9 Машины Тьюринга

9.1 Автоматы как вычислители и как распознаватели

Опишем вычислительное устройство, реализующее функционирование автомата и как вычислителя и как распознавателя. Пусть имеется бесконечная вправо лента, разбитая на ячейки. В первых ячейках записано некоторое слово во входном алфавите A инициального конечного автомата $V_q(A, Q, B, \varphi, \psi, q_1)$, в остальных ячейках записан символ $-$, не принадлежащий алфавиту A. Имеется устройство, считывающее с текущей ячейки ленты записанный в неё символ a, подающее его на вход автомата V_{q_1}, находящегося в текущем состоянии q и записывающее в ту же ячеку выходной символ $b = \psi(q, a)$ автомата вместо считанного ранее (при этом изменяется и текущее состояние автомата). Первоначально текущей ячейкой объявляется самая левая ячейка ленты, а после указанных действий текущей становится следующая ячейка, расположенная справа от только что использованной. Первоначально автомат находится в начальном состоянии q_1. После обработки очередной ячейки, состояние автомата изменяется в соответствии с функцией переходов φ. Работа такого вычислителя заканчивается как только будет считан из текущей ячейки символ $-$. Очевидно, что описанный вычислитель моделирует функционирование конечного автомата. Если первоначально на ленте в начальных ячейках записано некоторое слово α в алфавите A, то по окончании работы вычислителя на ленте будет слово $\bar{\psi}(q, \alpha)$. Не ограничивая общности, можно считать, что входной A и выходной B алфавиты автомата совпадают. Далее мы полагаем, что $A = B$. Программа работы такого вычислителя описывается как множество троек (команд)

$$(\psi(q, a), R, \varphi(q, a)),\ a \in A,\ q \in Q$$

где R означает смещение вправо на одну позицию.

Такую программу удобно описывать в виде таблицы, столбцы которой соответствуют состояниям автомата, а строки – символам алфавита $A \cup \{-\}$. Элементами таблицы являются указанные команды, если они определены для данного символа алфавита и данного состояния. Заметим, что троек, соответствующих символу «–» в указанном списке нет, и, следовательно, клетки таблицы в строке, соответствующей символу «–» остаются пустыми.

Таблица вычислителя, соответствующего данному конечному автомату получается очевидным способом из таблиц переходов и выходов.

При работе из таблицы выбирается тройка, соответствующая символу a, считываемому из текущей ячейки, и текущему состоянию автомата. Процесс вычислений останавливается, как только будет выбрана пустая клетка таблицы.

Если входное слово рассматривать как значение числового аргумента, а выходное как соответствующее значение функции, то автомат, а следовательно и рассмотренный вычислитель реализует вычисление значений $\bar{\psi}(q, \alpha)$ этой функции для слова α в алфавите A. Не всякая функция вычислима с помощью подходящего автомата и, следовательно, описанного вычислителя.

Например, функция зеркального отображения записи аргумента не вычислима таким вычислителем.

Рассмотренный вычислитель можно рассматривать также и как устройство, представляющее регулярные события, если оно моделирует работу конечного автомата, представляющего данное регулярное событие с помощью подмножества $B' \subseteq B$. А именно, описанный вычислитель преставляет с помощью подмножества B' регулярные события, состоящие из слов после обработки которых не ленте оказываются слова, заканчивающиеся символом из множества B'.

Как и конечным автоматом вычислителем подобного вида представимы только регулярные события и только они.

Примером непредставимого события является множество двоичных наборов с одинаковым числом нулей и единиц.

9.2 Машина Тьюринга

Машина Тьюринга отличается от только что рассмотренной автоматной модели вычислений тем, что направление движения головки не фиксировано, а зависит от текущего состояния q, а также от считываемого с ленты символа $a \in A \cup \{-\}$ и определяется функцией $\delta(a, q)$ принимающей значения L, R или S, соответствующие перемещению в соседнюю левую (L) или правую (R) ячейку или сохранению текущего положения (S). Лента предполагается бесконечной в обе стороны. Программа машины Тьюринга задаётся совокупностью команд

$$(\psi(q,a), \delta(q,a), \varphi(q,a)),\ a \in A \cup \{-\},\ q \in Q$$

Для некоторых пар (q, a) перечисленные три функции не определяются.

Машина Тьюринга применяется к слову в некотором конечном алфавите A, записанному в нескольких ячейках ленты. В остальных ячейках записан "пустой"символ «–». Предполагается, что в исходном слове имеется хотя бы один символ, отличный от "пустого"символа, и что головка первоначально расположена против ячейки, содержащей крайний левый "непустой"символ. Алфавит состояний включает начальное состояние q_0, в котором находится считывающая головка перед началом работы.

