4 Конечные автоматы

4.1 Схемы из функциональных элементов с памятью

Рассмотренные ранее схемы из функциональных элементов могут использоваться для преобразования наборов входных сигналов, поступающих на входы схемы в моменты времени 1,2,..,t, в наборы выходных сигналов, появляющихся на выходах в те же моменты времени. При этом преобразование в каждый момент времени не зависит от входных сигналов в предшествующие моменты и определяется системой функцией алгебры логики, реализуемой схемой. Поэтому такие схемы называются схемами из функциональных элементов *без памяти.*

Схемы из функциональных элементов *с памятью* со входами $x_1, \ldots, x_n$ и выходами $y_1, \ldots y_m$ строятся из схемы без памяти со входами $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots u_{m'}$ и выходами $y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_{m'}$ подключением элементов *задержки* G. Элемент G имеет один вход z и один выход u, причём значение $u(t)$ выходного сигнала в момент t определяется *состоянием* элемента $q(t)$ задержки в этот момент и равно значению $z(t-1)$ входного сигнала в момент $t-1, t>1$, значение выходного сигнала $u(1)$ в начальный момент времени 1 есть *начальное состояние* $q(1)$ элемента задержки. В итоге в общем случае выходные сигналы в данный момент времени завися от входных сигналов,поступающих в данный момент времени, но и от предшествующих сигналов.

При подключении элемента задержки к его входу подключается один из выходов $z_i, i=1, \ldots, m'$ схемы из функциональных элементов без памяти, а выход элемента задержки подключается к одному из входов $u_i, i=1, m'$ схемы без памяти (каждый из выходов $z_1, \ldots, z_{m'}$ и каждый из входов $u_1, \ldots u_{m'}$ схемы без памяти соединяется с единственным элементом задержки). Таким образом, схема без памяти, используемая при построении схемы с памятью, имеет $n+m'$ входов и $m+m'$ выходов и реализует систему из $m+m'$ функций алгебры логики, где m' – число элементов задержки:

$$z_i=\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, ..., u_{m'}), i=1, ..., m';$$

$$y_i=\psi_i(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, ..., u_{m'}), i=1, ..., m.$$

Элементы задержки связывают значения входов $u_i(t)$ схемы без памяти со значениями выходов $z_i(t-1), t>1, i=1, \ldots, m'$ в предыдущий момент времени:

$$u_i(t)=z_i(t-1), i=1, \ldots, m', t>1.$$

При этом значения $u_i(1), i=1, \ldots, m'$ принимаются как начальные состояния элементов задержки, а их совокупность – как начальное состояние схемы из функциональных элементов с памятью.

Таким образом, схема с памятью описывается системой рекуррентных уравнений

$$u_i(1)=q_i \in \{0,1\}, i=1, ..., m',$$

$$u_i(t) = z_i(t-1) = \varphi_i(x_1(t-1), x_2(t-1), ..., x_n(t-1), u_1(t-1), ..., u_{m'}(t-1)), i = 1, ..., m', t > 1.$$

$$y_i(t) = \psi_i(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_{m'}(t)), i = 1, ..., m, t \geq 1.$$

При этом вектор

$$(u_1(t), \ldots, u_{m'}(t))$$

определяет состояние схемы из функциональных элементы с памятью в момент времени t.

Рассмотренная система рекуррентных уравнений называется *системой канонических уравнений* схемы из функциональных элементов с памятью. Примеры.

1. Двоичный сумматор последовательного действия, $n = 2, m = m' = 1$.

$$u(1) = 0;$$

$$u(t) = x_1(t-1) \& x_2(t-1) \mathrm{V} x_1(t-1) \& u(t-1) \mathrm{V} x_2(t-1) \& u(t-1), t > 1.$$

$$y(t) = x_1(t) \oplus x_2(t) \oplus u(t), t \geq 1;$$

2. Регистр сдвига (n=m=1).

$$u_1(1) = 0, u_2(1) = 0, ..., u_{m'}(1) = 0;$$

$$u_{m'}(t) = u_{m'-1}(t-1),$$

$$\ldots,$$

$$u_2(t) = u_1(t-1),$$

$$u_1(t) = x_1(t-1), t > 1;$$

$$y_1(t) = u_{m'}(t), t \geq 1.$$

Функционирование схемы из функциональных элементов с памятью заключается в преобразовании входного слова как последовательности наборов входных сигналов в выходное слово (последовательность наборов выходных сигналов). При этом функционировании образуется и используется последовательность наборов состояний элементов задержки. Схемы из функциональных элементов с памятью и соответствующие рекуррентные уравнения являются одним из способов описания *конечного автомата*.

