

## 西安邮电大学期末考试试题(A卷)

(2019——2020 学年第一学期)

课程名称: 高等数学 A1

考试专业、年级: 通院、电院、自动化院、计算机院、物理、信管、金融、商务等

考核方式: 闭卷 可使用计算器: 否

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
评卷人										

得分: \_\_\_\_\_ 一、选择题(每小题 2 分, 共 8 分): 每小题只有一个正确选项, 请将所选项前面的字母填在题中的括号内.

1. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{\arctan x}, & x \neq 0 \\ a \cos 2x, & x = 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则  $a =$  ( ).

- (A) 1 (B) -1 (C) 0 (D)  $\frac{1}{2}$

2.  $x = 1$  是  $f(x) = \frac{x^3 - x}{\sin \pi x}$  的 ( ) 间断点.

- (A) 可去 (B) 跳跃 (C) 无穷 (D) 振荡

3. 设  $f(x)$  在  $x = a$  处可导, 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{h} =$  ( ).

- (A)  $f'(a)$  (B)  $\frac{f'(a)}{2}$  (C)  $2f'(a)$  (D)  $f'(2a)$

4. 若反常积分  $\int_0^1 \frac{dx}{x^k}$  收敛, 则  $k$  的范围应为 ( ).

- (A)  $k > 1$  (B)  $k < 1$  (C)  $k \geq 1$  (D)  $k \leq 1$

得分: \_\_\_\_\_ 二、填空题(每空 2 分, 共 8 分)

1. 设函数  $f(x) = 3^x$ , 则  $f^{(n)}(x) =$  \_\_\_\_\_.

2. 已知  $f$  可导,  $y = f(\sin^2 x)$ , 则  $dy =$  \_\_\_\_\_.

3. 曲线  $y = xe^{-x}$  的拐点为 \_\_\_\_\_.

4.  $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2})^2 dx =$  \_\_\_\_\_.

得分: \_\_\_\_\_ 三、计算下列各题(每小题 4 分, 共 16 分)

得分: \_\_\_\_\_ 1. 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x$ .

得分: \_\_\_\_\_ 2. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$ .

得分: \_\_\_\_\_ 3. 设  $y = e^{\arctan \sqrt{x}}$ , 求  $y'$ .

得分: \_\_\_\_\_ 4. 求  $\int (x-1) \sin x dx$ .

学号

姓名

专业班级

得分：\_\_\_\_\_ 四、计算下列各题（每小题 5 分，共 20 分）

得分：\_\_\_\_\_ 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^t (1+t) dt}{\tan x}.$

得分：\_\_\_\_\_ 2. 已知  $y = x^{\cos x}$  ( $x > 0$ ), 求  $y'$ .

得分：\_\_\_\_\_ 3. 求  $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

得分：\_\_\_\_\_ 4. 已知  $f(x)$  的一个原函数为  $\frac{\sin x}{x}$ , 求  $\int x f'(x) dx.$

得分：\_\_\_\_\_ 五、计算下列各题（每小题 6 分，共 18 分）

得分：\_\_\_\_\_ 1. 设  $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = 1 - \ln(1+t^2) \end{cases}$ , 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}.$

得分：\_\_\_\_\_ 2. 设  $y = y(x)$  由方程  $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$  所确定, 求  $y'(0).$

得分：\_\_\_\_\_ 3. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x \geq 0 \\ e^{x+2}, & x < 0 \end{cases}$ , 求  $\int_0^2 f(x-1) dx.$

学号

姓名

专业班级

得分：\_\_\_\_\_ 六、解答下列各题（每小题 5 分，共 10 分）

得分：\_\_\_\_\_ 1. 求函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  的单调区间与极值.得分：\_\_\_\_\_ 2. 求解微分方程  $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$ .

得分：\_\_\_\_\_ 七、解答下列各题（每小题 8 分，共 16 分）

得分：\_\_\_\_\_ 1. 曲线  $y = \frac{x^2}{2}$  在点  $x = 2$  处的法线与该曲线及  $x$  轴围成平面图形  $D$ .(1) 求平面图形  $D$  的面积  $S_D$ ;(2) 求  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所成旋转体的体积  $V$ .得分：\_\_\_\_\_ 2. 设对一切实数  $x$ ，函数  $f(x)$  满足等式  $f'(x) = e^{-2x} + \int_0^x f(t) dt$ ，且  $f(0) = 0$ ，试求  $f(x)$ .

得分：\_\_\_\_\_ 八、证明题(4 分)

设函数  $f(x)$  在闭区间  $[1, 3]$  上连续, 在开区间  $(1, 3)$  内可导, 且  $f(1) = \int_2^3 x f(x) dx$ ,证明：至少存在一点  $\xi \in (1, 3)$ , 使得  $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ .



课程: 高等数学 A1 类型: A 卷 专业、年级: 通院、电院、自动化院、计算机院、物理、信管、金融、商务等

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分	8	8	16	20	18	10	16	4		100

一、选择题: 1. A; 2. A; 3. C; 4. B.

二、填空题: 1.  $3^x(\ln 3)^n$ ; 2.  $f'(\sin^2 x) \sin 2x dx$ ; 3.  $(2, 2e^{-2})$ ; 4. 2.

