НИЯУ МИФИ

3-ий семестр факультет КиБ, конспект лекций

Математический анализ

Автор:
Тропин А.Г.
Соавтор:
Коверко Е.А.

Лектор:
Севастьянов Е.А.

e-mail: andrewtropin@gmail.com
github: abcdw/mephi

7 января 2014 г.

Предисловие

Данный конспект был составлен для упрощения процесса подготовки к экзамену по математическому анализу. Может быть Евгению Александровичу больше не придется таскать с собой здоровенную стопку перфокарт.

Хочется выразить отдельную благодарность Коверко Егору, который предоставил большую часть материала и помог в написании этого творения. Авторы и соавторы не несут абсолютно никаких гарантий за правильность сего произведения.

Оглавление

Часть I

Функциональные последовательности и ряды

Глава 1

Числовые ряды

1.1 Определение

Определение 1.1.1. $U_1 + U_2 + U_3 + \dots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} U_k$

Определение 1.1.2 (Частичная сумма)**.** $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k$

Определение 1.1.3. Ряд сходится, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{0}^{\infty} U_k = S$

Определение 1.1.4. $\{a_n\} = a_0 + \sum\limits_{1}^{n} (a_k - a_{k-1})$, где $(a_k - a_{k-1}) = U_k$

Теорема 1.1.1 (Критерий Коши)**.** *Ряд сходится, тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \ = \ N(\varepsilon),\ \forall n \geq N, \forall p: \ |\sum_{k=n+1}^{n+p} U_k| \ = \ |U_{n+1} + \dots + U_{n+p}| \ = \ |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

Доказательство. $\sum U_k$ - сходится $\Leftrightarrow \{S_n\}$ - сходится

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N: \forall n \geq N, \forall p: \ |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

□

Следствие (Необходимое условие сходимости)**.** *Если $\sum U_k$ сходится, то $U_k \to 0$, при $k \to \infty$*

Доказательство. Если $\sum U_k$ сходится, то выполняется Критерий Коши. При $p = 1$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N: |S_{n+1} - S_n| \ = \ |U_{n+1}| < \varepsilon$$

□

Следствие. *Отбрасывание или добавление любого конечного числа членов ряда на его сходимость не влияет.*

Пример 1.1.1. $\sum\limits_{0}^{\infty} z^n$, $S_n(z) = \sum\limits_{0}^{n} z_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. При $n \to \infty$, $S_n(z) = \frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$.
$S_n(z)$ не имеет придела при $|z| \geq 1$.

1.2 Действия с рядами

Теорема 1.2.1. *Ряды* $\sum U_k$ *и* $\sum V_k$ *сходятся,* α *— комплексное число, тогда*

$$\sum \alpha U_k = \alpha \sum U_k \tag{1.1}$$

$$\sum (U_k \pm V_k) = \sum U_k \pm \sum V_k \tag{1.2}$$

Доказательство. Доказательство свойства ((1.1)):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha U_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} \alpha U_k = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} U_k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} U_k$$

□

Доказательство. Доказательство свойства ((1.2)):

$$\sum_{0}^{\infty} U_k \pm \sum_{0}^{\infty} V_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} U_k \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} V_k = \tag{1.3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} U_k \pm \sum_{0}^{n} V_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} (U_k \pm V_k) = \sum_{0}^{n} (U_k \pm V_k) \tag{1.4}$$

□

Замечание 1.2.1. Из сходимости $\sum (U_k \pm V_k) \not\Rightarrow$ сходимость $\sum U_k$ и $\sum V_k$

Замечание 1.2.2. Если $\sum U_k$ сходится, то можно группировать, не меняя порядка.

Пример 1.2.1.

$$\sum (1-1) \tag{1.5}$$

$$(1-1) + (1-1) + \dots \tag{1.6}$$

$$1 - (1-1) - (1-1) \dots \tag{1.7}$$

Комментарий. Нельзя раскрывать скобки и переставлять члены.

1.2.1 Ряды с неотрицательными членами

$U_k \geq 0$, $S_n = \sum\limits_{0}^{n} U_k$ - не убывающая последовательность.

$\sum\limits_{0}^{n} U_k$ - сходится $\Leftrightarrow \{S_n\}$ — ограничена

Комментарий. Сходимость ряда эквивалентна ограниченности S_n

Теорема 1.2.2.

$$U_k \geq 0, V_k \geq 0, \ \forall k:$$

1. *Если* $0 \leq U_k \leq V_k$, *то если* $\sum V_k$ *сходится* $\Rightarrow \sum U_k$ *сходится и если* $\sum U_k$ *расходится* $\Rightarrow \sum V_k$ *расходится.*

2. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_k}{V_k} = A > 0$, *то ряды сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство.

1. $\forall n$ верно неравенство $0 \leq \sum\limits_{0}^{n} U_k \leq \sum\limits_{0}^{n} V_k$

2. $\forall \varepsilon > 0 \ \varepsilon < A \ \exists N : \forall n \geq N \Rightarrow 0 < A - \varepsilon < \frac{U_k}{V_k} < A + \varepsilon$
   $0 < (A - \varepsilon) \cdot V_k < U_k < (A + \varepsilon) \cdot V_k$
   Пусть U_k — сходится, тогда из доказанного выше 1ого пункта следует $(A - \varepsilon) \cdot V_k$ — сходится $\Rightarrow \sum V_k$ сходится $\Rightarrow \sum (A + \varepsilon) \cdot V_k$ сходится $\Rightarrow \sum U_k$ сходится.

□

Замечание 1.2.3. Вместо существования предела $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{U_k}{V_k}$ достаточно предположить, что существуют такие числа p и q $>$ 0, такие что $0 < q < \frac{U_k}{V_k} < p, \ \forall k$

Теорема 1.2.3 (Признак Даламбера)**.**

$$\sum U_k, \ U_k > 0$$

1. *Если* $\exists q$ *такое что:* $\forall k \ \frac{U_{k+1}}{U_k} \leq q < 1$ *сходится*

2. *Если* $\exists \lim\limits_{k \to \infty} \frac{U_{k+1}}{U_k} = q$, *то:*

   - *при* $q < 1$ *сходимость*
   - *при* $q > 1$ *расходимость*
   - *при* $q = 1$ *неизвестно (нужно провести дополнительные исследования)*

Доказательство. Идея докозательства - сравнение с геометрической прогрессией.

1. $k = 0, 1, \ldots, n; \ U_k = U_0 \cdot \frac{U_1}{U_0} \frac{U_2}{U_1} \cdots \frac{U_k}{U_{k-1}} < U_0 \cdot q^k$

   Комментарий. $\frac{U_k}{U_{k-1}} < q, \ \forall k$

   $q < 1$, тогда $\sum U_0 \cdot q^k$ — сходящаяся геометрическая прогрессия.
   $U_k = U_0 \cdot \frac{U_1}{U_0} \frac{U_2}{U_1} \cdots \frac{U_k}{U_{k-1}} \geq U_0 > 0$

   Комментарий. $\frac{U_k}{U_{k-1}} \geq 1, \ \forall k$

   $U_k \not\to 0 \Rightarrow$ не выполняется необходимое условие сходимости.

2. Пусть $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{U_{k+1}}{U_k} = q$
   $\forall \varepsilon > 0, \ \exists K : \ \forall k \geq K$ выполняется неравенство $q - \varepsilon < \frac{U_{k+1}}{U_k} < q + \varepsilon$

   - Если $q < 1$,выберем такое ε, что $q + \varepsilon < 1$, для $\forall k \geq K(\varepsilon)$.
     $\frac{U_{k+1}}{U_k} < q + \varepsilon < 1 \Rightarrow$ сходится по первой части.
   - Если $q > 1$, то выберем ε так, чтобы $q - \varepsilon > 1$, для $\forall k \geq K(\varepsilon)$.
     $\frac{U_{k+1}}{U_k} > q - \varepsilon > 1, \ \Rightarrow$ расходится по первой части.

□

Теорема 1.2.4 (Признак Коши).

$$\sum U_k, U_k \geq 0$$

1. *Если* $\exists q < 1$ *и* $\forall k > K$: *выполняется* $\sqrt[k]{U_k} \leq q < 1$, *то ряд сходится, а если* $\forall k\ \sqrt[k]{U_k} \geq 1$, *то расходится.*

2. *Если* $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{U_k} = q, (q \geq 0)$, *то*

   - $q < 1$ - *сходится*
   - $q > 1$ - *расходится*
   - $q = 1$ - *нужны дополнительные исследования*

Замечание 1.2.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n}$ можно рассматривать вместо $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{U_k}$

Доказательство. Сравнение с геометрической прогрессией

1. Если $\forall k\ \sqrt[k]{U_k} \leq q < 1 \Rightarrow U_k \leq q^k$ — сходящаяся геометрическая прогрессия.
   Если $\forall k \sqrt[k]{U_k} \geq 1 \Rightarrow U_k \geq 1$ — не выполняется необходимое условие сходимости.

2. Если $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{U_k} = q$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geq K, (q-\varepsilon) < \sqrt[k]{U_k} < (q+\varepsilon)$
   $(q-\varepsilon)^k < U_k < (q+\varepsilon)^k$

   - При $q < 1$ выберем ε так, чтобы $q + \varepsilon < 1$, тогда $U_k < (q+\varepsilon)^k < 1$ — сходящаяся геометрическая прогрессия.
   - При $q > 1$ выберем ε так, чтобы $q - \varepsilon > 1$, тогда $U_k > (q-\varepsilon)^k > 1$ — не выполняется необходимое условие сходимости.

□

Определение 1.2.1. Дана $\{a_n\}$ и пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ — наибольший из частичных пределов, тогда:

$$\forall \{a\}\ \exists \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = A \text{ } or \text{ } \infty$$

Комментарий. A — число.

- Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = +\infty \Rightarrow \{a_n\}$ — неограничена сверху $\Rightarrow \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{U_k} = +\infty$ — неограничена сверху. U_k неограничена сверху и не выполняется необходимое условие.

- Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = A$, тогда $\forall \varepsilon \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ бесконечно много членов $\{a_n\}$:

  - $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{U_k} = q < 1$. Выберем ε так, чтобы $q + \varepsilon < 1 \Rightarrow \exists K : \forall k \geq K,\ \sqrt[k]{U_k} < q + \varepsilon < 1$ по признаку Коши.

  - $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{U_k} = q > 1$. Выберем ε так, чтобы $q - \varepsilon > 1 \Rightarrow \forall K\ \exists k \geq K : \sqrt[k]{U_k} > q - \varepsilon > 1 \Rightarrow U_k > 1$

1.3 Интегральный признак сходимости рядов с неотрицательными членами

Теорема 1.3.1. *Если $f(x)$ не отрицательна и убывает на $x \geq 1$, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \tag{1.8}$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx \tag{1.9}$$

то есть $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx < \infty$.

- $\sum a_n < \infty$ — *сходится*
- $\sum a_n = \infty$ — *расходится*

Доказательство. Если $k \leq x \leq k+1,\ k = 1, 2, \ldots$, то, в силу убывания функции получаем неравенство:

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$$

Интегрируя по отрезку $[k, k+1]$ получим:

$$f(k) \geq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1),\ k = 1, 2, \ldots\ .$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \tag{1.10}$$

Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, тогда (1.10) примет вид:

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq S_n \tag{1.11}$$

Если ряд (1.8) сходится и его сумма равна S, то $S_n \leq S$, и $\int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq S,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\forall b > 1, n+1 > b$ имеем:

$$\int\limits_{1}^{b} f(x)dx \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq S$$

В силу неотрицательности функции $f(x)$ интеграл сходится.
Пусть наоборот, интеграл (1.9) сходится, тогда из (1.11) следует:

$$S_{n+1} \leq f(1) + \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq f(1) + \int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$$

Тем самым, последовательность сумм $\{S_n\}$ ряда (1.8) ограничена сверху, и поэтому этот ряд сходится. □

Пример 1.3.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R} \tag{1.12}$$

Положим $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, тогда $f(n) = \frac{1}{n^{\alpha}}$

Поскольку $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$:

- При $\alpha > 1$ сходится
- При $\alpha \leq 1$ расходится

Тогда ряд (1.12) сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$. При $\alpha < 0$ дробь $\frac{1}{n^{\alpha}} \geq 1$.

1.4 Признак сходимости для чередующихся рядов

Рассмотрим ряды с действительными числами, которые то положительные, то отрицательные.

