Санкт-Петербургский государственный политехнический
университет Петра Великого
Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчет по Лабораторной работе 2

Дисциплина: Телекоммуникационные технологии

Тема: Ряд Фурье. Преобразование Фурье. Корреляция сигналов

Выполнил студент гр. 33501/1 ________________ Поляков К.О.
(подпись)

Преподаватель ________________ Богач Н.В.
(подпись)

"____"________________ 2017 г.

Санкт-Петербург
2017 г.

Оглавление

Лабораторная работа №2
Ряд Фурье. Преобразование Фурье. Корреляция сигналов

1 Цель работы

Получить представление о спектрах телекоммуникационных сигналов.

2 Постановка задачи

- Для сигналов, построенных в лабораторной работе №1, выполните расчет преобразования Фурье, получите спектры.
- С помощью функции корреляции найдите позицию синхропосылки [101] в сигнале [0001010111000010]. Получите пакет данных, если известно, что его длина составляет 8 бит без учета синхропосылки. Вычислите корреляцию прямым методом, воспользуйтесь алгоритмом быстрой корреляции, сравните время работы обоих алгоритмов.

3 Теоретические положения

Спектр – в радиотехнике это результат разложения сигнала на более простые в базисе ортогональных функций. В качестве разложения обычно используются преобразование Фурье.
В радиотехнике в качестве базисных функций используют синусоидальные функции. Базисные функции – набор волн синуса и косинуса с амплитудой равной единице. Это ортогональная система, из которой можно составить линейную комбинацию любого другого сигнала. На выходе ДПФ мы получаем набор амплитуд, которые мы должны приложить к определенной базисной функции - волне косинуса или синуса, - и получить в результате масштабируемые волны косинуса и синуса, которые при сложении дают сигнал времени.

Известно, что любой сложный периодический сигнал может быть представлен в виде суммы элементарных гармонических сигналов с помощью рядов Фурье. Это возможно, если функция, описывающая сигнал, отвечает условиям Дирихле:

1. Функция непрерывна на отрезке разложения;
2. В пределах периода T функция имеет конечное число максимумов и минимумов.

Спектр периодического сигнала является дискретной функцией, т.к. он определен только для целых значений n с шагом по частоте, обратным периоду: $\delta\omega = 2\pi/T$ (или $\delta f = 1/T$). Первую частотную составляющую спектра при $n = 1$, равную $\omega_1 = 1 * \delta\omega = 2\pi T$ (или $f_1 = 1/T$), называют основной частотой сигнала (первой гармоникой), остальные частоты дискретного спектра $n\omega_1$ при $n>1$ называют гармониками сигнала. Значения S($n*\delta\omega_1$) по положительным и отрицательным значениям n являются комплексно сопряженными. Шаг по частоте $\delta\omega$ между двумя соседними синусоидами из разложения Фурье называется частотным разрешением спектра.

Для спектрального представления непериодических (импульсных) сигналов, заданных на конечном интервале, непосредственно воспользоваться рядом Фурье нельзя. Для гармонического разложения сигнала мысленно дополняют его такими же импульсными сигналами до периодического с некоторым интервалом. Для вычисления спектра удобна симметричная комплексная форма ряда Фурье, но в нем вместо суммы будет интеграл с бесконечными пределами.

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) exp(-jk\omega) dt \tag{1}$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) exp(j\omega t) d\omega \tag{2}$$

При таком предельном переходе основная частота сигнала $\Omega_1 = 2\pi/T$ стремится к нулю, бесконечно увеличивается число спектральных составляющих, частоты соседних гармоник $k\Omega_1$ и $(k+1)\Omega_1$ становятся неразличимыми, а спектр будет сплошным.

Формулы (1) и (2) называются соответственно прямым и обратным преобразованиями Фурье. Они дают взаимосвязь между сигналом и его комплексной спектральной плотностью. Модуль и аргумент спектральной функции образуют амплитудный и фазовый спектры сигнала.

