НИЯУ МИФИ

3 семестр факультет КиБ

Математический анализ

Автор:
Тропин А.Г.

Лектор:
Теляковский Д.С.

e-mail: andrewtropin@gmail.com
github: abcdw/mephi

3 сентября 2013 г.

Оглавление

I Функциональный последовательности и ряды **2**

1 Числовые ряды **3**

1.1 Определение . . . 3
1.2 Действия с рядами . . . 3
1.3 Ряды с неотрицательными членами . . . 3

Часть I

Функциональный последовательности и ряды

Глава 1

Числовые ряды

1.1 Определение

Определение 1. $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} U_k$

Определение 2. $S_n =$ - Частичная сумма

Определение 3. Ряд сходится, если $\exists \lim_{n\to\infty} \sum\limits_{0}^{\infty} U_k$

Определение 4. $\{a_n\} a_n = a_0 + \sum\limits_{1}^{n} (a_k - a_{k-1}$

Теорема 1.1.1 (Критерий Коши)**.** *Ряд сходится* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists N = N(\varepsilon) \forall n \geq N, \forall p | \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} n_k| = |U_{n+1} + \cdots + U_{n+p} = |S_{n+p} + S_n| < \varepsilon$

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N, \forall p |S_{n+p} + S_n| < \varepsilon$ □

Определение 5. Краевые условия Если ряд

Пример 1. $\sum\limits_{0}^{\infty} z^n$ $S_n(z) = \sum\limits_{0}^{n} z_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ При

1.2 Действия с рядами

Теорема 1.2.1. *Ряды* $\sum U_k$ *и* $\sum V_k$ *сходятся, тогда* $\sum \alpha U_k = \alpha \sum U_k$
$\sum U_k \pm V_k = \sum U_k \pm \sum V_k$

Доказательство. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha U_k = \lim_{n\to\infty} \sum\limits_{0}^{n} \alpha U_k = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum\limits_{0}^{n} U_k = \alpha \sum\limits_{0}^{\infty} U_k$ □

Доказательство. Аналогично второе. □

Замечание 1. Сумма сходится $\not\to$ по отдельности.
Еще свойство Нельзя раскрывать скобки и переставлять.

1.3 Ряды с неотрицательными членами

S_n - не строго возрастающая Сходимость ряда эквивалентна ограниченности S_n

Теорема 1.3.1. *1* $U_k \geq 0, V_k \geq 0 \forall k$ *Если* $0 \leq U_k \leq V_k$*, то* $\sum V_k$ *сходится* $\Rightarrow \sum U_k$ *сходится* $\sum U_k$ *расходится* $\Rightarrow$ *расходится* $\sum V_k$

2 Если $\lim_{n\to\infty} \frac{U_k}{V_k} = A > 0$*, то ряды сходятся или расходятся.*

Доказательство. Тут доказательство □

Замечание 2. Вместо существования предела достаточно предположить, что существуют такие числа p и q > 0 такие что $0 < q < \frac{U_k}{V_k} < p \forall k$

Теорема 1.3.2 (Признак Даламбера)**.** *Признаки*

1 Если $\exists q \forall k \frac{U_{k+1}}{U_k} < q < 1$ *сходится*

2 Если предел

Доказательство. 1 Идея докозательства - сравнение с геометрической прогрессией.

2 Для предельного случая

□

Теорема 1.3.3 (Признак Коши)**.** $\sum U_k, U_k \geq 0$

1 Если $\exists q < 1$*, то* $\forall k \sqrt[k]{U}_k \leq q < 1$

2 Если $\exists \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{U}_k = q (\geq 0)$

$q < 1$ *- сходится*
$q > 1$ *- расходится*
$q = 1$ *- нужны дополнительные исследования*

Замечание 3. $\overline{\lim}$ вместо lim

Доказательство. Сравнение с геометрической прогрессией
Если $\forall k \sqrt[k]{U}_k \leq q < 1 \Leftrightarrow U_k \leq q^k$ □

Определение 6. $\{a_n\}$
$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$

Признак Коши с верзним пределом. $\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{U}_k = q < 1$ □

Замечание 4. Признак Даламбера слабее признака Коши