Функционирование машины Тьюринга заключается в исполнении команд программы с учетом содержания a текущей ячейки ленты и текущего состояния q считывающей головки. При этом по $\psi(q, a)$ определяется новое состояние текущей ячейки ленты по $\delta(q, a)$ определяются новое положение головки, то есть новая текущая ячека ленты, а по $\varphi(q, a)$ определяется новое состояние считывающей головки. Процесс останавливается как только не сможет быть продолжен из-за неопределенности указанных значений. После останова запись на ленте определяет результат применения машины Тьюринга к первоначально записанному слову. В случае, если машина не останавливается, говорят, что она к данному входному слову неприменима. Если машина останавливается, то считывающая головка должна также быть против самого левого символа на ленте, отличного от «–».

Такую программу также удобно размещать в таблице, столбцы которой соответствуют состояниям считывающей головки, а строки – алфавиту ленты. В ячейках таблицы записываются команды. Пустые ячейки соответствуют условию останова процесса вычислений.

В следующем параграфе приведен пример программы, инвертирующей слово.

Машину Тьюринга можно использовать как распознаватель, то есть можно говорить о представлении событий машиной Тьюринга: Событие X в алфавите A ленты машины Тьюринга представимо с помощью подмножества A' множества A, если машина применима к каждому слову этого события и вычисляет для каждого такого слова результат, имеющий крайний справа непустой символ из множества A'.

Учитывая, что конечный автомат является частным случаем машины Тьюринга, можно заключить, что регулярные события представимы машинами Тьюринга. Машины Тьюринга могут представлять и события, не являющиеся регулярными. Например, можно построить машину Тьюринга, представляющую язык в алфавите 0,1, состоящий из слов, содержащих равные количества нулей и единиц.

Программа такой машины описывается следующей таблицей.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
0	$2Sq_1$			$0Rq_3$	$0Lq_4$	$0Lq_5$	$0Sq_0$	
1	$1Rq_0$	$1Lq_1$	$1Lq_2$	$2Sq_4$		$1Lq_5$	$1Sq_0$	
2	$2Rq_0$	$2Lq_1$	$1Lq_2$	$2Rq_3$	$2Lq_4$	$0Lq_5$	$-Rq_6$	
$-$	$-Lq_2$	$-Rq_3$	$-Rq_7$	$-Lq_5$	$-Rq_6$	$-Rq_7$	$2Sq_7$	

При функционировании машины итеративно выполняются следующие действия

Пока лента содержит непустую ячейку

1)Самый левый символ 0 заменяется на 2 и считывающее устройство возвращается к крайнему левому непустому символу (состояния q_0, q_1) Если такого символа нет, то машина возвращясь к самой левой непустой ячейке, заменяет символы 2 на 1 и останавливается (состояния q_2, q_7).

2)Самый левый символ 1 заменяется на 2 и считывающее устройство возвращается к крайнему левому непустому символу (состояния q_3, q_4). Если такого символа нет, то машина возвращается к самой левой непустой ячейке, заменяет символ 2 на 0 и останавливается (состояния q_5, q_7).

3)Стираются самые левые символы 2 (состояния q_6, q_7).

В текущую ячейку записывается символ 2 и машина останавливается.

Результатом работы машины будет слово, заканчивающееся символом 1, или 0, если в исходном слове было больше единиц или нулей соответственно или слово состоящее из одного непустого символа 2 при одинаковом количестве нулей и единиц в исходном слове. Таким образом, машина представляет слова, содержащие одинаковое число нулей и единиц с помощью подмножества $\{2\}$ множества $\{0, 1, 2\}$. Другие варианты остановки невозможны.

9.3 Конструирование машины Тьюринга

Композиция машин Тьюринга T_1 и T_2 осуществляется соединением двух таблиц и помещением в некоторые пустые ячейки таблицы для T_1 команды (a, S, q_{2_0}), где a - символ входного алфавита, соответствующий строке, в которой находится пустая ячейка, а q_{2_0} – начальное состояние машины T_2. Если машина T_1 вычисляет значение предиката, то ее пустые ячейки помечаются значением этого предиката: в них помещаются (0) или (1) соответственно. При композиции команды (a, S, q_{2_0}), помещаются в ячейки,помеченные одним из этих символов, по смыслу.

Итерация машины Тьюринга T осуществляется записью в некоторые её пустые ячейки команды (a, S, q_0).

Взаимной заменой в командах значений L и R получается *двойственная машина.*

Пример машины, реализующей зеркальное отображение.

