计算机图形学-第 7 次作业:Bezier 曲线的变差缩减性证明

1950641 黄智文

1 Bezier 曲线的变差缩减性结论证明

对于给定的 $n+1$ 个控制点 $P_0, ..., P_n$，n 阶的 Bezier 曲线由下面的公式定义，其中 C 为组合数。

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, (1-t)^{n-i} \, t^i P_i \tag{1}$$

由 $n+1$ 个控制点所组成的图形为其对应的特征多边形 A。Bezier 曲线的变差缩减性的含义是，曲线本身比由其控制点所定义的特征多边形更加平滑，即作任意一条曲线 L，交点集合满足下列基数的大小关系：

$$|L \cap B_n| \leq |L \cap A| \tag{2}$$

主要证明过程如下所示：

引理 1 可以基于 $n+1$ 个控制点 $P_0, ..., P_n$(所定义的特征多边形为 A_n)，构造新的控制点集合，该集合有 $n+2$ 个控制点 $P'_0, ..., P'_n, P'_{n+1}$ 组成，其所定义的特征多边形为 A_{n+1}，并且满足两个控制点集合所定义的 Bezier 曲线 B_n 和 B_{n+1} 相同。证明如下：

对于一个 n 阶的 Bezier 曲线，其可以写为如下的形式

$$B_n(t) = (1-t)\sum_{i=0}^{n} C_n^i \, (1-t)^{n-i} \, t^i P_i + t\sum_{i=0}^{n} C_n^i \, (1-t)^{n-i} \, t^i P_i \tag{3}$$

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, (1-t)^{n+1-i} \, t^i P_i + \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, (1-t)^{n-i} \, t^{i+1} P_i \tag{4}$$

考虑组合数性质

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}; C_{n+1}^i = \frac{(n+1)!}{(n+1-i)!i!} = \frac{n+1}{n+1-i} C_n^i \tag{5}$$

$$C_n^i = \frac{n+1-i}{n+1} C_{n+1}^i \tag{6}$$

因此

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n+1-i}{n+1} C_{n+1}^i (1-t)^{n+1-i} t^i P_i + \sum_{i=0}^{n} \frac{n+1-i}{n+1} C_{n+1}^i (1-t)^{n-i} t^{i+1} P_i \tag{7}$$

若 $j = i+1$，则

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n+1-i}{n+1} C_{n+1}^i (1-t)^{n+1-i} t^i P_i + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{n+1-(j-1)}{n+1} C_{n+1}^{j-1} (1-t)^{n-(j-1)} t^{(j-1)+1} P_{j-1} \tag{8}$$

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n+1-i}{n+1} C_{n+1}^i (1-t)^{n+1-i} t^i P_i + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{n+2-j}{n+1} C_{n+1}^{j-1} (1-t)^{n+1-j} t^j P_{j-1} \tag{9}$$

又由于

$$C_{n+1}^{j-1} = \frac{(n+1)!}{(j-1)!(n+2-j)!}; C_{n+1}^j = \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} \tag{10}$$

$$C_{n+1}^{j-1} = \frac{j}{n+2-j} C_{n+1}^j \tag{11}$$

因此

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n+1-i}{n+1} C_{n+1}^i (1-t)^{n+1-i} t^i P_i + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{j}{n+1} C_{n+1}^j (1-t)^{n+1-j} t^j P_{j-1} \tag{12}$$

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n+1-i}{n+1} C_{n+1}^i (1-t)^{n+1-i} t^i P_i + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{n+1} C_{n+1}^i (1-t)^{n+1-i} t^i P_{i-1} \tag{13}$$

考虑到求和上下界，因此

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{n+1-i}{n+1} C_{n+1}^i (1-t)^{n+1-i} t^i P_i + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{n+1} C_{n+1}^i (1-t)^{n+1-i} t^i P_{i-1} \tag{14}$$

对上述式子进行整理，可得

$$B_n(t) = (1-t)^{n+1}P_0 + \sum_{i=1}^{n+1} C_{n+1}^{i}\,(1-t)^{n+1-i}\,t^i\left(\frac{n+1-i}{n+1}P_i + \frac{i}{n+1}P_{i-1}\right) \tag{15}$$

据此可得到新的控制点集合。

$$P'_0 = P_0 \tag{16}$$

$$P'_k = \frac{k}{n+1}P_{k-1} + \frac{n+1-k}{n+1}P_k \tag{17}$$

引理 1 证明结束。

引理 2 任意直线 L 和通过引理 1 构造出的控制多边形 A_{n+1} 的交点数 a_{n+1}，和原有的控制多边形 A_n 的交点数 a_n，满足 $a_{n+1} \le a_n$

容易看出 A_{n+1} 是对曲线 A_n 的分段线性插值。分段线性插值的定义是，如果给定一组点 $B = \{b_1, ..., b_n\}$ 和曲线 c，如果满足 $\forall b_i, b_i \in c$，则 B 是对 c 的分段线性插值[1]。

根据方程 (17)，可以得到 P'_k 位于原有控制多边形 A_n 的边 $P_{k-1}P_k$ 上。因此 $\forall k, P'_k \in A_n$，故 A_{n+1} 是 A_n 的分段线性插值。

可以证明对于任意分段线性插值得到的插值曲线 B，和原有的曲线 c。任意直线和其交点个数满足前者更小。

先讨论 B 不封闭的情况。我们将 c 按照 b_ib_{i+1} 分割为 $n-1$ 个曲线段 (n 为 B 中点的数量)，每一段为 c_i，容易知道任意直线 L 和线段 b_ib_{i+1} 的相交个数至多为 1，而和 c_i 的相交个数则可以大于 1。同时 b_ib_{i+1} 和 c_i 构成一个封闭多边形，则任意一个直线不和 c_i 相切是，穿过该多边形交点至少为 2(不考虑和直线重合的情况 [该种情况可按特殊情况 2 处理]，特殊情况 1 为和曲线 c_i 相切，此时 c_i 交点数大于 b_ib_{i+1}，特殊情况 2 为曲线和 b_i 或 b_{i+1} 相交，此时直线和 b_ib_{i+1} 和 c_i 的相交次数均相同)。因此一个直线和 b_ib_{i+1} 相交的次数必定小于等于直线和 c_i 相交的次数。故直线和 B 的相交交点数必定小于和 c 的相交交点数。

因此对于控制多边形和直线的交点数，必定有 $a_{n+1} \leq a_n$

证明 Bezier 曲线 B 是控制多边形 A_n 当 $n \to \infty$ 的情况。即

$$\lim_{n\to\infty} A_n = B \tag{18}$$

根据引理 2，对任意直线 L，其和 A_n 的交点数 a 与其和 B 的交点数 b 满足：

$$a \leq b \tag{19}$$

证明结束

参考文献

[1] Gerald Farin. Chapter 2 - introductory material. In Gerald Farin, editor, *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design (Third Edition)*, pages 13–28. Academic Press, Boston, third edition edition, 1993.