

Project Part 1 - Report

● Graded

Group

Justin Jacquemin

Loïc Delbarre

[View or edit group](#)

Total Points

0 / 0 pts

Question 1

Q1.1

0 / 0 pts

✓ + 0 pts Click here to replace this description.

Justification incomplète :
donnez toutes les nonlinéarités et les fonctions
non-linéaires sont appliquées sur quoi ? Le temps ?,
un signal ? Lequel ?

Question 2

Q1.2

0 / 0 pts

✓ + 0 pts Correct

- 3 Bien mais vous repassez beaucoup de fois sur les mêmes signaux. N'y a-t-il pas moyen de faire plus concis ?
- 4 Non demandé
- 5 Unités ?

Question 3

Q1.3

0 / 0 pts

✓ + 0 pts Correct

Pour $\delta = 0$: Explication incomplète :
lien avec les équations
mathématiques ? A quel
scénario physique ce cas
correspond-il ? Pour $\delta =$
 $A \sin(2\pi \times 0.1t)$: Observation incomplète + Analysez en
profondeur le comportement de δ et ce que ça
implique physiquement.
Quel est le mouvement du
véhicule ? Graphiques plus grands car axes illisibles. + Graphiques de δ pour les deux cas ?

Question 4

Q1.4

0 / 0 pts

✓ + 0 pts Correct

6 Typographie

7 ?

8 Même k ?

Question 5

Q1.5

0 / 0 pts

✓ + 0 pts Correct

9 Taylor ? Explique la méthode complète. Attention aux notations !

Question 6

Q1.6

0 / 0 pts

✓ + 0 pts Correct

10 Cette phrase n'est pas correcte.

11 Polynôme caractéristique ?

Question 7

Q1.7

0 / 0 pts

✓ + 0 pts Correct

Question 8

Q1.8

0 / 0 pts

✓ + 0 pts Correct

1 On ne voit pas la suite

2 Il y a moyen de ne faire que l'étude numérique mais vous pouvez continuer l'analytique et comparer

No questions assigned to the following page.

SYST0002 - Introduction aux signaux et systèmes

Rapport de projet

Professeurs	Guillaume Drion & Alessio Franci
Assistants	Antoine Debor & Caroline Dejace
Auteurs	Justin Jacquemin & Loic Delbarre
Matricules	S224395 & SXXXXXX

ANNÉE ACADÉMIQUE 2024 - 2025

Questions assigned to the following page: [2](#) and [1](#)

Part 1 : Modèle d'état, linéarisation et simulations

1. Le système dynamique est-il linéaire ?

Non, le système est non linéaire. Avec la présence de sinus, de tangente et d'arctangente, notre position en fonction du temps n'est pas linéaire. Ces fonctions ne sont ni additives ni homogènes, ce qui prouve que notre système n'est pas linéaire.

2. Notre système dynamique est décrit par :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \sin(\alpha(\delta(t)) + \theta(t)) \\ \frac{v_0 \sin \alpha(\delta(t))}{a} \end{pmatrix}$$

4

$$\text{avec } \alpha(\delta(t)) = \arctan \left(\frac{a \tan(\delta(t))}{b} \right)$$

Nous constatons que le comportement du système dépend de plusieurs paramètres distincts.

Paramètres fixes

Les premières constantes à considérer sont a et b . Elles sont liées aux caractéristiques physiques du véhicule et restent invariables. Elles ne constituent donc pas des entrées du système.

Influence de la vitesse v_0

La vitesse v_0 pourrait également influencer la sortie $s(t)$. Toutefois, puisqu'elle est supposée être constante au cours du temps, elle ne peut donc être considérée comme une entrée du système.

Entrée du système

La seule variable candidate en tant qu'entrée est $\delta(t)$, correspondant à l'angle de braquage des roues avant. Cet angle, variant en fonction du temps, influence directement la sortie $s(t)$, ce qui en fait l'unique entrée du système.

