НИЯУ МИФИ

3 семестр факультет КиБ

Математический анализ

Автор:
Тропин А.Г.

Лектор:
Теляковский Д.С.

e-mail: andrewtropin@gmail.com
github: abcdw/mephi

3 января 2014 г.

Оглавление

Часть I

Функциональный последовательности и ряды

Глава 1

Числовые ряды

1.1 Определение

Определение 1.1.1. $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} U_k$

Определение 1.1.2 (Частичная сумма)**.** $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k$

Определение 1.1.3. Ряд сходится, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{0}^{\infty} U_k = S_n$

Определение 1.1.4. $\{a_n\} = a_0 + \sum\limits_{1}^{n}(a_k - a_{k-1})$, где $(a_k - a_{k-1}) = U_k$

Теорема 1.1.1 (Критерий Коши)**.** *Ряд сходится, тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \ = \ N(\varepsilon),\ \forall n \geq N, \forall p :\ |\sum_{k=n+1}^{n+p} U_k| \ = \ |U_{n+1} + \cdots + U_{n+p}| \ = \ |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

Доказательство. $\sum U_k$ - сходится $\Leftrightarrow \{S_n\}$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N : \forall n \geq N, \forall p :\ |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

□

Следствие (Необходимое условие сходимости)**.** *Если* $\sum U_k$ *сходится, то* $U_k \to 0$, *при* $k \ \to \ \infty$

Доказательство. Если $\sum U_k$ сходится, то выполняется Критерий Коши. При $p = 1$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N : |S_{n+1} - S_n| \ = \ |U_{n+1}| < \varepsilon$$

□

Следствие. *Отбрасывание или добавление любого конечного числа членов ряда на его сходимость не влияет.*

Пример 1.1.1. $\sum\limits_{0}^{\infty} z^n$, $S_n(z) = \sum\limits_{0}^{n} z_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. При $n \to \infty$, $S_n(z) = \frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$.
$S_n(z)$ не имеет придела при $|z| \geq 1$.

1.2 Действия с рядами

Теорема 1.2.1. *Ряды* $\sum U_k$ *и* $\sum V_k$ *сходятся к* α*, тогда*

$$\sum \alpha U_k = \alpha \sum U_k \tag{1.1}$$

$$\sum (U_k \pm V_k) = \sum U_k \pm \sum V_k \tag{1.2}$$

Доказательство. Доказательство свойства ((1.1)):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha U_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} \alpha U_k = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} U_k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} U_k$$

□

Доказательство. Доказательство свойства ((1.2)):

$$\sum_{0}^{\infty} U_k \pm \sum_{0}^{\infty} V_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} U_k \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} V_k = \tag{1.3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} U_k \pm \sum_{0}^{n} V_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} (U_k \pm V_k) = \sum_{0}^{n} (U_k \pm V_k) \tag{1.4}$$

□

Замечание 1.2.1. Из сходимости $\sum(U_k \pm V_k) \not\Rightarrow$ сходимость $\sum U_k$ и $\sum V_k$

Замечание 1.2.2. Если $\sum U_k$ сходится, то можно группировать, не меняя порядка.

Пример 1.2.1.

$$\sum (1-1) \tag{1.5}$$

$$(1-1) + (1-1) + \dots \tag{1.6}$$

$$1 - (1-1) - (1-1) \dots \tag{1.7}$$

Комментарий. Нельзя раскрывать скобки и переставлять члены.

1.2.1 Ряды с неотрицательными членами

$U_k \geq 0$, $S_n = \sum\limits_{0}^{n} U_k$ - не убывающая последовательность.

$\sum\limits_{0}^{n} U_k$ - сходится $\Leftrightarrow \{S_n\}$ — ограничена

Комментарий. Сходимость ряда эквивалентна ограниченности S_n

Теорема 1.2.2.

$$U_k \geq 0, V_k \geq 0, \ \forall k :$$

1. *Если* $0 \leq U_k \leq V_k$*, то если* $\sum V_k$ *сходится* $\Rightarrow \sum U_k$ *сходится и если* $\sum U_k$ *расходится* $\Rightarrow \sum V_k$ *расходится.*

2. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_k}{V_k} = A > 0$*, то ряды сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство.

1. $\forall n$ верно неравенство $0 \leq \sum\limits_0^n U_k \leq \sum\limits_0^n V_k$

2. $\forall \varepsilon > 0$ $\varepsilon < A$ $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow 0 < A - \varepsilon < \frac{U_k}{V_k} < A + \varepsilon$
   $0 < (A - \varepsilon) \cdot V_k < U_k < (A + \varepsilon) \cdot V_k$
   Пусть U_k — сходится, тогда из доказанного выше 1ого пункта следует $(A - \varepsilon) \cdot V_k$ — сходится $\Rightarrow \sum V_k$ сходится $\Rightarrow \sum (A + \varepsilon) \cdot V_k$ сходится $\Rightarrow \sum U_k$ сходится.

□

Замечание 1.2.3. Вместо существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_k}{V_k}$ достаточно предположить, что существуют такие числа p и q > 0, такие что $0 < q < \frac{U_k}{V_k} < p, \ \forall k$

Теорема 1.2.3 (Признак Даламбера)**.**

$$\sum U_k, \ U_k > 0$$

1. *Если* $\exists q$ *такое что:* $\forall k \ \frac{U_{k+1}}{U_k} < q < 1$ *сходится*

2. *Если* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{k+1}}{U_k} = q,$ *то:*

   - *при* $q < 1$ *сходимость*
   - *при* $q > 1$ *расходимость*
   - *при* $q = 1$ *неизвестно (нужно провести дополнительные исследования)*

Доказательство. Идея докозательства - сравнение с геометрической прогрессией.

1. $k = 0, 1, \ldots, n$; $U_k = U_0 \cdot \frac{U_1}{U_0} \frac{U_2}{U_1} \cdots \frac{U_k}{U_{k-1}} < U_0 \cdot q^k$
   Комментарий. $\frac{U_k}{U_{k-1}} < q, \ \forall k$

   $q < 1$, тогда $\sum U_0 \cdot q^k$ — сходящаяся геометрическая прогрессия.
   $U_k = U_0 \cdot \frac{U_1}{U_0} \frac{U_2}{U_1} \cdots \frac{U_k}{U_{k-1}} \geq U_0 > 0$

   Комментарий. $\frac{U_k}{U_{k-1}} \geq 1, \ \forall k$

   $U_k \not\to 0 \Rightarrow$ не выполняется необходимое условие сходимости.

2. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{U_{k+1}}{U_k} = q$
   $\forall \varepsilon > 0, \ \exists K : \ \forall k \geq K$ выполняется неравенство $q - \varepsilon < \frac{U_{k+1}}{U_k} < q + \varepsilon$

   - Если $q < 1$, то $(q + \varepsilon) \in [q, 1]$. Выберем такое ε, что $q + \varepsilon < 1$, для $\forall k \geq K(\varepsilon)$.
     $\frac{U_{k+1}}{U_k} < q + \varepsilon < 1 \Rightarrow$ сходится по первой части.
   - Если $q > 1$, то $(q - \varepsilon) \in [1, q]$. Выберем ε так, чтобы $q - \varepsilon > 1$, для $\forall k \geq K(\varepsilon)$.
     $\frac{U_{k+1}}{U_k} > q - \varepsilon > 1, \ \Rightarrow$ расходится по первой части.

□

Теорема 1.2.4 (Признак Коши).

$$\sum U_k, U_k \geq 0$$

1. *Если* $\exists q < 1$ *и* $\forall k > K$: *выполняется* $\sqrt[k]{U_k} \leq q < 1$, *то ряд сходится, а если* $\forall k\ \sqrt[k]{U_k} \geq 1$, *то расходится.*

2. *Если* $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{U_k} = q, (q \geq 0)$, *то*

   - $q < 1$ - *сходится*
   - $q > 1$ - *расходится*
   - $q = 1$ - *нужны дополнительные исследования*

Замечание 1.2.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n}$ можно рассматривать вместо $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{U_k}$

Доказательство. Сравнение с геометрической прогрессией

1. Если $\forall k\ \sqrt[k]{U_k} \leq q < 1 \Rightarrow U_k \leq q^k$ — сходящаяся геометрическая прогрессия.
   Если $\forall k \sqrt[k]{U_k} \geq 1 \Rightarrow U_k \geq 1$ — не выполняется необходимое условие сходимости.

2. Если $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{U_k} = q$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geq K, (q - \varepsilon) < \sqrt[k]{U_k} < (q + \varepsilon)$
   $(q - \varepsilon)^k < U_k < (q + \varepsilon)^k$

   - При $q < 1$ выберем ε так, чтобы $q + \varepsilon < 1$, тогда $U_k < (q + \varepsilon)^k < 1$ — сходящаяся геометрическая прогрессия.
   - При $q > 1$ выберем ε так, чтобы $q - \varepsilon > 1$, тогда $U_k > (q - \varepsilon)^k > 1$ — не выполняется необходимое условие сходимости.

□

Определение 1.2.1. Дана $\{a_n\}$ и пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ — наибольший из частичных пределов, тогда:

$$\forall \{a\}\ \exists \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = A \textit{ or } \infty$$

Комментарий. A — число.

- Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = +\infty \Rightarrow \{a_n\}$ — неограничена сверху $\Rightarrow \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{U_k} = +\infty$ — неограничена сверху. U_k неограничена сверху и не выполняется необходимое условие.

- Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = A$, тогда $\forall \varepsilon \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ бесконечно много членов $\{a_n\}$:

  - $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{U_k} = q < 1$. Выберем ε так, чтобы $q + \varepsilon < 1 \Rightarrow \exists K : \forall k \geq K,\ \sqrt[k]{U_k} < q + \varepsilon < 1$ по признаку Коши.

  - $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{U_k} = q > 1$. Выберем ε так, чтобы $q - \varepsilon > 1 \Rightarrow \forall K\ \exists k \geq K : \sqrt[k]{U_k} > q - \varepsilon > 1$ $\Rightarrow U_k > 1$

1.3 Интегральный признак сходимости рядов с неотрицательными членами

Теорема 1.3.1. *Если $f(x)$ не отрицательна и убывает на $x \geq 1$, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \tag{1.8}$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx \tag{1.9}$$

то есть $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx < \infty$.

- $\sum a_n < \infty$ — *сходится*
- $\sum a_n = \infty$ — *расходится*

Доказательство. Если $k \leq x \leq k+1,\ k = 1, 2, \ldots$, то, в силу убывания функции получаем неравенство:

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$$

Интегрируя по отрезку $[k, k+1]$ получим:

$$f(k) \geq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1),\ k = 1, 2, \ldots\ .$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \tag{1.10}$$

Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, тогда (1.10) примет вид:

$$S_n + 1 - f(1) \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq S_n \tag{1.11}$$

Если ряд (1.8) сходится и его сумма равна S, то $S_n \leq S$, и $\int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq S,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\forall b > 1, n+1 > b$ имеем:

$$\int\limits_{1}^{b} f(x)dx \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq S$$

В силу неотрицательности функции $f(x)$ интеграл сходится.
Пусть наоборот, интеграл (1.9) сходится, тогда из (1.11) следует:

$$S_{n+1} \leq f(1) + \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq f(1) + \int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$$

Тем самым, последовательность сумм $\{S_n\}$ ряда (1.8) ограничена сверху, и поэтому этот ряд сходится. $\square$

Пример 1.3.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} \tag{1.12}$$

Положим $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, тогда $f(n) = \frac{1}{n^\alpha}$

Поскольку $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$:

- При $\alpha > 1$ сходится
- При $\alpha \le 1$ расходится

Тогда ряд (1.12) сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$. При $\alpha < 0$ дробь $\frac{1}{n^\alpha} \ge 1$.

1.4 Признак сходимости для чередующихся рядов

Рассмотрим ряды с действительными числами, которые то положительные, то отрицательные.

