

UNIVERSITÉ DE LIÈGE
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

SYST0002
INTRODUCTION AUX SIGNAUX ET SYSTÈMES
PROJET

DELBARRE Loïc (S215072)

JACQUEMIN Justin (S224395)

Bachelier Ingénieur Civil
Année Académique 2024-2025

Table des matières

1	Part 1 : modèle d'état, linéarisation et simulations	2
1.1	linéarité du modèle dynamique	2
1.2	paramètre du système	2
1.3	simulation du système	2
1.3.1	cas d'un mouvement sans tourner	2
1.3.2	cas d'un mouvement dont les roues oscillent sinusoidalement	3
1.4	Points d'équilibre du système	3
1.5	Matrice d'état A,B,C,D	3
1.6	nature des points d'équilibre	4
1.7	simulation au point d'équilibre	4
1.8	trajectoire gaussienne	4
1.8.1	résolution analytique	4
1.8.2	résolution numérique	5
1.8.3	dernière piste non exploré	5
2	State-feedback controller, simulations et analyse de Fourier	5
2.1	5
2.2	calcul des matrices d'état du système global	5
2.3	domaine fréquentiel	6

1 Part 1 : modèle d'état, linéarisation et simulations

1.1 linéarité du modèle dynamique

Le modèle considéré est non-linéaire. En effet pour qu'un système soit linéaire , il faut que celui ci puisse s'écrire de la forme :

$$a_n(x)y^{(n)} + ..$$

Or à cause du terme $\sin(\alpha(\delta(t) + \theta(t)))$, celui ci fait apparaitre de la non-linéarité pour θ

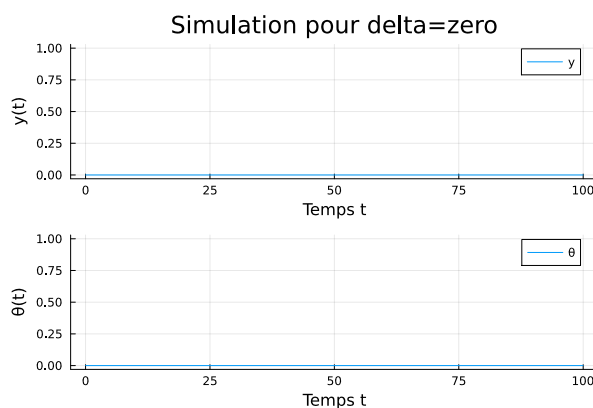
1.2 paramètre du système

- o entrées : $\delta(t)$ Le delta est associé à l'orientation des roue par rapport à l'axe du véhicule en fonction du temps.Son image appartient à l'intervale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- o sorties : $s(t)$ La sortie est position selon l'axe vetical
- o variables d'états : $y(t), \theta(t)$ Y représente également l'évolution temporelle de la position selon l'axe vertical.Il n'y a pas de contrainte dans l'énoncé , on peut donc supposer que son domaine de définition ainsi que son image appartiennent à \mathbb{R} θ quant'à lui représente l'évolution temporelle de l'orientation du véhicule dans l'espace.Vu qu'il s'agit d'un angle , on peut raisonablement restreindre son image à l'intervale $[0, 2\pi]$
- o constantes : a est la distance entre l'axe arrière et le centre de masse du véhicule.Et b , la distance entre l'axe des roues avant et celui des roues arrière. v_0 représente la vitesse du centre de masse.

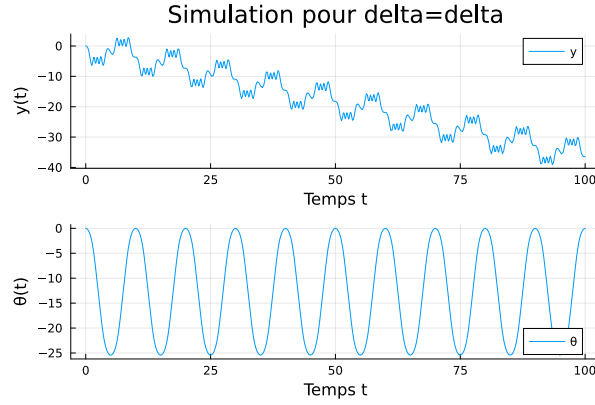
Pour tout les signaux mentionnés , nous supposeront que $t \in \mathbb{R}^+$