Analyse des sorties et des variables d'état

Sortie du système

D'après l'énoncé, l'unique sortie est $s(t)$, correspondant à la position du module au cours du temps, soit $y(t)$.

Variables d'état

Les variables d'état décrivent l'évolution interne du système. Ici, nous avons :

- la position $y(t)$,
- l'orientation du module $\theta(t)$.

Ainsi, notre système dynamique possède :

- Une entrée : $\delta(t)$.
- Une sortie : $s(t) = y(t)$.
- Deux variables d'état : $y(t)$ et $\theta(t)$.

Questions assigned to the following page: [2](#) and [3](#)

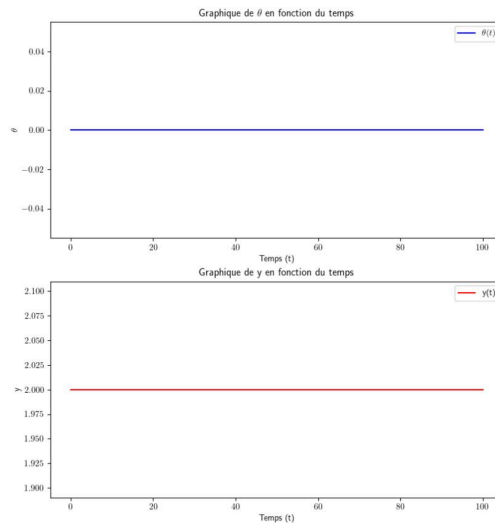
Interprétation physique des signaux

- $y(t)$ représente la position verticale du centre de masse du véhicule au cours du temps. L'énoncé ne fixe aucune contrainte sur $y(t)$, nous pouvons donc supposer que son domaine de définition ainsi que son image appartiennent à \mathbb{R} .
- $\theta(t)$ représente l'orientation du module, soit l'angle entre l'axe horizontal et la direction du véhicule. Comme pour $y(t)$, aucune contrainte explicite n'est donnée, mais dans un contexte physique, il est plus raisonnable de restreindre son image à l'intervalle $[0, 2\pi[$.
- a et b sont des constantes caractérisant respectivement :
 - a : la distance entre l'axe arrière et le centre de masse du véhicule.
 - b : la distance entre l'axe des roues avant et celui des roues arrière.
- v_0 représente la vitesse du centre de masse du véhicule.
- $\delta(t)$ est l'angle de braquage du véhicule, défini comme l'angle entre l'axe de la roue avant gauche et la direction du véhicule, soit $\theta(t)$. Son image appartient à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Pour tous les signaux mentionnés, nous supposons que $t \in \mathbb{R}$.

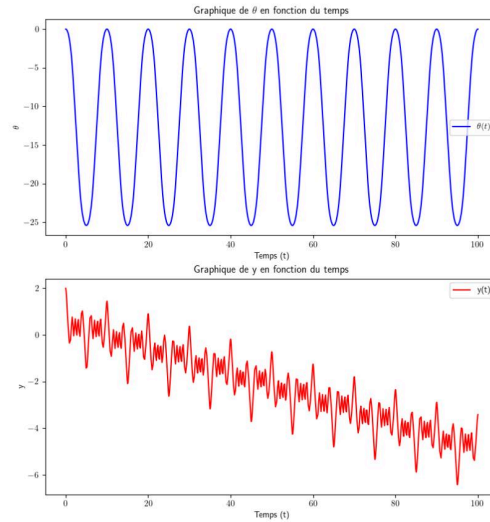
0.1 simulation du système

0.1.1 cas d'un mouvement sans tourner



Questions assigned to the following page: [3](#) and [4](#)

0.1.2 cas d'une mouvement dont les roues oscillent sinusoidalement



3. Pour trouver les points d'équilibre de notre système, nous devons résoudre un tel système :

$$\dot{y} = v_0 \cdot \sin(\alpha(\delta(t)) + \theta(t)) = 0$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_0 \cdot \sin(\alpha(\delta(t)))}{b} = 0$$

où $\alpha(\delta(t)) = \arctan\left(\frac{a \cdot \tan(\delta(t))}{b}\right)$ et $\delta(t) = \frac{-7}{2} \sin(2\pi \cdot 0.1 \cdot t)$ ou $= 0$, comme décrit dans l'énoncé.