Свойства преобразований Фурье (ПФ) - свёртка и произведение. Свертка может быть использована для математического описания множества явлений в окружающем нас мире. В первую очередь это относится к процессам какой-либо деградации или потери информации, т.е. нарастания энтропии в соответствии со вторым началом термодинамики. Свёрткой двух функций f(x) и g(x) является третья функция h(x) , определяемая выражением:

$$h(x) = f \otimes g = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(x-y)dy \tag{3}$$

Физический смысл этой операции наиболее нагляден в случаях, когда мы имеем дело с распределением той или иной величины во времени или пространстве (впрочем, при оптико-физических исследованиях нас только такие случаи и интересуют). Так, если представить функцию f(x) в виде примыкающих друг к другу столбцов, то каждый столбец в ходе этой операции "разваливается"в равную по площади фигуру, форма которой задается функцией g(x). Затем все абсциссы этих фигур (сдвинутых друг относительно друга на ширину столбца) складываются, образуя общее "размытое"распределение, форма которого уже определяется h(x):

Спектр произведения сигналов представляет собой циклическую свертку спектров этих сигналов (a_1 и a_2 - сигналы, b_1 и b_2 - дискретная круговая свёртка их ДПФ):

$$a_1(n)a_2(n) \rightleftarrows b_1(k) \circledast b_2(k) = \sum_{l=0}^{N-1} b_1(l)b_2(k-l) = \sum_{l=0}^{N-1} b_1(k-l)b_2(l) \tag{4}$$

Корреляция показывает схожесть сигналов при сдвигах на разную величину. Общий вид функции взаимной корреляции:

$$B(\tau) = \int_{\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t-\tau)dt \tag{5}$$

Корреляционный анализ дает возможность установить в сигналах наличие определенной связи изменения значений сигналов по независимой переменной. Расчет корреляции можно ускорить, используя теорему о корреляции, которая обычно формулируется следующим образом:

$$B(j) = F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)] \tag{6}$$

где F_D^{-1} обозначает обратное дискретное преобразование Фурье. Данный подход требует выполнения двух дискретных преобразований Фурье (ДПФ) и одного обратного ДПФ, что легче всего сделать, используя алгоритм БПФ. Этот метод вычисления взаимной корреляции с помощью теоремы о корреляции и БПФ называется быстрой корреляцией.

4 Ход работы

4.1 Расчёт и построение спектров

Напишем программу, для расчёта преобразований Фурье средствами Matlab.

Листинг 1: Программа расчёта рядов Фурье

```
for i=1:length(functions)
    func=functions{i};
    func2str(func)
    [t, sig]=func();
    figure;
    plot(t, sig);
    print('-djpeg', strcat(picspath, func2str(func)));

    Fs=8e3;
    FN=2^nextpow2(length(t));
    freqs=(0:FN-1)/FN*Fs;
    spc=fft(sig, FN);
    amp_spc=abs(spc);
    r=real(spc);
    im=imag(spc);
    phs_spc=atan(im./r);
    figure;
    subplot(2,1,1);
    plot(freqs, amp_spc);
    subplot(2,1,2);
    plot(freqs, phs_spc);
    print('-djpeg', strcat(picspath, func2str(func), '_spectr'));
end
```

Вычислим и построим спектры сигналов, исследуемых в Лабораторной работе №1:

1. Прямоугольный импульс

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| <= \tau_1, \\ 0, & |t| > \tau_1. \end{cases}$$

$$S(\omega) = \int_0^{\tau} Aexp(-j\omega t)dt = \frac{A}{j\omega}(1 - exp(-j\omega t)) = A\tau \frac{sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} exp(-j\frac{\omega\tau}{2})$$

