装 订 线

西安邮电大学期末考试试题（A 卷）

（2018——2019 学年第一学期）

课程名称：高等数学 A1

考试专业、年级：通院、电院、自动化院、计算机院、物理、信管、金融、商务 18 级

考核方式：闭卷　　　　可使用计算器：否

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
评卷人										

得分：______ 一、选择题（每小题 2 分，共 8 分）：每小题只有一个正确选项，请将所选项前面的字母填在题中的括号内.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}=$ （　　）

(A) 1　　(B) 0　　(C) e　　(D) e^{-1}

2. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小中是 x^2 的高阶无穷小的是（　　）

(A) $e^{2x}-1$　　(B) $\ln(1-2x)$　　(C) $\arctan x^3$　　(D) $\cos x-1$

3. 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的（　　）间断点.

(A) 可去　　(B) 振荡　　(C) 跳跃　　(D) 无穷

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

(A) 间断　(B) 连续但不可导　(C) 可导且连续　(D) 不连续也不可导

得分：______ 二、填空题（每空 2 分，共 8 分）

1. 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\sin\Delta x}=1$，则 $f'(x_0)=$ ______.

2. 反常积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^k}dx$，当 k ______ 时收敛 .

3. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int e^x f(e^x)dx=$ ______ .

4. 微分方程 $y''=\sin 2x$ 的通解为 $y=$ ______ .

得分：______ 三、计算下列各题（每小题 4 分，共 16 分）：应写出演算步骤.

得分：______ 1. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^x-1)\tan x}$；

得分：______ 2. 设 $y=\ln\sqrt{x}$，求 y'；

得分：______ 3. 设 $y=2^{f(x)}$，$f(x)$ 为可导函数，求 dy；

得分：______ 4. 计算不定积分 $\int\dfrac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$.

得分：_____ 四、计算下列各题（每小题 5 分，共 20 分）：应写出演算步骤.

得分：_____ 1. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_1^{\cos x} e^t\,dt}{x^2}$ ；

得分：_____ 2. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t+t^3 \\ y=\sin t \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$；

得分：_____ 3. 计算 $\int x\ln x\,dx$；

得分：_____ 4. 求微分方程 $y'=e^{3x}\cos^2 y$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=0$ 的特解 .

得分：_____ 五、计算下列各题（每小题 6 分，共 24 分）：应写出演算步骤.

得分：_____ 1. 已知 $y=\left(x^2+1\right)^{\sin x}$，求 y' ；

得分：_____ 2. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xy+\ln y=1$ 所确定，求 y' 及 $y'\big|_{x=0}$ ；

得分：_____ 3. 计算 $\int_{1}^{1}\dfrac{x^2+\arctan x}{1+x^2}dx$；

得分：_____ 4. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x<0 \\ \dfrac{1}{1+x} & x\ge0 \end{cases}$， 计算 $\int_0^2 f(x-1)dx$.

得分：______ 六、计算下列各题（第一小题 7 分，第二小题 6 分，共 13 分）：应写出演算步骤.

得分：_____ 1. 设 $f(x)=x^3-3x$

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值；

(2) 求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间与拐点.

得分：_____ 2. 设 D 是由曲线 $y=x^2+1$ 与直线 $x=3$ 以及两个坐标轴所围成的平面图形.

(1) 求 D 的面积；

(2) 求由 D 绕 x 旋转而成的旋转体的体积.

得分：_____ 七、（本题 7 分）设函数 $f(x)$ 连续，且满足方程

$$f(x)=e^x-\int_0^x tf(t)dt+x\int_0^x f(t)dt\text{，求 } f(x).$$

得分：_____ 八、证明题（本题 4 分）：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且不变号，证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$ 成立.

西安邮电大学 2018——2019 学年第一学期期末试题（A）卷

标准答案

课程：高等数学 A1　类型：A 卷　专业、年级：通院、电院、自动化院、计算机院、物理、信管、金融、商务 18 级

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分	8	8	16	20	24	13	7	4		100

一、选择题：1.D；2.C；3.A；4.B.

二、填空题：1. $\frac{1}{2}$；2. $k>1$；3. $F(e^x)+C$；4. $y=-\frac{1}{4}\sin 2x+C_1x+C_2$.

三、计算下列各题：

1. 解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ ………… 4 分；

2. 解：$y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2x}$ ………… 4 分

3、解：$\because y'=2^{f(x)}\ln 2\cdot f'(x)$ ……. 3 分

$\therefore dy=2^{f(x)}\ln 2\cdot f'(x)dx$ ………… 4 分

4. 解：原式 $=\int\dfrac{1}{x^2+3x-10}d(x^2+3x-10)$ ………… 2 分

$=\ln|x^2+3x-10|+C$ ……………………… 4 分

四、计算下列各题：

1. 解：原式 $\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}$ ……. 3 分

$=-\dfrac{e}{2}$ …………… 5 分

2. 解：$dx/dt=1+3t^2$，$dy/dt=\cos t$ ……. 2 分

$\therefore\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{\cos t}{1+3t^2}$ ……………. 5 分

3. 解：$=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\int\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\int\dfrac{x}{2}dx$ …………… 3 分

