemos calcular el cero compensado,

$$\tan(3.5131) = \frac{y}{32.69379}$$

despejando,

$$y = 32.6937 \cdot \tan(3.5131) = 2.0071$$

Finalmente,

$$\frac{1}{T} = 24.1777 + 2.0071 = 26.1849$$

A partir de esto, es posible proceder con la implementación del controlador y la obtención de la función de transferencia final.

## 5. Desarrollo del Compensador de Adelanto

La forma estándar de un compensador de adelanto es la siguiente,

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (15)$$

donde  $\alpha$  debe encontrarse en la región  $0 < \alpha < 1$ .

Según lo establecido en la Sección 4.5, sustituímos en la Ecuación 15 para obtener,

$$G_c(s) = K_c \frac{s + 26.18491}{s + 63.1449}$$

### 5.1. Ganancia del Compensador

Desde,

$$0 = 1 + G_c(s) G(s) \quad (16)$$

sostituímos,

$$1 + K_c \left( \frac{s + 26.1849}{s + 63.1449} \right) \left( \frac{2.6389}{s(s + 18.4092)} \right) = 0$$

y, posteriormente, evaluamos en  $\hat{s}$ ,

$$K_c \left| \left( \frac{s + 26.1849}{s + 63.1449} \right) \left( \frac{2.6389}{s(s + 18.4092)} \right) \right| = 1$$

tal que,

$$K_c = 794.39503$$

Al proceso anterior se le conoce como la *condición de magnitud*.

## 5.2. Función de Transferencia Compensada

Finalmente,

$$G_c(s) G_s(s) = 794.39503 \frac{2.63891s + 69.0996}{s^3 + 81.5542s^2 + 1162.45s}$$

Que es el sistema final compensado.

## 6. Análisis del Controlador

Una vez obtenida la función de transferencia de la planta en serie con el controlador, en serie, es posible determinar la respuesta del sistema completo y verificar que se ha modificado a la respuesta deseada.

Para ello, es de nuestro interés comparar las respuestas a los posibles estímulos al sistema,