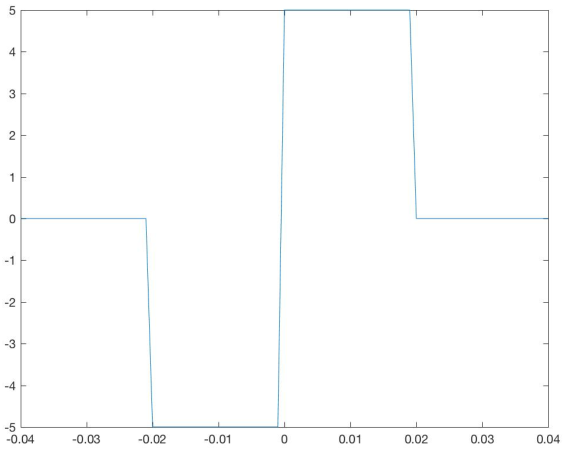

Рис. 1: Прямоугольный импульс

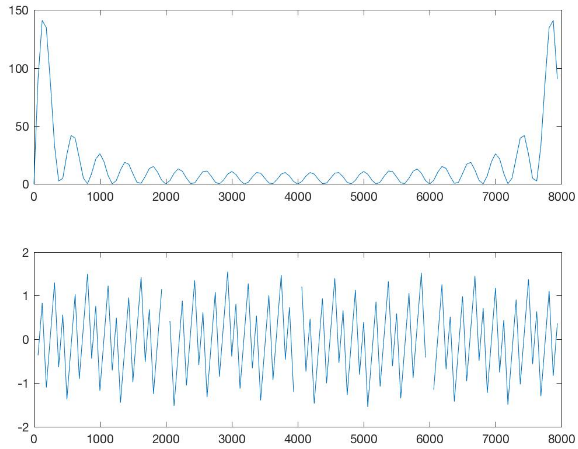

Рис. 2: Амплитудный и фазовые спектры импульса

Наблюдаем два пика. Это объясняется тем, что исследуемый сигнал является выборкой из аналогового сигнала, совершённой с частотой дискретизации 8 КГц. Дискретизацию можно описать как произведение исходного сигнала и бесконечной последовательности дельта-импульсов с частотой следования, равной частоте дискретизации.

$$C_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) exp(-j\omega_m t)dt = \frac{1}{T}$$

В ряде получим умножение на сумму комплексных экспонент с показателями, кратными $-j\omega_m t$, то есть произойдёт копирование спектра и сдвиг каждой копии на соответствующую частоту. На полученном графике мы видим первую копию на частоте дискретизации. Аналогично, все последующие графики будут иметь копию спектра исходного сигнала на частоте дискретизации.

2. Треугольный импульс
   Разложение в ряд Фурье:

$$S(j\omega) = \frac{\tau}{2}(\sin c(\frac{\omega\tau}{4}))^2$$

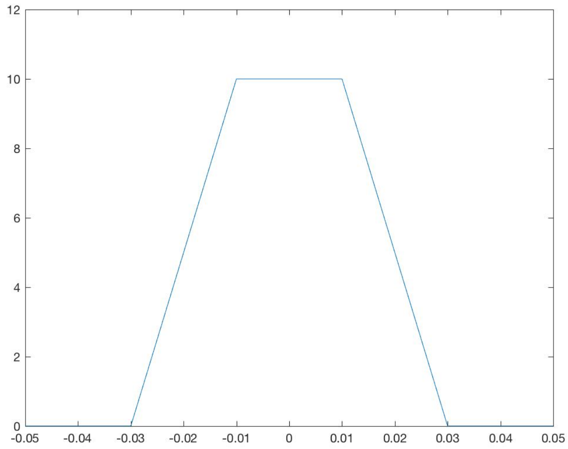

Рис. 3: Треугольный импульс

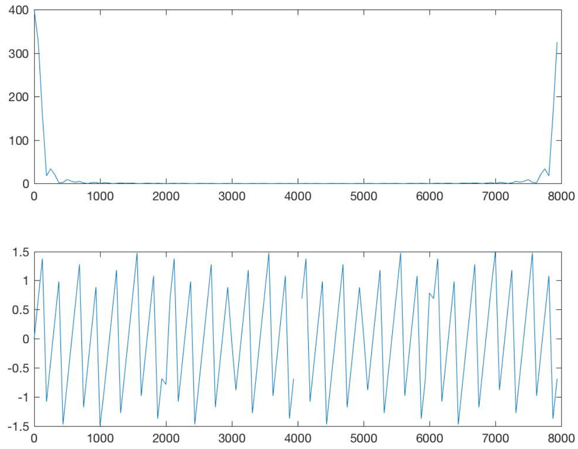

Рис. 4: Спектр треугольного импульса

3. Импульс функции sinc

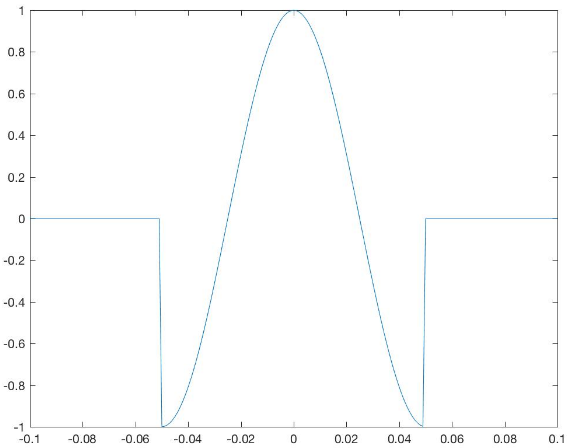

Рис. 5: Импульс функции sinc

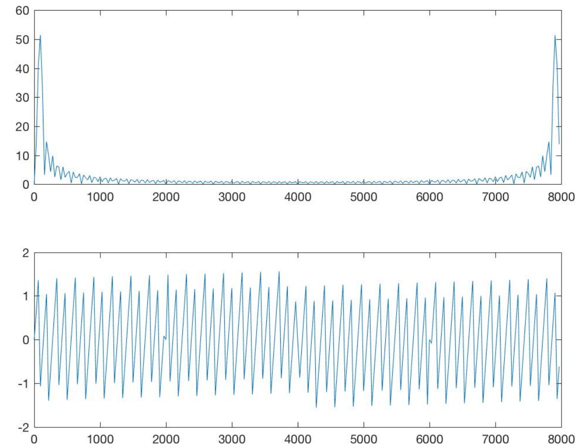

Рис. 6: Спектр импульса функции sinc

4. Радиоимпульс с гауссовой огибающей.
   Гауссова функция имеет гауссов спектр: $A\sqrt(\pi)/aexp(-\frac{\omega^2}{4a^2})$

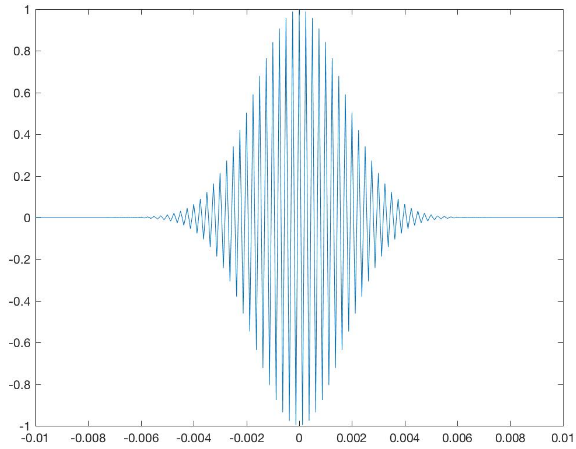

Рис. 7: Гауссов импульс

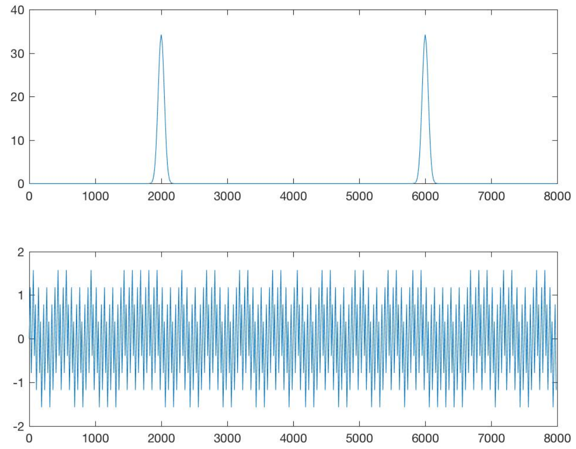

Рис. 8: Спектр гауссового импульса

5. Конечная последовательность импульсов Разложение в ряд Фурье:

$$S(t) = \frac{U}{q^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2qU}{k^2\pi^2}(1 - \cos(\frac{k\pi}{q}))\cos(k\omega t)$$