Теорема 1.4.1 (Лейбница). *Если*

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0 \tag{1.13}$$

$$U_n \geq U_{n+1} > 0,\ n = 1, 2, \ldots \tag{1.14}$$

то знакочередеющийся ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} U_n \tag{1.15}$$

сходится, при этом если S — сумма ряда, а S_n — его n-ая частичная сумма, то $\forall n : n = 1, 2, \ldots$

$$|S - S_n| \leq U_{n+1} \tag{1.16}$$

Доказательство. Заметим, что частичная суммы S_n с четными номерами возрастают:

$$S_{2k} = (U_1 - U_2) + (U_3 - U_4) + \cdots + (U_{2k-1} - U_{2k}),\ k = 1, 2, \ldots$$

Так что выполняется неравенство $S_{2k+2} \geq S_2 k$. Кроме того, они ограничены сверху:

$$S_{2k} = U_1 - (U_2 - U_3) - \cdots - (U_{2k-2} - U_{2k-1}) - U_{2k},\ S_{2k} < U_1$$

Поэтому последовательность $\{S_{2k}\}$ сходится

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S \tag{1.17}$$

Поскольку $S_{2k+1} = S_{2k} + U_{2k+1}$ и $U_{2k+1} \to 0$ при $k \to \infty$, то

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = S \tag{1.18}$$

Из (1.17) и (1.18) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$
При этом, нетрудно увидеть, что

$$S_{2k} \leq S \leq S_{2k+1} \leq S_{2k-1},\ \forall k \tag{1.19}$$

Из неравенства (1.19) следует, что

$$S - S_{2k} \leq S_{2k+1} - S_{2k} = U_{2k+1} \tag{1.20}$$

$$S_{2k-1} - S \leq S_{2k-1} - S_{2k} = U_{2k},\ k = 1, 2, \ldots \tag{1.21}$$

Это и означает, что $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство (1.16). □

1.5 Преобразование Абеля

Теорема 1.5.1. *Пусть* $a_k \in \mathbb{C}$, $b_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, n$; $B_k = b_1 + \cdots + b_k$, *тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) b_k + a_n B_n \tag{1.22}$$

Доказательство. Очевидно, $b_1 = B_1, b_k = B_k - B_{k-1}, k = 2, 3, \ldots, n$
Поэтому $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + a_3 (B_3 - B_2) + \ldots a_n (B_n - B_{n-1}) = (a_1 - a_2) B_1 + (a_2 - a_3) B_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n) B_{n-1} + a_n B_n$
Называется преобразованием Абеля $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$. □

Следствие (лемма Абеля)**.** *Если* $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ *или* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$
$a_k \in \mathbb{R}$, $\forall k = 1, 2, \ldots, n$, $|b_1 + \cdots + b_k| \leq B$, $(b_k \in \mathbb{C})$, *то*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq B(|a_1| + 2|a_n|)$$

Доказательство. $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}||B_k| + |a_n B_n| \leq B \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_n| \right) =$
$= B \left(\left| \sum\limits_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \right| + |a_n| \right) = B(|a_1 - a_n| + |a_n|) \leq B(|a_1| + 2|a_n|)$. □

1.6 Признаки Дирихле и Абеля

Теорема 1.6.1 (признак Дирихле)**.** *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{1.23}$$

1. $a_n \in \mathbb{R}^n, b_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$
2. $\{a_n\}, \{a_n\} \downarrow 0$ $(\{a_n\} \uparrow 0)$
3. $\{B_n\}$ — *последовательность частичных сумм ряда* $\sum b_n$ *ограничена*

Тогда ряд (1.23) *сходится.*

Доказательство. $\exists B > 0$, $|B_n| \leq B \ \forall n \Rightarrow \forall m \geq n \geq 2 : |b_n + \cdots + b_m| = |B_m - B_{n-1}| \leq 2B$
Возьмем $\varepsilon > 0$. По скольку $a_n \to 0$, то $\exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon)$ имеем $|a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}$.
Поэтому, $\forall n > N(\varepsilon)$ и $\forall m \geq n$ получим:

$$|a_n b_n + \cdots + a_m b_m| \leq 2B(|a_n| + 2|a_m|) < 2B \left(\frac{\varepsilon}{6B} + 2 \frac{\varepsilon}{6B} \right) = \varepsilon$$

Ряд (1.23) удовлетворяет Критерию Коши сходимости рядов. □

Замечание 1.6.1. Признак Лейбница - это частный случай признака Дирихле.

Теорема 1.6.2 (признак Абеля)**.** *Если последовательность действительных чисел* a_n *монотонна и ограничена, ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n, b_n \in \mathbb{C}$ *сходится, то ряд* (1.23) *также сходится.*

Доказательство. $a_n = a + \alpha_n, \{\alpha_n\}$ — монотонно стремящаяся к нулю последовательность.
Поэтому

$$\sum a_n b_n = \sum (a + \alpha_n) b_n = a \sum b_n + \sum \alpha_n b_n,$$

где $a \sum b_n$ сходится по условию, а $\sum \alpha_n b_n$ сходится по признаку Дирихле.
$\{B_n\}$ — последовательность частичных сумм $\sum b_n$ ограничена, $\{\alpha_n\}$ — монотонно стремящаяся к нулю последовательность. □

1.7 Безусловно и условно сходящиеся ряды

Определение 1.7.1. Пусть $\{k_n\}, n = 1, 2, \dots$ — последовательность, в которой каждое натуральное число встречается только один раз. $\{k_n\}$ — однозначное отображение $a_n^* = a_{k_n}$, $(n = 1, 2, \dots)$.
Будем говорить, что ряд $\sum a_n^*$ является перестановкой ряда $\sum a_n$.

Определение 1.7.2. Говорят, что $\sum a_n$ сходится безусловно, если каждая перестановка сходится.

Теорема 1.7.1. *Ряд $\sum a_n, (a_n \in \mathbb{C})$ сходится безусловно тогда и только тогда, когда он сходится абсолютно.*

Доказательство. Достаточность.
Если ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно, то все его перестановки сходятся к одному и тому же числу — сумме исходного ряда.
Пусть $\sum a_n^*$ — перестановка ряда $\sum a_n$. S_n^* — ее частичная сумма.
По Коши: $\forall \varepsilon > 0 \exists N : m \geq n > N$

$$|a_n| + \dots + |a_m| < \varepsilon \tag{1.24}$$

Выберем p так, чтобы все натуральные числа $1, 2, \dots, N$ содержались в множестве $k_1, k_2, \dots, k_p$ (смотри определение), тогда при $n > p$ $a_1, \dots, a_N$ в разности $S_n - S_n^*$ уничтожаются, так что $|S_n - S_n^*| < \varepsilon$ в силу (1.24).
Значит $\{S_n^*\}$ сходится к тому же пределу, что и $\{S_n\}$. □

Определение 1.7.3. Сходящийся, но не абсолютно сходящийся ряд называется условно сходящимся.

Из теоремы (1.7.1) (из необходимости условия) $\Rightarrow$ Теорема (1.7.2)

Теорема 1.7.2. *Условно сходящийся ряд не может сходится безусловно, то есть у него всегда существует расходящаяся перестановка.*

Доказательство. Без Доказательства. □

Теорема 1.7.3 (Римана)**.** *Если ряд с действительными членами условно сходится, то каким бы не было действительное число S, существует перестановка ряда такая, что ее сумма равна S*

Доказательство. Без Доказательства. □

Глава 2

Функциональные последовательности и ряды

2.1 Поточечная сходимость

Пусть на некотором множестве $\mathbb{E}$ задана последовательность комплексно значимых функций $f_n, n = 1, 2, \dots$, $(f_n \in \mathbb{C})$. Элементы $x \in \mathbb{E}$ будем называть точками.

Определение 2.1.1. $\{f_n\}$ называется ограниченной на $\mathbb{E}$, если $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{E}$ выполняется

$$|f_n(x)| \leq M$$

Определение 2.1.2. $\{f_n\}$ называется сходящейся поточечно на множестве $\mathbb{E}$, если при любом фиксированном $x \in \mathbb{E}$, числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится. Если последовательность сходится на $\mathbb{E}$, то $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), x \in \mathbb{E}$ называется пределом последовательности. Пусть $\{U_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, x \in \mathbb{E},\ (U_n \in \mathbb{C})$ — последовательность числовых функций.

Определение 2.1.3. Множество числовых рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \tag{2.1}$$

в каждой из которых точка x фиксированная называется рядом на множестве $\mathbb{E}$, а функция $U_n(x)$ — его член.

$S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k(x), x \in \mathbb{E}$ называется n-ой частичной суммой ряда (2.1).

$\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} U_k(x)$ - его n-ым остатком.

Определение 2.1.4. Ряд (2.1) называется сходящимся поточечно на множестве $\mathbb{E}$, если последовательность $\{S_n(x)\}$ сходится поточечно на $\mathbb{E}$. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), x \in \mathbb{E}$ называется суммой ряда (2.1).

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x).$$

Определение 2.1.5. Если ряд (2.1) при любом $x \in \mathbb{E}$ сходится абсолютно, то он называется абсолютно сходящимся на множестве $\mathbb{E}$.

Замечание 2.1.1. Беззаботная перестановка членов ряда может привести к ошибке.

2.2 Равномерная сходимость

Определение 2.2.1. Говорят, что функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $\mathbb{E}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall x \in \mathbb{E}$ имеем

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Ясно, что каждая равномерно сходящаяся последовательность, сходится поточечно.

Комментарий. Обозначение равномерной сходимости: $f_n \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} f$

Теорема 2.2.1 (Критерий Коши равномерной сходимости последовательностей)**.** *Для того, чтобы* $\{f_n\}$ *равномерно сходилась на* $\mathbb{E} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N : n, m > N, \forall x \in \mathbb{E} :$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{2.2}$$

Доказательство.

- Необходимость:
  $f_n \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} f$, тогда $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall x \in \mathbb{E}\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
  $|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, $(\forall n, m > N, \forall x \in \mathbb{E})$.

- Достаточность:
  Пусть выполняется условие Коши, тогда $\{f_n(x)\}$, удовлетворяет критерию Коши сходимости числовых последовательностей и следовательно сходящегося числового предела, который обозначим $f(x)$.
  Тогда перейдя к пределу при $m \to \infty$ получим $\forall n > N, \forall x \in \mathbb{E} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

□

Иногда полезен критерий, следующий из определения (2.2.1)

Теорема 2.2.2. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{E}$.
Положим $r_n = \sup |f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{E}$ *— равномерное уклонение.*
Тогда $f_n \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} f \iff r_n \to 0,\ n \to \infty$. *(Переформулировка определения).*

Доказательство. Без доказательства.

□

Пример 2.2.1. $f_n(x) = x^n, \mathbb{E} = [0, 1)$
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \forall \in \mathbb{E}, r_n = \sup\limits_{x\in[0,1)} |x^n - 0| = 1 \not\to 0, n \to \infty$.
$\{x^n\}$ не является равномерно сходящейся на $\mathbb{E}$.

Пример 2.2.2. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \mathbb{E} = [0, 1]$.
$f_n(x) \to 0, \forall x \in \mathbb{E},\ f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0$.
$x_n = \frac{n}{n+1},\ f_n(x_n) = x_n^n(1 - x_n) < \frac{1}{n+1}$.
$r_n < \frac{1}{n+1}$.

Определение 2.2.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x),\ x \in \mathbb{E} \tag{2.3}$$

называется равномерно сходящейся, если на множестве $\mathbb{E}$ равномерно сходится последовательность частичных сумм.

Пусть $S_k(x)$ — частичные k-ые суммы ряда (2.3),

$$m \geq n : U_n(x) + \cdots + U_m(x) = S_m(x) - S_n(x)$$

тогда из теоремы (2.2.1) (критерий Коши равномерной сходимости последовательности) $\Rightarrow$ Теорема (2.2.3) (критерий Коши равномерной сходимости ряда).

Теорема 2.2.3 (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)**.** *Для того, чтобы ряд* (2.3) *равномерно сходился на множестве* $\mathbb{E} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{E}$:

$$|U_n(x) + \cdots + U_m(x)| < \varepsilon \tag{2.4}$$

Доказательство. Без доказательства. □

Следствие (Необходимый признак равномерной сходимости)**.** *У равномерно сходящегося ряда общий член равномерно стремится к нулю.*

Теорема 2.2.4 (Признак Вейерштрасса)**.** *Пусть* $\{U_n\}$ *— последовательнсоть функций, определенных на* $\mathbb{E}$ *и пусть* $|U_n(x)| \leq a_n, \forall x \in \mathbb{E}, \forall n \in \mathbb{N}$. *Тогда если* $\sum a_n < \infty$ *сходится, то следовательно* $\sum U_n(x)$ *сходится равномерно на* $\mathbb{E}$.

Доказательство. Если $\sum a_n$ сходится, то $\forall \varepsilon > 0 |\sum\limits_{k=n}^{m} U_k(x)| \leq \sum\limits_{k=n}^{m} a_k < \varepsilon$, при любом $x \in \mathbb{E}$, если только m и n достаточно велики, теорема (1.1.1) (критерий Коши сходимости числового ряда). Равномерная сходимость нашего ряда вытекает из теоремы (2.2.3). □

Замечание 2.2.1. $\sum a_n$ называется мажорирующим рядом $\sum U_n(x)$.

Замечание 2.2.2. ПРОВЕРИТЬ!!!
Условие признака Вейерштрасса не являются необходимыми для равномерной сходимости ряда.

