

Introduction aux méthodes numériques et projet (PROJ0001):  
Modélisation de la trajectoire d'une balle de tennis

Premier bachelier en sciences de l'ingénieur  
Année académique 2021-2022. Travail réalisé par:

Loic Delbarre (S215072)      Rafik Lourmathi (S212097)  
Salman Guseynov (S216862)

Le 8 avril 2022

## Contents

<b>1</b>	<b>Question 1</b>	<b>3</b>
1.1	Méthode sécante . . . . .	3
1.2	méthode de la bisection . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Question 2</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Question 3</b>	<b>4</b>
3.1	conception de trajectoire file horizontal . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Question 4</b>	<b>5</b>
4.1	Choix de la méthode . . . . .	5
4.2	Implémentation . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Question 5</b>	<b>5</b>

# 1 Question 1

## 1.1 Méthode sécante

Nous avons donc implémenté la méthode de la sécante et avons étudié les 3 cas qui peuvent se présenter à nous comme annoncé dans l'énoncé.

Tout d'abord, envisageons le première possibilité : lorsque la sécante converge, elle renvoie un tuple contenant les coordonnées du zéro approximé.

Ensuite, dans le deuxième cas, afin de ne pas diviser par zéro dans l'équation de la sécante(ref), on retourne un statut d'erreur.

La troisième plausibilité est que la méthode de la sécante ne nous permet pas d'être assuré de la convergence de la fonction. C'est pour cela que nous implémentons un nombre d'itérations maximum comme gardien de boucle. Si jamais la fonction n'a pas convergé après le nombre maximum d'itérations (`iteration_max`), la fonction en déduit qu'il n'y a pas convergence. On a défini le nombre maximal d'itérations à 100.

On sait que la trajectoire d'une balle de tennis est parabolique. Donc, en utilisant la méthode de la sécante, on converge rapidement vers un zéro. Dans le cadre de ce cours, nous étudions des trajectoires paraboliques. Une vingtaine d'itérations devrait être suffisante. Mais, au vu de la faible complexité, nous avons fixé le nombre d'itérations à 100.

Voici un exemple(ref) d'un graphique d'une fonction que l'on pourrait rencontrer lors de nos calculs de trajectoire. On remarque qu'avec 10 itérations, on atteint assez rapidement une précision satisfaisante.

## 1.2 méthode de la bisection

La technique de la bisection est plus efficace que la sécante. En effet, cette méthode assure la convergence lorsque les bornes sont de signes contraires et elle est définie partout entre ses bornes. Si la fonction n'est pas convergente, on aura une sortie d'erreur.

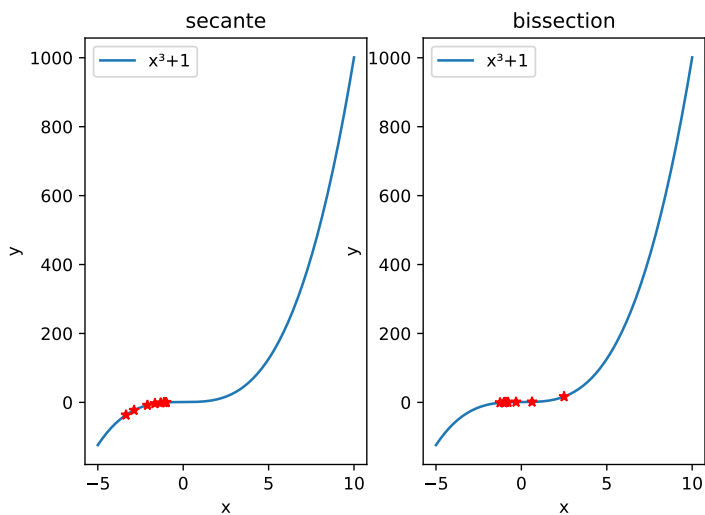


Figure 1: difference bisection et secante

## 2 Question 2

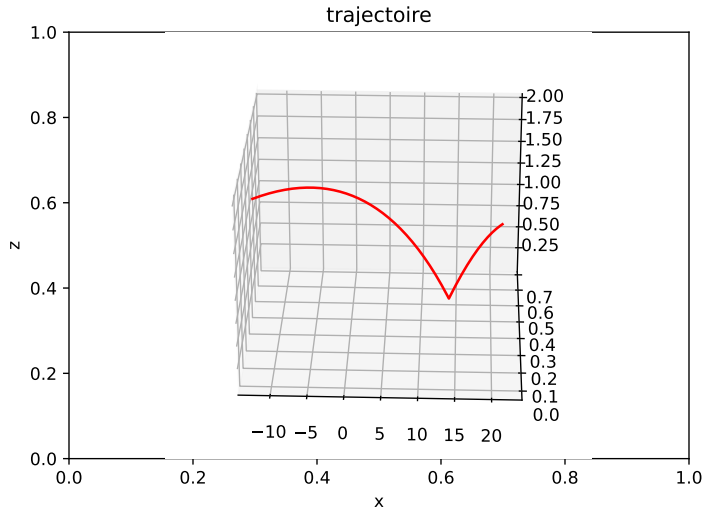
Afin de regrouper les différentes constantes utilisées dans le projet, nous les avons centralisées sous un fichier nommé `const.py`. On a remarqué également la possibilité d'une mise en évidence des différentes constantes. Ainsi, on évite recalculer le produit des constantes à chaque itération (ref). Ici la fig 1 On voulait profiter de la caractéristique `dtype` des `numpy.array` pour choisir le nombre de décimales dans le calcul si besoin. Mais finalement, on s'est rendu compte que la valeur attribuée par défaut était amplement suffisante.

