

UNIVERSITÉ DE LIÈGE
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

SYST0002
INTRODUCTION AUX SIGNAUX ET SYSTÈMES
PROJET

DELBARRE Loïc (S215072)

JACQUEMIN Justin (S224395)

Bachelier Ingénieur Civil
Année Académique 2024-2025

Table des matières

1	Part 1 : modèle d'état, linéarisation et simulations	2
1.1	linéarité du modèle dynamique	2
1.2	paramètre du système	2
1.3	simulation du système	2
1.3.1	cas d'un mouvement avec les roues fixes	2
1.3.2	cas d'un mouvement dont les roues oscillent sinusoidalement	3
1.4	Points d'équilibre du système	3
1.5	Matrice d'état A,B,C,D	3
1.6	nature des points d'équilibre	4
1.7	simulation au point d'équilibre	4
1.8	trajectoire gaussienne	5
1.8.1	résolution numérique	6
1.8.2	recherche de paramètre	6
2	State-feedback controller, simulations et analyse de Fourier	6
2.1	6
2.2	calcul des matrices d'état du système global	6
2.3	simulation du modèle <i>control loop</i>	6
2.4	simulation avec une entrée sinusoidales	6
2.5	domaine fréquentiel	6
2.6	diagrammes d'amplitudes	7
3	Fonction de transfert et diagrammes de Bode	7
3.1	fonction de transfert du système total	7

1 Part 1 : modèle d'état, linéarisation et simulations

1.1 linéarité du modèle dynamique

Le système n'est pas linéaire, car il ne respecte pas les principes de superposition et d'homogénéité, en raison de la présence de fonctions non linéaires (sin, tan, arctan) dans sa dynamique ainsi que de l'addition de variable d'état $\theta(t)$ à une fonction d'entrée $\delta(t)$ dans un sinus.

Par conséquent, le système ne satisfait pas les propriétés de superposition et d'homogénéité qui caractérisent les systèmes linéaires.

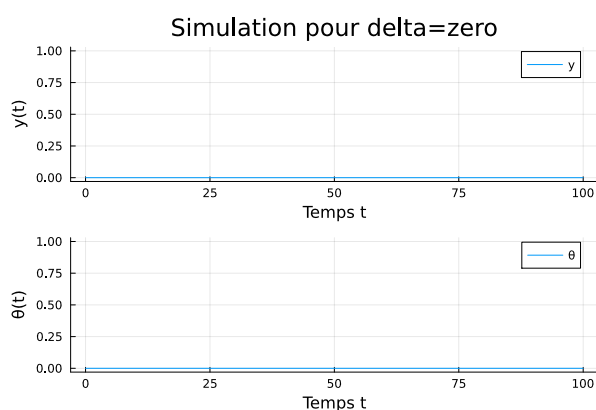
1.2 paramètre du système

Pour tous les signaux mentionnés, nous supposons que $t \in \mathbb{R}^+$ vu qu'il s'agit du temps.

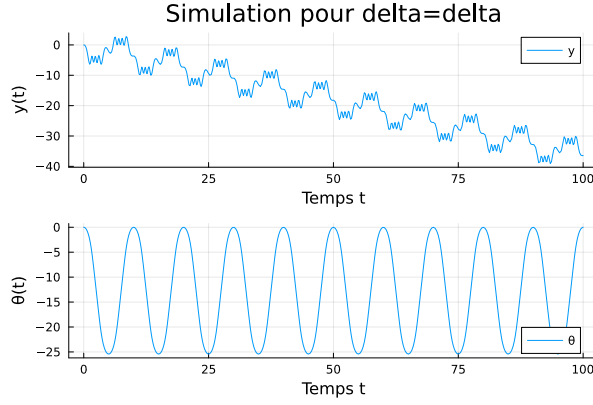
- entrées : $\delta(t)$ Le delta est associé à l'orientation des roues par rapport à l'axe du véhicule en fonction du temps. Son image appartient à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- variables d'états : $y(t), \theta(t)$
 - $y(t)$ représente l'évolution temporelle de la position selon l'axe vertical. Il n'y a pas de contrainte dans l'énoncé, on peut donc supposer que son domaine de définition ainsi que son image appartiennent à \mathbb{R}
 - $\theta(t)$ représente l'évolution temporelle de l'orientation du véhicule dans l'espace. Vu qu'il s'agit d'un angle, on peut raisonnablement restreindre son image à l'intervalle $[0, 2\pi]$
- θ quant à lui représente l'évolution temporelle de l'orientation du véhicule dans l'espace. Vu qu'il s'agit d'un angle, on peut raisonnablement restreindre son image à l'intervalle $[0, 2\pi]$
- constantes : a, b, v_0
 - a est la distance entre l'axe arrière et le centre de masse du véhicule.
 - b , la distance entre l'axe des roues avant et celui des roues arrière.
 - v_0 représente la vitesse du centre de masse.
- sorties : $s(t)$ La sortie est la position selon l'axe vertical

