

6 Эксперименты с конечными автоматами

6.1 Основные понятия

Эксперимент с инициальным конечным автоматом

$$V = (A, Q, B, \varphi, \psi, q)$$

заключается в подаче на его вход слова $\alpha \in A^*$ (в *простых* экспериментах) или последовательно нескольких слов из некоторого подмножества M множества A^* (в *кратных* экспериментах) и наблюдении выходного слова $\beta \in B^*$ или множества выходных слов. Кратные эксперименты предполагают, что имеется «кнопка возврата», позволяющая перед подачей очередного входного слова вернуть конечный автомат в исходное начальное состояние.

Длиной простого эксперимента называется длина входного слова α . *Длиной кратного эксперимента* M называется наибольшая длина слова $\alpha \in M$. Различают *безусловные* и *условные* эксперименты. В условных экспериментах входные воздействия (входные слова, как и множества входных слов выбирают с учетом реакции автомата на поступившие на его входы начала слов).

Далее мы рассматриваем лишь безусловные эксперименты.

Результат применения безусловного простого эксперимента $\alpha \in A^*$ к конечному автомату $V = (A, Q, B, \varphi, \psi, q)$ определяется парой $(\alpha, \bar{\psi}(q, \alpha))$.

Результат применения безусловного кратного эксперимента $M, M \subseteq A^*$ к инициальному конечному автомату $V = (A, Q, B, \varphi, \psi, q)$ есть множество пар $\{(\alpha, \bar{\psi}(q, \alpha)) \mid \alpha \in M\}$.

Эксперименты проводятся с целью получения с наименьшими затратами времени информации об автомате, которая первоначально может быть задана не полностью. Например, может быть известно лишь множество возможных диаграмм Мура, которому принадлежит диаграмма Мура исследуемого конечного автомата, или она может быть известна, но может быть неизвестным начальное состояние автомата.

Всякий эксперимент проводится, таким образом, относительно некоторого класса K конечных автоматов (например, для класса автоматов с заданной диаграммой Мура и отличимыми начальными состояниями). Далее мы будем предполагать неопределенность лишь последнего вида, то есть в качестве класса K будем рассматривать класс $[V]$ всех инициальных автоматов, различающихся выбором начального состояния $q \in Q$ некоторого конечного автомата $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$.

Эксперимент E называется *тестовым экспериментом* для автомата $V_q, V_q \in K$, относительно класса $K = [V]$ конечных автоматов, если результат его применения к автомату V_q отличается от результата применения к любому другому автомату из класса $[V]$.

Эксперимент E называется *диагностическим* для класса автоматов $[V]$, если результаты его применения к различным автоматам этого класса различны (то есть если он является тестовым экспериментом для любого автомата $V_q \in [V]$).

6.2 Отличимость состояний множествами

6.2.1 Классы состояний, неотличимых множеством

Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ — конечный автомат и $M \subseteq A^*$. Состояния q_1 и q_2 автомата V называются *неотличимыми множеством M* , если для любого слова $\alpha \in M$ выполняется $\bar{\psi}(q_1, \alpha) = \bar{\psi}(q_2, \alpha)$. В противном случае состояния q_1 и q_2 называются *отличимыми множеством M* . По отношению неотличимости множеством M множество Q состояний автомата разбивается на классы эквивалентности, множество которых обозначается $R_V(M) = \{Q_1, \dots, Q_n\}$.

6.2.2 Существование приведенного автомата, не имеющего простого тестового эксперимента

Покажем, что существует конечный автомат приведенного вида, имеющий для каждого одноэлементного множества $M, |M| = 1$, по крайней мере два состояния, неотличимых этим множеством.

Теорема 6.1. *Для любых алфавитов A, Q, B , таких что $|A| \geq 2, |Q| \geq 3, |B| \geq 2$, существует такой автомат приведенного вида $V, V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, что для любого слова $\alpha, \alpha \in A^*$, существуют различные состояния q и q' автомата V , удовлетворяющие соотношению $\bar{\psi}(q, \alpha) = \bar{\psi}(q', \alpha)$, то есть неотличимые одноэлементным множеством $M = \{\alpha\}$.*

Доказательство.

