

Математический анализ

abcdw

$$\begin{aligned}\int \frac{bx+c}{x^2+2px+q} dx &= \int \frac{b(x+p)+c-bp}{(x+p)^2+q-p^2} d(x+p) = \int b \frac{tdt}{t^2+a^2} + (c-bp) \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \\ &= \frac{b}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \frac{c-bp}{a} \int \frac{d(\frac{t}{a})}{(\frac{t}{a})^2+1} = \frac{b}{2} \log(t^2+a^2) + \frac{c-bp}{a} \operatorname{arctg}(\frac{t}{a}) + C = \frac{b}{2} \log(x^2 + \\ &+ 2px + q) + \frac{c-bp}{a} \operatorname{arctg}(\frac{x+p}{a}) + C \\ \int \frac{bx+c}{(x^2+2px+q)^m} dx &= \int \frac{b(x+p)+c-bp}{((x+p)^2+a^2)^m} d(x+p) = \frac{b}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m} + \frac{c-bp}{a^{2m-1}} \int \frac{d(\frac{t}{a})}{(\frac{t}{a})^2+1)^m} = \\ &= \frac{b}{2} \frac{x^2+2px+q)^{1-m}}{1-m} + \frac{c-bp}{a^{2m-1}} I_m(\frac{x+p}{a}) + C\end{aligned}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

P, Q - многочлены. $\deg P(x) < \deg Q(x)$.

$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)} \leftarrow$ правильная дробь, нет общих корней ни действительных, ни комплексных.

$$P_n(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_nx^n, p_n \neq 0, p_1, \dots, p_n \in R$$

Пусть $z = a + ib, b \neq 0$ корень $P_n(x)$, тогда $P_n(z) = 0, \overline{P_n(z)} = 0 = \overline{p_0 + p_1z + \dots + p_nz^n} = \overline{p_0} + \overline{p_1}\overline{z} + \dots + \overline{p_n}\overline{z}^n = \overline{p_0} + \overline{p_1}\overline{z} + \dots + \overline{p_n}\overline{z}^n$

$$P_n(x) = (x-z)(x+\overline{z})P_1(x)$$

$(x-z)(x+\overline{z}) = x^2 + (z+\overline{z})x + z\overline{z} = x^2 + 2px + q$ - квадратный трехчлен без действительных корней.

$$Q_n(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \dots (x^2+2p_1x+q_1)^{m_1} \dots (x^2+2p_jx+q_j)^{m_j}$$

$$\exists A : P_1(x) : \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^k Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1} Q_1(x)}$$

$$\text{Доказательство: } \forall A \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \left(\frac{P(x)}{(x-a)^k Q_1(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} \right) = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P(x)-AQ_1(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}$$

Подберем A такое, чтобы $P(x) - AQ_1(x)$ делилось на $(x-a)$. Для этого

$$\text{нужно, чтобы } P(a) - AQ_1(a) = 0, A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$$

$$\text{Значит } P(x) - AQ_1(x) = (x-a)P_1(x)$$

$$\begin{aligned}
& \exists M, N, P(x) \int R : \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2+2px+q)^m Q_1(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2+2px+q)^{m-1} Q_1(x)} \\
& \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^m} + \frac{P(x)-(Mx+N)Q_1(x)}{(x^2+2px+q)^m Q_1(x)} \\
& x^2 + 2px + q = (x - z_1)(x - \bar{z}_1) \\
& P(z_1) - (Mz_1 + N)Q_1(z_1) = 0 \\
& Mz_1 + N = \frac{P(z_1)}{Q(z_1)} = A + iB \\
& M(a+ib) + N = (Ma + N) + ibM = A + iB, M = \frac{B}{b}, N = A - Ma = A - \frac{B}{b}a \\
& P(x) - (Mx + N)Q_1(x) = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)Q_1(x) = (x^2 + 2px + q)Q_1(x)
\end{aligned}$$

$$\text{Теорема. } \forall \frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_{1k_1-1}}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{11}}{(x-x_1)}$$

§Подстановки Эйлера.

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

$$\begin{aligned}
& 1) a > 0 : \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} \pm t \\
& ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{ax}t + t^2 \\
& x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{at}}, dx = d\left(\frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{at}}\right) \\
& \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t = \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{at}} + t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2) c > 0 : \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + xt \\
& ax^2 + bx + c = c + 2\sqrt{c}xt + x^2t^2 \\
& ax + b = 2\sqrt{c}t + xt^2 \\
& x = \frac{b - 2\sqrt{c}t}{t^2 - a} \\
& \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + \frac{b - 2\sqrt{c}t}{t^2 - a}t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3) ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), x_1, x_2 \in R, x_1 \neq x_2 \\
& \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1) \\
& ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = t^2(x - x_1)^2 \\
& a(x - x_2) = t^2(x - x_1) \\
& x = \frac{t^2x_1 - ax_2}{t^2 - a}
\end{aligned}$$

Графическая интерпретация.

$$\begin{aligned}
& y = \pm \sqrt{ax^2 + bx + c} \\
& y^2 = ax^2 + bx + c \leftarrow (x_0, y_0) \text{ на кривых.} \\
& y - y_0 = t(x - x_0) \\
& ((y - y_0) + y_0)^2 = ax^2 + bx + c \\
& t^2(x - x_0)^2 + 2t(x - x_0)y_0 + y_0^2 = ax^2 + bx + c \quad \text{не, } y_0^2 = ax^2 + bx + c \quad \text{не, } y_0^2 = ax^2 + bx + c \text{ аккуратнее.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t^2(x-x_0)^2 + 2t(x-x_0)y_0 &= a(x^2-x_0^2) + b(x-x_0) \\
t^2(x-x_0) + 2ty_0 &= a(x+x_0) + b
\end{aligned}$$