1.3 simulation du système

1.3.1 cas d'un mouvement avec les roues fixes



1.3.2 cas d'un mouvement dont les roues oscillent sinusoidalement



1.4 Points d'équilibre du système

Dans le cadre de ce rapport , nous utiliseront la notation \dot{y} qui correspond à $\frac{dy}{dt}$.

Afin de trouver les points d'équilibre du système de manière analytique il suffit de trouver :

$$\begin{cases} \dot{y} = 0 \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

On trouve donc par la deuxième équation que

$$\delta(t) = k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

De là, en découle via la première équation que

$$\theta(t) = k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

On trouve donc dans le système deux point d'équilibre au vu des domaines et des images. On a donc $(\delta; \theta) = (0; 0)$ ou bien $(\delta; \theta) = (0; \pi)$

1.5 Matrice d'état A,B,C,D

Afin de trouver les matrice d'état du système il faut se baser sur la méthode des dérivées. On identifie aisément que :

$$\begin{cases} f = v_0 \sin(\alpha(\delta(t) + \theta(t))) \\ g = \frac{v_0 \sin(\alpha(\delta(t)))}{a} \end{cases} \quad (2)$$

Les matrices sont donc calculé via les dérivées au point d'équilibre du système :

$$\begin{cases} A = \begin{pmatrix} 0 & \pm v_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} \pm v_0 a \\ \frac{b}{\pm v_0} \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3)$$

Le système deviens dès lors :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm v_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \pm v_0 \frac{a}{b} \\ \pm \frac{v_0}{b} \end{bmatrix} \delta(t).$$

$$s(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} [\delta(t)]$$

1.6 nature des points d'équilibre

Pour connaître la nature des points d'équilibre , il suffit de calculer les valeurs propres de la matrice d'état A.

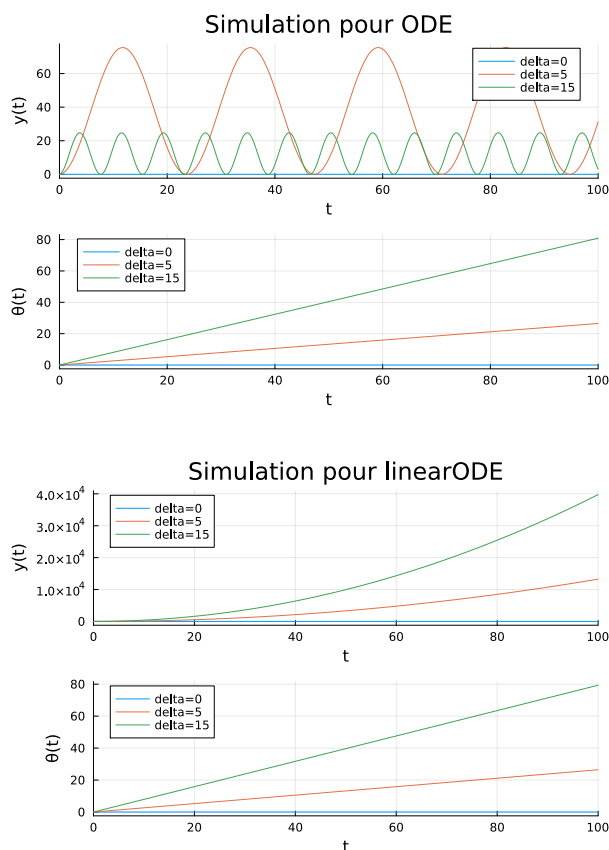
$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \pm v_0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda) - (0)(v_0) = \lambda^2$$

