Аналитическая геометрия и линейная алгебра

abcdw

A, B - матрицы $n \times n$.
$|A * B| = |B * A| = |A| * |B|$

$$B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{pmatrix} \ \tilde{B} = \begin{pmatrix} \vec{b}_{i_1} \\ \vec{b}_{i_2} \\ \vdots \\ \vec{b}_{i_n} \end{pmatrix} \ det\tilde{B} = (-1)^{t(i_1, i_2, \ldots, i_n)} detB$$

много добавить. $\leftarrow$

Обратная матрица.

A - матрица $n \times n$.
B - обратная к матрица A, если
A * B = B * A = E
E - единичная.
B - матрица $n \times n$

A - называется невырожденной, если $|A| \neq 0$

Теорема.
A - обратима $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
В одну сторону:
$|A * B| = |E| = 1$
$|A| * |B| = |A * B| \Rightarrow |A| \neq 0$
В другую:

$$B = \frac{1}{\triangle} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\triangle} C$$

C - транспонированная матрица из алгебраических дополнений. $C = (A_{ij})^T$
Проверим. [1]

Теорема.
Если существует обратная матрица, то она единственна.
$B_1 = B_1 * E = B_1 * (A * B_2) = (B_1 * A) * B_2 = B_2$

Пример.
$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$
Свойства.
1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Линейная зависисмость и независимость столбцов и строк матрицы.
$\vec{a}_i$ - строки.
$a_{\downarrow i}$ - столбцы.

Система столцов называется линейно зависимой, если $\exists \alpha_i \neq 0 : \alpha_1 a_{\downarrow 1} + \alpha_2 a_{\downarrow 2} + \dots + \alpha_k a_{\downarrow k} = 0$
Столбец $a_{\downarrow}$ является линейной комбинацией, если $\exists \alpha_i$.
Столбцы ЛЗ $\Leftrightarrow$ один линейно выражается через остальные.
Доказательство.

[1] дописать