1.3 simulation du système

1.3.1 cas d'un mouvement sans tourner



1.3.2 cas d'un mouvement dont les roues oscillent sinusoidalement



1.4 Points d'équilibre du système

Dans le cadre de ce rapport , la notation \dot{y} correspond à $\frac{dy}{dt}$. Afin de trouver les points d'équilibre du système de manière analytique il suffit de trouver :

$$\begin{cases} \dot{y} = 0 \\ \dot{\theta} = 0 = \frac{v_0 \sin \alpha(\delta(t))}{a} \end{cases} \quad (1)$$

On trouve donc par la deuxième équation que

$$\delta(t) = k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

De la, en découle via la première équation que

$$\theta(t) = k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

On trouve donc dans le système deux point d'équilibre au vu des domaines et des images. On a donc $(\delta; \theta) = (0; 0)$ ou bien $(\delta; \theta) = (0; \pi)$

1.5 Matrice d'état A,B,C,D

Afin de trouver les matrice d'état du système il faut se baser sur la méthode des dérivées. On identifie aisément que :

$$\begin{cases} f = v_0 \sin(\alpha(\delta(t) + \theta(t))) \\ g = \frac{v_0 \sin(\alpha(\delta(t)))}{a} \end{cases} \quad (2)$$

Les matrices sont donc calculé via les dérivées au point d'équilibre du système :

$$\begin{cases} A = \begin{pmatrix} 0 & \pm v_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} \pm v_0 a \\ \frac{b}{\pm v_0} \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3)$$

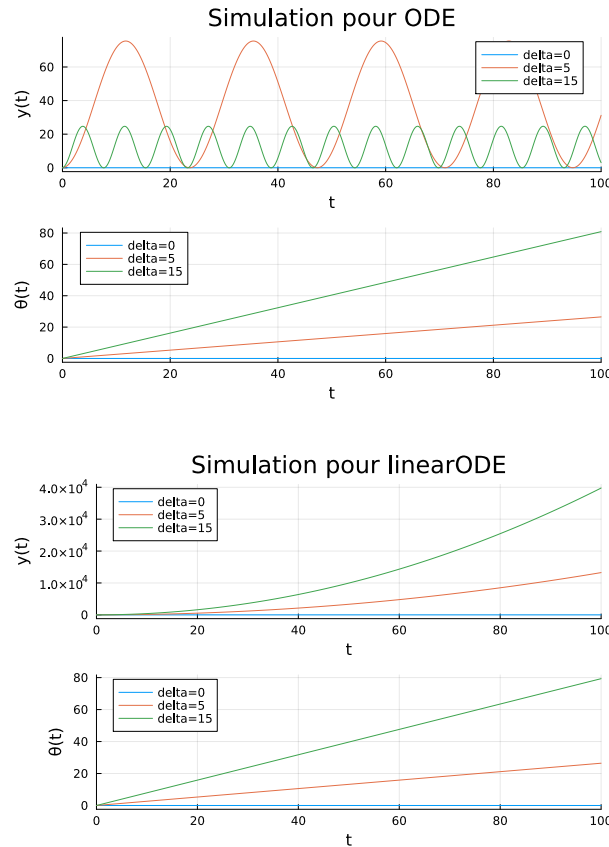
Ce qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm v_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \pm v_0 \frac{a}{b} \\ \pm v_0 \end{bmatrix} \delta(t).$$

1.6 nature des points d'équilibre

La matrice Jacobienne pour les points d'équilibre est déterminé via $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$. On obtient donc que les valeurs permises pour λ sont nulles. On ne peut donc rien conclure concernant la stabilité du système.

1.7 simulation au point d'équilibre



On peut constater que les fonctions non linéaire ont le même résultat que celle du modèle ABCD. Vu que δ étant constant, la valeur de $\dot{\theta}$ n'est pas modifiée au fur et à mesure du temps et donc pour $\theta > 0$ on aperçoit une augmentation de $y(t)$ constante qui est représentée sur la courbe par la courbure exponentielle.