4.2 Понятие конечного автомата

Конечный автомат определяется как набор (пятерка)

$$(A, Q, B, \varphi, \psi),$$

где A, B и Q — конечные множества (*входной и выходной алфавиты* и *алфавит состояний* соответственно),

$\varphi : Q \times A \to Q$ — функция переходов,

$\psi : Q \times A \to B$ — функция выходов.

Пусть $|A| = m, |Q| = n, |B| = l$ — мощности множеств A, Q и B соответственно.

Конечный автомат можно задать следующими способами:

а)Прямоугольными *таблицами переходов* T_φ *и выходов* T_ψ размера $m \times n$

$$T_\varphi(i, j) = \varphi(q_j, a_i), T_\psi(i, j) = \psi(q_j, a_i),$$

где $q_j \in Q,\ a_i \in A$.

б) Диаграммами переходов, где вершины соответствуют состояниям $q_i, i = 1 \dots n$, а дуги (из q_i в q_j) соответствуют предикату $\varphi(q_i, a) = q_j, a \in A$, и помечаются $(a, \psi(q_i, a))$.

Утверждение 1.1. Число конечных автоматов при заданных алфавитах A, B и Q не превышает $(nl)^{nm}$.

(nm — число клеток в таблице, nl — число возможных пар значений в соответствующих одна другой клетках таблиц.)

Если функция ψ фиктивно зависит от второго аргумента, то конечный автомат называется *конечным автоматом Мура*, В случае автомата Мура таблица выходов имеет размер $1 \times n$, дуги диаграммы переходов помечаются a, а вершины помечаются $(q, \psi(q, a))$. Число конечных автоматов Мура не превышает $(n)^{nm} \times l^n)$.

4.3 Функционирование конечного автомата

Будем обозначать C^* — множество всех слов в алфавите C, Λ — пустое слово, $|\gamma| = n$ — длину слова

$$\gamma = c(0) \dots c(n-1)$$

в алфавите C, $\delta = \gamma]_l$ — начало δ длины l слова $\gamma = \delta\delta'$ (δ' — конец этого слова).

Операция *конкатенации* состоит в приписывании слова к слову. Множество C^* с операцией конкатенации образует полугруппу, единицей которой является пустое слово Λ.

Распространим функции переходов и выходов на множество $Q \times A^*$, то есть, будем использовать функции

$$\varphi : Q \times A^* \to Q$$

и

$$\psi : Q \times A^* \to B,$$

определив их следующим образом:

$$\varphi(q, \Lambda) = q,$$

$$\varphi(q, \alpha a) = \varphi(\varphi(q, \alpha), a), q \in Q, \alpha \in A^*, a \in A.$$

$$\psi(q, \Lambda) = \Lambda.$$

$$\psi(q, \alpha a) = \psi(\varphi(q, \alpha), a), q \in Q, \alpha \in A^*, a \in A.$$

Здесь $\varphi(q, \alpha)$ — состояние, в которое переходит конечный автомат из начального состояния после поступления на его вход слова α.

Это позволяет определить функции $\bar{\varphi} : Q \times A^* \to Q^*$ и $\bar{\psi} : Q \times A^* \to B^*$:

$$\bar{\varphi}(q, \alpha) = \varphi(q, \alpha]_0)\varphi(q, \alpha]_1) \dots \varphi(q\alpha]_l) \dots \varphi(q, \alpha),$$

$$\bar{\psi}(q, \alpha) = \psi(q, \alpha]_1)\psi(q, \alpha]_2) \dots \psi(q, \alpha]_{l+1}) \dots \psi(q, \alpha).$$

Здесь $\alpha]_0$ – пустое слово.