Теорема 1.4.1 (Лейбница)**.** *Если*

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0 \tag{1.13}$$

$$U_n \ge U_{n+1} > 0,\ \ n = 1, 2, \dots \tag{1.14}$$

то знакочередеющийся ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} U_n \tag{1.15}$$

сходится, при этом если S — сумма ряда, а S_n — его n-ая частичная сумма, то $\forall n : n = 1, 2, \dots$

$$|S - S_n| \le U_{n+1} \tag{1.16}$$

Доказательство. Заметим, что частичная суммы S_n с четными номерами возрастают:

$$S_{2k} = (U_1 - U_2) + (U_3 - U_4) + \dots + (U_{2k-1} - U_{2k}),\ \ k = 1, 2, \dots$$

Так что выполняется неравенство $S_{2k+2} \ge S_k$. Кроме того, они ограничены сверху:

$$S_{2k} = U_1 - (U_2 - U_3) - \dots - (U_{2k-2} - U_{2k-1}) - U_{2k},\ \ S_{2k} < U_1$$

Поэтому последовательность $\{S_{2k}\}$ сходится

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S \tag{1.17}$$

Поскольку $S_{2k+1} = S_{2k} + U_{2k+1}$ и $U_{2k+1} \to 0$ при $k \to \infty$, то

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = S \tag{1.18}$$

Из (1.17) и (1.18) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$
При этом, нетрудно увидеть, что

$$S_{2k} \le S \le S_{2k+1} \le S_{2k-1},\ \ \forall k \tag{1.19}$$

Из неравенства (1.19) следует, что

$$S - S_{2k} \le S_{2k+1} - S_{2k} = U_{2k+1} \tag{1.20}$$

$$S_{2k-1} - S \le S_{2k-1} - S_{2k} = U_{2k},\ \ k = 1, 2, \dots \tag{1.21}$$

Это и означает, что $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство (1.16). □

1.5 Преобразование Абеля

Теорема 1.5.1. *Пусть* $a_k \in \mathbb{C}$, $b_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$; $B_k = b_1 + \dots + b_k$, *тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) b_k + a_n B_n \tag{1.22}$$

Доказательство. Очевидно, $b_1 = B_1, b_k = B_k - B_{k-1}, k = 2, 3, \dots, n$
Поэтому $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = a_1 B_1 + a_2(B_2 - B_1) + a_3(B_3 - B_2) + \dots a_n(B_n - B_{n-1}) = (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_n B_n$
Называется преобразованием Абеля $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$. □

Следствие (лемма Абеля)**.** *Если* $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$ *или* $a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_n$ $a_k \in \mathbb{R}$, $\forall k = 1, 2, \dots, n$, $|b_1 + \dots + b_k| \le B$, $(b_k \in \mathbb{C})$, *то*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \le B(|a_1| + 2|a_n|)$$

Доказательство. $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \le \sum\limits_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}||B_k| + |a_n B_n| \le B \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_n| \right) =$
$= B \left(\left| \sum\limits_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \right| + |a_n| \right) = B(|a_1 - a_n| + |a_n|) \le B(|a_1| + 2|a_n|)$. □

1.6 Признаки Дирихле и Абеля

Теорема 1.6.1 (признак Дирихле)**.** *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{1.23}$$

1. $a_n \in \mathbb{R}^n, b_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$
2. $\{a_n\}, \{a_n\} \downarrow 0$ $(\{a_n\} \uparrow 0)$
3. $\{B_n\}$ *— последовательность частичных сумм ряда* $\sum b_n$ *ограничена*

Тогда ряд (1.23) *сходится.*

Доказательство. $\exists B > 0$, $|B_n| \le B$ $\forall n \Rightarrow \forall m \ge n \ge 2 : |b_n + \dots + b_m| = |B_m - B_{n-1}| \le 2B$
Возьмем $\varepsilon > 0$. По скольку $a_n \to 0$, то $\exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon)$ имеем $|a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}$.
Поэтому, $\forall n > N(\varepsilon)$ и $\forall m \ge n$ получим:

$$|a_n b_n + \dots + a_m b_m| \le 2B(|a_n| + 2|a_m|) < 2B \left(\frac{\varepsilon}{6B} + 2\frac{\varepsilon}{6B} \right) = \varepsilon$$

Ряд (1.23) удовлетворяет Критерию Коши сходимости рядов. □

Замечание 1.6.1. Признак Лейбница - это частный случай признака Дирихле.

Теорема 1.6.2 (признак Абеля)**.** *Если последовательность действительных чисел* a_n *монотонна и ограничена, ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n, b_n \in \mathbb{C}$ *сходится, то ряд* (1.23) *также сходится.*

Доказательство. $a_n = a + \alpha_n, \{\alpha_n\}$ — монотонно стремящаяся к нулю последовательность. Поэтому

$$\sum a_n b_n = \sum (a + \alpha_n) b_n = a \sum b_n + \sum \alpha_n b_n,$$

где $a \sum b_n$ сходится по условию, а $\sum \alpha_n b_n$ сходится по признаку Дирихле.
$\{B_n\}$ — последовательность частичных сумм $\sum b_n$ ограничена, $\{\alpha_n\}$ — монотонно стремящаяся к нулю последовательность. □

1.7 Безусловно и условно сходящиеся ряды

Определение 1.7.1. Пусть $\{k_n\}, n = 1, 2, \ldots$ — последовательность, в которой каждое натуральное число встречается только один раз. $\{k_n\}$ — однозначное отображение $a_n^* = a_{k_n}$, $(n = 1, 2, \ldots)$.
Будем говорить, что ряд $\sum a_n^*$ является перестановкой ряда $\sum a_n$.

Определение 1.7.2. Говорят, что $\sum a_n$ сходится безусловно, если каждая перестановка сходится.

Теорема 1.7.1. *Ряд $\sum a_n, (a_n \in \mathbb{C})$ сходится безусловно тогда и только тогда, когда он сходится абсолютно.*

Доказательство. Достаточность.
Если ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно, то все его перестановки сходятся к одному и тому же числу — сумме исходного ряда.
Пусть $\sum a_n^*$ — перестановка ряда $\sum a_n$. S_n^* — ее частичная сумма.
По Коши: $\forall \varepsilon > 0 \exists N : m \geq n > N$

$$|a_n| + \cdots + |a_m| < \varepsilon \tag{1.24}$$

Выберем p так, чтобы все натуральные числа $1, 2, \ldots, N$ содержались в множестве $k_1, k_2, \ldots, k_p$ (смотри определение), тогда при $n > p$ $a_1, \ldots, a_N$ в разности $S_n - S_n^*$ уничтожаются, так что $|S_n - S_n^*| < \varepsilon$ в силу (1.24).
Значит $\{S_n^*\}$ сходится к тому же пределу, что и $\{S_n\}$. □

Определение 1.7.3. Сходящийся, но не абсолютно сходящийся ряд называется условно сходящимся.