Схема алгоритма:

1.Проверить, есть ли справа непустой символ. Если нет, то к п.6.

2.Переместиться на правый крайний символ и сдвинуть его на одну позицию вправо, оставив ячейку, где он был, пустой. Сместиться на левый крайний непустой символ.

3.Проверить, есть ли справа непустой символ. Если нет, к п. 5.

4.Найти справа ячейку, предшествующую пустой ячейке. Перенести символ из этой ячейки на позицию справа от крайнего правого непустого символа, оставив указанную ячейку пустой. Сместиться на левый крайний непустой символ. Перейти к п. 3.

5.Перенести символ из текущей ячейки на позицию справа от крайнего правого непустого символа, оставив указанную ячейку пустой. Сместиться на левый крайний непустой символ.

6.Конец.

Операторная схема Ляпунова:

$$*p_1 \uparrow^6 \quad A_2 \quad p_3 \uparrow^5 \quad A_4 \uparrow^3 \quad A_5 \quad \omega_6$$

Примечание.Знаком * отмечается начальный оператор. Переход к оператору по стрелке — при значении 0 предиката p или безусловный переход после оператора A.

Машины Тьюринга T_1, T_2, T_3, T_4 и T_5 для отдельных операторов

$p_1\uparrow,\ a_2,\ p_3\uparrow,\ a_4$ и A_5 соответственно:

T_1	q_0^1	q_1^1	q_2^1	q_3^1	T_2	q_0^2	q_1^2	q_2^2	q_3^2	q_4^2	q_5^2
0	$0Rq_1^1$	$0Lq_2^1$	(1)	(0)	0	$0Rq_0^2$	$-Rq_2^2$			$0Lq_4^2$	
1	$1Rq_1^1$	$1Lq_2^1$	(1)	(0)	1	$1Rq_0^2$	$-Rq_3^2$			$1Lq_4^2$	
$-$		$-Lq_3^1$			$-$	$-Lq_1^2$		$0Lq_4^2$	$1Lq_4^2$	$-Rq_5^2$	

T_3	q_0^3	q_1^3	q_2^3	q_3^3
0	$0Rq_1^3$	$0Lq_2^3$	(1)	(0)
1	$1Rq_1^3$	$1Lq_2^3$	(1)	(0)
$-$		$-Lq_3^3$		

T_4	q_0^4	q_1^4	q_2^4	q_3^4	q_4^4	q_5^4	q_6^4	q_7^4	q_8^4	q_9^4
0	$0Rq_0^4$	$-Rq_2^4$	$0Rq_4^4$	$0Rq_4^4$	$0Rq_4^4$	$0Rq_5^4$	$0Lq_6^4$	$0Lq_8^4$	$0Lq_8^4$	
1	$1Rq_0^4$	$-Rq_3^4$	$1Rq_5^4$	$1Rq_5^4$	$1Rq_4^4$	$1Rq_5^4$	$1Lq_6^4$	$1Lq_8^4$	$1Lq_8^4$	
$-$	$-Lq_1^4$		$-Rq_2^4$	$-Rq_3^4$	$0Lq_6^4$	$1Lq_6^4$	$-Lq_7^4$	$-Lq_7^4$		

T_5	q_0^5	q_1^5	q_2^5	q_3^5	q_4^5	q_5^5	q_6^5	q_7^5	q_8^5
0	$-Rq_1^5$	$0Rq_3^5$	$0Rq_3^5$	$0Rq_3^5$	$0Rq_3^5$	$0Lq_5^5$	$0Lq_7^5$	$0Lq_7^5$	
1	$-Rq_2^5$	$1Rq_4^5$	$1Rq_4^5$	$1Rq_3^5$	$1Rq_3^5$	$1Lq_5^5$	$1Lq_7^5$	$1Lq_7^5$	
$-$		$-Rq_1^5$	$-Rq_2^5$	$0Lq_5^5$	$1Lq_5^5$	$-Lq_6^5$	$-Lq_6^5$		

Примечание. В круглых скобках здесь и ниже указаны значения предиката, задаваемого на пустых ячейках. Предикаты при конструировании определяются таким образом, чтобы переходы по стрелке в операторной схеме соответствовали значению 0.

