

Математический анализ

abcdw

Глава 1. Неопределенный интеграл.

§1. Первообразная и неопределенный интеграл.

Опр. $f(x)$ определена на (a, b) . $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, если $F'(x) \equiv f(x)$, $dF = f(x)dx$.

Утв. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - первообразные $f(x)$, то $F_1(x) - F_2(x) = const$
Док. $(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = 0 \Rightarrow F_1 - F_2 = const$. По Лагранжу.

$x > 0 : \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, x < 0 : \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg} x + \pi$

Задача. Функция расстояния до ближайшего целого числа. Найти первообразную.

Опр. Совокупность всех первообразных - неопределенный интеграл.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

§2. Таблица неопределенных интегралов.

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$

- $\int \frac{dx}{x} = \log |x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, -\arccos x + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x + C, -\operatorname{arctg} x + C$
- $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
- $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \log(x + \sqrt{x^2 \pm 1}) + C$
- $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$
- $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
- $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

§3. Основные приемы вычисления первообразных.

Равенство первообразных(интегралов) понимается как равенство производных.

$$\begin{aligned} \int (\alpha U(x) + \beta V(x)) dx &= \alpha \int U(x) dx + \beta \int V(x) dx \\ \int (UV)' dx &= \int (U'V + V'U) dx = \int U'V dx + \int V'U dx \\ \int U'V dx &= UV - \int V'U dx, \int V dU = UV - \int U dV \end{aligned}$$

Если на (a, b) $\int f(x)dx = F(x) + C$, а $\varphi(t) : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$, $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема.

$$\int F(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$$

Примеры.

- 1) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1+\cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x + C$
- 2) $\int \log x dx = x \log x - \int x d \log x = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x + C$
- 3) $\int x e^x dx = \int x d e^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$
- 4) $\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C$
- 5) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{dx}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \int \frac{d \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \log(\operatorname{tg} \frac{x}{2}) + C$
- 6) $\int \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x - \sin x) dx = -\frac{\cos 5x}{10} + \frac{\cos x}{2} + C$
- 7) $\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{1}{a} \int \cos bxd e^{ax} = \frac{1}{a} \cos bxe^{ax} - \frac{1}{a} \int e^{ax} d \cos bx = \frac{1}{a} \cos bxe^{ax} + \frac{b}{a^2} \int \sin bxe^{ax} dx = \frac{1}{a} \cos bxe^{ax} + \frac{b}{a^2} \sin bxe^{ax} - \frac{b}{a^2} \int e^{ax} d \sin bx = \frac{1}{a} \cos bxe^{ax} + \frac{b}{a^2} \sin bxe^{ax} - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bxdx$

Формула Эйлера.

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

§4. Интегрирование рациональных функций.

- 1) $\int \frac{dx}{x-a} = \log |x-a| + C$
- 2) $\int_{n \in N, n > 1} \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C$
- 3) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
- 4) $\int_{n \in N, n > 1} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = I_n, I_1 = \operatorname{arctg} x + C$, по индукции $I_k = \frac{x}{(x^2+1)^k} + 2kI_k - 2kI_{k+1}$
- 5) $\int \frac{bx+c}{x^2+2px+q} dx$