Из теоремы (1.7.1) (из необходимости условия) $\Rightarrow$ Теорема (1.7.2)

Теорема 1.7.2. *Условно сходящийся ряд не может сходится безусловно, то есть у него всегда существует расходящаяся перестановка.*

Доказательство. Без Доказательства. □

Теорема 1.7.3 (Римана)**.** *Если ряд с действительными членами условно сходится, то каким бы не было действительное число S, существует перестановка ряда такая, что ее сумма равна S*

Доказательство. Без Доказательства. □

Глава 2

Функциональные последовательности и ряды

2.1 Поточечная сходимость

Пусть на некотором множестве $\mathbb{E}$ задана последовательность комплексно значимых функций $f_n, n = 1, 2, \dots\ ,\ (f_n \in \mathbb{C})$. Элементы $x \in \mathbb{E}$ будем называть точками.

Определение 2.1.1. $\{f_n\}$ называется ограниченной на $\mathbb{E}$, если $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{E}$ выполняется

$$|f_n(x)| \leq M$$

Определение 2.1.2. $\{f_n\}$ называется сходящейся поточечно на множестве $\mathbb{E}$, если при любом фиксированном $x \in \mathbb{E}$, числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится. Если последовательность сходится на $\mathbb{E}$, то $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), x \in \mathbb{E}$ называется пределом последовательности. Пусть $\{U_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, x \in \mathbb{E},\ (U_n \in \mathbb{C})$ — последовательность числовых функций.

Определение 2.1.3. Множество числовых рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \tag{2.1}$$

в каждой из которых точка x фиксированная называется рядом на множестве $\mathbb{E}$, а функция $U_n(x)$ — его член.

$S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k(x), x \in \mathbb{E}$ называется n-ой частичной суммой ряда (2.1).

$\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} U_k(x)$ - его n-ым остатком.

Определение 2.1.4. Ряд (2.1) называется сходящимся поточечно на множестве $\mathbb{E}$, если последовательность $\{S_n(x)\}$ сходится поточечно на $\mathbb{E}$. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), x \in \mathbb{E}$ называется суммой ряда (2.1).

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x).$$

Определение 2.1.5. Если ряд (2.1) при любом $x \in \mathbb{E}$ сходится абсолютно, то он называется абсолютно сходящимся на множестве $\mathbb{E}$.

Замечание 2.1.1. Беззаботная перестановка членов ряда может привести к ошибке.

2.2 Равномерная сходимость

Определение 2.2.1. Говорят, что функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $\mathbb{E}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall x \in \mathbb{E}$ имеем

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Ясно, что каждая равномерно сходящаяся последовательность, сходится поточечно.

Комментарий. Обозначение равномерной сходимости: $f_n \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} f$

Теорема 2.2.1 (Критерий Коши равномерной сходимости последовательностей)**.** *Для того, чтобы $\{f_n\}$ равномерно сходилась на $\mathbb{E} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N : n, m > N, \forall x \in \mathbb{E}$:*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{2.2}$$

Доказательство.

- Необходимость:
  $f_n \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} f$, тогда $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall x \in \mathbb{E}\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
  $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, $(\forall n, m > N, \forall x \in \mathbb{E})$.

- Достаточность:
  Пусть выполняется условие Коши, тогда $\{f_n(x)\}$, удовлетворяет критерию Коши сходимости числовых последовательностей и следовательно сходящегося числового предела, который обозначим $f(x)$.
  Тогда перейдя к пределу при $m \to \infty$ получим $\forall n > N, \forall x \in \mathbb{E} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

□

Иногда полезен критерий, следующий из определения (2.2.1)

Теорема 2.2.2. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{E}$.
Положим $r_n = \sup |f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{E}$ *— равномерное уклонение.*
Тогда $f_n \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} f \iff r_n \to 0,\ n \to \infty$. *(Переформулировка определения).*

Доказательство. Без доказательства.

□

Пример 2.2.1. $f_n(x) = x^n, \mathbb{E} = [0, 1)$
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \forall \in \mathbb{E}, r_n = \sup\limits_{x\in[0,1)} |x^n - 0| = 1 \not\to 0, n \to \infty$.
$\{x^n\}$ не является равномерно сходящейся на $\mathbb{E}$.

Пример 2.2.2. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \mathbb{E} = [0, 1]$.
$f_n(x) \to 0, \forall x \in \mathbb{E},\ f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0$.
$x_n = \frac{n}{n+1},\ f_n(x_n) = x_n^n(1 - x_n) < \frac{1}{n+1}$.
$r_n < \frac{1}{n+1}$.

Определение 2.2.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x),\ x \in \mathbb{E} \tag{2.3}$$

называется равномерно сходящейся, если на множестве $\mathbb{E}$ равномерно сходится последовательность частичных сумм.

Пусть $S_k(x)$ — частичные k-ые суммы ряда (2.3),

$$m \geq n : U_n(x) + \dots + U_m(x) = S_m(x) - S_n(x)$$

тогда из теоремы (2.2.1) (критерий Коши равномерной сходимости последовательности) $\Rightarrow$ Теорема (2.2.3) (критерий Коши равномерной сходимости ряда).

Теорема 2.2.3 (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)**.** *Для того, чтобы ряд* (2.3) *равномерно сходился на множестве* $\mathbb{E} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{E}$:

$$|U_n(x) + \dots + U_m(x)| < \varepsilon \tag{2.4}$$

Доказательство. Без доказательства. □

Следствие (Необходимый признак равномерной сходимости)**.** *У равномерно сходящегося ряда общий член равномерно стремится к нулю.*

Теорема 2.2.4 (Признак Вейерштрасса)**.** *Пусть* $\{U_n\}$ *— последовательнсоть функций, определенных на* $\mathbb{E}$ *и пусть* $|U_n(x)| \leq a_n, \forall x \in \mathbb{E}, \forall n \in \mathbb{N}$. *Тогда если* $\sum a_n < \infty$ *сходится, то следовательно* $\sum U_n(x)$ *сходится равномерно на* $\mathbb{E}$.

Доказательство. Если $\sum a_n$ сходится, то $\forall \varepsilon > 0 |\sum\limits_{k=n}^{m} U_k(x)| \leq \sum\limits_{k=n}^{m} a_k < \varepsilon$, при любом $x \in \mathbb{E}$, если только m и n достаточно велики, теорема (1.1.1) (критерий Коши сходимости числового ряда). Равномерная сходимость нашего ряда вытекает из теоремы (2.2.3). □

Замечание 2.2.1. $\sum a_n$ называется мажорирующим рядом $\sum U_n(x)$.

