# Математический анализ

abcdw

$\int \frac{bx+c}{x^2+2px+q}dx = \int \frac{b(x+p)+c-bp}{(x+p)^2+q-p^2}d(x+p) = \int b\frac{tdt}{t^2+a^2} + (c-bp)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{b}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \frac{c-bp}{a}\int \frac{d(\frac{t}{a})}{(\frac{t}{a})^2+1} = \frac{b}{2}\log(t^2+a^2) + \frac{c-bp}{a}\operatorname{arctg}(\frac{t}{a}) + C = \frac{b}{2}\log(x^2+2px+q) + \frac{c-bp}{a}\operatorname{arctg}(\frac{x+p}{a}) + C$

$\int \frac{bx+c}{(x^2+2px+q)^m}dx = \int \frac{b(x+p)+c-bp}{((x+p)^2+a^2)^m}d(x+p) = \frac{b}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m} + \frac{c-bp}{a^{2m-1}}\int \frac{d(\frac{t}{a})}{(\frac{t}{a})^2+1)^m} = \frac{b}{2}\frac{x^2+2px+q)^{1-m}}{1-m} + \frac{c-bp}{a^{2m-1}}I_m(\frac{x+p}{a}) + C$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

P, Q - многочлены. deg P(x) $<$ deg Q(x).
$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)} \leftarrow$ правильная дробь, нет общих корней ни действительных, ни комплексных.
$P_n(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_nx^n, p_n \neq 0, p_!, \dots, p_n \in R$

Пусть $z = a+ib, b \neq 0$ корень $P_n(x)$, тогда $P_n(z) = 0, \overline{P}_n(z) = 0 = \overline{p_0 + p_1z + \dots + p_nz^n} = \overline{p}_0 + \overline{p_1z} + \dots + \overline{p_nz^n} = \overline{p}_0 + \overline{p}_1\overline{z} + \dots + \overline{p}_n\overline{z}^n$
$P_n(x) = (x-z)(x+z)P_1(x)$
$(x-z)(x+z) = x^2 + (z+\overline{z})x + z\overline{z} = x^2 + 2px + q$ - квадратный трехчлен без действительных корней.
$Q_n(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x^2+2p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+2p_jx+q_j)^{m_j}$
$\exists A : P_1(x) : \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^kQ(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$
Доказательство: $\forall A \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \left(\frac{P(x)}{(x-a)^kQ_1(x)} - \frac{A}{(x-a)^k}\right) = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P(x)-AQ_1(x)}{(x-a)^kQ_1(x)}$
Подберем A такое, чтобы $P(x) - AQ_1(x)$ делилось на (x - a). Для этого нужно, чтобы $P(a) - AQ_1(a) = 0, A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$
Значит $P(x) - AQ_1(x) = (x-a)P_1(x)$

$\exists M, N, P(x) \int R : \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2+2px+q)^m Q_1(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2+2px+q)^{m-1}Q_1(x)}$
$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^m} + \frac{P(x)-(Mx+N)Q_1(x)}{(x^2+2px+q)^m Q_1(x)}$
$x^2 + 2px + q = (x - z_1)(x - \overline{z}_1)$
$P(z_1) - (Mz_1 + N)Q_1(z_1) = 0$
$Mz_1 + N = \frac{P(z_1)}{Q(z_1)} = A + iB$
$M(a+ib) + N = (Ma+N) + ibM = A + iB, M = \frac{B}{b}, N = A - Ma = A - \frac{B}{b}a$
$P(x) - (Mx + N)Q_1(x) = (x - z_1)(x - \overline{z}_1)Q_1(x) = (x^2 + 2px + q)Q_1(x)$

Теорема. $\forall \frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_{1k_1-1}}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{A_{11}}{(x-x_1)}$

§Подстановки Эйлера.
$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$

1)$a > 0 : \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x \pm t$
$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{a}xt + t^2$
$x = \frac{t^2-c}{b-\sqrt{a}t}, dx = d(\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}$
$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t = \sqrt{a}\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} + t$

2)$c > 0 : \sqrt{ax^2 + bc + c} = \sqrt{c} + xt$
$ax^2 + bx + c = c + 2\sqrt{c}xt + x^2t^2$
$ax + b = 2\sqrt{c}t + xt^2$
$x = \frac{b-2\sqrt{c}t}{t^2-a}$
$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + \frac{b-2\sqrt{c}t}{t^2-a}t$

3)$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), x_1, x_2 \in Rx_1 \neq x_2$
$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = t^2(x - x_1)^2$
$a(x - x_2) = t^2(x - x_1)$
$x = \frac{t^2x_1-ax_2}{t^2-a}$

Графическая интерпретация.
$y = \pm\sqrt{ax^2 + bx + c}$
$y^2 = ax^2 + bx + c \leftarrow (x_0, y_0)$ на кривых.
$y - y_0 = t(x - x_0)$
$((y - y_0) + y_0)^2 = ax^2 + bx + c$
$t^2(x - x_0)^2 + 2t(x - x_0)y_0 + y_0^2 = ax^2 + bx + \cancel{c}, y_0^2 = ax^2 + bx + \cancel{c}$ аккуратнее.

$t^2(x-x_0)^2 + 2t(x-x_0)y_0 = a(x^2-x_0^2) + b(x-x_0)$
$t^2(x-x_0) + 2ty_0 = a(x+x_0) + b$