1.8 trajectoire gaussienne

Actuellement nous avons essayé plusieurs méthodes sans parvenir à trouver une solution

1.8.1 résolution analytique

On peut se pencher sur le système linéarisé, et deviner par identification quels facteurs permettraient d'avoir le nombre et les valeurs des coefficients de nos gaussiennes. En réinjectant la deuxième équation linéarisée dans la première on se réduit à l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y} = v_0 \frac{a}{b} \delta + \frac{v_0}{b} \dot{\delta}$$

La solution recherchée est

$$y = \frac{25}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Sa dérivée par rapport au temps est donc

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{25(t-\mu)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\sigma^2} \exp\left(\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

l'équation différentielle se réécrit donc :

$$-\frac{25(t-\mu)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\sigma^2} \exp\left(\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = v_0 \frac{a}{b} \sum_{i=0}^n \left(\frac{A_i}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(\frac{-(t-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) \right) + \frac{v_0}{b} \sum_{i=0}^n \left(-\frac{A_i(t-\mu_i)}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}\sigma_i^2} \exp\left(\frac{-(t-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) \right)$$

Si l'on considère n=1 on obtient

$$-\frac{25(t-\mu)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\sigma^2} \exp\left(\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = v_0 \frac{a}{b} \left(\frac{A_0}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(\frac{-(t-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \right) + \frac{v_0}{b} \left(-\frac{A_0(t-\mu_0)}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}\sigma_0^2} \exp\left(\frac{-(t-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \right)$$

Le reste du développement est encore à faire Mais il semble montrer qu'il y ait moyen d'utiliser une seule Gaussienne .

1.8.2 résolution numérique

On peut supposer le problème comme étant la minimization d'une fonction prenant en argument une matrice colonne de taille 3n représentant les différents paramètre associé au différentes Gaussiennes et retournant le Mean square error comparé a la trajectoire attendue . Actuellement nous avons fait tourner sans succès notre minimization pour des tailles de matrice allant jusqu'à 15 élément.

1.8.3 dernière piste non exploré

Une dernière piste non exploré , serait de passer en domaine fréquentiel au vu de la fonction demandée.

2 State-feedback controller, simulations et analyse de Fourier

2.1

2.2 calcul des matrices d'état du système global

En remplaçant l'équation du controller dans celle du Plant , on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - KB)x + BK_r r \\ s = (C - KD)x + DK_r r \end{cases} \quad (4)$$

Par identification, on remarque donc que :

$$\begin{cases} \tilde{A} = A - KB \\ \tilde{B} = K_r B \\ \tilde{C} = C - KD \\ \tilde{D} = K_r D \end{cases} \quad (5)$$

2.3 domaine fréquentiel

Afin de se simplifier les notation , il suffit de définir un ω comme étant $2\pi f_{ref}$ avec f_{ref} la fréquence de référence .

$$\begin{aligned}
& 2\sin(2\pi ft + \frac{\pi}{6}) \\
X(j\omega) &= 2 \int_0^{100} \sin(\omega_0 t + \phi) e^{j\omega t} dt \\
&= 2 \int_{\frac{T}{2} - \frac{T}{2}}^{\frac{T}{2} + \frac{T}{2}} \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} e^{-j\omega t} dt \\
&= \frac{1}{j} \int_{\frac{T}{2} - \frac{T}{2}}^{\frac{T}{2} + \frac{T}{2}} e^{j(\omega_0 - \omega)t + j\phi} - e^{-j(\omega_0 + \omega)t - j\phi} dt \\
&= \frac{1}{j} \left[\frac{e^{j(\omega_0 - \omega)t + j\phi}}{j(\omega_0 - \omega)} - \frac{e^{-j(\omega_0 + \omega)t - j\phi}}{j(\omega_0 + \omega)} \right]_{\frac{T}{2} - \frac{T}{2}}^{\frac{T}{2} + \frac{T}{2}} \\
&= \frac{e^{j(\omega_0 - \omega)(\frac{T}{2} + \frac{T}{2}) + j\phi}}{j^2(\omega_0 - \omega)} - \frac{e^{j(\omega_0 - \omega)(\frac{T}{2} - \frac{T}{2}) + j\phi}}{j^2(\omega_0 - \omega)} - \frac{e^{j(\omega_0 + \omega)(\frac{T}{2} + \frac{T}{2}) - j\phi}}{j^2(\omega_0 + \omega)} - \frac{e^{j(\omega_0 + \omega)(\frac{T}{2} - \frac{T}{2}) - j\phi}}{j^2(\omega_0 + \omega)}
\end{aligned}$$