Замечание 2.2.2. ПРОВЕРИТЬ!!!
Условие признака Вейерштрасса не являются необходимыми для равномерной сходимости ряда.

2.3 Признаки равномерной сходимости рядов Дирихле и Абеля

Теорема 2.3.1. *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x),\ \ x \in \mathbb{E} \tag{2.5}$$

такой что:

1. $a_n(x) \in \mathbb{R},\ b_n(x) \in \mathbb{C},\ n = 1, 2, \dots$
2. $a_n(x) \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} 0$ *(Равномерная сходимость к нулю),* $\{a_n(x)\}$ *- монотонна.*
3. $\{b_n(x)\}$, $\sum b_n(x)$ *ограничена на множестве* $\mathbb{E}$.

Тогда ряд (2.5) *равномерно сходится на множестве* $\mathbb{E}$.

Доказательство. В силу условия 3, $\exists B > 0 : |B_n(x)| \leq B,\ \forall x \in \mathbb{E},\ \forall n \in \mathbb{N}$.
$\forall x \in \mathbb{E}, m \geq n \geq 2 : |b_n(x) + \dots + b_m(x)| = |B_m(x) - B_{n-1}(x)| \leq 2B$.
$\forall \varepsilon > 0$ из условия 2 $\Rightarrow \exists N = N(\varepsilon) : n > N(\varepsilon), \forall \in \mathbb{E}$ выполняется неравенство:

$$0 \leq |a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6B}.$$

Примениев лемму Абеля (1.5), получим:

$$|a_n(x)b_n(x) + \dots + a_m(x)b_m(x)| \leq 2B \tag{2.6}$$

$$(|a_n(x) + 2a_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{E}, m \geq n \geq N(\varepsilon)) \tag{2.7}$$

В силу критерия Коши (2.2.3), ряд (2.5) сходится равномерно. □

Теорема 2.3.2 (Признак Абеля)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \tag{2.8}$$

1. *Если* $a_n(x) \in \mathbb{R}, b_n(x) \in \mathbb{C}, n = 1, 2, \ldots, x \in \mathbb{E}$*.*

2. $\{a_n(x)\}$ *ограничена на множестве* $\mathbb{E}$ *и монотонна* $\forall x \in \mathbb{E}$*.*

3. *Ряд* $\sum b_n(x)$ *равномерно сходится на* $\mathbb{E}$*.*

Тогда ряд (2.8) *равномерно сходится.*

Доказательство. Доказательство легко провести так, как была доказана теорема (1.6.1). □

Пример 2.3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^x}$ — ряд Дирихле.
Если этот ряд сходится в точке x_0, то он сходится равномерно $\forall x \in \mathbb{E},\ \mathbb{E} = [x_0, +\infty)$.
Можно воспользоваться Признаком Абеля:

$$a_n(x) = \frac{1}{n^{x-x_0}},\ b_n = \frac{c_n}{n^{x_0}}$$

Упражнение 1. Рассмотреть и доказать абсолютную сходимость при $x > x_0 + 1$

2.4 Равномерная сходимость и непрерывность

Теорема 2.4.1. *Пусть* $f_n \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} f,\ x_0$ *— предельная точка множества* $\mathbb{E}$ *и пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n,\ (n = 1, 2, \ldots)$*. Тогда* $\{A_n\}$ *сходится и*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} A_n \tag{2.9}$$

Иными словами, 2 предельных перехода в данном случае коммутируют.

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ $\exists N : n > N, m > N, x \in \mathbb{E}$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{2.10}$$

Переходя в неравенстве (2.10) к приделу при $x \to x_0$ получим

$$|A_n - A_m| < \varepsilon,\ (n, m > N) \tag{2.11}$$

Поэтому $\{A_n\}$ — последовательность для которой выполняется признак Коши сходимости последовательности $\Rightarrow$ она сходится.
Обазначим ее предел A

$$|f(x) - A| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| \tag{2.12}$$

Выберем n :

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall x \in \mathbb{E} \tag{2.13}$$

Это возможно в силу равномерной сходимости.

$$|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.14}$$

Затем, для этого n подберем такую окрестность $U(x_0) : x \in U(x_0), x \neq x_0$, следовательно:

$$|f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.15}$$

Из неравенств (2.12) — (2.15) получим

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \ \forall x \in U(x_0), \ x \neq x_0$$

Это равносильно равенству (2.9) □

Теорема 2.4.2. *Последовательность функций, непрерывных в точке* $x \in \mathbb{E} f_n \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} f$, *то функция* f *непрерывна в точке* x_0.

Доказательство. Без доказательства. □

Замечание 2.4.1. Обратное не верно, то есть последовательность непрерывных функций может неравномерно сходиться.

Из теоремы (2.4.2) и определения (2.2.2) $\Rightarrow$ теорема (2.4.3)

Теорема 2.4.3. *Если функции* $U_n(x)$, $(n = 1, 2, \dots)$, $x \in \mathbb{E}$ *непрерывны в точке* $x_0 \in \mathbb{E}$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ *равномерно сходится на* $\mathbb{E}$, *то его сумма* $f(x)$ *также непрерывна в точкке* x_0.

2.5 Равномерная сходимость и интегрирование

Теорема 2.5.1. *Пусть* f_n *— последовательность действительных, значимых, интегрируемых на отрезке* $[a, b]$ *функций. Тогда функция* f *также интегрируема на* $[a, b]$ *и*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx \tag{2.16}$$

Существование предела заранее не предполагается.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n :$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ x \in [a, b] \tag{2.17}$$

Зафиксируем n и выберем разбиение $[a, b]$, $\triangle_1, \dots, \triangle_S$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_i \omega(f_n, \triangle_i)|\triangle_i| < \varepsilon \tag{2.18}$$

Комментарий. $\omega(f, E) = \sup - \inf$ — колебание функции.