2.3 Признаки равномерной сходимости рядов Дирихле и Абеля

Теорема 2.3.1. *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x),\ x \in \mathbb{E} \tag{2.5}$$

такой что:

1. $a_n(x) \in \mathbb{R},\ b_n(x) \in \mathbb{C},\ n = 1, 2, \ldots$
2. $a_n(x) \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} 0$ *(Равномерная сходимость к нулю),* $\{a_n(x)\}$ *- монотонна.*
3. $\{b_n(x)\}$, $\sum b_n(x)$ *ограничена на множестве* $\mathbb{E}$.

Тогда ряд (2.5) *равномерно сходится на множестве* $\mathbb{E}$.

Доказательство. В силу условия 3, $\exists B > 0 : |B_n(x)| \leq B,\ \forall x \in \mathbb{E},\ \forall n \in \mathbb{N}$.
$\forall x \in \mathbb{E}, m \geq n \geq 2 : |b_n(x) + \cdots + b_m(x)| = |B_m(x) - B_{n-1}(x)| \leq 2B$.
$\forall \varepsilon > 0$ из условия 2 $\Rightarrow \exists N = N(\varepsilon) : n > N(\varepsilon), \forall \in \mathbb{E}$ выполняется неравенство:

$$0 \leq |a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6B}.$$

Примениев лемму Абеля (1.5), получим:

$$|a_n(x) b_n(x) + \cdots + a_m(x) b_m(x)| \leq 2B \tag{2.6}$$
$$(|a_n(x) + 2a_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{E}, m \geq n \geq N(\varepsilon)) \tag{2.7}$$

В силу критерия Коши (2.2.3), ряд (2.5) сходится равномерно. □

Теорема 2.3.2 (Признак Абеля).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \tag{2.8}$$

1. *Если* $a_n(x) \in \mathbb{R}, b_n(x) \in \mathbb{C}, n = 1, 2, \dots, x \in \mathbb{E}$.
2. $\{a_n(x)\}$ *ограничена на множестве* $\mathbb{E}$ *и монотонна* $\forall x \in \mathbb{E}$.
3. *Ряд* $\sum b_n(x)$ *равномерно сходится на* $\mathbb{E}$.

Тогда ряд (2.8) *равномерно сходится.*

Доказательство. Доказательство легко провести так, как была доказана теорема (1.6.1). □

Пример 2.3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^x}$ — ряд Дирихле.
Если этот ряд сходится в точке x_0, то он сходится равномерно $\forall x \in \mathbb{E},\ \mathbb{E} = [x_0, +\infty)$.
Можно воспользоваться Признаком Абеля:

$$a_n(x) = \frac{1}{n^{x-x_0}},\ b_n = \frac{c_n}{n^{x_0}}$$

Упражнение 1. Рассмотреть и доказать абсолютную сходимость при $x > x_0 + 1$

2.4 Равномерная сходимость и непрерывность

Теорема 2.4.1. *Пусть* $f_n \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} f,\ x_0$ *— предельная точка множества* $\mathbb{E}$ *и пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n,\ (n = 1, 2, \dots)$. *Тогда* $\{A_n\}$ *сходится и*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} A_n \tag{2.9}$$

Иными словами, 2 предельных перехода в данном случае коммутируют.

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ $\exists N : n > N, m > N, x \in \mathbb{E}$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{2.10}$$

Переходя в неравенстве (2.10) к приделу при $x \to x_0$ получим

$$|A_n - A_m| < \varepsilon,\ (n, m > N) \tag{2.11}$$

Поэтому $\{A_n\}$ — последовательность для которой выполняется признак Коши сходимости последовательности $\Rightarrow$ она сходится.
Обазначим ее предел A

$$|f(x) - A| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| \tag{2.12}$$

Выберем n :

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall x \in \mathbb{E} \tag{2.13}$$

Это возможно в силу равномерной сходимости.

$$|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.14}$$

Затем, для этого n подберем такую окрестность $U(x_0) : x \in U(x_0), x \neq x_0$, следовательно:

$$|f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.15}$$

Из неравенств (2.12) — (2.15) получим

$$|f(x) - A| < \varepsilon,\ \forall x \in U(x_0),\ x \neq x_0$$

Это равносильно равенству (2.9) □

Теорема 2.4.2. *Последовательность функций, непрерывных в точке* $x \in \mathbb{E} f_n \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} f$, *то функция* f *непрерывна в точке* x_0.

Доказательство. Без доказательства. □

Замечание 2.4.1. Обратное не верно, то есть последовательность непрерывных функций может неравномерно сходиться.

Из теоремы (2.4.2) и определения (2.2.2) $\Rightarrow$ теорема (2.4.3)

Теорема 2.4.3. *Если функции* $U_n(x)$, $(n = 1, 2, \dots)$, $x \in \mathbb{E}$ *непрерывны в точке* $x_0 \in \mathbb{E}$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ *равномерно сходится на* $\mathbb{E}$, *то его сумма* $f(x)$ *также непрерывна в точкке* x_0.

2.5 Равномерная сходимость и интегрирование

Теорема 2.5.1. *Пусть* f_n *— последовательность действительных, значимых, интегрируемых на отрезке* $[a, b]$ *функций. Тогда функция* f *также интегрируема на* $[a, b]$ *и*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx \tag{2.16}$$

Существование предела заранее не предполагается.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n :$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \ x \in [a, b] \tag{2.17}$$

Зафиксируем n и выберем разбиение $[a, b]$, $\triangle_1, \dots, \triangle_S$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_i \omega(f_n, \triangle_i)|\triangle_i| < \varepsilon \tag{2.18}$$

Комментарий. $\omega(f, E) = \sup - \inf$ — колебание функции.

Функции f_n интегрируемы на $[a, b]$. По скольку $\omega(f, \triangle_i) \leq \omega(f_n, \triangle_i) + 2\varepsilon,\ (i = 1, \dots, S)$ (смотри (2.17)).

$$\sum_i \omega(f, \triangle_i)|\triangle_i| \leq \varepsilon + 2\varepsilon(b - a)$$

Отсюда следует, что $f \in \mathbb{R}[a, b]$. Для доказательства (2.16) выберем $n > N :$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ (a \leq x \leq b),\ n > N \tag{2.19}$$

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b f_n(x)dx \right| \leq \int\limits_a^b |f(x) - f_n(x)|dx < \varepsilon(b - a) \tag{2.20}$$

Отсюда вытекает (2.16).

□

Теорема 2.5.2. *$U_n \in R[a,b]$ (Интегрируема). Если*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x), \ \ (a \le x \le b) \tag{2.21}$$

При чем ряд (2.21) сходится на $[a,b]$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

Иными словами ряд (2.21) можно интегрировать частями.

Доказательство. Без доказательства. □

Замечание 2.5.1. При нарушении равномерности ряд, состоящий из интегрируемых функций может иметь интегрируемую сумму.

2.6 Равномерная сходимость и дифференцирование

$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, x \in \mathbb{R}$ показывает, что из равномерной сходимости последовательности функций не следует даже поточечная сходимость последовательностей функций производных. То есть нужны более сильные предположения, чтобы заключать, что $f_n' \to f_n$, при $f_n \to f$.

Теорема 2.6.1. *Пусть $f_n(x) \to f(x), \ x \in [a,b], \ n \to \infty, \ f_n \in C[a,b], \ (n = 1, 2, \dots)$. Если $\{f_n'(x)\}$ сходится равномерно на $[a,b]$, то $f_n(x)$ дифференцируема и*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Доказательство. Обозначим через f^* предел последовательности f_n'. Ввиду теоремы (2.4.2) f^* непрерывна на $[a,b]$.
Применим теорему (2.5.1) к последовательности $\{f_n\}$ на промежутке $[a,x]$, где $x \in [a,b]$

$$\int\limits_a^x f^*(t)dt = \lim \int\limits_a^x f'(t)dt = \lim_{n\to\infty}(f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a)$$

Так как интеграл слева ввиду непрерывности функции f^* имеет производную равную f', то ту же производную имеет и $f(x)$.

$$f'(x) = f^*(x) = \lim_{n\to\infty} f'(x), x \in [a,b]$$

□

Перефразируем теорему (2.6.1) с точки зрения рядов:
Пусть сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x) =: f(x), x \in [a,b]$ и пусть $U_n(x) \in C^1[a,b], \ (n = 1, 2, \dots)$.
Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n'(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, то сумма $f(x)$ дифференцируема, и
$f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n'(x), x \in [a,b]$.

Глава 3

Степенные ряды

3.1 Радиус сходимости и круг сходимости

Определение 3.1.1. Степенной ряд — ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,\ \ z, z_0 \in \mathbb{C}, n = 0, 1, \dots \tag{3.1}$$

a_n — коэффициенты ряда.
$\xi = z - z_0$, тогда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\xi$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3.2}$$

Теорема 3.1.1. *Степенной ряд (3.2), $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$,*

$$R = \frac{1}{\alpha} \tag{3.3}$$

($\alpha = 0 \iff R = \infty,\ \ \alpha = +\infty \iff, R = 0$), тогда ряд (3.2) абсолютно сходится, если $|z| < R$, и расходится, если $|z| > R$.

Доказательство. Положим $C_n = a_n z^n$. По критерию Коши заключаем, что сумма $\sum C_n$ сходится при $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R} < 1$, то есть $|z| < R$; и расходится, если $|z| > R$. □

Определение 3.1.2. Число R называется радиусом сходимости ряда (3.2).
$|z| < R, z \in \mathbb{C}$ называется кругом сходимости ряда (3.2).

Замечание 3.1.1. О сходимсоти на границе окружности $|z| = R$ ничего не говорится в тереме (3.1.1), так как возможны все варианты.

Теорема 3.1.2. *Если R — радиус сходимости ($R > 0$) ряда (3.2), то на любом круге $|z| < r$, где r — фиксированно, и $r < R$.*
Таким образом этот ряд сходится абсолютно и равномерно.

Доказательство. $z = r$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n$ сходится, а так как для любой точки z круга $|z| \leq r$ выполняется неравенство:

$$|a_n z^n| \leq |a_n|r^n,\ \ \forall n \tag{3.4}$$

то по признаку Вейерштрассе на этом круге ряд (3.2) сходится равномерно. □

Следствие. *Степеной ряд непрерывный в каждой точке своего круга $|z| < R$ сходится.*

Теорема 3.1.3 (2-ая т. Абеля)**.** *Если R — радиус сходимости, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и этот ряд сходится при $|z| = R$, то он сходится на отрезке $[0, R]$ равномерно.*

Доказательство. Пусть $0 \leq x \leq R$, представим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$. По скольку члены ряда $\sum a_n R^n$ не зависит от x, то его сходимость означает его равномерную сходимость. $\{(\frac{x}{R})^n\}$ ограничена на отрезке $[0, R]$ и монотонна в каждой точке.
Поэтому в силу признака Абеля равномерной сходимости рядов (2.3.2) ряд (3.2) равномерно сходится на отрезке $[0, R]$. □

Лемма 3.1.1. *Радиусы сходимости R, R_1, R_2 соответственно рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ равны: $R = R_1 = R_2$.*

Доказательство. Действительно, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{a_n}{n+1}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|n a_n|}$ □

Пример 3.1.1. $\sum a_n (z - z_0)^n$. Областью сходимости такого ряда является круг $|z - z_0| < R$, с точностью до граничных точек.

3.2 Степенные ряды в действительной области. Общие свойства.

В параграфах 3.2 - 3.4 будем рассматривать

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{3.5}$$

где a_n, x, x_0 — действительные числа.
Если R — радиус сходимости ряда ряда (3.5), то очевидно ряд (3.5) сходится, если $|x| < R$ и расходится, если $|x| > R$.
Число R — по-прежнему называется радиусом сходимости ряда (3.5), а интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ — его интервал сходимости.

Теорема 3.2.1. *Если R — радиус сходимости ряда*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{3.6}$$

где $R > 0$, то:

1. *функция f имеет в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ производные всех порядков, они называются почленным диффиринциалом ряда* (3.6)*:*

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1) a_n (x - x_0)^{n-m}, \;\; m = 1, 2, \dots \tag{3.7}$$

2. $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} \tag{3.8}$$

3. (3.6) - (3.8) *имеют одинаковые радиусы сходимости R.*

Доказательство. В силу леммы (3.1.1) ряды (3.7), (3.8) имеют тот же радиус сходимости, что и ряд (3.6). Всякий ряд с $R > 0$ сходится на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$,
$0 < r < R$ (теорема (3.1.2)).
Поэтому утверждения 1 и 2 непосредственно следуют из общих теорем о сходимости рядов ((1.5) и (1.6.2)). $\square$

Теорема 3.2.2. *Если функция f раскладывается в некоторой окружности x_0, то она раскладывается в степенной ряд.*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{3.9}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ n = 0, 1, \dots \tag{3.10}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{3.11}$$

Следствие. *Если в некоторой окружности точки функция раскладывается в степенной ряд, то это разложение единственно.*

Доказательство. Продифференцировав m раз равенство (3.6), получим (в силу (3.7)):

$$f^{(m)}(x) = m(m-1)\dots 2 \cdot 1 \cdot a_m + (m+1)m \dots a_{m-1}(x - x_0) + (m+2)(m+1)\dots 3 \cdot a_{m-2}(x - x_0)^2 \dots \tag{3.12}$$

Положим $x = x_0$, тогда получаем:

$$f^{(m)}(x_0) = m!\, a_m, \ m = 0, 1, \dots \tag{3.13}$$

$\square$

3.3 Ряд Тейлора. Разложение функции в степенные ряды.

