# Аналитическая геометрия и линейная алгебра

abcdw

$A = (a_{ij}) - m \times n$ матрица.
Выберем к строк и к столбцов. $(k \leq min(m, n))$.
$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq m; 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq n$
$M^{j_1 j_2 \dots j_k}_{i_1 i_2 \dots i_k}$Минором называется определитель к-того порядка($M_k$), составленный из элементов стоящих на пересечении выбранных к строк и столбцов.
Под минором первого порядка подразумевается элемент.
$C^k_n C^k_m$ - миноров к-того порядка.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & 7 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 8 & 6 & 1 & -7 \end{pmatrix} \; M^{25}_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$

Все миноры к-ого порядка $= 0$, тогда у матрицы А все миноры большего порядка $= 0$, если они существуют.
Рассмотрим $M_{k+1} = \sum\limits_{i=1}^{k+1} a'_{1i} A^{(k)}_{1i}, A^{(k)}_{1i} = (-1)^{i+1} M^{(k)}_{1i}$

Число $r \in N$ называется рангом матрицы $A = (a_{ij}) - m \times n$, если среди миноров порядка r имеется хотя бы один ненулевой, а все миноры более высокого порядка, если они существуют равны нулю.
Ранг матрицы - это максимальный порядок минора отличного от нуля.
$0 \leq RgA \leq min(m, n)$
Пусть матрица $A \neq 0$, тогда r - ее ранг. Любой минор $M_r \neq 0$ называется базисным минором, а строки и столбцы пересечением которых образован этот минор называются базисными строками(столбцами).

Пример.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow RgA = 2$, т. к. $M_{12}^{23} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, M_3 = 0$
Базисные строки и базисные столбцы определяются неоднозначно.

Теорема о базисном миноре.
Пусть $A = (a_{ij}) - m \times n$ матрица, $A \neq 0$.
Базисные строки(столбцы) матрицы А ЛНЗ.
Каждая строка(столбец) м. А линейно выражается через базисные строки(столбцы) матрицы А.

Доказательство проведем для столбцов.
Покажем, что базисные столбцы ЛНЗ.
По критерию ЛЗ $\Rightarrow$ один базисный столбец линейно выражается через остальные.
Считаем, что базисный минор имеет вид:
$M_r = M_{12\ldots r}^{1\ldots r}$, если это не так, то поменяем строки и столбцы местами.
Заметим, что при перестановке строк и столбцов ранг очевидно не меняется.
$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix}, \triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0$ Возьмем и зафиксируем j, получим:
$\triangle = C_1 a_{i1} + C_2 a_{i2} + \cdots + C_r a_{ir} + M_r a_{ij} = 0, \forall i = \overline{1, m}\ a_j = \alpha_1 a_1 + \ldots \alpha_r a_r, \alpha_i = -\frac{C_i}{M_r}$
Если $\triangle$ раскладывать не по последнему столбцу, а по последней строке, то получим разложение для строк.

Если $RgA = r$, то любые r+1 строк зависимы.
$A = \vec{a}_1, \ldots \vec{a}_2, B = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_{r+1} \end{pmatrix}$
$RgB \leq RgA = r$
Поэтому хотя бы одна строка матрицы В выражается через другие стро-

ки.
Отсюда по критерию линейной зависимости строки $\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{r+1}$ ЛЗ.

Критерий равенства нулю определеителя.
Определитель матрицы А $n \times n$ равен нулю, тогда и только тогда когда его строки(столбцы) линейно зависимы.
$detA = 0 \Rightarrow RgA \leq n-1 \Rightarrow$ строки(столбцы) линейно зависимы, так как хотя бы один столбец или строка не являются базисными.
Пусть строки ЛЗ, тогда по критерию ЛЗ одна из строк линейно выражается, через остальные $\Rightarrow$ det A $=$ 0.

Теорема о ранге матрицы.
Максимальное число ЛНЗ строк матрицы А равно макисмальному числу ЛНЗ столбцов и равно $RgA$
Пусть $r \in N = RgA$, тогда существует r линейно независимых строк(столбцов).
Любые p $>$ r строк обязательно ЛЗ.

§2 Элементарные преобразования матрицы, вычисление ранга методом элементарных преобразований.

Пусть дана матрица $A = (a_{ij}) - m \times n$ матрица.
Элементарными преобразованиями матрицы А называются следующие операции, проводимые над строчками(столбцами) матрицы А.
1. Перестановка.
2. Умножение строки(столбца) на ненулевое число.
3. Прибавление к какой-либо строке(столбцу) другой строки(столбца), умноженной на любое число.

Все три элементарных преобразования обратимы.
$A \backsim B$

Элементарные преобразования не влияют на ранг матрицы.
При элементарных преобразованиях 1) и 2) миноры матрицы В отличаются лишь быть может порядком строк, ненулевым множителем.
Докажем инвариантность ранга для 3)