1

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & w' \\ w & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 \\ w/\sqrt{a_{11}} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K - ww'/a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & w'/\sqrt{a_{11}} \\ 0 & I \end{bmatrix}$

假设矩阵 A 是 $n \times n$ 的. 首先 Cholesky 分解的条件是矩阵 A 为正定矩阵, 矩阵 A 的各阶顺序主子式均为正, 故 $a_{11} > 0$.

由矩阵 A 正定有对于任意的 n 维非零向量 x, $x'Ax > 0$, 构造 $x = \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix}$, 其中 z 为任意的 $n-1$ 维非零向量, 则 $x'Ax = \begin{bmatrix} 0 & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & w' \\ w & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix} = z'Kz > 0$, 故根据正定矩阵的定义, K 为正定矩阵.

设$R = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & w'/\sqrt{a_{11}} \\ 0 & I \end{bmatrix}$, $A = R' \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K - ww'/a_{11} \end{bmatrix} R$, 由于 R 是上三角矩阵, 行列式值为 $\sqrt{a_{11}} > 0$, 故 R 是可逆阵. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K - ww'/a_{11} \end{bmatrix} = R'^{-1}AR^{-1}$. 由于 R 非零所以 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K - ww'/a_{11} \end{bmatrix}$是正定阵, 根据与上面相同的方法可知 $K - ww'/a_{11}$ 也是正定阵.

2

特征值

特征值为 ± 1 . 从几何角度来看, $Fx = x$ 表示经过 Householder 变换之后向量并没有改变, 对于 $F = I - 2\frac{vv'}{v'v}$ 来说, 任何与 v 正交的向量都有此效果, 在 n 维空间中有 $n-1$ 个与 v 正交的方向, 故 1 为 $n-1$ 重特征值. $Fx = -x$ 表示变换后与原向量相反, 与 v 共线的向量都有此性质, 故 -1 为 1 重特征值. 代数角度来看, 不妨设 v 是单位向量, 即 $F = I - 2vv'$

$$F'F = (I - 2vv')(I - 2vv') = I - 4vv' + 4vv'vv' = I$$

故 F 为正交矩阵, 特征值只能为 ± 1 , 再根据 $Fv = -v$, 任意与 v 正交的 u 都有 $Fu = u$, 可知 1 为 n 重特征值, -1 为 1 重特征值.

行列式

由公式 $det(I + xy') = 1 + x'y$ 可得 $det(I - 2vv') = 1 - 2v'v = -1$.

奇异值

由于是正交矩阵, 奇异值全为 1 .

3

a)

设向量 $x = [rcos\phi, rsin\phi]'$, 则

$$Fx = \begin{bmatrix} -cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rcos\phi \\ rsin\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -rcos(\phi + \theta) \\ rsin(\phi + \theta) \end{bmatrix}$$

表示 F 是将向量朝着 $[sin(\theta/2), cos(\theta/2)]'$ 方向做镜像.

$$Jx = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rcos\phi \\ rsin\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rcos(\phi - \theta) \\ rsin(\phi - \theta) \end{bmatrix}$$

表示 J 将向量顺时针旋转 θ 角度.

b)

主要思路是: 对于 $m \times n$ 的矩阵, 在处理第 k 列时, 利用 Givens 旋转将此列的后 $m-k$ 个值变为 0 . 每旋转 1 次就找到此列最后 2 个不为 0 的值, 构造对应的 Givens 矩阵使得旋转后最后 1 个值变为 0 . 下面给出 ~~C++~~ R 语言风格的伪代码.

```
for(j=1; j<=n; j++){
    for(i=m; i>=j+1; i--){
        r = sqrt(A[i-1, j]^2 + A[i, j]^2);
        c = A[i-1, j] / r;
        s = A[i, j] / r;
        J = {{c, s}, {-s, c}};
        A[i-1:i, j:n] = JA[i-1:i, j:n];
    }
}
```

c)

每次循环做 4 次乘法, 1 次加法, 1 次平方根运算, 共计 6 次 flop. 比 Householder 方法 多 50% .