Определение 3.3.1. Пусть f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков, тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{3.14}$$

Называется рядом Тейлора функции f в точке x_0.

Следующий пример показывает, что функция, бесконечно дифференцируемая в одной точке может быть не равна разложению по Тейлору в окрестности этой точки.

Пример 3.3.1.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, \ x \neq 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

$f^{(n)}(0) = 0, \ n = 0, 1, \dots$
Отсюда следует, что все члены ряда Тейлора (3.6) в точке $x_0 = 0$, и не совпадают с функцией $f(x)$ в никакой окрестности точки x_0.

Утверждение 3.3.1. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности (x_0-h, x_0+h).

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{3.16}$$

$$r_n(x) = f(x) - S_n(x) \tag{3.17}$$

Тогда, для того, чтобы функция $f(x)$ на интервале (x_0-h, x_0+h) равна сумме своего ряда (3.1), то есть:

$$(S_n(x) \to f(x),\ n \to \infty) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0,\ \forall x \in (x_0-h, x_0+h) \tag{3.18}$$

Теорема 3.3.1. *Пусть функция f и все ее производные ограничены в совокупности на интервале (x_0-h, x_0+h), то есть существует такая $M = const, M > 0$:*
$\forall x \in (x_0-h, x_0+h),\ n = 0, 1, \ldots,$ выполняется неравенство:

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \tag{3.19}$$

Тогда на интервале (x_0-h, x_0+h) функция f раскладывается в ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{3.20}$$

где $|x-x_0| < h$.

Доказательство.

$$\forall a : \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \tag{3.21}$$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, для $x \in (x_0-h, x_0+h)$, для $\forall M$ имеем:

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x), \tag{3.22}$$

где $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, где $0 < \theta < 1$.
Используя (3.19) получим:

$$|r_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}|}{(n+1)!} \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!},\ \forall x \in (x_0-h, x_0+h). \tag{3.23}$$

Остюда из (3.21) следует (3.18). Согласно утверждению (3.3.1) теорема доказана. □

3.4 Разложение основных элементарных в ряд Тейлора.

- Разложение в ряд функции $e^x, \cos x, \sin x$.
  Использую теорему (3.3.1), получаем:

$$f^{(n)}(x) = e^x,\ \sin(x + \frac{\pi}{2}n),\ \cos(x + \frac{\pi}{2}n),\ n = 0, 1, \ldots, \tag{3.24}$$

  Так что $|f^{(n)}(x)| \leq e^h,\ f(x) = e^x, |x| \leq h$
  $|f^{(n)}(x)| \leq 1,\ f(x) = \sin x, \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$

Так как коэффициенты Тейлора для этих функций известны, то мы можем записать разложение при любом x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3.25}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.26}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{3.27}$$

- Разложение в ряд функции $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$.
  Заменив в (3.25) x на $-x$ получим

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \tag{3.28}$$

Отсюда из (3.25) получаем:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.29}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{3.30}$$

В правых частях этих формул разложения степенных функций в ряды единственно в силу теоремы (3.2).

- Разложение в ряд функции $\ln(1+x)$.
  Рассмотрим:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \dots, \ |t| < 1 \tag{3.31}$$

Интегрирую его почленно по теореме (3.2.1) от 0 до $x \in (-1, 1)$ получим:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \tag{3.32}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \ \forall x \in (-1, 1) \tag{3.33}$$

Ряд правой части равенства (3.33) сходится по признаку Лейбница $\Rightarrow$ согласно теореме Абеля (3.1.3), разложение (3.33) имеет место в промежутке $(-1, 1]$

- Разложение в ряд $(1+x)^\alpha, \alpha \neq 0, 1, \dots$ Формула Тейлора для этой функции имеет вид:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + r_n(x) \tag{3.34}$$

Соответствующий степенной ряд называют

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \tag{3.35}$$

биномиальным рядом.
$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1$, в силу утверждения, $r_n(x) \to 0$.

Замечание 3.4.1. Поведение ряда (3.35) в точках ± 1, характерезуется следующей таблицой:

Таблица 3.1: таблица, характеризующая ряд (3.35)

$x = 1$	$\alpha > 0$	абсолютно сходится
	$-1 < \alpha < 0$	условно сходится
	$\alpha \leq -1$	расходится
$x = -1$	$\alpha > 0$	абсолютно сходится
	$\alpha < 0$	рассходится

Согласно второй теореме Абеля (3.1.3) всякий раз, когда ряд (3.35) сходится при $x = \pm 1$, его сумма равна $(1+x)^\alpha$.

- Разложение в ряд $\operatorname{arctg} x$
Рассмотрим ряд:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + \dots, \quad |t| < 1 \tag{3.36}$$

Интегрирую его почленно по теореме (3.2.1) от 0 до $x \in (-1, 1)$ получим:

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \dots \tag{3.37}$$

Ряд правой части равенства (3.33) сходится по признаку Лейбница $\Rightarrow$ согласно теореме Абеля (3.1.3), разложение (3.33) имеет место на отрезке $(-1, 1)$.
В частности, при $x = 1$, получим:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} \tag{3.38}$$

- Разложение в ряд $\arcsin x$
Рассмотрим ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n}, \quad |t| < 1 \tag{3.39}$$

Интегрирую его почленно по теореме (3.2.1) от 0 до $x \in (-1, 1)$ получим:

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1 \tag{3.40}$$

Справедливость этого разложения при $x = \pm 1$ устанавливается с помощью второй теоремы Абеля (3.1.3).

3.5 Формулы Эйлера

Ряды разложения (3.25) - (3.27) функций $e^x, \sin x, \cos x$ сходятся всюду в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. По этой причине естественны следующие определения($e^z, \sin z, \cos z, z \in \mathbb{C}$):

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{3.41}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.42}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \tag{3.43}$$

Заменив z сначала на iz, а затем на $-iz$ получим:

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} \tag{3.44}$$

$$e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n z^n}{n!} \tag{3.45}$$

Заметим, что $i^{2k} = (-1)^k, i^{2k+1} = (-1)^k i, k = 0, 1, \ldots$.

$$\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \tag{3.46}$$

$$\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.47}$$

Сравнив эти формулы с (3.42), (3.43) заключаем, что

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{3.48}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{3.49}$$

Из этих формул следует формула:

$$\cos z + i \sin z = e^{iz} \tag{3.50}$$

Формулы (3.48), (3.49) и (3.50) называются формулами Эйлера.
Если в формуле (3.50) $z = \varphi,\ \ \varphi \in \mathbb{R}$, то

$$\cos\varphi + i \sin\varphi = e^{i\varphi} \tag{3.51}$$

Поэтому $z \in \mathbb{C}, |z| = r,\ \ z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

$$z = re^{i\varphi} \tag{3.52}$$

Определение 3.5.1. $W(x) = U(x) + iV(x),\ \ x \in \mathbb{R}, V(x) \in \mathbb{R}$
Положим $\frac{dW}{dx} = U'(x) + iV'(x)$, тогда

$$\int_a^b W(x)dx = \int_a^b U(x)dx + i\int_a^b V(x)dx \tag{3.53}$$

$e^{i\pi} = -1$

Глава 4

Ряды Фурье

4.1 Ортогональные системы

В параграфах (4.1) - (4.3) $\mathbb{X}$ — линейное бесконечномерное пространство(действительное или комплексное, со скалярным произведением).

$$X(\cdot\ ,\ \cdot),\ \|x\| = \sqrt{(x,x)}.$$

$\mathbb{K}$ — некоторое счетное или конечное множество.

Определение 4.1.1. Система векторов $\{x_k : k \in \mathbb{K}\},\ x \in \mathbb{X}$ — ортогональная система(ОС). $(x_i, x_j) = 0,\ \forall i, j \in \mathbb{K}, i \neq j$ (и система не нулевая). Если $(x_i, x_i) = 1$, то система называется ортонормированной.

Теорема 4.1.1. *Ортогональная система векторов линейно независима, то есть линейно не зависима каждая ее конечная подсистема.*

Доказательство. Определение линейной независимости:

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_i x_i + \cdots = 0 \Longleftrightarrow \alpha_i = 0,\ \forall i \tag{4.1}$$

Скалярно умножим все члены на x_i, тогда получим:

$$\alpha_1(x_1, x_i) + \cdots + \alpha_i(x_i, x_i) + \cdots = (0, x_i) \tag{4.2}$$

$$\alpha_i(x_i, x_i) = 0 \tag{4.3}$$

$$\alpha_i = 0 \tag{4.4}$$

Равенство (4.3) следует из определения (4.1.1), равенство (4.4) следует из того, что $(x_i, x_i) \neq 0$ (так как система не нулевая). □

4.2 Коэффициенты Фурье

Определение 4.2.1. Пусть $\{e_k :\ k \in \mathbb{K}\}$ — ОНС в $\mathbb{X}$, $\{(x, e_k)\}, x \in \mathbb{X}$ называется коэффициентами Фурье элемента x в ОНС e_k.

Лемма 4.2.1. *Если система векторов $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathbb{X}$ — ОН, то $\forall x \in \mathbb{X}$ вектор $h = x - x_e$, где*

$$x_e = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \tag{4.5}$$

ортоганален подпространству $\mathbb{L} = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ (натянотому на векторы $e_1, \ldots, e_n$)

Доказательство. Достаточно проверить, что скалярное произведение $(h, e_j) = 0,\ \forall j = 1, \dots, n$

$$(h, e_j) = (x, e_j) - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)(e_k, e_j) = (x, e_j) - (x, e_j) = 0 \tag{4.6}$$

□

Лемма 4.2.2 (теорема Пифагора). *Если векторы $x_1, \dots, x_n$ попарно ортогональны и $x = x_1 + \dots + x_n$, то $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$*

Доказательство. $(x, x) = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} (x_i, x_j) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i, x_i)$ □

Теорема 4.2.1 (экстремальное свойство коэффициентов Фурье). *Если $e_1, \dots, e_n$ — ОНС пространства $\mathbb{X}$, то $\forall x \in \mathbb{X}$ и $\forall y = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ имеет место неравенство:*

$$\|x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k\| \le \|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|, \tag{4.7}$$

в котором равенство возможно при условии: $\alpha_k = (x, e_k)\ \forall k = 1, \dots, n$.

Доказательство. Представим $x - y$ в виде $x - y = (x_e - y) + h$, где x_e, h определены в лемме (4.2.1).
По лемме (4.2.1) $h \perp (x_e - y) \in \mathbb{L}$. По теореме Пифагора (лемма 4.2.2):

$$\|x - y\|^2 = \|x_e - y\|^2 + \|h\|^2 = \|x_e - y\|^2 + \|x - x_e\|^2 \ge \|x - x_e\|^2 \tag{4.8}$$

равенство возможно, когда коэффициенты α_k совпадают с коэффициентами Фурье. □

Замечание 4.2.1. Теорема (4.2.1) показывает, что вектор x_e является наилучшей в смысле нормы пространства $\mathbb{X}$, аппроксимацией вектора x подпространства $\mathbb{L} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, так что наименьшее уклонением вектора x от $\mathbb{L}$ равно $\|x - x_e\|$.