Pour stocker les valeurs dans Euler, il a été plus judicieux d'allouer statiquement un tableau de la taille du nombre d'étapes maximal et de le réduire lorsque l'événement (si la balle touche le sol) se produit. Dans la première option envisagée, on réallouait dynamiquement un tableau à chaque itération avec `np.append`. Mais on a constaté des pertes impressionnantes de performances pour la réallocation de grands tableaux. Pour un tableau de 800 000 cases, le fait de changer de technique a réduit le temps de moitié.

D'une autre part, nous avons implémenté l'utilisation `solve_ivp` de `scipy`. Au vu des valeurs par défaut et de leur précision, nous avons décidé de les conserver. Et donc les valeurs par défaut sont respectivement pour `rtol` de 0.001 et pour `atol` de 0.000001.

$$\ddot{x} = \frac{\rho \cdot \pi}{m} \cdot \frac{d^2}{8} \cdot \|\dot{x}\|^2 \left( \frac{1}{2 + 1.96 \frac{\dot{x}}{\|w\| \cdot d}} + C_d \right) - g$$

## 3 Question 3



## Comparaison des deux méthodes En comparant `solve_ivp` et Euler, on se rend compte assez rapidement de la différence de temps d'exécution. `solve_ivp` est instantané pour une précision de  $10^{-5}$  alors qu'Euler prend déjà 6 secondes. Et pour une précision 10 fois plus petite, Euler augmente drastiquement vers 60 alors que `Solve_ivp` reste instantané.

### 3.1 conception de `trajectoirefilethorizontal`

On a décidé de prendre un argument non obligatoire à la fonction `trajectoirefilethorizontal` pour gérer le cas où on a un rebond de façon recursive. En effet un rebond peut être considéré comme le point de départ d'une nouvelle trajectoire. L'avantage de cette technique,

c'est qu'elle permet d'être modulaire au niveau du rebond. Ainsi si on décide de ne plus prendre en compte le rebond, on ne devra pas changer de fonction.

Les événements choisis pour l'utilisation de `solve_ivp` ont été déterminés de manière analogique et non discrète car `solve_ivp` est capable d'utiliser ces résultats pour converger plus rapidement et plus précisément. Pour le choix des événements, pour la prise en compte du filet, nous avons opté pour `CubicSpline` avec `bc_type` en type `natural` pour un résultat plus naturel.

## 4 Question 4

### 4.1 Choix de la méthode

Le choix s'est porté sur la méthode de la sécante car celle-ci ne nécessite pas de bornes opposées pour pouvoir fonctionner. Les points d'existence choisis pour la sécante sont à déterminer au cas par cas, en fonction de la fonction donnée. En effet, les valeurs initiales détermineront l'ensemble des valeurs pouvant être obtenues par la méthode.

### 4.2 Implémentation

Pour réaliser les diverses fonctionnalités, au vu de la tâche répétitive, nous avons décidé de séparer le travail en plusieurs fonctions ( `get_cible_hauteur` et `getcible_rebond`). Pour faire également varier les différents éléments, nous avons implémenté `multinorm`, `multiomega` ainsi que `rotangle`. L'idée est de faire varier un paramètre d'entrée `x` à travers une sécante ou une bisection. Pour les différentes fonctions, nous avons dû choisir des bornes différentes. Pour la rechercheHauteur, il était spécifié dans les consignes de prendre une hauteur de 2 à 3 m. Pour la rechercheOmega et recherchevitesse, nous avons dû poser une valeur maximale à la norme, que nous avons fixée à 100m/s et 100rad/sec.

## 5 Question 5

Nous avons pris en compte que la direction de la vitesse angulaire était donnée en entrée de la fonction. Nous avons décidé de calculer la hauteur pour chaque répartition avec une étape de  $10^{-2}$ . A chaque étape, on recalculera la hauteur. A la fin de toutes les répartitions, on essaiera de retourner la répartition qui permet de trouver la valeur `h` la plus élevée.

Avec une étape de  $10^{-2}$ , on fait 100 tours de boucles, ce qui est la valeur minimale pour avoir une valeur en pourcentage.

Pour connaître la répartition de l'énergie, on se base sur l'équation suivante, permettant de calculer les différentes fluctuations.

Voici ici 2 un graph de la hauteur finale en fonction de la vitesse. Ce graph démontre clairement que la dérivée s'annule bien uniquement lorsque la balle est à l'apogée de la hauteur maximale.

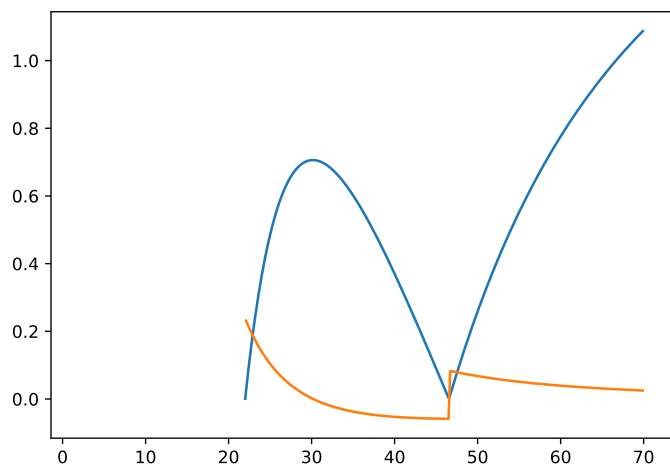


Figure 2: test