Функции f_n интегрируемы на $[a, b]$. По скольку $\omega(f, \triangle_i) \leq \omega(f_n, \triangle_i) + 2\varepsilon, \ (i = 1, \dots, S)$ (смотри (2.17)).

$$\sum_i \omega(f, \triangle_i)|\triangle_i| \leq \varepsilon + 2\varepsilon(b - a)$$

Отсюда следует, что $f \in \mathbb{R}[a, b]$. Для доказательства (2.16) выберем $n > N :$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ (a \leq x \leq b), \ n > N \tag{2.19}$$

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b f_n(x)dx \right| \leq \int\limits_a^b |f(x) - f_n(x)|dx < \varepsilon(b - a) \tag{2.20}$$

Отсюда вытекает (2.16).

□

Теорема 2.5.2. *$U_n \in R[a,b]$ (Интегрируема). Если*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x), \ (a \le x \le b) \tag{2.21}$$

При чем ряд (2.21) сходится на $[a,b]$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

Иными словами ряд (2.21) можно интегрировать частями.

Доказательство. Без доказательства. □

Замечание 2.5.1. При нарушении равномерности ряд, состоящий из интегрируемых функций может иметь интегрируемую сумму.

2.6 Равномерная сходимость и дифференцирование

$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, x \in \mathbb{R}$ показывает, что из равномерной сходимости последовательности функций не следует даже поточечная сходимость последовательностей функций производных. То есть нужны более сильные предположения, чтобы заключать, что $f_n' \to f_n$, при $f_n \to f$.

Теорема 2.6.1. *Пусть $f_n(x) \to f(x), \ x \in [a,b], \ n \to \infty, \ f_n \in C[a,b], \ (n = 1, 2, \dots)$. Если $\{f_n'(x)\}$ сходится равномерно на $[a,b]$, то $f_n(x)$ дифференцируема и*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Доказательство. Обозначим через f^* предел последовательности f_n'. Ввиду теоремы (2.4.2) f^* непрерывна на $[a,b]$.
Применим теорему (2.5.1) к последовательности $\{f_n\}$ на промежутке $[a,x]$, где $x \in [a,b]$

$$\int\limits_a^x f^*(t)dt = \lim \int\limits_a^x f'(t)dt = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a)$$

Так как интеграл слева ввиду непрерывности функции f^* имеет производную равную f', то ту же производную имеет и $f(x)$.

$$f'(x) = f^*(x) = \lim_{n\to\infty} f'(x), x \in [a,b]$$

□

Перефразируем теорему (2.6.1) с точки зрения рядов:
Пусть сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x) =: f(x), x \in [a,b]$ и пусть $U_n(x) \in C^1[a,b], \ (n = 1, 2, \dots)$.
Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n'(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, то сумма $f(x)$ дифференцируема, и $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n'(x), x \in [a,b]$.

Глава 3

Степенные ряды

3.1 Радиус сходимости и круг сходимости

Определение 3.1.1. Степенной ряд — ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \ \ z, z_0 \in \mathbb{C}, n = 0, 1, \ldots \tag{3.1}$$

a_n — коэффициенты ряда.
$\xi = z - z_0$, тогда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\xi$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3.2}$$

Теорема 3.1.1. *Степенной ряд (3.2), $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$,*

$$R = \frac{1}{\alpha} \tag{3.3}$$

($\alpha = 0 \Longleftrightarrow R = \infty$, $\alpha = +\infty \Longleftrightarrow, R = 0$), тогда ряд (3.2) абсолютно сходится, если $|z| < R$, и рассходится, если $|z| > R$.

Доказательство. Положим $C_n = a_n z^n$. По критерию Коши заключаем, что сумма $\sum C_n$ сходится при $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R} < 1$, то есть $|z| < R$; и рассходится, если $|z| > R$. □

Определение 3.1.2. Число R называется радиусом сходимости ряда (3.2).
$|z| < R, z \in \mathbb{C}$ называется кругом сходимости ряда (3.2).

Замечание 3.1.1. О сходимсоти на границе окружности $|z| = R$ ничего не говорится втеореме (3.1.1), так как возможны все варианты.

Теорема 3.1.2. *Если R — радиус сходимости ($R > 0$) ряда (3.2), то на любом круге $|z| < r$, где r — фиксированно, и $r < R$.*
Таким образом этот ряд сходится абсолютно и равномерно.

Доказательство. $z = r$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ сходится, а так как для любой точки z круга $|z| \leq r$ выполняется неравенство:

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n, \ \forall n \tag{3.4}$$

то по признаку Вейерштрассе на этом круге ряд (3.2) сходится равномерно. □

Следствие. *Степеной ряд непрерывный в каждой точке своего круга* $|z| < R$ *сходится.*

Теорема 3.1.3 (2-ая т. Абеля). *Если* R *— радиус сходимости,* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *и этот ряд сходится при* $|z| = R$, *то он сходится на отрезке* $[0, R]$ *равномерно.*

Доказательство. Пусть $0 \leq x \leq R$, представим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$. По скольку члены ряда $\sum a_n R^n$ не зависит от x, то его сходимость означает его равномерную сходимость. $\{(\frac{x}{R})^n\}$ ограничена на отрезке $[0, R]$ и монотонна в каждой точке.
Поэтому в силу признака Абеля равномерной сходимости рядов (2.3.2) ряд (3.2) равномерно сходится на отрезке $[0, R]$. □

Лемма 3.1.4. *Радиусы сходимости* R, R_1, R_2 *соответственно рядов* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}, \sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ *равны:* $R = R_1 = R_2$.

Доказательство. Действительно, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{a_n}{n+1}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|n a_n|}$ □

Пример 3.1.1. $\sum a_n (z - z_0)^n$. Областью сходимости такого ряда является круг $|z - z_0| < R$, с точностью до граничных точек.

3.2 Степенные ряды в действительной области. Общие свойства.

В параграфах 3.2 - 3.4 будем рассматривать

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{3.5}$$

где a_n, x, x_0 — действительные числа.
Если R — радиус сходимости ряда ряда (3.5), то очевидно ряд (3.5) сходится, если $|x| < R$ и расходится, если $|x| > R$.
Число R — по-прежнему называется радиусом сходимости ряда (3.5), а интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ — его интервал сходимости.