Теорема 4.2.2 (неравенство Бесселя). *Если $\{e_1, \dots, e_n\}$ — ОНС в $\mathbb{X}$, то $\forall x \in \mathbb{X}$ справедливо неравенство:*

$$\sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 \le \|x\|^2 \tag{4.9}$$

Если $\{e_k : k \in \mathbb{K}\}$ — ОНС, то $\forall x \in \mathbb{X}$

$$\sum |(x, e_k)|^2 \le \|x\|^2 \tag{4.10}$$

Доказательство. По лемме (4.2.1)

$$x = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k + h, \tag{4.11}$$

при чем система векторов $e_1, \dots, e_n, h$ — ортогональна в $\mathbb{X}$
по теореме Пифагора получаем:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 + \|h\|^2 \tag{4.12}$$

остюда следует (4.9), (так как это имеет место для любой конечной системы векторов), отсюда следует (4.10). □

Замечание 4.2.2. Из (4.12) следует формула наименьшего отклонения:

$$\|x - x_e\|^2 \equiv \|x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2 \tag{4.13}$$

Переформулируем понятие коэффициентов Фурье для произвольной ОС(не обязательно нормированной) $\{f_k\}$.
Для этого по этой системе построим ОНС.
$\{e_k = \frac{f_k}{\|f_k\|}\}$, используем ортгональное разложение:

$$x = x_e + h,\ x = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k + h = \sum_{k=1}^{n}\frac{(x, f_k)}{\|f_k\|^2}f_k + h \tag{4.14}$$

Определение 4.2.2. $\{e_k = \frac{(x,f_k)}{\|f_k\|^2}\}$ — называется коэффициентами Фурье вектора x в ОС $\{f_k\}$.
Заменим в неравенстве (4.10), e_k на $\frac{f_k}{\|f_k\|}$ получим неравенство Бесселя для произвольной ОС.

$$\sum_{k\in\mathbb{K}}\frac{|(x, f_k)|^2}{\|f_k\|^2} \le \|x\|^2,\ \{f_k, k \in \mathbb{K}\} \tag{4.15}$$

Или, в других обозначения:

$$\sum_{k\in\mathbb{K}}|C_k|^2\|f_k\|^2 \le \|x\|^2 \tag{4.16}$$

Пример 4.2.1. В пространстве $\mathbb{X} = \mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.
Рассмотрим ОС $\{e^{ikt} : k \in \mathbb{Z}\}$.
В соответствии с определением (4.2.2) коэффициенты Фурье C_k функции f в системе $\{e_{ik}\}$ выражаются формулами:

$$C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt \tag{4.17}$$

из неравенства Бесселя (4.15) $\forall f \in \mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|C_k|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt \tag{4.18}$$

Пример 4.2.2. Аналогично находим коэффициенты Фурье.
$\{\frac{1}{2}a_0, a_k, b_k : k \in \mathbb{N}\}$ функции $f \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ в ОС $\{1, \cos kx, \sin kx : k \in \mathbb{N}\}$:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt,\ k = 0, 1, \ldots \tag{4.19}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt,\ k = 1, 2, \ldots \tag{4.20}$$

по неравенству Бесселя все принимает вид:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt \tag{4.21}$$

Замечание 4.2.3. Сравнивая равенства (4.19), (4.20) и (4.17) с учетом формулы Эйлера получаем:

$$C_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k),\ k \ge 0 \\ \frac{1}{2}(a_k + ib_{-k}),\ k < 0 \end{cases} \tag{4.22}$$

4.3 Ряд Фурье

Определение 4.3.1. Если $\{f_1, \dots, f_k, \dots\}$ — ОС в $\mathbb{X}$, а $x \in \mathbb{X}$, то можно составить ряд:

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_k f_k, \tag{4.23}$$

где $C_k = \frac{(x,f_k)}{\|f_k\|^2}$.
Этот ряд называется рядом Фурье вектора x по ОС $\{f_k\}$.
Ряд Фурье по ОНС $\{e_k\}$ имеет вид:

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k \tag{4.24}$$

Определение 4.3.2. Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k, y_k \in \mathbb{X}$ сходится в $\mathbb{X}$ к вектору $x \in \mathbb{X}$ (сходится по норме($\|\cdot\|$) пространства $\mathbb{X}$), если

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{k=1}^{n} y_k\| = 0 \tag{4.25}$$

При этом пишем $x \overset{\mathbb{X}}{=} \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ по норме пространства $\mathbb{X}$.

Теорема 4.3.1. $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ — *ОНС в* $\mathbb{X}, x \in \mathbb{X}$, *где*
$x \overset{\mathbb{X}}{=} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k \Longleftrightarrow$ *когда* $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |(x, e_k|^2$.
Это равенство называется равенством Парсеваля и представляет собой обобщение теоремы Пифагора на случай бесконечномерного пространства.

Определение 4.3.3. Система $\{x_k : k \in \mathbb{K}\}$ векторов в пространстве $\mathbb{X}$ называется полной в множестве $\mathbb{E} \subset \mathbb{X}$, если любой вектор $x \in E$ можно сколь угодно точно в смысле нормы пространства $\mathbb{X}$ приблизить к конечной линейной комбинации векторов системы.

Теорема 4.3.2. *Пусть* $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ — *ОНС в* $\mathbb{X}$, *тогда следующее условие эквивалентны:*

1. $\{e_k\}$ *полна в множестве* $\mathbb{E} \subset \mathbb{X}$.

2. $\forall x \in \mathbb{E} \subset \mathbb{X}$ *имеет место разложение (в ряд Фурье)* $x \overset{\mathbb{X}}{=} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$

3. $\forall x \in \mathbb{E} \subset \mathbb{X}$ *имеет место равенство Парсеваля:* $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$.

Доказательство. Из $1 \Rightarrow 2$ в силу экстремального свойства коэффициентов Фурье.
Из $2 \Rightarrow 3$ по теореме (4.3.1)
Из $3 \Rightarrow 1$, по скольку по формуле уклонений

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 \to 0, \text{при } n \to \infty \tag{4.26}$$

□

4.4 Тригонометрический ряд Фурье

$\mathbb{X} = \mathbb{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{C}), e_k = \{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}, f \in \mathbb{R}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$

$$C_k(f) = C_k = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \tag{4.27}$$

Сопоставим функцию

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{ikx} \tag{4.28}$$

Определение 4.4.1. Если нам дан тригонометрический ряд Фурье в комплексной записи, то его n-ая частная сумма равна:

$$S_n(x) = S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ikx} \tag{4.29}$$

Определение 4.4.2. Ряд Фурье функции $f \in \mathbb{R}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ по системе $\{1, \cos kx, \sin kx : k \in \mathbb{N}\}$ называется тригонометрическим рядом Фурье и записывается следующим образом:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{4.30}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx,\ \ k = 0, 1, \dots \tag{4.31}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx,\ \ k = 1, 2, \dots \tag{4.32}$$

Если функция f — действительная, то $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ и $\underline{C_k} = \overline{C_k}$ $(k = 0, 1, \dots)$.

Определение 4.4.3. Тригонометрические многочлены $D_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikx}, K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{m=0}^{n} D_m(x)$ называются соответственно ядром Дирихле и ядром Эйлера.

$$a_1, \dots, a_n \to a,\ \text{ при } n \to \infty \tag{4.33}$$

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \to a,\ \text{ при } n \to \infty \tag{4.34}$$

а обратное не верно.

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \tag{4.35}$$

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} D_m(x) \tag{4.36}$$

Теорема 4.4.1. *При $n = 0, 1, \dots$ имеем:*

$$D_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}} \tag{4.37}$$

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\frac{1-\cos((n+1)x)}{1-\cos x} \tag{4.38}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 1 \tag{4.39}$$

кроме того,

$$K_n(x) \geq 0, K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)}, \text{ где } 0 < \delta \leq |x| \leq \pi \tag{4.40}$$

Доказательство. Согласно (4.35)

$$D_n(x) = \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1} \tag{4.41}$$

чтобы получить (4.37) домножим здесь числитель и знаменатель на $e^{-ix/2}$.
Подставим (4.41), в определение ядра $K_n(x)$, получим:

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{e^{-ix} - 1}{(e^{-ix}-1)(e^{ix}-1)} \sum_{m=0}^{n} (e^{i(m+1)x} - e^{-imx}) = \tag{4.42}$$

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2-(e^{ix}+e^{-ix})} \sum_{m=0}^{n} [(e^{imx} + e^{-imx}) - (e^{i(m+1)x} + e^{-i(m+1)x})] = \tag{4.43}$$

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2 - 2\cos x} (2 - (e^{i(m+1)x} + e^{-i(m+1)x})) \tag{4.44}$$

откуда следует (4.38).
Значит $K_n(x) \geq 0$ и выполняется (4.40). А (4.39) непосредственно следует из (4.35). □

Далее предпологаем, что функция f, изначально определенная на $[-\pi, \pi]$, продолжена на $\mathbb{R}$ как 2π-периодическая функция.
Если $f \in C[-\pi, \pi]$, то ее 2π-периодическое продолжение непрерывно на $\mathbb{R}$

$$(f \in C_{2\pi}) \Longleftrightarrow f(-\pi) = f(\pi) \tag{4.45}$$

Лемма 4.4.1 (интегральное представление частичной суммы ряда Фурье)**.**

$$\forall x \in \mathbb{R}: \;\; S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt \tag{4.46}$$

Доказательство. Пусть S_n — частичная сумма, тогда:

$$S_n(f, x) = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-iku} du \cdot e^{ikx} = \tag{4.47}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-u)} du = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u) D_n(x-u) du = \tag{4.48}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt \tag{4.49}$$

Комментарий. Использовалась замена: $x - u = t$.

Отметим, что последнее равенство выполняется, поскольку в следствии периодичности функции безразлично по какому инетрвалу интегрировать, лишь бы его длина была равна 2π.
□

Определение 4.4.4. Средние арифмитические частичных сумм:

$$S_n(f,x), \delta_n(f,x) = \delta_n(x) = \frac{S_0(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1} \tag{4.50}$$

Называются полиномами Фейера.

Теорема 4.4.2 (теорема Фейера)**.** *Если функция $f \in C_{2\pi}$, то*

$$\delta_n(x) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x) \tag{4.51}$$

Доказательство. Согласно формулам (4.50), (4.46) и (4.35) имеем:

$$\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) dt \tag{4.52}$$

поэтому из (4.39) следует, что:

$$f(x) - \delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t)) K_n(t) dt \tag{4.53}$$

$\varepsilon > 0$, $M = \max |f(x)|$, $x \in \mathbb{R}$. Поскольку функция f — равномерно непрерывна, то найдется такое $\delta > 0$, что:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.54}$$

Согласно (4.40) можно затем выбрать такое $N = N(\varepsilon, \delta)$, что

$$n > N, \delta \leq |t| \leq \pi \Rightarrow K_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{4M} \tag{4.55}$$

Из (4.54) и $K_n(t) \geq 0$ получаем:

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x-t)||K_n(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = \pi\varepsilon, \ n = 1, 2, \ldots \tag{4.56}$$

$$\left\{ \int\limits_{-\pi}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi} \right\} = |f(x) - f(x-t)||K_n(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{4M} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 2M dt = \pi\varepsilon, \ \forall n > N \tag{4.57}$$

В силу (4.54), (4.56) и (4.57) получаем:

$$|f(x) - \delta_n(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n > N \tag{4.58}$$

$\square$

Следствие. *Если две непрерывные 2π-периодические функции f, g имеют один и тот же ряд Фурье, то $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$*

Доказательство. Действительно, если $\delta_n(x)$ — среднее арифметическое этого ряда, то:

$$\delta_n(x) \to f(x), \ \delta_n \to g(x) \tag{4.59}$$

$\square$

Следствие. *Если* $f \in C_{2\pi}$ *и* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \equiv 0$, *то* $\forall n \in \mathbb{Z}: \ f(x) \equiv 0$. *Таким образом ОС* $\{e^{ikx}: \ k \in \mathbb{Z}\}$ *нельзя дополнить ненулевым элементом.*

Доказательство. Это вытекает из предыдущего следствия, если положить $g = 0$. □

Следствие. *Ряд Фурье функции* $f \in C_{2\pi}$ *либо сходится в каждой точке* x *к функции* $f(x)$, *либо вовсе расходится в этой точке.*

Доказательство. НАПИСАТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. □

Замечание 4.4.1. Ряд Фурье для выражения функции в самом деле может в некоторых точках расходится.

Теорема 4.4.3 (теорема Вейерштрасса). *Если* $f \in C_{2\pi}$, *то* $\forall \varepsilon > 0$ *существует такой тригонометрический многочлен* $T(x): \ \forall x \in \mathbb{R}$*:*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon \tag{4.60}$$

Доказательство. Без доказательства. □

Из теоремы (4.4.3) следует теорема (4.4.4).

Теорема 4.4.4 (теорема Вейерштрасса). *Если* $f \in C[a, b]$, *то* $\forall \varepsilon > 0$ *существует такой алгеброический многочлен* $P(x): \ \forall x \in [a, b]$*:*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \tag{4.61}$$

Доказательство. Положив $t = \frac{x-a}{b-a}\pi$, и $x = \frac{b-a}{\pi}t + a$, получим функцию $\varphi(t) = f(a + \frac{b-a}{\pi}t)$ на отрезке $[0, \pi]$. Продолжим ее в начале четным образом $\varphi(-t) = \varphi(t), \ t \in [\pi, 0)$. Найдем по теореме (4.4.3) такой тригонометрический полином $T(x): |\varphi(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall t \in \mathbb{R}$. Всякий тригонометрический полином раскладывается по Тейлору, сходится равномерно на любом конечном интервале.
Пусть P_n — частичная сумма ряда Тейлора для $T(t)$ такая что: $|T(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ 0 \le t \le \pi$. Тогда $|\varphi_n(t) - P_n(t)| < \varepsilon$, при $0 \le t \le \pi$. Сделав обратную замену в $P_n(t): t = \frac{x-a}{b-a}\pi$, получим многочлен $Q_n(x)$, удовлетворяющий условию: $|f(x) - Q_n(x)| < \varepsilon, \ a \le x \le b$. □

Получаем еще одно следствие от теоремы Фейера — полнота тригонометрической системы функций $C_2[-\pi, \pi]$ и более общо $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$.