on ne peut rien dire sur la nature de tout les points d'équilibre ducoup ?

Vu que ses valeurs sont nulles , on ne peut donc rien conclure concernant la stabilité du système

marginalement stable ?

1.7 simulation au point d'équilibre



On peut constater que les fonctions non linéaire ont le même résultat que celle du modèle ABCD. Vu que l'on fixe δ a une constante qui ne dépend pas du temps , Vu que δ étant constant, $\dot{\theta}$ l'est aussi et donc θ croit linéairement de pente . Concernant $y(t)$ la situation est différente, on a une relation qui dépend de θ ainsi que d'une

constante. On a donc un comportement "exponentiel". la valeur de $\dot{\theta}$ n'est pas modifié au fur et a mesure du temps et donc pour $\theta > 0$ on appercois une augmentation de $y(t)$ constante qui est représenté sur la courbe par la courbure exponentielle.

1.8 trajectoire gaussienne

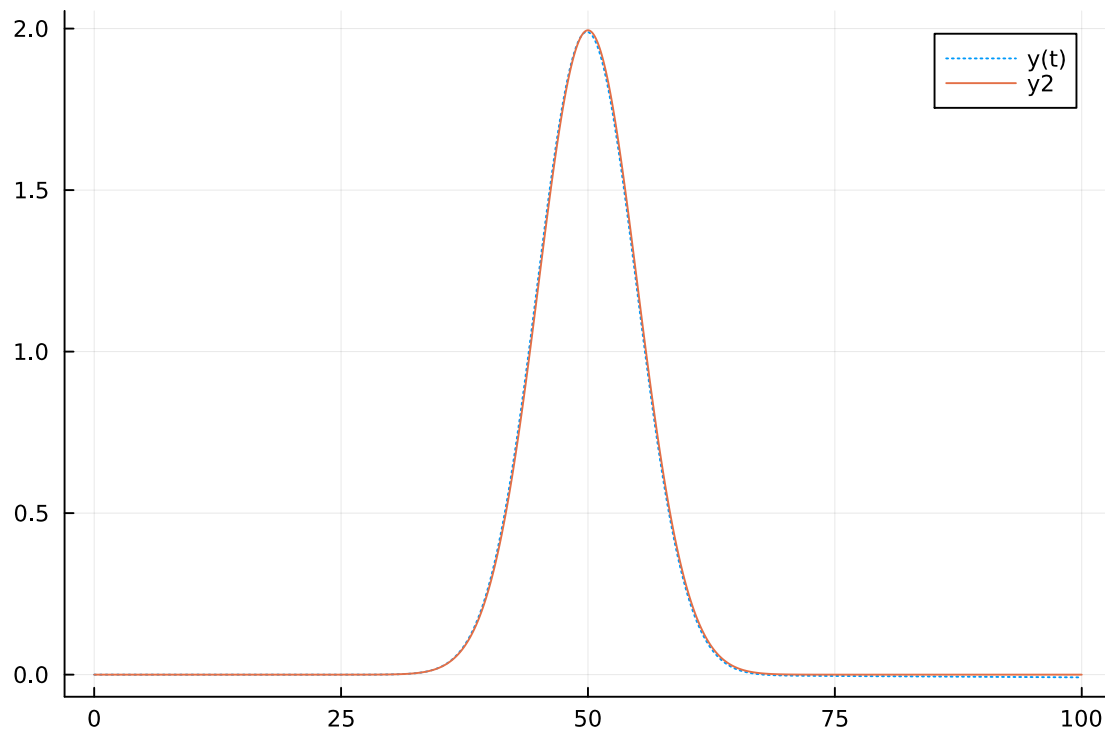


FIGURE 1

avec actuellement une MSE de 0.00010265487225667491

formuler ca correctement

Afin de trouver la juste somme de gaussiennes pour $\delta(t)$, différentes pistes s'offrent à nous.