а) Рассмотрим автомат $V = (A, Q, B, \varphi, \psi), |A| \geq 2, |Q| \geq 3, B \geq 2$ со следующими таблицами T_φ, T_ψ переходов и выходов.

T_φ	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	\dots	q_{n-2}	q_{n-1}	q_n
a_1	q_2	q_1	q_1	q_5	q_6	\dots	q_{n-1}	q_n	q_4
$a_i, i > 1$	q_2	q_1	q_2	q_5	q_6	\dots	q_{n-1}	q_n	q_4

T_ψ	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	\dots	q_{n-2}	q_{n-1}	q_n
a_1	b_2	b_1	b_1	b_1	b_1	\dots	b_1	b_1	b_2
$a_i, i > 1$	b_1	b_2	b_1	b_1	b_1	\dots	b_1	b_1	b_2

б) Покажем, что этот автомат является автоматом приведенного вида, . Действительно, состояния q_1, q_2, q_3 , отличимы словами длины 1:

$$\psi(q_1, a_1) \neq \psi(q_2, a_1), \psi(q_1, a_1) \neq \psi(q_3, a_1), \psi(q_2, a_2) \neq \psi(q_3, a_2);$$

каждое из q_1, q_2, q_3 отличимо от состояний $q_i, i > 3$ некоторым словом α длины более $n - 4, \alpha \in A^*$, при котором выходное слово автомата с начальным состоянием q_1, q_2 или q_3 не содержит символов b_2 (для каждого из них такое слово найдется, в то же время при начальных состояниях $q_i, i > 3$ выходное слово такой длины всегда содержит хотя бы одно вхождение символа b_2); различные состояния $q_1, i > 3$, отличимы друг от друга любым словом длины $n - 4$.

в) Покажем, что найдутся хотя бы два начальных состояния q, q' , неотличимых заданным словом любой длины. Если $\alpha = \Lambda$, то такими состояниями являются, например, $q = q_1, q' = q_2$. Если $\alpha \neq \Lambda$, то представим α в виде $a_i \alpha', a_i \in A$. В случае $i = 1$ имеем

$$\bar{\psi}(q_2, \alpha) = b_1 \bar{\psi}(q_1, \alpha') = \bar{\psi}(q_3, \alpha),$$

и $q = q_2, q' = q_3$ неотличимы. Если же $i \neq 1$ получим

$$\bar{\psi}(q_1, \alpha) = b_1 \bar{\psi}(q_2, \alpha') = \bar{\psi}(q_3, \alpha).$$

Таким образом, состояния q_1 и q_3 неотличимы. Теорема доказана.

Как следствие для рассмотренного в доказательстве теоремы автомата не существует и простой диагностический эксперимент.

Заметим, что условия теоремы не могут быть ослаблены: необходимость условий $|Q| \geq 3, |B| \geq 2$ очевидна, а при $|A| = 1$ самое длинное из слов минимальной длины, отличающих некоторые два состояния автомата приведенного вида, отличает друг от друга и любые другие состояния.

Следствие 6.1. *Для любого натурального $n \geq 3$ существует автомат V_q с n попарно отличимыми состояниями такой, что отсутствует простой эксперимент, тестовый для V_q относительно класса $[V]$.*

Это утверждение является следствием теоремы 6.1: в качестве автомата Q_q можно взять автомат V_{q_3} из доказательства этой теоремы.

Как следствие получим отсутствие и диагностического эксперимента для класса $[V]$.

6.2.3 Существование кратного диагностического эксперимента длины $|Q| - 1$

Покажем теперь возможность различения состояний автомата приведенного вида множествами, содержащими все слова определенной длины и оценим эту длину.

Теорема 6.2. (Мур) *Состояния q_1 и q_2 автомата $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ неотличимы тогда и только тогда, когда они неотличимы множеством $A^{|Q|-1}$ всех слов длины $|Q| - 1$.*

Доказательство основано на двух леммах.