Теорема 4.4.5 (о полноте тригонометрической системы). *Любая функция* f *из множества* $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ *может быть сколь угодно точно приближена в среднем, то есть по норме:*

1. *Кусочно-постоянной функции* $[-\pi, \pi]$
2. *Непрерывными на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *функциями, принимающие равные значения на концах* $[-\pi, \pi]$
3. *Тригонометрическими полиномами*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай действительно значимых функций.

1. Поскольку f — интегрируема, то: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ разбиение $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi$ отрезка $[-\pi, \pi]$, что: $0 \le \triangle := \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i < \varepsilon$, где

$$m_i = \inf\{f(x)\}, \ x \in [x_{i-1}, x_i), \ \triangle x_i = x_i - x_{i-1} \tag{4.62}$$

Полагая $g(x) = \begin{cases} m_i, \text{если } x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0, \text{если } x = \pi \end{cases}$, $M_f = \sup\{|f(x)|\}, |x| \le \pi$.
Получим: $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 dx \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} (|f(x)| + |g(x)|)(|f(x)| - |g(x)|) dx \le$
$2M_f \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x)) dx = 2M_f \triangle \le 2M_f \varepsilon$.

2. Достаточно уметь приблежать к среднему кусочно постоянной функции. Пусть g — такая функция, с точками разрыва $x_1, \dots, x_n$. Удобно присваивать $-\pi = x_1, x_n = \pi$. Очевидно, какого бы ни было $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, что δ-окрестности точек $x_1, \dots, x_n$ не пересекаются и $2\delta_n M < \varepsilon$, где $M = \sup\{|g(x)| : |x| \le \pi\}$ Заменим функцию g на каждом из отрезков $[-\pi, -\pi + \delta], [x_1 - \delta, x_1 + \delta], (i = 2, \dots, n-1), [\pi - \delta, \pi]$ линейной функцией, принимающей на концах этих отрезков соответственно:
$0, g(-\pi + \delta), g(x_i - \delta), g(x_i + \delta), (i = 2, \dots, n-1), g(\pi - \delta), 0$. Получим кусоно линейную, непрерывную на кусочном отрезке $[-\pi, \pi]$ функцию $h, h(-\pi) = h(\pi) = 0$,
$|h(x)| \le M, \ \forall x \in [-\pi, \pi]$.
Значит
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (g-h)^2 dx \le 2M \int\limits_{-\pi}^{\pi} (|g-h|) dx = \tag{4.63}$$
$$2M \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_i - \delta}^{x_i + \delta} (|g-h|) dx \le 2M(2M - 2\delta)n < 4M\varepsilon \tag{4.64}$$

3. Осталось показа, что можно приблизить любую функцию класса 2. Но по теореме Фейера для любой функции типа h, найдется такой тригонометрический многочлено, что:
$$\forall \varepsilon > 0, \ T : |h(x) - T(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in [-\pi, \pi] \tag{4.65}$$
$$\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (h(x) - T(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \tag{4.66}$$
Ссылаясь на неравенство треугольника, пространства $\mathcal{R}_{\in}[-\pi, \pi]$ заключаем, что теорема доказана.

□

Из полноты тригонометрической системы, из теоремы (4.3.2) (третьего условия полноты ОС) и форумлы наименьших уклонений следует теорема (4.4.6).

Теорема 4.4.6. *$f \in \mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, имеем:*

1. $f(x) \overset{\mathcal{R}_2}{=} \frac{a_0(f)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx$, *или в комплексной записи:*
   $f(x) \overset{\mathcal{R}_2}{=} \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} C_k(f) e^{ikx}$, *где сходимость понимается, как сходимость по норме.*

2. $\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = |\frac{a_0(f)}{2}|^2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2$, *или в комплексной записи:*
   $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} |C_k(f)|^2$.

3. $\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f, x)|^2 dx = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2 = 4 \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |C_k(f)|^2, f \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$.

4.5 Обобщение на неограниченные функции

Определение 4.5.1. Пусть $0 < p < \infty, -\infty \leq a < b \leq +\infty$. Будем писать $f \in \mathcal{R}^p[a, b]$, если существует конечное число точек $x_j, j = 0, 1, 2, \ldots, n$, таких что:

1. $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
2. Функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta],\ [\alpha, \beta] \subset (x_{j-1}, x_j)$
3. Интеграл $\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} |f(x)|^p dx,\ j = 1, 2, \ldots, n$ сходится.

Замечание 4.5.1. Формулы (4.27), (4.31) и (4.32), определяющие коэффициенты Фурье $C_k(f), a_k(f), b_k(f)$ имеют смысл для $\forall f \in \mathcal{R}^1[-\pi, \pi]$, так как тогда $f(x)e^{-ikx}, f(x)\cos kx, f(x)\sin kx \in \mathcal{R}^1[-\pi, \pi]$.

Определение 4.5.2 (неравенство Гельдера)**.**

$$\int\limits_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.67}$$

где $q > 1,\ p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\int\limits_a^b |f(x)|dx \leq (b-a)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.68}$$

$$\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |f(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |f(x)|^h dx\right)^{\frac{1}{h}} \tag{4.69}$$

если $h > 1,\ 0 < r < h < \infty$.

Утверждение 4.5.1. теоремы (4.4.5) и (4.4.6) остаются в силе, если в них пространство $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ расширить до линейного пространства $\mathcal{R}^2[-\pi, \pi]$:

$$(f, g) = \int f(x)\overline{g(x)}dx \tag{4.70}$$

Доказательство. Смотри теорему (4.4.5). □

Лемма 4.5.1. *Если* $f \in \mathcal{R}^p[a, b](p > 0)$, *то* $\forall \varepsilon > 0 \exists g \in \mathcal{R}[a, b] : \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|^p dx < \varepsilon$.

Доказательство. Доказать самостоятельно. □

4.6 Достаточные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке

Лемма 4.6.1 (Римана)**.** *Если* $f \in \mathcal{R}^1[a, b]$, *то*

$$\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx \to 0 \tag{4.71}$$

$$\int\limits_a^b f(x)\cos \lambda x dx \to 0 \tag{4.72}$$

$$\int\limits_a^b f(x)\sin \lambda x dx \to 0, \textit{при } \lambda \to \infty,\ \lambda \in \mathbb{R} \tag{4.73}$$

Доказательство. Будем считать, что функция $f(x)$ — действительная, так как в случае $f(x)$ — комплексная легко сводится к этому, согласно лемме (4.5.1) при $p = 1$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g$ (кусочно-постоянная):

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.74}$$

Пусть $g(x) = m, x \in [x_{j-1}, x_j], j = 1, \dots, n$. $(x_0 = a, x_n = b)$, тогда:

$$\int_a^b g(x) e^{i\lambda x} dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} m_j e^{i\lambda x} dx = \frac{1}{ix} \sum_{j=1}^{n} (m_j e^{i\lambda x}) \Bigg|_{x_{j-1}}^{x_j} \to 0, \text{ при } \lambda \to \infty \tag{4.75}$$

Отсюда из (4.74) получим:

$$\left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \right| = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) e^{i\lambda x} dx + \int_a^b g(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \tag{4.76}$$

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| e^{i\lambda x} dx + \left| \int_a^b g(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{4.77}$$

Итак, (4.71) доказано.
Отделяя действительные и мнимые части, получаем (4.72), (4.73) □

Определение 4.6.1. Говорят, что функция f, заданная в проколотой окрестности точки x, удовлетворяет условиям Дини, если при $x \in \mathbb{R}$ выполняется:

1. В точке x существуют оба предела:

$$f(x-0) = \lim_{t \to +0} f(x-t) \tag{4.78}$$

$$f(x+0) = \lim_{t \to +0} f(x+t) \tag{4.79}$$

2. $\int\limits_0^\delta \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t} dt$, $\int\limits_0^\delta \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} dt$ сходятся абсолютно на $[0, \delta]$, $\forall \delta > 0$

Теорема 4.6.1. f — 2π*-периодическая функция* $f \in \mathcal{R}^1[-\pi, \pi]$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{\infty} C_k(f) e^{ikx} = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \tag{4.80}$$

Доказательство. $S_n(f,x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} f(x-t) D_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt =$
$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi f(x+t) D_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi f(x-t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi (f(x-t) + f(x+t)) D_n(t) dt =$
$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} D_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \left(\frac{f(x-t)-f(x-0)}{2} + \frac{f(x+t)-f(x+0)}{2} \right) D_n(t) dt =$
$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \left(\frac{f(x-t)-f(x-0)}{2\sin\frac{t}{2}} + \frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{t}{2}} \right) \sin((n+\frac{1}{2})t)\ dt$

Поскольку, $2\sin\frac{t}{2} \sim t,\ t \to 0$, то из условий Дини следует, что $g_x(t) \in \mathcal{R}^1[0,\pi]$ абсолютно интегрируема. На основании леммы Римана:

$$\int\limits_0^{\pi} g_x(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt \to 0, \text{при } n \to \infty \tag{4.81}$$

Отсюда из (4.6) следует (4.80) □

Следствие. *Пусть f — ограниченная функция с периодом 2π, имеющая разрыв первого рода и пусть имеет левые и правые производные. Тогда ряд Фурье сходится всюду, а его сумма в точке разрыва непрерывна и равна: $f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$*

4.7 Гладкость функции и скорость убывания коэффициентов Фурье

Определение 4.7.1. Функцию f называют кусочно диффиренцируемой, если существует ее разбиение $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, такое что на каждом интервале $(x_{j-1}, x_j) f$ — диффиренцируема, а в точках x_{j-1}, x_j существуют конечные значения $f(x_{j-1}+0), f(x_j - 0), f'_+(x_{j-1}), f'_-(x_j)$, при $\forall j = 1, \dots, n,\ \ f' \in Q[a,b]$

Через $C_{2\pi}^{(k)}(k = 0, 1, \dots)$ обозначим класс 2π-периодических (комплексно-значимых) функций, имеющих на $\mathbb{R}$ k-ую непрерывную производную. $f^{(k)},\ \ (f^{(k)} \in C_{2\pi} = C_{2\pi}^{(0)})$.

Лемма 4.7.1 (о диффиренцировании ряда Фурье). *Если f — непрерывна, $f \in C_{2\pi}$ и f кусочно диффиренцируема на $[-\pi,\pi]$, то $f' \sim \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} C_k(f')e^{ikx}$ может быть получен формальным диффиренцированием ряда Фурье $f \sim \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} C_k(f)e^{ikx}$ самой функции, то есть:*

$$C_k(f') = ikC_k(f),\ \ k \in \mathbb{Z} \tag{4.82}$$

Доказательство. Интегрированием по частям находим:

$$C_k(f') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}f(x)e^{-ikx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{ik}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = ikC_k(f) \tag{4.83}$$

□

Теорема 4.7.1. *Пусть $f \in C_{2\pi}^{(m-1)},\ \ (m \in \mathbb{N}),\ \ f^{(m-1)}$ — кусочно-диффиренцируема на $[-\pi,\pi]$. Тогда:*

$$C_k(f^{(m)}) = (ik)^m C_k(f),\ \ k \in \mathbb{Z} \tag{4.84}$$

$$|C_{\pm k}(f)| = \frac{\gamma_k}{k^m} = \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{k^m}\right),\ \ k \to \infty, k \in \mathbb{N} \tag{4.85}$$

Причем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty,\ \ \gamma_k \downarrow 0,\ \ \gamma_k = \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{k}\right)$.

Доказательство. Соотношение (4.84) получается в результате m-кратного использования (4.82).

$C_k(f^{(m)}) = ikC_k(f^{(m-1)}) = \dots = (ik)^m C_k(f),\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Полагаю $\gamma_k = |C_k(f^{(m)})|$, с учетом неравенства Бесселя:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_k^2 \le \frac{1}{2\pi} \tag{4.86}$$

Из (4.84) получаем (4.85). □

Теорема 4.7.2. *$f \in C_{2\pi}^{(m-1)}$, $m \in \mathbb{N}$, $f^{(m-1)}$ — кусочно-диффиренцируема на $[-\pi, \pi]$, тогда ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{R}$, причем*

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - S_n(f,x)| = \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n^{m-1/2}}\right), \ n \to \infty \tag{4.87}$$

Доказательство. Поскольку $f \in C_{2\pi}$ и удовлетворяет условиям Дини в любой точке, то

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(f,x), \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.88}$$

Поэтому, с учетом (4.85) имеем:

$$|f(x) - S_n(f,x)| = \left|\sum_{|k|\geq n+1} C_k(f)e^{ikx}\right| \leq \left|\sum_{|k|\geq n+1} |C_k(f)e^{ikx}|\right| = \tag{4.89}$$

$$2\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k^m} \leq 2\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.90}$$

(В силу неравенства Коши-Буняковского).
Так как

$$\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{2m}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \cdot \frac{1}{n^{m-1/2}} \tag{4.91}$$

То из (4.90) получаем (4.87) □

Замечание 4.7.1. Поскольку $a_k(f) = C_k(f) + C_{-k}(f)$, $b_k(f) = i(C_k(f) - C_{-k}(f))$, то из (4.85) следует, что

$$|a_k(f)| = \frac{\alpha_k}{k^m}, \ |b_k(f)| = \frac{\beta_k}{k^m}, \ k \in \mathbb{N}, \ \sum \alpha_k^2 < \infty, \ \sum \beta_k^2 < \infty \tag{4.92}$$

Часть II

Интегралы

Глава 5

Кратные интегралы

5.1 Определение интеграла Римана на n-ом промежутке

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное арифметическое евклидово пространство(ЕП).
($\mathbb{R}^2$ отождествляется oxy, $\mathbb{R}^3$ с $oxyz$).
$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ далее обозначается через x.