三、计算下列各题(每小题 4 分, 共 16 分)

$$1. \text{解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+\frac{1}{x})^x}{(1-\frac{1}{x})^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} (1-\frac{1}{x})^{-x \cdot (-1)}} \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$= \frac{e}{e^{-1}} = e^2 \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$2. \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)} = -\frac{1}{2} \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$3. \text{解: } y' = (e^{\arctan \sqrt{x}})' = \frac{e^{\arctan \sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)} \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$4. \text{解: } \int (x-1) \sin x dx = - \int (x-1) d \cos x \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= -[(x-1) \cos x - \int \cos x d(x-1)] = (1-x) \cos x + \sin x + C \dots\dots 4 \text{ 分}$$

四、计算下列各题(每小题 5 分, 共 20 分)

$$1. \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^t(1+t) dt}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^t(1+t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1+x)}{1} \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= 1 \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$2. \text{解: } \ln y = \cos x \ln x \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = -\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x} \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\Rightarrow y' = x^{\cos x} \left( -\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x} \right) \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$3. \text{解: } \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^e \frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}} \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= 2\sqrt{1+\ln x} \Big|_1^e \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= 2\sqrt{2} - 2 \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$4. \text{解: } \int x f'(x) dx = \int x df(x) = x f(x) - \int f(x) dx \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= x \left( \frac{\sin x}{x} \right)' - \frac{\sin x}{x} + C \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= \cos x - \frac{2 \sin x}{x} + C \dots\dots 5 \text{ 分}$$

五、计算下列各题(每小题 6 分, 共 18 分)

$$1. \text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{-2t}{1+t^2} = -2t \dots\dots 3 \text{ 分}; \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-2}{1+t^2} = -2(1+t^2) \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$2. \text{解: } x=0 \Rightarrow y=1 \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{方程两边对 } x \text{ 求导得: } e^{2x+y}(2+y') + \sin xy \cdot (y+xy') = 0 \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{将 } x=0, y=1 \text{ 代入上式求得 } y'(0) = -2 \dots\dots 6 \text{ 分}$$



3. 解: 令  $x-1=t$ , 则  $\int_0^2 f(x-1)dx = \int_{-1}^1 f(t)dt \dots\dots 2$  分

$$= \int_{-1}^0 e^{t+2} dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = e^{t+2} \Big|_{-1}^0 + \ln(1+t) \Big|_0^1 \dots\dots 5$$

$$= e^2 - e + \ln 2 \dots\dots 6$$

六、解答下列各题(每小题 5 分, 共 10 分)

1. 求函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  的单调区间与极值.

解:  $f(x)$  在其定义域  $(0, +\infty)$  内连续, 且  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$  令  $f'(x) = 0$ , 得驻点为  $x = e \dots\dots 2$  分

由表

$x$	$(0, e)$	$e$	$(e, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-

知  $(0, e]$  为增区间,  $[e, +\infty)$  为减区间, 极大值  $f(e) = \frac{1}{e} \dots\dots 5$  分

2. 解:  $\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x dx \dots\dots 2$  分

两端积分得  $\ln|y| = x^2 + c_1$  即  $y = ce^{x^2} \dots\dots 4$  分

由  $y(0) = 1$  得  $c = 1$ , 故所求解为:  $y = e^{x^2} \dots\dots 5$  分

七、解答下列各题(每小题 8 分, 共 16 分)

1. 解: (1)  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $y' = x$ ,  $y'(2) = 2$ ,  $x = 2$  时  $y = 2$ .

曲线在点  $x = 2$  处的法线方程为  $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 2)$ , 即  $y = -\frac{1}{2}x + 3 \dots\dots 2$  分

$$S_D = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx + \int_2^6 \left(-\frac{1}{2}x + 3\right) dx = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3} \dots\dots 5$$

$$(2) V = \pi \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 dx + \pi \int_2^6 \left(-\frac{x}{2} + 3\right)^2 dx = \frac{8}{5}\pi + \frac{16}{3}\pi = \frac{104}{15}\pi \dots\dots 8$$

2. 解: 对  $f'(x) = e^{-2x} + \int_0^x f(t) dt$  两边求导得:  $f''(x) = -2e^{-2x} + f(x)$ ,

设  $y = f(x)$ ,  $y'' - y = 0$  的特征根为  $r_1 = 1, r_2 = -1 \dots\dots 2$  分

齐次的通解为  $Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \dots\dots 4$  分

设特解:  $y^* = A e^{-2x} \Rightarrow A = \frac{-2}{3} \Rightarrow y^* = \frac{-2}{3} e^{-2x}$ ,

非齐次的通解为:  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{2}{3} e^{-2x} \dots\dots 6$  分

$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + \frac{4}{3} e^{-2x}$ , 将  $f(0) = 0, f'(0) = 1$  代入求得  $C_1 = \frac{1}{6}, C_2 = \frac{1}{2}$ ,

故  $f(x) = \frac{1}{6} e^x + \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{2}{3} e^{-2x} \dots\dots 8$  分

八、证明题(4 分)

设函数  $f(x)$  在区间  $[1, 3]$  上连续, 在区间  $(1, 3)$  内可导, 且  $f(1) = \int_2^3 x f(x) dx$ ,

证明: 至少存在一点  $\xi \in (1, 3)$ , 使得  $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ .

证明: 设  $F(x) = x f(x)$ , 因为函数  $f(x)$  在区间  $[1, 3]$  上连续, 在区间  $(1, 3)$  内可导, 所以函数  $F(x)$  在  $[1, 3]$  上连续, 在区间  $(1, 3)$  内可导.

由积分中值定理可知:  $\exists \eta \in [2, 3]$ , 使得  $\int_2^3 x f(x) dx = \eta f(\eta) = F(\eta) \dots\dots 2$  分

因有:  $F(1) = f(1) = \int_2^3 x f(x) dx = F(\eta)$ ,

由罗尔定理得至少存在一点  $\xi \in (1, \eta) \subseteq (1, 3)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ ,

即  $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0 \dots\dots 4$  分.

$$= \xi f(\xi) \cdot (3-2)$$