- La méthode analytique n'est pas envisageable au vu de la complexité du système et la méthode analytique sur le modèle linéarisé n'est pas suffisamment proche de la réalité pour avoir du sens.

◦

Concernant la méthode numérique une approche naive serait de poser le problème comme étant une minimisation de la mean square error entre notre signal de sortie et notre signal d'entrée en fonction des parametres des gaussiennes. Le problème principal de cette approche est , que la fonction comporte beaucoup trop de minimum locaux sur sa topologie mais également que le nombre de parametre pouvant croitre , la minimisation serait d'autant plus couteuse. Pour palier à ce problème la première solution envisagée a été de bénéficier des symétrie du problèmes ainsi que des propriétés des gaussiennes. En effet on peut voir une gaussienne comme étant un "coup de volant aller-retour", on constate donc qu'il y aura besoin de 3 gaussiennes dont le parametre μ déterminera le temps a la quelle celui ci serait effectué et A la violence de celui ci. Pour réduire encore le nombre de paramètre à 7, une des approche envisagée a été de supposer que deux coups de volant serait équidistant de 50 et l'un a 50. Concernant l'algorithme , les deux algorithme simple a implémenter sont la recherche aléatoire et la grid search. Au vu du

nombre de dimension du problème une grid search aurait pris beaucoup de temps avant de converger. C'est pour cela que nous sommes parti sur une recherche aléatoire.

1.8.1 résolution numérique

On peut supposer le problème comme étant la minimization d'une fonction prenant en argument une matrice colonne de taille $3n$ représentant les différents paramètre associé au différentes Gaussiennes et retournant le Mean square error comparé a la trajectoire attendue . Actuellement nous avons fait tourner sans succès notre minimization pour des tailles de matrice allant jusqu'a 15 élément.

1.8.2 recherche de paramètre

Une première approche bête et naïve serait de tester des combinaisons de n gaussiennes et de faire une minimisation sur $3n$ parametre. Au vu du problème considéré une méthode de minimisation basée sur une dérivée ne fonctionnerai pas car la fonction présente beaucoup trop de minimum locaux.

Si l'on considère la fonction trajectoire que le véhicule doit avoir, on y remarque 3 " coup de volant". Un coup de volant peut se traduire par une fonction $\delta(t)$ similaire a une gaussienne ou une parabole et dont le sens de la courbure indiquera le sens du coup de volant. Afin de simplifier encore le nombre de variable , on peut profiter des propriété des parametre d'une gaussienne, dans les 3 coups de volant , l'un semble centré en 50 et le deux autres semblent être équidistant à 50. Il en va de soit aussi dans l'intensité du coup de v

2 State-feedback controller, simulations et analyse de Fourier

2.1

2.2 calcul des matrices d'état du système global

En remplaçant l'équation du controller dans celle du Plant , on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - KB)x + BK_r r \\ s = (C - KD)x + DK_r r \end{cases} \quad (4)$$

Par identification, on remarque donc que :

$$\begin{cases} \tilde{A} = A - BK = \begin{bmatrix} -k_1 V_0 \frac{a}{b} & v_0 - k_2 v_0 \frac{a}{b} \\ -k_1 \frac{v_0}{b} & -k_2 \frac{v_0}{b} \end{bmatrix} \\ \tilde{B} = K_r B = \begin{bmatrix} k_r v_0 \frac{a}{b} \\ k_r \frac{v_0}{b} \end{bmatrix} \\ \tilde{C} = C - DK = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{D} = K_r D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5)$$

