Решение домашнего задания (11 сентября 2013 г.)

Тропин А. Г.
e-mail: andrewtropin@gmail.com
github: abcdw/mephi

Решение задачи 3475.

$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, если $u = x$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$, $w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$.

$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y} - 1$, $\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x}z^2 + \frac{z^2}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y}z^2$

$z^2 - \frac{\partial w}{\partial x}x^2z^2 - \frac{\partial w}{\partial y}y^2z^2 = z^2$

$1 - \frac{\partial w}{\partial x}x^2 - \frac{\partial w}{\partial y}y^2 = 1$

$\frac{\partial w}{\partial x}x^2 - \frac{\partial w}{\partial y}y^2 = 0$

$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{1}{x^2}$

$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}$

$x^2\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{x^2}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial v}\frac{y^2}{y^2} = 0$, $x^2\frac{\partial w}{\partial u} = 0$

Ответ: $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$

Решение задачи 2550.

$S_n = \frac{1}{1*4} + \frac{1}{4*7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1}$

$A - 2B = 1, A = -B \Rightarrow A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}$

$a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$

$S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$

Ответ: $S = \frac{1}{3}$

Решение задачи 2552.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

$S_n = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$

Ответ: $S = 1 - \sqrt{2}$

Решение задачи 2560.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1000n+1}$

$a_n = \frac{1}{1000n+1} \sim \frac{1}{n^p}(p = 1)$

Ответ: по признаку сравнения ряд рассходится.

Решение задачи 2561.

$a_n = \frac{n}{2n-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \neq 0$

Ответ: не выполняется необходимое условие сходимости.

Решение задачи 2562.

$a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$

$a_n \sim \frac{1}{n^p}(p = 2)$

Ответ: по признаку сравнения ряд сходится.

Решение задачи 2563.

$a_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

$a_n \sim \frac{1}{n^p}(p = \frac{3}{2})$

Ответ: по признаку сравнения ряд сходится.

Решение задачи 2564.

$a_n = \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$

$a_n \sim \frac{1}{n^p}(p = 1)$

Ответ: по признаку сравнения ряд рассходится.

Решение задачи 2578.

$a_n = \frac{1000^n}{n!}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000^{(n+1)}}{(n+1)!}\frac{n!}{1000^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000}{n+1} = 0 < 1$

Ответ: по признаку Даламбера ряд сходится.

Решение задачи 2579.

$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} < 1$

Ответ: по признаку Даламбера ряд сходится.

Решение задачи 2580.

$a_n = \frac{n!}{n^n}$

$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ [1]

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^n}} = \frac{1}{e} < 1$

Ответ: по признаку Коши ряд сходится.

Решение задачи 2581(а).

$a_n = \frac{2^n n!}{n^n}$

$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^n}} = \frac{2}{e} < 1$

Ответ: по признаку Коши ряд сходится.

Решение задачи 2581(б).

$a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$

$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n n!}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^n}} = \frac{3}{e} > 1$

Ответ: по признаку Коши ряд рассходится.

Решение задачи 2582.

$a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!^2}{2^{n^2+2n+1}}\frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)}{2^{2n+1}} = 0 < 1$

Ответ: по признаку Даламбера ряд рассходится.

[1] формула Муавра — Стирлинга

Тропин А. Г.
e-mail: andrewtropin@gmail.com
github: abcdw/mephi