Функционирование конечного автомата $V, V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ описывается в виде тернарного отношения (предиката)

$$F = \{(\alpha, \bar{\varphi}(q, \alpha), \bar{\psi}(q, \alpha)) | \alpha \in A^*, q \in Q\}.$$

Инициальный конечный автомат V_q определяется конечным автоматом V и выделенным его *начальным* состоянием q, он описывается шестеркой

$$V_q = (A, Q, B, \varphi, \psi, q).$$

Функционирование инициального автомата V_q есть тернарное отношение

$$F_q = \{(\alpha, \bar{\varphi}(q, \alpha), \bar{\psi}(q, \alpha)) | \alpha \in A^*\}.$$

Инициальный автомат определяет *конечно автоматную функцию*

$$f : A^* \to B^*, f(\alpha) = \bar{\psi}(q, \alpha).$$

Для задания инициального конечного автомата и его функционирования можно использовать *канонические уравнения.*

Его функционирование образуется тройками слов

$$F_q = (\alpha, \kappa, \beta),$$

такими, что

$$\alpha = \alpha(1) \dots \alpha(n),$$

$$\beta = \beta(1) \dots \beta(n),$$

$$\kappa = \kappa(1) \dots \kappa(n)$$

при некотором n, и, для любого $t, 1 \le t \le n$, имеет место система соотношений (канонических уравнений автомата V_q)

$$\kappa(1) = q,$$

$$\kappa(t) = \varphi(\kappa(t-1), \alpha(t-1)), t > 1$$

$$\beta(t) = \psi(\kappa(t), \alpha(t)), t \ge 1.$$

4.4 Разновидности конечных автоматов

Автономным называется конечный автомат, функции переходов $\varphi(z,x)$ и выходов $\psi(z,x)$ которого не зависят от второго аргумента.

В *автомате-часах* только функция переходов $\varphi(z,x)$ не зависит от второго аргумента.

Если функция выходов удовлетворяет тождеству $\psi(z,x)=z$, то конечный автомат называется *переходной системой.*

В *автомате без памяти* $|Q|=1$.

Автомат $V=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ называется автоматом *с конечной памятью,* если существует $k, k\in N$, такое, что для всех $\alpha, |\alpha|=k$, для всех q,q'

$$\bar{\psi}(q\alpha)=\bar{\psi}(q',\alpha)$$

влечет

$$\varphi(q,\alpha)=\varphi(q'\alpha),$$

то есть заключительное состояние однозначно определяется по входным и выходным символам за последние k тактов. Наименьшее k, удовлетворяющее этому условию, есть *порядок памяти автомата.*

Автомат $V=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ называется автоматом *с конечным запоминанием,* если существует такое натуральное k, что для любых состояния q автомата и слов α,α' из A, имеющих одинаковые концы длины k, выполняется равенство

$$\psi(q,\alpha)=\psi(q,\alpha').$$

Если указанное равенство выполняется в любой момент $t\geq k$, то автомат называется *самонастраивающимся.*

4.5 Упражнения

1.1 Построить таблицы переходов и выходов, а также диаграммы Мура и записать канонические уравнения автомата,

а)реализующего функцию $f:\{0,1\}^*\to\{0,1\}^*$ такую, что если

$$\alpha=a(1),\ldots,a(n)$$

$$\beta=f(\alpha)=b(1)\ldots b(n),$$

то

$$b(i)=\sum_{j=0}^{i}{}_{\bmod 2}\ a(j),\ \ i=1,...,n.$$

б) реализующего сложение двух последовательностей в троичной системе счисления.

в) описывающего функционирование 3-разрядного регистра сдвига, а также функционирование такого регистра при обрыве соединения между первым и вторым разрядами.

4.2 Представить автоматную модель автоматического устройства, отпускающего стакан газированной воды за 1 рубль или стакан сока за 5 рублей и приходящий в негодность при попадании в него фальшивой монеты. Контрольные вопросы.

1. В чем отличие функционирования схем из функциональных элементов без памяти и с памятью?

2. Какими способами можно задать конечный автомат?

3. Каково число различных таблиц переходов и выходов конечного автомата, а также различных пар таких таблиц?

4. Как описывается функционирование конечного автомата?

5. Как задается инициальный конечный автомат и как описывается его функционирование.

6. В чем состоит различие определений автоматов с конечным запоминание и с конечной памятью?

4.6 Лабораторное задание (Лабораторная работа номер 3)

Написать программу, вычисляющую триплеты

$$(\alpha, \kappa, \beta)$$

функционирования инициального конечного автомата $(A, Q, B, \psi, \varphi, q)$, $|A| = |B| = 3, |Q| = 5$, при заданном входном слове Алфавиты A,B и Q составить произвольно из соответствующего числа различных символов.

Входная последовательности, начальное состояние, таблицы переходов и выходов выбираются произвольно (могут быть изменены преподавателем). Эта программа потребуется при выполнении четвертой лабораторной работы