Теорема 3.2.1. *Если* R *— радиус сходимости ряда*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{3.6}$$

где $R > 0$, *то:*

1. *функция* f *имеет в интервале* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *производные всех порядков, они называются почленным диффиринциалом ряда* (3.6):

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1) a_n (x - x_0)^{n-m}, \; m = 1, 2, \dots \tag{3.7}$$

2. $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} \tag{3.8}$$

3. (3.6) - (3.8) *имеют одинаковые радиусы сходимости R.*

Доказательство. В силу леммы (3.1.4) ряды (3.7), (3.8) имеют тот же радиус сходимости, что и ряд (3.6). Всякий ряд с $R > 0$ сходится на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$,
$0 < r < R$ (теорема (3.1.2)).
Поэтому утверждения 1 и 2 непосредственно следуют из общих теорем о сходимости рядов ((1.5) и (1.6.2)). □

Теорема 3.2.2. *Если функция f раскладывается в некоторой окружности x_0, то она раскладывается в степенной ряд.*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{3.9}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ n = 0, 1, \dots \tag{3.10}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \tag{3.11}$$

Следствие. *Если в некоторой окружности точки функция раскладывается в степенной ряд, то это разложение единственно.*

Доказательство. Продифференцировав m раз равенство (3.6), получим (в силу (3.7)):

$$f^{(m)}(x) = m(m-1)\dots 2\cdot 1\cdot a_m + (m+1)m\dots a_{m-1}(x-x_0) + (m+2)(m+1)\dots 3\cdot a_{m-2}(x-x_0)^2\dots \tag{3.12}$$

Положим $x = x_0$, тогда получаем:

$$f^{(m)}(x_0) = m!\, a_m, \ m = 0, 1, \dots \tag{3.13}$$

□

3.3 Ряд Тейлора. Разложение функции в степенные ряды.

Определение 3.3.1. Пусть f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков, тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \tag{3.14}$$

Называется рядом Тейлора функции f в точке x_0.

Следующий пример показывает, что функция, бесконечно дифференцируемая в одной точке может быть не равна разложению по Тейлору в окрестности этой точки.

Пример 3.3.1.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, \ x \neq 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

$f^{(n)}(0) = 0, \ n = 0, 1, \dots$
Отсюда следует, что все члены ряда Тейлора (3.6) в точке $x_0 = 0$, и не совпадают с функцией $f(x)$ в никакой окрестности точки x_0.

Утверждение 3.3.1. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности (x_0-h, x_0+h).

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{3.16}$$

$$r_n(x) = f(x) - S_n(x) \tag{3.17}$$

Тогда, для того, чтобы функция $f(x)$ на интервале (x_0-h, x_0+h) равна сумме своего ряда (3.1), то есть:

$$(S_n(x) \to f(x),\ n \to \infty) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0,\ \forall x \in (x_0-h, x_0+h) \tag{3.18}$$

Теорема 3.3.1. *Пусть функция f и все ее производные ограничены в совокупности на интервале (x_0-h, x_0+h), то есть существует такая $M = const, M > 0$:*
$\forall x \in (x_0-h, x_0+h),\ n = 0, 1, \ldots,$ выполняется неравенство:

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \tag{3.19}$$

Тогда на интервале (x_0-h, x_0+h) функция f раскладывается в ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{3.20}$$

где $|x-x_0| < h$.

Доказательство.

$$\forall a : \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \tag{3.21}$$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, для $x \in (x_0-h, x_0+h)$, для $\forall M$ имеем:

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x), \tag{3.22}$$

где $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, где $0 < \theta < 1$.
Используя (3.19) получим:

$$|r_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}|}{(n+1)!} \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!},\ \forall x \in (x_0-h, x_0+h). \tag{3.23}$$

Остюда из (3.21) следует (3.18). Согласно утверждению (3.3.1) теорема доказана. □

3.4 Разложение основных элементарных в ряд Тейлора.

- Разложение в ряд функции $e^x, \cos x, \sin x$.
  Использую теорему (3.3.1), получаем:

$$f^{(n)}(x) = e^x,\ \sin(x + \frac{\pi}{2}n),\ \cos(x + \frac{\pi}{2}n),\ n = 0, 1, \ldots, \tag{3.24}$$

  Так что $|f^{(n)}(x)| \leq e^h,\ f(x) = e^x, |x| \leq h$
  $|f^{(n)}(x)| \leq 1,\ f(x) = \sin x, \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$

Так как коэффициенты Тейлора для этих функций известны, то мы можем записать разложение при любом x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3.25}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.26}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{3.27}$$

- Разложение в ряд функции $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$.
Заменив в (3.25) x на $-x$ получим

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \tag{3.28}$$

Отсюда из (3.25) получаем:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.29}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{3.30}$$

В правых частях этих формул разложения степенных функций в ряды единственно в силу теоремы (3.2).

- Разложение в ряд функции $\ln(1+x)$.
Рассмотрим:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \dots, \ |t| < 1 \tag{3.31}$$

Интегрирую его почленно по теореме (3.2.1) от 0 до $x \in (-1, 1)$ получим:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \tag{3.32}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \ \forall x \in (-1, 1) \tag{3.33}$$

Ряд правой части равенства (3.33) сходится по признаку Лейбница $\Rightarrow$ согласно теореме Абеля (3.1.3), разложение (3.33) имеет место в промежутке $(-1, 1]$

- Разложение в ряд $(1+x)^\alpha, \alpha \neq 0, 1, \dots$ Формула Тейлора для этой функции имеет вид:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(x) \tag{3.34}$$

Соответствующий степенной ряд называют

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \tag{3.35}$$

биномиальным рядом.
$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1$, в силу утверждения, $r_n(x) \to 0$.

Замечание 3.4.1. Поведение ряда (3.35) в точках ± 1, характерезуется следующей таблицой:

Таблица 3.1: таблица, характеризующая ряд (3.35)

$x = 1$	$\alpha > 0$	абсолютно сходится
	$-1 < \alpha < 0$	условно сходится
	$\alpha \leq -1$	расходится
$x = -1$	$\alpha > 0$	абсолютно сходится
	$\alpha < 0$	рассходится

Согласно второй теореме Абеля (3.1.3) всякий раз, когда ряд (3.35) сходится при $x = \pm 1$, его сумма равна $(1+x)^\alpha$.