Определение 5.1.1. Множество $I = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \le x \le b_i,\ i = 1, \dots, n\}$ называется промежутком или координатным параллелепипедом. По аналогии с одномерным случаем записывают:

$$a = (a_1, \dots, a_n),\ b = (b_1, \dots, b_n) \tag{5.1}$$

Определение 5.1.2. Число $|I| := \prod\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ называют объемом, либо мерой промежутка. Объем(меру) обозначают символами: $v(I), \mu(I)$.

$$\text{При } n = 1, \mu(I) \text{ — длина отрезка} \tag{5.2}$$

$$\text{При } n = 2, \mu(I) \text{ — площадь прямоугольника} \tag{5.3}$$

$$\text{При } n = 3, \mu(I) \text{ — объем прямоугольного параллелепипеда} \tag{5.4}$$

Разобьем каждый из координатных отрезков $[a_i, b_i],\ i = 1, \dots, n$ на конечное число более мелких отрезков. Эти разбиения индуцируют разбиение промежутка I на более мелкие промежутки, получающиеся прямым произведением промежутков a_i, b_i.

Определение 5.1.3 (Декартово произведение)**.** $X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$

Определение 5.1.4. Описанное представление промежутка I в виде объеденения промежутков i, j из более мелких промежутков i, j назовем разбиением и обозначим $T(k = k_T)$.

Определение 5.1.5. $\lambda(T) = \max\{d(I_1), \dots, d(I_k)\}$. $d(I_j)$ называется диаметром разбиения T.
Пусть $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ — функция, определенная на промежутке I,
$T = \{I_1, \dots, I_k\}$ — разбиение промежутка I.
$\xi = (\xi^1, \dots, \xi^k)$ — некоторый набор точек ξ^j, таких что $\xi^j \in I_j$.

Определение 5.1.6. Сумма $\sigma(f, T, \xi) := \sum\limits_{j=1}^{k} f(\xi')|I_j|$ называется интегральной суммой Римана.

Определение 5.1.7. Если существует конечный предел $\mathcal{J}$, $\sigma(f, T, \xi)$, $\lambda(T) \to 0$, то его называют интегралом Римана от функции f на промежутке I:

$$\mathcal{J} = \int\limits_I f(x)dx := \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f, T, \xi) \tag{5.5}$$

Функцию f называют интегрируемой на промежутке I. Множество таких функций обозначим $\mathcal{R}(I)$. Уточним, что равенство (5.5) означает: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall T = \{I_1, \ldots, i_k\}, \lambda(T) < \delta$ и при любом выборе точек $\xi^j \in I_j, j = 1, \ldots, k$ выполняется неравенство:

$$\left|\mathcal{J} - \sum_{j=1}^{k} f(\xi^j)|I_j|\right| < \varepsilon \tag{5.6}$$

Равносильные отображения интеграла таковы:

$$\int\limits_I f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \ \underbrace{\int \ldots \int}_{n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \ n \in \mathbb{N} \tag{5.7}$$

Мы видим, что данное определение повторяет определение интеграла Римана, и при $m = 1$ совпадает. Схожесть опеределний позваляет найти сходные методы о решении вопроса условий существования.

5.2 Условие существования кратного интеграла

$n = 1$

Теорема 5.2.1. *Если $f \in \mathcal{R}(I)$, то f ограниченна на I. Пусть функция f определена на I, $I \in \mathbb{R}^n$. $T = \{I_j\}$ — разбиение промежутка I.*

$$m_j = \inf_{x \in I_j} f(x), \ M_j = \sup_{x \in I_j} f(x) \tag{5.8}$$

Определение 5.2.1. Велечины $s(f,T) = \sum\limits_j m_j|I_j|$, $S(f,T) = \sum\limits_j M_j|I_j|$ называются соответтественно нижней и верхней суммой Дарбу на промежутке отвечающему разбиению T этого промежутка.

Комментарий. Совершенно аналогичо доказывается при $m = 1$ теорема (5.2.2).

Теорема 5.2.2. *Для того, чтобы ограниченная на промежутке функция f была интегрируема на $I \iff$*

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} (S(f,T) - s(f,T)) = 0 \tag{5.9}$$

Замечание 5.2.1 (критерий интегрируемости Римана). Если обозначить колебания $M_j - m_j$, I_j через $\Omega(f, I_j)$, то (5.9) можно записать в виде:

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_j \Omega(f, I_j)|I_j| = 0 \tag{5.10}$$

Определение 5.2.2. Говорят, что множество $\mathbb{E}$ n-мерного пространства имеет меру 0 в смысле Жордана или имеет нулевой n-мерный объем, если для $\forall\varepsilon > 0$ существует покрытие множества $\mathbb{E}$ конечной системой $\{I_j\}$ n-мерных промежутков. $\sum\limits_j |I_j|$ объемов которых меньше ε. В этом случае пишем: $\mu(\mathbb{E}) = 0$

Теорема 5.2.3. *Пусть функция f ограничена на n-мерном промежутке $I \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{E}_f$ — множество ее точек разрыва. Тогда, если $\mu(\mathbb{E}_f) = 0$, то $f \in \mathcal{R}(I)$ (интегрируема).*

Комментарий. Эта теорема при $n = 1$ обычно устанавливается в разделе "определенный интеграл". В общем случае доказывается аналогично.

5.3 Кратный интеграл по множеству

Пусть функция f определена на $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$, условимся символом $f_{\mathbb{E}}(x)$ обозначать функцию $= 0$ вне $\mathbb{E}$.

Определение 5.3.1. Интеграл функции по множеству $\mathbb{E}$ определяется соотношением:

$$\int\limits_{\mathbb{E}} f(x)dx := \int\limits_{I} f_{\mathbb{E}}(x)dx \tag{5.11}$$

где I — наименьший промежуток, содержащий $\mathbb{E}$.
Если стоящий справа интеграл существует, то он называется интегрируемым по Риману на $\mathbb{E}$.
Совокупность всех интегрируемых на множестве $\mathbb{E}$ функций обозначим $\mathcal{R}(\mathbb{E})$.

Определение 5.3.2. Множество $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$ назовем допустимым, если оно ограничено в $\mathbb{R}^n$ и его граница $\partial\mathbb{E}$ есть множество меры нуль (в смысле Жордана).

Пример 5.3.1. Куб, тетраэдер, шар и т. д. являются допустимыми множествами.

Комментарий. Граница $\partial\mathbb{E}$ множества $\mathbb{E}$ состоит из точек, в любой окрестности которых имеются как точки из $\mathbb{E}$, так и точки из дополнения $\mathbb{E}$ до $\mathbb{R}^n$.

Теорема 5.3.1. *Пусть $\mathbb{E}$ — допустимое множество в $\mathbb{R}^n$. f — функция, определенная на $\mathbb{E}$ и пусть множество точек разрыва $\mathbb{E}_f$ множества $\mathbb{E}$ имеют нулевую меру, тогда функция $f \in \mathcal{R}(\mathbb{E})$ (интегрируема).*

Доказательство. Функция $f_{\mathbb{E}}$ по сравнению с функцией f может иметь дополнительные разрывы на $\partial\mathbb{E}$, которые, по условию, имеет меру нуль. Поэтому множество точек разрыва функции $f_{\mathbb{E}}$ так же имеет нулевую меру.
Отсюда из определения (5.3.1) и теоремы (5.2.3) следует, что функция интегрируема. □

5.4 Мера(объем) множества

Определение 5.4.1. Мерой Жордана(или объемом) ограниченного множества $\mathbb{E}$ назовем величину $\mu(\mathbb{E}) := \int\limits_{\mathbb{E}} dx$, если указанный интеграл(Римана) существует. В последнем случая множество $\mathbb{E}$ называют измеримым в смысле Жордана.

Теорема 5.4.1. *Допустимое множество измеримо в смысле Жордана.*

Доказательство. Рассмотрим характеристическую функцию:

$$\aleph_{\mathbb{E}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{E} \\ 0, & x \notin \mathbb{E} \end{cases} \tag{5.12}$$

Комментарий. $\aleph$ — Алеф.

Очевидно, функция $\aleph_{\mathbb{E}}(x)$ имеют разрывы в граничных и только в граничных точках множества $\mathbb{E}$.
По определению (5.3.1):

$$\int\limits_{\mathbb{E}} 1 \cdot dx = \int\limits_{I} \aleph_{\mathbb{E}}(x)dx \tag{5.13}$$

где I — наименьший промежуток, содержащий множество $\mathbb{E}$.
А так как множество точек разрыва $\aleph_{\mathbb{E}}(x)$ совпадает с границей $\partial\mathbb{E}$ и $\mu(\partial\mathbb{E}) = 0$, то по

теореме (5.2.3) интеграл (5.13) существует.
$\mu(\mathbb{E})$ носит комплексный смысл, если $\mathbb{E}$ — измеримое множество, и

$$\int_I \aleph_{\mathbb{E}}(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} s(\aleph_{\mathbb{E}}, T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} S(\aleph_{\mathbb{E}}, T), \ (I > \mathbb{E}) \tag{5.14}$$

то

$$s(\aleph_{\mathbb{E}}, T) = \sum_j m_j|I_j|, \ S(\aleph_{\mathbb{E}}, T) = \sum_j M_j|I_j| \tag{5.15}$$

где s, S — нижняя и верхняя суммы Дарбу. Но в силу определения функции $\aleph_{\mathbb{E}}$: $s(\aleph_{\mathbb{E}}, T)$ равна сумме объемов промежутков I_j, лежащих в множестве $\mathbb{E}$ (это объем вписанного в $\mathbb{E}$ многогранника), а $S(\aleph_{\mathbb{E}}, T)$ равна сумме объемов тех промежутков I_j, которые имеют общие точки с множеством $\mathbb{E}$ (Объем описанного многогранника). □

Утверждение 5.4.1. Мера $\mu(\mathbb{E})$ есть общий предел, при $\lambda(T) \to 0$ объемов, вписанных в $\mathbb{E}$ и описанных около $\mathbb{E}$ многогранников.

Замечание 5.4.1. Можно показать, что измеримы по Жордану только измеримые множества $\iff$ множество $\mathbb{E}$ является измеримым по Жордану $\iff$ его границы имеют меру нуль в смысле Жордана.

Замечание 5.4.2. При $n = 2$ понятие измеримого по Жордану множества совпадает с понятием квадрируемой плоской фигуры и меры Жордана с ее площадью.

5.5 Свойства кратных интегралов

На кратные интегралы по ограниченной функции переносятся все свойства интегралов по отрезку.
Доказатаельства аналогичны одномерному случаю:

1. Линейность интеграла по множеству.
   $f_1, \dots, f_n$ интегрируема на множестве $\mathbb{E}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
   $\lambda_1 f_1, \dots, \lambda_n f_n$ так же интегрируема на $\mathbb{E}$ и

$$\int_{\mathbb{E}} (\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x))\, dx = \lambda_1 \int_{\mathbb{E}} f_1(x)dx + \dots \lambda_n \int_{\mathbb{E}} f_n(x)dx \tag{5.16}$$

2. Адитивность интеграла по множеству.
   Если $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ — допустимые множества в $\mathbb{R}^n$ и $\mu(\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2) = 0$ ($\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2 \neq 0$ в частности), а f — функция, определенная на $\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2$, то при условии существования интегралов имеет место равенство:

$$\int_{\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2} f(x)dx = \int_{\mathbb{E}_1} f(x)dx + \int_{\mathbb{E}_2} f(x)dx \tag{5.17}$$

3. Общая оценка.
   Если $f \in \mathcal{R}(\mathbb{E})$, то $|f| \in \mathcal{R}(\mathbb{E})$ и имеет место неравенство:

$$\left| \int_{\mathbb{E}} f(x)dx \right| \le \int_{\mathbb{E}} |f(x)|dx \tag{5.18}$$

4. Интегрирование неравенств. Если функции $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{E})$ и $f(x) \leq g(x),\ x \in \mathbb{E}$, то:

$$\int\limits_{\mathbb{E}} f(x)dx \leq \int\limits_{\mathbb{E}} g(x)dx \tag{5.19}$$

5. Следствие из 4.
   Если f интегрируема и $m \leq f(x) \leq M, x \in \mathbb{E}$

$$m\mu(\mathbb{E}) \leq \int\limits_{\mathbb{E}} f(x)dx \leq M\mu(\mathbb{E}) \tag{5.20}$$