Nous allons commencer par notre deuxième fonction qui nous permettra de trouver par la suite les points d'équilibre de la première fonction. Nous devons donc partir de cette équation :

$$\frac{v_0 \cdot \sin(\alpha(\delta(t)))}{a} = 0$$

Nous savons que $a \neq 0$ nous obtenons alors simplement :

$$\sin(\alpha(\delta(t))) = 0$$

$$\alpha(\delta(t)) = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

en remplaçant $\alpha(\delta(t))$ on obtient

$$\arctan\left(\frac{a \cdot \tan(\delta(t))}{b}\right) = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Cependant comme l'image d'un arctan est $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ la seule possibilité pour k est qu'il soit égal à 0. On obtient donc facilement le point d'équilibre :

$$\frac{a \cdot \tan(\delta(t))}{b} = 0$$

$$\delta(t) = k'\pi, \quad k' \in \mathbb{Z}$$

Questions assigned to the following page: [4](#), [5](#), and [6](#)

En remplacement $\delta(t)$ dans \dot{y} on trouve :

$$v_0 \cdot \sin(k\pi + \theta(t)) = 0$$

Et donc de manière similaire à la résolution précédente, on peut écrire que $\theta(t) = \frac{8}{\pi} \pi, k \in \mathbb{Z}$. Cependant les valeurs possibles de $\theta \in [0, 2\pi[$ on a donc que les seules possibilités pour k est 0 et 1. De même que pour $\delta(t)$ les seules possibilités à l'intérieur de son interval de possibilité est $k' = 0$. Le système possède donc 2 points d'équilibre : $(\theta_{e1}, \delta_{e1}) = (0, 0)$ ainsi que $(\theta_{e2}, \delta_{e2}) = (\pi, 0)$. Nous pouvons voir que les points d'équilibre ne font pas intervenir $y(t)$ et donc nos points d'équilibre sont bons pour tout $y(t)$.

4. Afin de déterminer les matrices A, B, C et D nous devons tout d'abord linéariser notre système dynamique pour des petites perturbations. Nous supposons donc que $\delta(t) \approx 0$, on peut donc alors approximer $\alpha(\delta(t))$ en utilisant le développement de Taylor.

Approximation de $\alpha(\delta(t))$

Comme décrit dans l'énoncé, $\alpha(\delta(t))$ est donnée par

$$\alpha(\delta(t)) = \arctan\left(\frac{a \cdot \tan(\delta(t))}{b}\right)$$

Pour de petites valeurs de $\delta(t)$, nous pouvons utiliser l'approximation $\tan(\delta(t)) \approx \delta(t)$, ce qui nous donne :

$$\alpha(\delta(t)) \approx \arctan\left(\frac{a\delta(t)}{b}\right)$$

Ensuite en utilisant l'approximation de $\arctan(t) \approx t$ pour un petit t , on obtient :

$$\alpha(\delta(t)) \approx \frac{a \cdot \delta(t)}{b}$$

Ensuite, en faisant toujours l'hypothèse des perturbations, nous pouvons utiliser l'approximation de $\sin(t) \approx t$ pour x proche de 0 :

$$\sin(\alpha(\delta(t)) + \theta(t)) \approx \alpha(\delta(t)) + \theta(t) \approx \frac{a \cdot \delta(t)}{b} + \theta(t)$$

et

$$\sin(\alpha(\delta(t))) \approx \alpha(\delta(t)) \approx \frac{a \cdot \delta(t)}{b}$$

On obtient alors notre système linéarisé et devient :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \left(\frac{a}{b} \delta(t) + \theta(t) \right) \\ \frac{v_0}{b} \delta(t) \end{pmatrix}$$