$=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+C$ ………… 5 分

4. 解：分离变量：$\sec^2 y dy=e^{3x}dx$ …… 2 分

两边积分得：$\tan y=\dfrac{1}{3}e^{3x}+C$ ……… 4 分

代入初始条件得 $C=-\dfrac{1}{3}$，所求特解：$\tan y=\dfrac{1}{3}(e^{3x}-1)$ ………… 5 分

五、计算下列各题

1. 解：两边取对数：$\ln y=\sin x\ln(x^2+1)$ ………. 2 分

两边对 x 求导：$\dfrac{1}{y}y'=\cos x\ln(x^2+1)+\sin x\cdot\dfrac{2x}{x^2+1}$ …… 5 分

$\therefore y'=(x^2+1)^{\sin x}\left[\cos x\ln(x^2+1)+\dfrac{2x\sin x}{x^2+1}\right]$ ……. 6 分

2. 解：两边对 x 求导：$y+xy'+\dfrac{1}{y}y'=0$ ………… 3 分

$\therefore y'=-\dfrac{y^2}{1+xy}$ ………… 5 分

又 $y|_{x=0}=e$　$\therefore y'|_{x=0}=-e^2$ ……… 6 分

3. 解：原式 $=\int_{-1}^{1}\dfrac{x^2}{1+x^2}dx+\int_{-1}^{1}\dfrac{\arctan x}{1+x^2}dx$ ……. 1 分

$\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$ 是奇函数，$\therefore\int_{-1}^{1}\dfrac{\arctan x}{1+x^2}dx=0$ ………………. 3 分

$\therefore$ 原式 $=\int_{-1}^{1}\dfrac{x^2}{1+x^2}dx=2(x-\arctan x)\big|_0^1=2-\dfrac{\pi}{2}$ ………… 6 分

4. 解：令 $x-1=t$，则 $\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^{1}f(t)dt=\int_{-1}^{0}e^{-t}dt+\int_0^1\dfrac{1}{1+x}$ ………… 3 分

$=-e^{-t}\big|_{-1}^{0}+\ln(1+x)\big|_0^1$ …………………. 5 分

$=e-1+\ln 2$ ………… 6 分

说明：1. 标准答案务必正确无误。　2. 将每道大题得分和总分填入得分栏中。

六、计算下列各题

1. 设 $f(x)=x^3-3x$ (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值；(2) 求曲线 $f(x)$ 的凹凸区间与拐点.

解：$f(x)$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f'(x)=3(x-1)(x+1)$ ，$f''(x)=6x$

令 $f'(x)=0$，得驻点为 $x_1=-1$，$x_2=1$；令 $f''(x)=0$，解得 $x=0$ ………… 2 分

(1) 由表

x	$(-\infty,-1)$	(-1.1)	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	−	+

知，$(-\infty,-1]$ 和 $[1,+\infty)$ 为增区间，$[-1,1]$ 为减区间；

在 $x_1=-1$ 处取得极大值 $f(-1)=2$，在 $x_2=1$ 处取得极小值 $f(1)=-2$ …………… 5 分

(2) 由表

x	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	−	+

知，区间 $(-\infty,0]$ 为凸区间，$[0,+\infty)$ 为凹区间；$(0,0)$ 为拐点 ………… 7 分

2. 设 D 是由曲线 $y=x^2+1$ 与直线 $x=3$ 以及两个坐标轴所围成的平面图形.

(1) 求 D 的面积；

(2) 求由 D 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

解: (1) D 的面积为

$$A=\int_0^3(x^2+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^3=12 \quad \text{………………} \quad 3\text{ 分}$$

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^3(x^2+1)^2dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right]_0^3=\frac{348}{5}\pi. \quad \text{………………………} \quad 6\text{ 分}$$

七、设函数 $f(x)$ 连续且满足方程 $f(x)=e^x-\int_0^x tf(t)dt+x\int_0^x f(t)dt$，

求 $f(x)$.

解：$f'(x)=e^x-xf(x)+xf(x)+\int_0^x f(t)dt=e^x+\int_0^x f(t)dt$ ……………… 2 分

$f''(x)=e^x+f(x)$ ……… 3 分，特征方程：$r^2-1=0$,特征根为：$r=\pm1$，

所以 对应齐次方程的通解为: $f(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x$ …………… 5 分

设特解 $y^*=kxe^x$,代入原方程得 $k=\frac{1}{2}$，所以所求通解为：$f(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x+\frac{x}{2}e^x$ …… 6 分

又 $y|_{x=0}=y'|_{x=0}=1$，代入得 $C_1=\frac{1}{4}$，$C_2=\frac{3}{4}$，

因此 $f(x)=\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{3}{4}e^x+\frac{x}{2}e^x$ …………………… 7 分

八、证明题：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且不变号，

证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$ 成立.

证明：不妨设 $g(x)\ge0$，则 $\int_a^b g(x)dx\ge0$. 记 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M、

最小值为 m，则有 $mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$ …………… 2 分

故有 $m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx$

所以 当 $\int_a^b g(x)=0$ 时，$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$，故结论成立.

当 $\int_a^b g(x)>0$ 时，有 $m\le\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M$，由介值定理：至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，

使 $f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$，从而结论成立…………… 4 分