Лемма 6.1. *Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ — конечный автомат, Λ — пустое слово, $M \subseteq A^*, \Lambda \in M, AM = \{a\alpha \mid a \in A, \alpha \in M\}$. Тогда $R_V(M \cup AM)$ есть подразбиение разбиения $R_V(M)$ множества состояний по отношению неотличимости множеством M . Если при этом $R_V(M \cup AM) = R_V(M)$, то разбиение $R_V(M)$ является разбиением множества Q на классы неотличимых состояний (любые два состояния, попадающие в один и тот же класс разбиения $R_V(M)$ неотличимы).*

Доказательство. Пусть $R_V(M) = \{Q_1, \dots, Q_m\}$ и $M' = M \cup AM$. Ясно, что состояния, неотличимые множеством M' тем более неотличимы множеством M ,

поэтому $R_V(M')$ есть подразбиение разбиения $R_V(M)$. Пусть $R_V(M) = R_V(M')$ (отношения неотличимости множествами M, M' совпадают). Допустим, что существует $k, k = 1, \dots, m$, такое, что Q_k содержит два отличимых состояния q и q' . При этом k , а также q и q' выберем так, чтобы слово $\alpha = a(1) \dots a(n)$, отличающее такие состояния, имело наименьшую возможную длину n .

Заметим, что $n > 1$, так как при $n = 1$ слово $\alpha = a(1) = a(1)\Lambda$ принадлежит $M' = AM$ (напомним, что $\Lambda \in M$) и, следовательно состояния q и q' отличимы этим множеством, что противоречит допущению об их принадлежности множеству Q_k .

Пусть $q(0) = q, q'(0) = q'$. Рассмотрим состояния $q(1) = \varphi(q, a(1))$ и $q'(1) = \varphi(q', a(1))$. При этом $\bar{\psi}(q(1), a(2) \dots a(n)) \neq \bar{\psi}(q'(1), a(2) \dots a(n))$. Следовательно $q(1)$ и $q'(1)$ принадлежат разным классам разбиения $R_V(M)$, так как длина отличающего слова на единицу меньше наименьшей длины слова, отличающего состояния одного класса. Потому найдется слово $\beta = b(1) \dots b(n')$ из M , различающее состояния $q(1)$ и $q'(1)$, (но не отличающее состояния q и q' !) Но тогда слово $\alpha' = a(1)b(1) \dots b(n') = a(1)\beta$, принадлежащее M' , отличит состояния q и q' :

$$\bar{\psi}(q, \alpha') = \psi(q, a(1))\bar{\psi}(q_1, \beta) \neq \psi(q', a(1))\bar{\psi}(q'_1, \beta) = \bar{\psi}(q', \alpha'),$$

что невозможно, так как $R_V(M') = R_V(M)$. Таким образом состояния из каждого класса разбиения $R_V(M)$ неотличимы, и лемма доказана.

Лемма 6.2. Пусть $V = \{A, Q, B, \varphi, \psi\}$ — конечный автомат, $M \subseteq A^*, \Lambda \in M, |R_V(M)| = m, |Q| = n$. Тогда любые два отличимые состояния q, q' автомата V отличимы множеством

$$M \cup AM \cup A^2M \cup \dots \cup A^{n-m}M.$$

Доказательство. Допустим, что существуют два отличимые состояния q, q' автомата V , неотличимые множеством $M_n = M \cup AM \cup A^2M \cup \dots \cup A^{n-m}M$. Они неотличимы любым из множеств $M_i = M \cup AM \cup \dots \cup A^iM, i = 0, 1, \dots, n-m$, и попадают в один и тот же класс разбиения $R_V(M_i)$. Как видим, по Лемме 1 разбиения $R_V(M_i), i = 0, 1, \dots, n-m, (M_0 = M)$ различны, а так как каждое последующее является подразбиением предыдущего, число классов в каждом из последующих не менее, чем на единицу больше, чем в предыдущем. Учитывая, что $|R_V(M_0)| = m$, получим, что $|R_V(M_i)| \geq m + i$, то есть $|R_V(M_{n-m})| \geq m + n - m = n$. Получается, что классы из $R_V(M_{n-m})$ содержат точно по одному элементу и состояния q и q' не могут входить в один и тот же класс разбиения $R_V(M_{n-m})$, то есть они отличаются этим множеством, что противоречит допущению. Лемма доказана.