Ce qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} v_0 \frac{a}{b} \\ \frac{v_0}{b} \end{bmatrix} \delta(t).$$

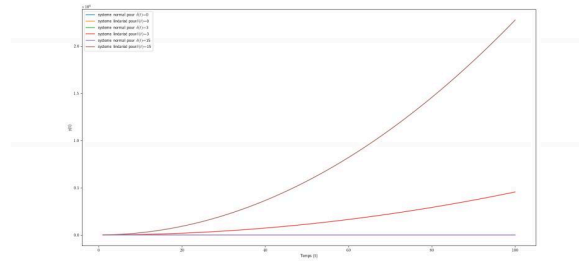
Notre système étant plus lisible nous pouvons maintenant facilement déterminer nos matrices :

Notre matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & v_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} v_0 \frac{a}{b} \\ \frac{v_0}{b} \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad 0]$ et pour finir $D = 0$. Nous obtenons bien 4 matrices qui ont la bonne dimension.

0.2 nature des points d'équilibre

La matrice Jacobienne pour les points d'équilibre est déterminée via $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$. On obtient donc que les valeurs permises pour λ sont nulles. On ne peut donc rien conclure concernant la stabilité du système.

Questions assigned to the following page: [8](#), [7](#), and [6](#)



0.3 simulation au point d'équilibre

On peut constater que les fonctions non linéaire ont le même résultat que celle du modèle ABCD. Vu que δ étant constant, la valeur de $\dot{\theta}$ n'est pas modifié au fur et à mesure du temps et donc pour $\theta > 0$ on aperçoit une augmentation de $y(t)$ constante qui est représenté sur la courbe par la courbure exponentielle.

0.4 trajectoire gaussienne

Actuellement nous avons essayé plusieurs méthode sans parvenir à trouver une solution

0.4.1 résolution analytique

On peut se pencher sur le système linéarisé, et deviner par identification quels facteurs permettraient d'avoir le nombre et la valeurs des coefficient de nos gaussienne. en réinjectant la deuxième équation linéarisé dans la première on se réduit à l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y} = v_0 \frac{a}{b} \delta + \frac{v_0}{b} \dot{\delta}$$

La solution recherché est

$$y = \frac{25}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Sa dérivée par rapport au temps est donc

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{25(t-\mu)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\sigma^2} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

l'équation différentielle se réécrit donc :

$$-\frac{25(t-\mu)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\sigma^2} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = v_0 \frac{a}{b} \sum_{i=0}^n \left(\frac{A_i}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) \right) + \frac{v_0}{b} \sum_{i=0}^n \left(-\frac{(t-\mu_i)}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}\sigma_i^2} \exp\left(-\frac{(t-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) \right)$$

Si l'on considère $n=1$ on obtient

$$-\frac{25(t-\mu)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\sigma^2} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = v_0 \frac{a}{b} \left(\frac{A_0}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \right) + \frac{v_0}{b} \left(-\frac{A_0(t-\mu_0)}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{(t-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \right)$$

Le reste du développement est encore à faire Mais il semble montrer qu'il y ait moyen d'utiliser une seule Gaussienne .

0.4.2 résolution numérique

On peut supposer le problème comme étant la minimization d'une fonction prenant en argument une matrice colonne de taille $3n$ représentant les différents paramètre associé au différentes Gaussiennes et retournant le Mean square error comparé à la trajectoire attendue . Actuellement nous avons fait tourner sans succès notre minimization pour des tailles de matrice allant jusqu'à 15 élément.

No questions assigned to the following page.

0.4.3 dernière piste non exploré

Une dernière piste non exploré , serait de passer en domaine fréquentiel au vu de la fonction demandé.

5.

6.

7.

No questions assigned to the following page.

Part 2 : State-feedback controller, simulations et analyse de Fourier

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.

No questions assigned to the following page.

Part 3 : Fonction de transfert et diagrammes de Bode

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.