

Физика

abcdw

Колебания. §1 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t), x = x(t)$$

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 - \text{однородное.}$$

Решение любого дифференциального уравнения содержит две произвольные константы.

$$\ddot{x} = 0$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 0$$

$$d\dot{x} = 0dt$$

$$\dot{x} = c_1$$

$$x = c_1t + c_2 - \text{общее решение.}$$

$$x(t) = 5t + 3 - \text{частное решение.}$$

$$\text{Рассмотрим } \ddot{x} + a\dot{x} + b = 0$$

Пусть каким-то образом нашли два частных линейнонезависимых решения.

$$\text{Любое решение представляется в виде } x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t)$$

$$x_{\text{общ неоднор.}} = x_{\text{общ однор.}} + x_{\text{частн. неоднор.}}$$

§2 Гармонические колебания.

$$\ddot{x} + x = 0$$

$$\ddot{x} = -x$$

$$x_1(t) = \cos t, x_2(t) = \sin t$$

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

$$x_1(t) = \cos \omega_0 t, x_2(t) = \sin \omega_0 t$$

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$$

$$x(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos \omega_0 t + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin \omega_0 t \right) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} (\cos \varphi \cos \omega_0 t + \sin \varphi \sin \omega_0 t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos(\omega_0 t - \varphi), \varphi = \operatorname{arctg} \frac{c_2}{c_1}$$

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \alpha), a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \alpha = -\varphi$$

§3 Комплексные числа.

$$z = x + \varphi y$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$x = e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_1 = i\omega_0, \lambda_2 = -i\omega_0$$

$$x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}$$

§4 Горизонтальные колебания пружинного маятника без трения.

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

§5 Малые колебания вблизи минимума потенциальной энергии.

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2, U(x_0) = 0, U'(x_0) = 0$$

$$U(x) = \frac{1}{2}U''(0)x^2, U''(0) = k \Rightarrow U(x) = \frac{kx^2}{2}, F_x = -\frac{dU}{dx} = -kx$$

§6 Смещение скорости и ускорения.

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

$$V_x = \dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2})$$