2.3 simulation du modèle *control loop*

2.4 simulation avec une entrée sinusoidales

2.5 domaine fréquentiel

Afin de se simplifier les notation , il suffit de définir un ω comme étant $2\pi f_{ref}$ avec f_{ref} la fréquence de référence .

$$2\sin(2\pi ft + \frac{\pi}{6})$$

$$\begin{aligned}
X(j\omega) &= 2 \int_0^{100} \sin(\omega_0 t + \phi) e^{j\omega t} dt \\
&= 2 \int_{\frac{T}{2} - \frac{T}{2}}^{\frac{T}{2} + \frac{T}{2}} \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} e^{-j\omega t} dt \\
&= \frac{1}{j} \int_{\frac{T}{2} - \frac{T}{2}}^{\frac{T}{2} + \frac{T}{2}} e^{j(\omega_0 - \omega)t + j\phi} - e^{-j(\omega_0 + \omega)t - j\phi} dt \\
&= \frac{1}{j} \left[\frac{e^{j(\omega_0 - \omega)t + j\phi}}{j(\omega_0 - \omega)} - \frac{e^{-j(\omega_0 + \omega)t - j\phi}}{j(\omega_0 + \omega)} \right]_{\frac{T}{2} - \frac{T}{2}}^{\frac{T}{2} + \frac{T}{2}} \\
&= \frac{e^{j((\omega_0 - \omega)\frac{T}{2} + \phi)}}{j^2(\omega_0 - \omega)} \left(e^{j(\omega_0 - \omega)\frac{T}{2}} - e^{-j(\omega_0 - \omega)\frac{T}{2}} \right) + \frac{e^{-j((\omega_0 + \omega)\frac{T}{2} + \phi)}}{j^2(\omega_0 + \omega)} \left(e^{j(\omega_0 + \omega)\frac{T}{2}} - e^{-j(\omega_0 + \omega)\frac{T}{2}} \right) \\
&= \frac{2e^{j((\omega_0 - \omega)\frac{T}{2} + \phi)}}{j(\omega_0 - \omega)} \sin\left((\omega_0 - \omega)\frac{T}{2}\right) + \frac{2e^{-j((\omega_0 + \omega)\frac{T}{2} + \phi)}}{j(\omega_0 + \omega)} \sin\left((\omega_0 + \omega)\frac{T}{2}\right) \\
&= -2je^{j((\omega_0 - \omega)\frac{T}{2} + \phi)} \operatorname{sinc}\left((\omega_0 - \omega)\frac{T}{2}\right) - 2je^{-j((\omega_0 + \omega)\frac{T}{2} + \phi)} \operatorname{sinc}\left((\omega_0 + \omega)\frac{T}{2}\right)
\end{aligned}$$

Au vu des sinus cardinaux , les peak se trouvent donc en $\omega = \pm\omega_0$. Autrement dit, $\omega = \pm 2\pi f_{ref}$

2.6 diagrammes d'amplitudes

Au vu du signal de sortie que l'on obtient dans la partie 4 , il est assez visuel de voir qu'il s'agit d'une sinusoïde d'amplitude et de fréquence visible. Ici pour tracer numériquement on aurait pu le faire à la main. Nous avons décidé de se baser sur la Discrete Fourier Transform (DFT) pour récupérer le graphique de fréquence.

3 Fonction de transfert et diagrammes de Bode

3.1 fonction de transfert du système total

Pour déterminer $H(s)$, on peut se baser sur les matrices d'état $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$, ceci permettra de déterminer les pôles de $H(s)$. Concernant sa stabilité , une fonction de transfert est dite stable si $\operatorname{Re}\{p\} < 0$ on a donc :

$$H(s) = \tilde{C} \left(s\mathbb{I}_2 - \tilde{A} \right)^{-1} \tilde{B} + \tilde{D}$$