Построение машины для зеркального отображения кода осуществим в следующей последовательности:

1) Построим композицию T_{12} машин T_1 и T_2. Она соответствует операторной схеме

$$*p_1\uparrow^6 \quad A_2 \quad \omega_6$$

$T_{1,2}$	q_0^1	q_1^1	q_2^1	q_3^1	q_0^2	q_1^2	q_2^2	q_2^3	q_4^2	q_5^2
0	$0Rq_1^1$	$0Lq_2^1$	$0Sq_0^2$	(0)	$0Rq_0^2$	$-Rq_2^2$			$0Lq_4^2$	
1	$1Rq_1^1$	$1Lq_2^1$	$0Sq_0^2$	(0)	$1Rq_0^2$	$-Rq_3^2$			$1Lq_4^2$	
$-$		$-Lq_3^1$			$-Lq_1^2$		$0Lq_4^2$	$1Lq_4^2$	$-Rq_5^2$	

2) Построим композицию $T_{3,4}$ машин T_3 и T_4. Она соответствует операторной схеме

$$*p_3\uparrow \quad A_4$$

$T_{3,4}$	q_0^3	q_1^3	q_2^3	q_3^3
0	$0Rq_1^3$	$0Lq_2^3$	$0Sq_0^4$	(0)
1	$1Rq_1^3$	$1Lq_2^3$	$1Sq_0^4$	(0)
$-$		$-Lq_3^3$		

q_0^4	q_1^4	q_2^4	q_3^4	q_4^4	q_5^4	q_6^4	q_7^4	q_8^4	q_9^4
$0Rq_0^4$	$-Rq_2^4$	$0Rq_4^4$	$0Rq_4^4$	$0Rq_4^4$	$0Rq_5^4$	$0Lq_6^4$	$0Lq_8^4$	$0Lq_8^4$	
$1Rq_0^4$	$-Rq_3^4$	$1Rq_5^4$	$1Rq_5^4$	$0Rq_4^4$	$1Rq_5^4$	$1Lq_6^4$	$1Lq_8^4$	$1Lq_8^4$	
$-Rq_1^4$		$-Rq_2^4$	$-Rq_3^4$	$0Lq_6^4$	$1Lq_6^4$	$-Lq_7^4$	$-Lq_7^4$		

3) Построим итерацию $< T_{3,4} >$ машины $T_{3,4}$. Она соответствует операторной схеме

$$p_3 \uparrow A_4 \uparrow^3$$

$< T_{3,4} >$	q_0^3	q_1^3	q_2^3	q_3^3
0	$0Rq_1^3$	$0Lq_2^3$	$0Sq_4^0$	(0)
1	$1Rq_1^3$	$1Lq_2^3$	$1Sq_4^0$	(0)
$-$		$-Lq_3^3$		

q_0^4	q_1^4	q_2^4	q_3^4	q_4^4	q_5^4	q_6^4	q_7^4	q_8^4	q_9^4
$0Rq_0^4$	$-Rq_2^4$	$0Rq_4^4$	$0Rq_4^4$	$0Rq_4^4$	$0Rq_5^4$	$0Lq_6^4$	$0Lq_8^4$	$0Lq_8^4$	$0Sq_0^3$
$1Rq_0^4$	$-Rq_3^4$	$1Rq_5^4$	$1Rq_5^4$	$1Rq_4^4$	$1Rq_5^4$	$1Lq_6^4$	$1Lq_8^4$	$1Lq_8^4$	$1Sq_0^3$
$-Rq_1^4$		$-Rq_2^4$	$-Rq_3^4$	$0Lq_6^4$	$1Lq_6^4$	$-Lq_7^4$	$-Lq_7^4$		

4) Построим композицию $T_{1,2;<3,4>}$ машин $T_{1,2}$ и $< T_{3,4} >$. Она соответствует операторной схеме

$$*p_1 \uparrow^6 \quad A_2 \quad p_3 \uparrow \quad A_4 \uparrow^3 \quad \omega_6$$

$T_{1,2;<3,4>}$	q_0^1	q_1^1	q_2^1	q_3^1	q_0^2	q_1^2	q_2^2	q_2^3	q_4^2	q_5^2
0	$0Rq_1^1$	$0Lq_2^1$	$0Sq_0^2$	(0)	$0Rq_0^2$	$-Rq_2^2$			$0Lq_4^2$	$0Sq_0^3$
1	$1Rq_1^1$	$1Lq_2^1$	$0Sq_0^2$	(0)	$1Rq_0^2$	$-Rq_3^2$			$1Lq_4^2$	$1Sq_0^3$
$-$		$-Lq_3^1$			$-Lq_1^2$		$0Lq_4^2$	$1Lq_4^2$	$-Rq_5^2$	

q_0^3	q_1^3	q_2^3	q_3^3
$0Rq_1^3$	$0Lq_2^3$	$0Sq_4^0$	
$1Rq_1^3$	$1Lq_2^3$	$1Sq_4^0$	
	$-Lq_3^3$		