- Разложение в ряд $\operatorname{arctg} x$
  Рассмотрим ряд:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + \dots, \quad |t| < 1 \tag{3.36}$$

Интегрирую его почленно по теореме (3.2.1) от 0 до $x \in (-1, 1)$ получим:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \dots \tag{3.37}$$

Ряд правой части равенства (3.33) сходится по признаку Лейбница $\Rightarrow$ согласно теореме Абеля (3.1.3), разложение (3.33) имеет место на отрезке $(-1, 1)$.
В частности, при $x = 1$, получим:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} \tag{3.38}$$

- Разложение в ряд $\arcsin x$
  Рассмотрим ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n}, \quad |t| < 1 \tag{3.39}$$

Интегрирую его почленно по теореме (3.2.1) от 0 до $x \in (-1, 1)$ получим:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1 \tag{3.40}$$

Справедливость этого разложения при $x = \pm 1$ устанавливается с помощью второй теоремы Абеля (3.1.3).

3.5 Формулы Эйлера

Ряды разложения (3.25) - (3.27) функций $e^x, \sin x, \cos x$ сходятся всюду в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. По этой причине естественны следующие определения($e^z, \sin z, \cos z, z \in \mathbb{C}$):

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{3.41}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.42}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \tag{3.43}$$

Заменив z сначала на iz, а затем на $-iz$ получим:

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} \tag{3.44}$$

$$e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n z^n}{n!} \tag{3.45}$$

Заметим, что $i^{2k} = (-1)^k, i^{2k+1} = (-1)^k i, k = 0, 1, \ldots$.

$$\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \tag{3.46}$$

$$\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.47}$$

Сравнив эти формулы с (3.42), (3.43) заключаем, что

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{3.48}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{3.49}$$

Из этих формул следует формула:

$$\cos z + i \sin z = e^{iz} \tag{3.50}$$

Формулы (3.48), (3.49) и (3.50) называются формулами Эйлера.
Если в формуле (3.50) $z = \varphi, \ \varphi \in \mathbb{R}$, то

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi} \tag{3.51}$$

Поэтому $z \in \mathbb{C}, |z| = r, \ z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$z = re^{i\varphi} \tag{3.52}$$

Определение 3.5.1. $W(x) = U(x) + iV(x), \ x \in \mathbb{R}, V(x) \in \mathbb{R}$
Положим $\frac{dW}{dx} = U'(x) + iV'(x)$, тогда

$$\int_a^b W(x)dx = \int_a^b U(x)dx + i \int_a^b V(x)dx \tag{3.53}$$

$e^{i\pi} = -1$

Глава 4

Ряды Фурье

4.1 Ортогональные системы

В параграфах (4.1) - (4.3) $\mathbb{X}$ — линейное бесконечномерное пространство(действительное или комплексное, со скалярным произведением).

$$X(\cdot\ ,\ \cdot),\ \|x\| = \sqrt{(x,x)}.$$

$\mathbb{K}$ — некоторое счетное или конечное множество.

Определение 4.1.1. Система векторов $\{x_k : k \in \mathbb{K}\},\ x \in \mathbb{X}$ — ортогональная система(ОС). $(x_i, x_j) = 0,\ \forall i, j \in \mathbb{K}, i \neq j$ (и система не нулевая). Если $(x_i, x_i) = 1$, то система называется ортонормированной.

Теорема 4.1.1. *Ортогональная система векторов линейно независима, то есть линейно не зависима каждая ее конечная подсистема.*

Доказательство. Определение линейной независимости:

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_i x_i + \cdots = 0 \Longleftrightarrow \alpha_i = 0,\ \forall i \tag{4.1}$$

Скалярно умножим все члены на x_i, тогда получим:

$$\alpha_1(x_1, x_i) + \cdots + \alpha_i(x_i, x_i) + \cdots = (0, x_i) \tag{4.2}$$
$$\alpha_i(x_i, x_i) = 0 \tag{4.3}$$
$$\alpha_i = 0 \tag{4.4}$$

Равенство (4.3) следует из определения (4.1.1), равенство (4.4) следует из того, что $(x_i, x_i) \neq 0$ (так как система не нулевая). □

4.2 Коэффициенты Фурье

Определение 4.2.1. Пусть $\{e_k :\ k \in \mathbb{K}\}$ — ОНС в $\mathbb{X}$, $\{(x, e_k)\}, x \in \mathbb{X}$ называется коэффициентами Фурье элемента x в ОНС e_k.

Лемма 4.2.1. *Если система векторов $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathbb{X}$ — ОН, то $\forall x \in \mathbb{X}$ вектор $h = x - x_e$, где*

$$x_e = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \tag{4.5}$$

ортоганален подпространству $\mathbb{L} = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ (натянотому на векторы $e_1, \ldots, e_n$)

Доказательство. Достаточно проверить, что скалярное произведение $(h, e_j) = 0,\ \forall j = 1, \dots, n$

$$(h, e_j) = (x, e_j) - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)(e_k, e_j) = (x, e_j) - (x, e_j) = 0 \tag{4.6}$$

□

Лемма 4.2.2 (теорема Пифагора)**.** *Если векторы $x_1, \dots, x_n$ попарно ортогональны и $x = x_1 + \dots + x_n$, то $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$*

Доказательство. $(x, x) = (\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{i,j=1}^{n} (x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{n} (x_i, x_i)$ □

Теорема 4.2.3 (экстремальное свойство коэффициентов Фурье)**.** *Если $e_1, \dots, e_n$ — ОНС пространства $\mathbb{X}$, то $\forall x \in \mathbb{X}$ и $\forall y = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ имеет место неравенство:*

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k\| \leq \|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|, \tag{4.7}$$

в котором равенство возможно при условии: $\alpha_k = (x, e_k)\ \forall k = 1, \dots, n$.

Доказательство. Представим $x - y$ в виде $x - y = (x_e - y) + h$, где x_e, h определены в лемме (4.2.1).
По лемме (4.2.1) $h \perp (x_e - y) \in \mathbb{L}$. По теореме Пифагора (лемма 4.2.2):

$$\|x - y\|^2 = \|x_e - y\|^2 + \|h\|^2 = \|x_e - y\|^2 + \|x - x_e\|^2 \geq \|x - x_e\|^2 \tag{4.8}$$

равенство возможно, когда коэффициенты α_k совпадают с коэффициентами Фурье. □

Замечание 4.2.1. Теорема (4.2.3) показывает, что вектор x_e является наилучшей в смысле нормы пространства $\mathbb{X}$, аппроксимацией вектора x подпространства $\mathbb{L} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, так что наименьшее уклонением вектора x от $\mathbb{L}$ равно $\|x - x_e\|$.

4.3 секция