6.2.4 Доказательство теоремы 6.2

Полагая $M = \{\Lambda\}$ и учитывая, что $|R_V(\{\Lambda\})| = 1$ по лемме 6.2 получим, что любые два отличимые состояния отличимы множеством

$$\{\Lambda\} \cup A\{\Lambda\} \cup A^2\{\Lambda\} \dots \cup A^{n-1}\{\Lambda\} = \{\Lambda\} \cup A \cup A^2 \dots \cup A^{n-1}.$$

Учитывая, что пустое слово Λ не отличает никакие два состояния, получим, что любые два отличимые состояния отличимы множеством

$$A \cup A^2 \dots \cup A^{n-1}. \quad (1)$$

Следовательно, состояния, неотличимые этим множеством являются неотличимыми состояниями автомата.

Далее, состояния, отличимые множеством A^i , $i = 1, 2, \dots, n - 2$, отличимы множеством A^{n-1} и, следовательно, этим множеством отличимы состояния, отличимые множеством $(??)$.

6.2.5 Об окончательности оценки длины кратного эксперимента

В общем случае оценка $|Q| - 1$ длины слов, отличающих состояния автомата V , не может быть уменьшена. Это подтверждается примером автомата Мура, заданного следующей (совмещенной) таблицей $T_{\varphi\psi}$ переходов и выходов:

$T_{\varphi\psi}$	q_1	q_2	q_3	\dots	q_{n-1}	q_n
0	q_2	q_3	q_4	\dots	q_n	q_n
1	q_2	q_1	q_2	\dots	q_{n-2}	q_{n-1}
$\psi(q_i, 0) = \psi(q_i, 1)$	1	0	0	\dots	0	0

6.2.6 О длине кратного эксперимента, отличающего два заданных состояния разных автоматов

Пусть

$$V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$$

и

$$V' = (A, Q', B, \varphi', \psi')$$

— конечные автоматы; $M \subseteq A^*$. Отношение неотличимости множеством M можно задать также на парах (q, q') состояний автоматов V, V' . Эти состояния неотличимы, если $\forall \alpha \in M \bar{\psi}(q, \alpha) = \bar{\psi}'(q', \alpha)$.

Следствие 6.2. Если V — конечный автомат приведенного вида, имеющий n состояний, то для $[V]$ существует кратный безусловный диагностический эксперимент длины $n - 1$.

Следствие 6.3. Если V — конечный автомат приведенного вида, имеющий n состояний, то для V_q существует кратный безусловный тестовый эксперимент относительно V длины $n - 1$.

Эти утверждения является следствием теоремы 6.2: в качестве эксперимента в этих утверждениях достаточно взять множество всех слов длины $n - 1$ в алфавите A , рассмотренный пример автомата Мура показывает, что в этих утверждениях оценка длины эксперимента, вообще говоря, не может быть понижена.

Теорема 6.3. *Состояния q и q' автоматов V_q и $V_{q'}$ неотличимы тогда и только тогда, когда они неотличимы множеством $A^{|Q|+|Q'|-1}$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $Q \cap Q' = \emptyset$. Рассмотренная проблема неотличимости состояний двух автоматов сводится к проблеме неотличимости состояний одного автомата, а именно автомата

$$V'' = (A, Q \cup Q', B, \varphi'', \psi''),$$

такого, что

$$\varphi''(q, a) = \begin{cases} \varphi(q, a), & \text{если } q \in Q, \\ \varphi'(q', a), & \text{если } q \in Q', \end{cases} \quad \psi''(q, a) = \begin{cases} \psi(q, a), & \text{если } q \in Q, \\ \psi'(q, a), & \text{если } q \in Q'. \end{cases}$$

Применяя Теорему 6.2 завершаем доказательство.

6.3 Упражнение

6.1 Постройте диагностические эксперименты для конечных автоматов, построенных в упражнениях 1.1 и 1.2.

Контрольные вопросы

- 1) В чем заключаются простой и кратный эксперименты с конечным автоматом?
- 2) В чем различие тестового и диагностического экспериментов с конечным автоматом?
- 3) Покажите, что рассмотренный в разделе 6.2.2 автомат не имеет простого тестового эксперимента.
- 4) Почему элементы класса состояний, не отличимых множеством M' , не различимы одно-элементными словами?
- 5) Покажите, что длина кратного тестового эксперимента для автомата, рассмотренного в разделе ?? не может быть менее $n - 1$.
- 6) Какова оценка длины кратного эксперимента, отличающего любые два состояния двух автоматов. Отличаются ли при этом отличимые состояния каждого автомата?