q_0^4	q_1^4	q_2^4	q_3^4	q_4^4	q_5^4	q_6^4	q_7^4	q_8^4	q_9^4
$0Rq_0^4$	$-Rq_2^4$	$0Rq_4^4$	$0Rq_5^4$	$0Rq_4^4$	$0Rq_5^4$	$0Lq_6^4$	$0Lq_8^4$	$0Lq_8^4$	$0Sq_0^3$
$1Rq_0^4$	$-Rq_3^4$	$1Rq_5^4$	$1Rq_5^4$	$1Rq_4^4$	$1Rq_5^4$	$1Lq_6^4$	$1Lq_0^3$	$1Lq_8^4$	$1Sq_0^3$
$-Rq_1^4$		$-Rq_2^4$	$-Rq_3^4$	$0Lq_6^4$	$1Lq_6^4$	$-Lq_7^4$	$-Lq_7^4$		

5) Построим композицию $T_{1,2;<3,4>;5}$ машин $T_{1,2;<3,4>}$ и T_5. (Соответствует исходной операторной схеме)

$T_{1,2;<3,4>;5}$	q_0^1	q_1^1	q_2^1	q_3^1	q_0^2	q_1^2	q_2^2	q_2^3	q_4^2	q_5^2
0	$0Rq_1^1$	$0Lq_2^1$	$0Sq_0^2$	(0)	$0Rq_0^2$	$-Rq_2^2$			$0Lq_4^2$	$0Sq_0^3$
1	$1Rq_1^1$	$1Lq_2^1$	$0Sq_0^2$	(0)	$1Rq_0^2$	$-Rq_3^2$			$1Lq_4^2$	$1Sq_0^3$
$-$		$-Lq_3^1$			$-Lq_1^2$		$0Lq_4^2$	$1Lq_4^2$	$-Rq_5^2$	

q_0^3	q_1^3	q_2^3	q_3^3
$0Rq_1^3$	$0Lq_2^3$	$0Sq_4^0$	(0)
$1Rq_1^3$	$1Lq_2^3$	$1Sq_4^0$	(0)
	$-Lq_3^3$		

q_0^4	q_1^4	q_2^4	q_3^4	q_4^4	q_5^4	q_6^4	q_7^4	q_8^4	q_9^4
$0Rq_0^4$	$-Rq_2^4$	$0Rq_4^4$	$0Rq_4^4$	$0Rq_4^4$	$0Rq_5^4$	$0Lq_6^4$	$0Lq_8^4$	$0Lq_8^4$	$0Sq_0^3$
$1Rq_0^4$	$-Rq_3^4$	$1Rq_5^4$	$1Rq_5^4$	$1Rq_4^4$	$1Rq_5^4$	$1Lq_6^4$	$1Lq_0^3$	$1Lq_8^4$	$1Sq_0^3$
$-Rq_1^4$		$-Rq_2^4$	$-Rq_3^4$	$0Lq_6^4$	$1Lq_6^4$	$-Lq_7^4$	$-Lq_7^4$		

q_0^5	q_1^5	q_2^5	q_3^5	q_4^5	q_5^5	q_6^5	q_7^5	q_8^5
$-Rq_1^5$	$0Rq_3^5$	$0Rq_3^5$	$0Rq_3^5$	$0Rq_3^5$	$0Lq_5^5$	$0Lq_7^5$	$0Lq_7^5$	
$-Rq_2^5$	$1Rq_4^5$	$1Rq_4^5$	$1Rq_3^5$	$1Rq_3^5$	$1Lq_5^5$	$1Lq_7^5$	$1Lq_7^5$	
	$-Rq_1^5$	$-Rq_2^5$	$0Lq_5^5$	$1Lq_5^5$	$-Lq_6^5$	$-Lq_6^5$		

9.4 Упражнения

1. Представить машину Тьюринга, рассмотренную в п.1 с помощью операций композиции и итерации более простых машин.

2. Рассмотреть последовательность конфигураций машины Тьюринга при работе с исходным словом 110.

3.Построить машину Тьюринга для сложения двух двоичных кодов
а) поразрядно по модулю 2,
б) как двоичные числа.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит принципиальное отличие машины Тьюринга от конечного автомата?

2. По какому признаку устанавливается принадлежность слова множеству, представимому машиной Тьюринга?

3. Что представляет собой программа машины Тьюринга?

4.В каком случае машина Тьюринга останавливается и что является результатом ее работы по программе?

5.Каковы способы конструирования машины Тьюринга на основе более простых компонентов?

6. Приведите примеры событий, не представимых конечным автоматом, но представимых машиной Тьюринга.