Математический анализ

abcdw

Глава 1. Неопределенный интеграл.

§1. Первообразная и неопределенный интеграл.

Опр. f(x) определена на (a, b). F(x) - первообразная для f(x), если $F'(x) \equiv f(x), dF = f(x)dx.$

Утв. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - первообразные f(x), то $F_1(x) - F_2(x) = const$
Док. $(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = 0 \Rightarrow F_1 - F_2 = const$. По Лагранжу.
$x > 0 : \operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}, x < 0 : \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg} x + \pi$

Задача. Функция расстония до ближайшего целого числа. Найти первообразную.

Опр. Совокупность всех первообразных - неопределенный интеграл.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

§2. Таблица неопределенных интегралов.

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq 1)$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$

- $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, -\arccos x + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x + C, -\operatorname{arcctg} x + C$
- $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
- $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \log(x + \sqrt{x^2 \pm 1} + C$
- $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$
- $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
- $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

§3. Основные приемы вычисления первообразных.

Равенство первообразных(интегралов) понимается как равенство производных.

$$\int (\alpha U(x) + \beta V(x))dx = \alpha \int U(x)dx + \beta \int V(x)dx$$

$$\int (UV)'dx = \int (U'V + V'U)dx = \int U'Vdx + \int V'Udx$$

$$\int U'Vdx = UV - \int V'Udx, \int VdU = UV - \int UdV$$

Если на (a, b) $\int f(x)dx = F(x)+C$, а $\varphi(t) : (\alpha,\beta) \to (a,b), \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема.

$$\int F(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$$

Примеры.
1) $\int \cos^2 \frac{x}{2}dx = \int \frac{1+\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + C$
2) $\int \log x dx = x\log x - \int x d\log x = x\log x - \int x\frac{1}{x}dx = x\log x - x + C$
3) $\int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$
4) $\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$
5) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \log(\operatorname{tg}\frac{x}{2}) + C$
6) $\int \sin 2x\cos 3x dx = \frac{1}{2}\int(\sin 5x - \sin x)dx = -\frac{\cos 5x}{10} + \frac{\cos x}{2} + C$
7) $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{a}\int \cos bx de^{ax} = \frac{1}{a}\cos bxe^{ax}] - \frac{1}{a}\int e^{ax}d\cos bx = \frac{1}{a}\cos bxe^{ax} + \frac{b}{a}\int \sin bxe^{ax}dx = \frac{1}{a}\cos bxe^{ax} + \frac{b}{a^2}\int \sin bxde^{ax} = \frac{1}{a}\cos bxe^{ax} + \frac{b}{a^2}\sin bxe^{ax} - \frac{b}{a^2}\int e^{ax}d\sin bx = \frac{1}{a}\cos bxe^{ax} + \frac{b}{a^2}\sin bxe^{ax} - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bxdx$

Формула Эйлера.

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

§4. Интегрирование рациональных функций.
1) $\int \frac{dx}{x-a} = \log|x-a| + C$
2) $\int\limits_{n\in N, n>1} \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C$
3) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
4) $\int\limits_{n\in N, n>1} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = I_n, I_1 = \operatorname{arctg} x + C$, по индукции $I_k = \frac{x}{(x^2+1)^k} + 2kI_k - 2kI_{k+1}$
5) $\int \frac{bx+c}{x^2+2px+q}dx$