Аналитическая геометрия и линейная алгебра

abcdw

Упорядоченная система векторов $e_1, \dots, e_n$ называется базисом линейного пространства, если $\forall x\ \exists! \xi_1, \dots, \xi_k : x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_k e_k$
Векторы базиса обязательно ЛНЗ.
Пусть $e_1, \dots, e_k$ - базис V.
Рассмотрим линейнуйю комбинацию $\alpha_1 e_1 + \dots \alpha_k e_k = \theta \Rightarrow \forall i\ \alpha_i = 0$

Лемма. Если $f_1, \dots, f_n$ - система ЛНЗ векторово в ЛП V.
$x = \sum \alpha_i f_i$
Если рассkладывается, то разложение единственно.
Пусть $x = \sum \beta_i f_i$
$(\alpha_1 - \beta_1) * f_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) f_n = \theta$, так как f_i - ЛНЗ, то $\alpha_i - \beta_i = 0$

Свойство.
$\forall \lambda \in F \lambda x = \sum (\lambda x_i)$
$x + y \Rightarrow x_i + y_i$

Пусть в ЛП V имеется две системы $e : e_1, \dots, e_k$ и $x_1, \dots, x_n$, такие что $x_i = \sum\limits_{l=1}^{k} \xi_l^{(i)} e_l$, n > k, тогда система $x_1, \dots, x_n$ - ЛЗ.
Доказательство.
По условию. $x_i = (e_1, \dots, e_k) \begin{pmatrix} \xi_1^{(i)} \\ \vdots \\ \xi_k^{(i)} \end{pmatrix}$
Доказать, что $\sum \alpha_i x_i = \theta$

Рамерность - максимальное число ЛНЗ векторов.
Основная теорема о связи базиса и размерности.
Кол-во векторов в базисе равно размерности.

Если $n = \dim V$, то любая упорядоченная и ЛНЗ система элементов пространства V образует базис.
Если в ЛП V имеется базис $e_1, \ldots, e_k$, то $k = \dim V$
1) Пусть $n = \dim V$ - по определению это максимальное число ЛНЗ элементов V.
Рассмотрим $e_1, \ldots, e_n$, докажем, что это базис.
$\forall x \in V \ x, e_1, \ldots, e_n$ - ЛЗ.
$\exists \alpha_i, \alpha \neq 0 : \alpha x + \sum \alpha_i x_i = \theta$
$x = \sum \frac{\alpha_i}{\alpha} e_i$
По лемме 1 разложение единственно.
$e_1, \ldots, e_n$ - базис.
2) Пусть $e_1, \ldots, e_k$ - базис V.
Докажема, что $k = \dim V$
Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - произвольная система элементов ЛП V.
По определению базиса $x_t = \sum\limits_{i=1}^{k} \xi_i^t e_i$ по лемме 2 $x_1, \ldots, x_n$ - ЛЗ.

Следствие. Пусть V - ЛП, $\dim V = n$ всякий базис V состоит из n элементов.

Примеры:
1) Пространство строк F^n
2) Пространство многочленов P_n
3) Пространство матриц.
4) Ax $= \theta$
A - $m \times n$ матрица.
r = Rg A < n
$x^{(1)}, \ldots, x^{(n-r)}$, $\dim = n - r$

§5 Изоморфизм линейных пространств.
V, W - ЛП. Отображение $\varphi : V \to W$
Называется биективным(взаимнооднозначным). Если $\forall x \in V \ \exists! \ \varphi(x) \ \in \ W$
$\forall x' \in W \ \exists! x_0 \ \varphi(x_0) = x'$

W, V над полем F называются изоморфными, если существует биекция $\varphi : V \to W$, сохраняющая линейные операции.
$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y)$
$\forall x \in V \forall \lambda \in F \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$

Свойтсва изоморфизма.
1) $\varphi(\theta_V) = \theta_W$ По свойству два 0х.
2) Образом ЛНЗ системы элементов является ЛНЗ система. $x'_i = \varphi(x_i)$.
Пусть $\exists \alpha_i \in F : \sum \alpha_i x'_i = \theta_W \Rightarrow \varphi(\sum \alpha_i x_i) = \varphi(\theta_W)$

Теорема.
Пусть V, W - два конечномерных линейных пространства над полем F.
V и W - изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim W$
$\surd$