6. Теорема о среднем.
   Если в дополнении условия 5. множество $\mathbb{E}$ линейно связано, а f — непрерывна на $\mathbb{E}$, то существует $\xi \in \mathbb{E}$, такое что:

$$\int f(x)dx = f(\xi)\mu(\mathbb{E}) \tag{5.21}$$

5.6 Сведение кратного инетграла к повторному

Теорема 5.6.1. *$X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ является прямым произведением промежутков: $X \subset \mathbb{R}^m$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$.*
Если для $f(x, y)$ определенной на $X \times Y, (x \in X, y \in Y)$ существует интеграл:

$$\int\limits_{X\times Y} f(x, y)dxdy \tag{5.22}$$

и для любого $x \in X$ существует:

$$\mathcal{J}(x) = \int\limits_{Y} f(x, y)dy \tag{5.23}$$

то существует так же и повторный интеграл:

$$\int\limits_{X} dx \int\limits_{Y} f(x, y)dy \tag{5.24}$$

и выполняется равенство:

$$\int\limits_{X\times Y} f(x, y)dxdy = \int\limits_{X} dx \int\limits_{Y} f(x, y)dy \tag{5.25}$$

Доказательство. Любое разбиение T промежутка $X \times Y$ индуцируется собственными разбиениями T_x, T_y. При этом, каждый промежуток разбиения T есть прямое произведения $X_i \times Y_j,\ X_i, Y_j$ — разбиения T_x, T_y.
Очевидно, $|X_i \times Y_j| = |X_i| \cdot |Y_j|$.
Положим $m_{ij} = \inf\limits_{x\in X_i,\ y\in Y_j} f(x, y),\ \ M_{ij} = \sup\limits_{x\in X_i,\ y\in Y_j} f(x, y)$, так что выполняется следующее неравенство:

$$m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij},\ \forall (x, y) \in X_i \times Y_j \tag{5.26}$$

Фиксируем $\forall x \in X_i : x = \xi_i$.
Учитывая (5.26) получим:

$$m_{ij}|Y_j| \leq \int\limits_{Y_j} f(\xi_i, y)dy \leq M_{ij}|Y_j| \tag{5.27}$$

Просуммировав все по j получим:

$$\sum_j m_{ij}|Y_j| \leq \mathcal{J}(\xi_i) = \int\limits_Y f(\xi_i, y)dy \leq \sum_j M_{ij}|Y_j| \tag{5.28}$$

Отсюда имеем:

$$\sum_i |X_i| \sum_j m_{ij}|Y_j| \leq \sum_i \mathcal{J}(\xi_i)|X_i| \leq \sum_i |X_i| \sum_j M_{ij}|Y_j| \tag{5.29}$$

По середине мы получили интегральную сумму для функции $\mathcal{J}(x)$. Крайние челны — это суммы Дарбу $s(f,T), S(f,T)$ для кратного интеграла (5.22).
Например $\sum\limits_{i,j} m_{ij}|X_i \times Y_j|$. Таким образом неравенство (5.29) перепишется в виде:

$$s(f,T) \leq \sum_i \mathcal{J}(\xi_i)|X_i| \leq S(f,T) \tag{5.30}$$

Так как кратный интеграл (5.22) существует по условию, то при $\lambda(T) \to 0$ обе суммы Дарбу неравенства (5.30) стремятся к этому интегралу, откуда

$$\left| \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_i \mathcal{J}(\xi_i)|X_i| \right| = \int\limits_{X\times Y} f(x,y)dxdy \tag{5.31}$$

Левая часть этого равенства есть повторный интеграл:

$$\int\limits_X \mathcal{J}(x)dx = \int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)dy \tag{5.32}$$

□

Замечание 5.6.1. Применяя эту теорему несколько раз, можно свести вычисление по k-мерному промежутку к вычислению k одномерных интегралов.

Следствие. *Пусть $\mathbb{D} \subset Oxy$ — область, ограниченная двумя кривыми $\mathcal{J} = \varphi(x), \mathcal{J} = \psi(x), (\varphi(x) \leq \psi(x))$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$.*
Тогда, если для $f(x,y)$ существует $\iint\limits_{\mathbb{D}} f(x,y)dxdy,\ x \in [a,b]$.

$\mathcal{J}(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$, то существует так же повторный интеграл: $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ и выполняется равенство

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \tag{5.33}$$

5.7 Замена переменных в кратных интегралах

Напомним, что обтображение:

$$x = \varphi(t) = \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_n) \end{cases} \tag{5.34}$$

называется регулярным в области $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, если:

1. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ имеют в $\mathbb{D}$ непрерывные частные производные по всем аргументам.

2. Матрица Якоби:

$$\varphi'(t) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{pmatrix} \tag{5.35}$$

Определитель(якобиан):

$$\det \varphi'(t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} =: \frac{\mathbb{D}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\mathbb{D}(t_1, \dots, t_n)} \tag{5.36}$$

Отличен от нуля в $\mathbb{D}$. Матрица Якоби (5.35) называется производной отображения φ, а линейный оператор в $\mathbb{R}^n$ называется диффиренциалом φ в точке t, в области $\mathbb{D}$, $(\mathbb{D}_\varphi(t))$. Регулярное отображение является локально обратимым.

Лемма 5.7.1. *Пусть φ — регулярное отображение области $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n_t$, I — замкнутый промежуток, лежащий в $\mathbb{D}$, $(I \subset \mathbb{D})$. $\varphi(I)$ — образ промежутка I, $(\varphi(I) \subset R^n_x)$. Тогда, существует такая точка $\tau \in I$, что:*

$$\mu(\varphi(I)) = |\det \varphi'(\tau)| \cdot |I| \tag{5.37}$$

Комментарий. $|I| = \mu(I)$

Пояснение. Лемма при $n = 1$ следует из формулы Лагранжа: $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(\tau)(b - a)$, где $\tau \in [a, b] = I$, поскольку при $\varphi'(\tau) \neq 0$ функция φ монотонна и

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| = \mu(\varphi(I)) \tag{5.38}$$

Если $n \geq 2$ и отображение φ является линейным преобразованием

$$x = \varphi(t) = \begin{cases} x_1 = a_{11}t_1 + \dots + a_{1n}t_n \\ \dots \\ x_n = a_{n1}t_1 + \dots + a_{nn}t_n \end{cases} \tag{5.39}$$

с матрицей $A = (a_{ij}) = \varphi'(t),\ x = At$, то образ промежутка $\varphi(I)$ является параллелепипедом $\varphi(I) \subset \mathbb{R}^n_x$, объем которого равен:

$$|\det A| \cdot |I| = |\det \varphi'| \cdot |I| \tag{5.40}$$

При $n = 3$, I — прямоугольный параллелепипед, построенный на векторах: $h^1 = (h_1, 0, 0), h^2 = (0, h_2, 0), h^3 = (0, 0, h_3)$, тогда $\varphi(h^i) = (a_{1i}h_i, a_{2i}h_i, a_{3i}h_i),\ i = 1, 2, 3$. Отсюда объем параллелепипеда, построенного на векторах $\varphi(h^1), \varphi(h^2), \varphi(h^3)$ как на ребрах, равен

$$|<\varphi(h^1), \varphi(h^2), \varphi(h^3)>| = |\det A| \cdot |h_1 h_2 h_3| \tag{5.41}$$

Рассматривая уже общий, нелинейный случай, следует принять во внимание, что в малой окрестности точки $t \in \mathbb{D}$ является почти линейным отображением:

$$\varphi(t + h) = \varphi(t) + \mathbb{D}_\varphi(t) + \bar{\bar{o}}\,(h)\,, \text{ при } h \to 0 \tag{5.42}$$

Поэтому, если размеры промежутка I малы, то с малой относительной погрешностью можно сказать:

$$\mu(\varphi(I)) \approx |\det \varphi'(t)| \cdot |I|,\ t \in I \tag{5.43}$$

В такой ситуации и используется лемма (I — малый промежуток).

Теорема 5.7.1. *Пусть $\varphi : \mathbb{E}_t \to \mathbb{E}_x$ — отображение измеримого (по Жордану) множества $\mathbb{E}_t \subset \mathbb{R}^n_t,\ \mathbb{E}_x \subset \mathbb{R}^n_x$, при чем отображение φ регулярно в некоторой области $\mathbb{D}$, содержащей замыкание $\overline{\mathbb{E}}_t, \mathbb{E}_t, (\overline{\mathbb{E}}_t \subset \mathbb{D})$. Тогда, если $f(x) \in \mathcal{R}(\mathbb{E}_x)$, то $f(\varphi(t))|\det \varphi'(t)| \in \mathcal{R}(\mathbb{E}_t)$ и имеет место равенство:*

$$\int\limits_{\mathbb{E}_x} f(x)dx = \int\limits_{\mathbb{E}_t} f(\varphi(t))|\det \varphi'(t)|dt \tag{5.44}$$

Доказательство. Случай, когда $\mathbb{E}_t$ — промежуток, а $f(x)$ ограничена и непрерывна на $\mathbb{E}_x$. В этом случае функция $g(t) = f(\varphi(t))|\det \varphi'(t)|$ так же ограничена и непрерывна на $\mathbb{E}_t$, а следовательно и интегрируема на $\mathbb{E}_t$. Любому разбиению T промежутка $\mathbb{E}_t$ на промежутке $I_1, \ldots, I_k$ соответствует разложение множества $\varphi(\mathbb{E}_t) = \mathbb{E}_x$ на множество $\varphi(I_j),\ j = 1, \ldots, k$. Все эти множества измеримы, связаны и пересекаются попарно лишь по множествам меры нуль. Поэтому, в силу адитивности интеграла:

$$\int\limits_{\mathbb{E}_x} f(x)dx = \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\varphi(I)} f(x)dx \tag{5.45}$$

По теореме о среднем:

$$\int\limits_{\varphi(I_j)} f(x)dx = f(\xi^j)\mu(\varphi(I_j)),\ \xi^j \in \varphi(I_j) \tag{5.46}$$

Пусть $\eta^j = \varphi^{-1}(\xi^j) \in I_j$, так что $\xi^j = \varphi(\eta^j)$.
Поскольку по лемме $\mu(\varphi(I_j)) = |\det \varphi'(\tau^j)| \cdot |I_j|$, где $\tau^j \in I_j$, то из (5.45) и (5.46) получаем:

$$\int\limits_{\mathbb{E}_x} f(x)dx = \sum_{j=1}^{k} f(\varphi(\eta^j)) \left|\det \varphi'(\tau^j)\right| \cdot |I_j| =: \sigma_1 \tag{5.47}$$

Составим сумму: $\sigma_2 := \sum\limits_{j=1}^{k} f(\varphi(\eta^j))\, |\det \varphi'(\eta^j)| \cdot |I_j|$, которая является интегрируемой суммой для функции $g(t),\ t \in \mathbb{E}_t$. Поскольку $g(t) \in \mathcal{R}$, то:

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma_2 = \int\limits_{\mathbb{E}_t} g(t)dt \tag{5.48}$$

Положим $\psi(t) = |\det \varphi'(t)|$ и оценим разность $\sigma_1 - \sigma_2$:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sum_{j=1}^{k} f(\xi^j)(\psi(\tau^j) - \psi(\eta^j))|I_j| \tag{5.49}$$

Функция $\psi(t)$ непрерывна на замкнутом множестве $\mathbb{E}_t$ и по теореме Кантора равномерно непрерывна на $\mathbb{E}_t$, так что $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0,\ \lambda(T) < \delta$:

$$|\psi(\tau^j) - \psi(\eta^j)| < \varepsilon,\ \forall j \tag{5.50}$$

$$\rho(\tau^j, \eta^j) < \delta \tag{5.51}$$

Отсюда, при $\lambda(T) < \delta$:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \max_{x\in\mathbb{E}_x} |f(x)| \cdot \varepsilon \sum_{j=1}^{k} |I_j| = C\varepsilon \tag{5.52}$$

где C не зависит от ε, $C = const$.

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} (\sigma_1 - \sigma_2) = 0 \tag{5.53}$$

Равенство (5.44) теперь следует из (5.47), (5.48) и (5.53).
Доказательство теоремы в общем случае можно провести, придерживаясь рассмотренной схемы. □

Следствие. *Величина интеграла от f по множеству $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$ и зависит от выбора декартовых координат в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{E}_x, \mathbb{E}_t$ — запись множества $\mathbb{E}$. p — точка множества $\mathbb{E}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — ее координаты в первой системе, $t = (t_1, \ldots, t_n)$ — во второй системе. Тогда $f(p) = f_x(x_1, \ldots, x_n) = f_t(t_1, \ldots, t_n)$, где $f_t = f_x \circ \varphi$ (суперпозиция). Поскольку переход от одной системы декартовых координат к другой имеет якобиан по модулю равный единице, то есть:

$$\int\limits_{\mathbb{E}_x} f_x(x)dx = \int\limits_{\mathbb{E}_t} f_x(\varphi(t))\,|\det \varphi'(t)|\,dt = \int\limits_{\mathbb{E}_t} f_t(t)dt \tag{5.54}$$

□