$$\begin{aligned}
H(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 v_0 \frac{a}{b} + s & k_2 v_0 \frac{a}{b} - v_0 \\ k_1 \frac{v_0}{b} & k_2 \frac{v_0}{b} + s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_r v_0 \frac{a}{b} \\ k_r \frac{v_0}{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s^2 + \frac{v_0}{b} [ak_1 + k_2]s + \frac{k_1 v_0^2}{b}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 \frac{v_0}{b} + s & v_0 - k_2 v_0 \frac{a}{b} \\ -k_1 \frac{v_0}{b} & k_1 v_0 \frac{a}{b} + s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_r v_0 \frac{a}{b} \\ k_r \frac{v_0}{b} \end{bmatrix} \\
&= \frac{k_r v_0}{b} \frac{as + v_0}{s^2 + \frac{v_0}{b} [ak_1 + k_2]s + \frac{k_1 v_0^2}{b}}
\end{aligned}$$

en remplaçant par les valeurs on obtient ;

$$= \frac{0.440s + 4}{s^2 + 2s + 4}$$

Au vu de l'allure de $H(s)$ il est aisé de remarquer son zéro en $\frac{-b}{ak_r}$. Cette fonction de contrôle est également trouvée directement dans le code.

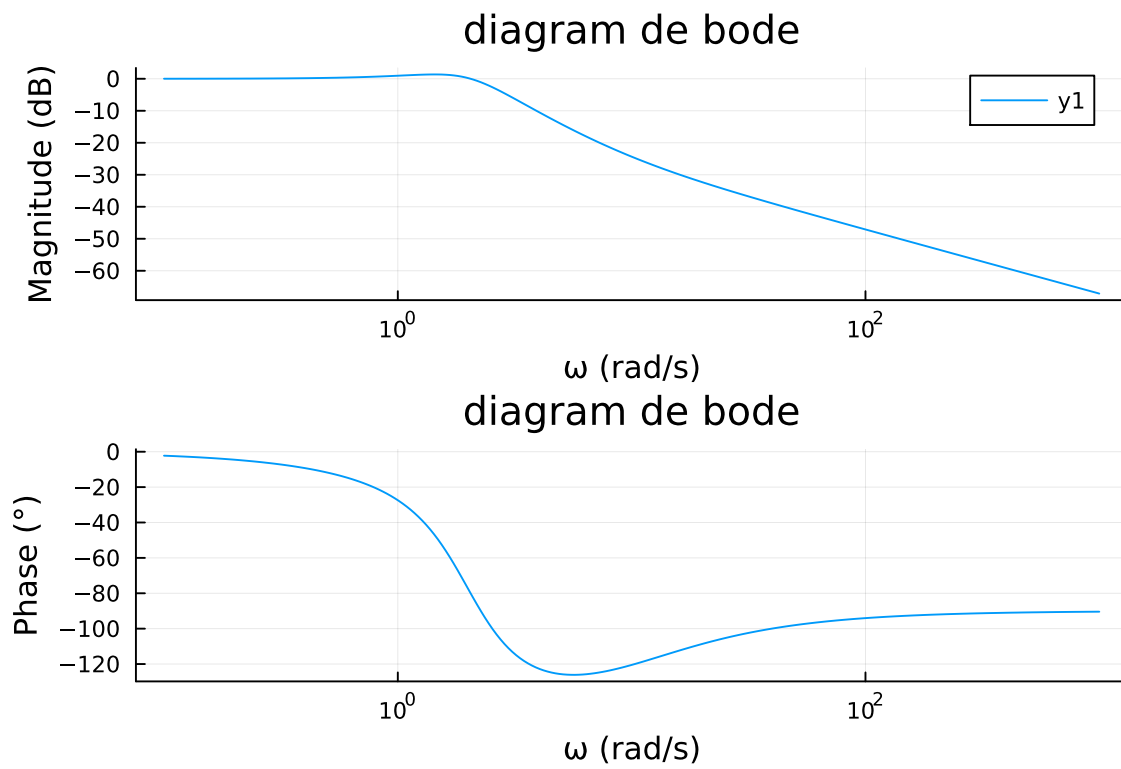


FIGURE 2