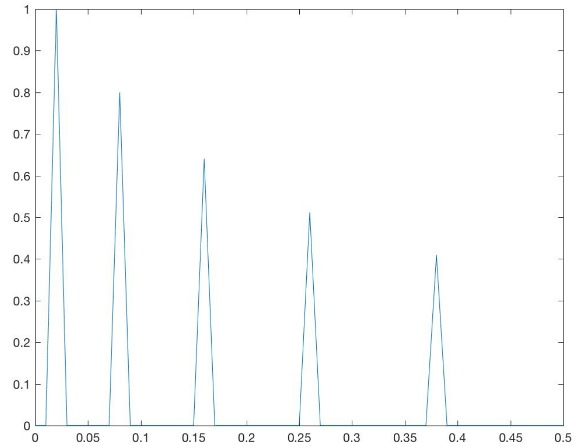

Рис. 9: Последовательность треугольных импульсов

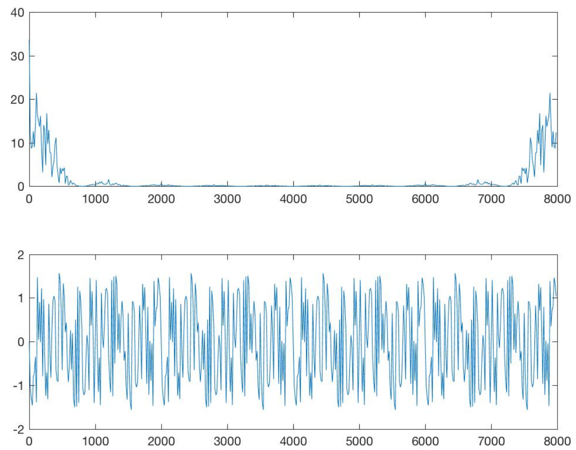

Рис. 10: Спектр последовательности

6. Последовательность прямоугольных испульсов

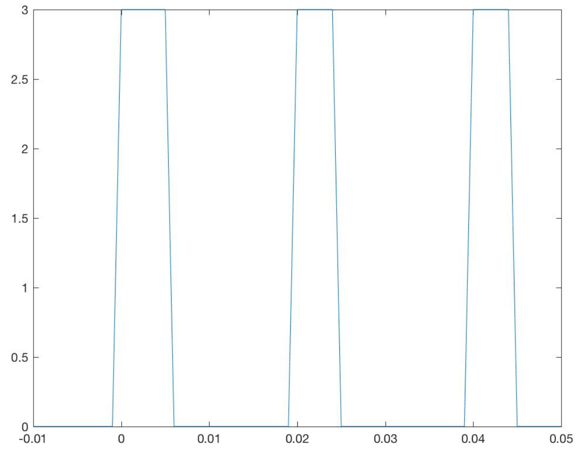

Рис. 11: Последовательность прямоуголь-
ных импульсов

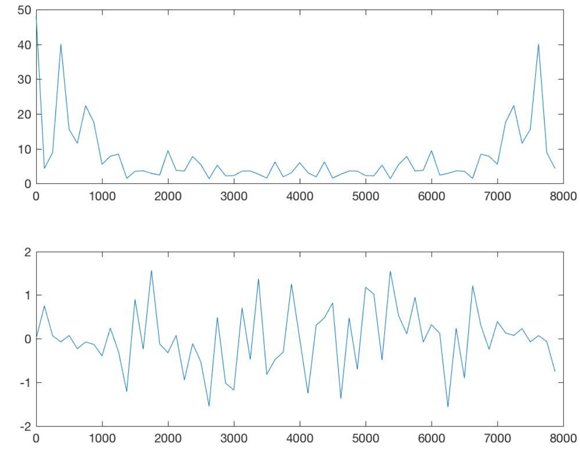

Рис. 12: Спектр последовательности

7. Гармонические колебания Так как ряд Фурье состоит из гармоник, логично ожидать, что спектром синуса будет дельта-функция частоты данного колебания. Кроме того, в спектре будет дельта-функция на противоположной частоте, так как синус представляется через сумму комплексных экспонент с противоположными показателями.

   Синусоидальный сигнал

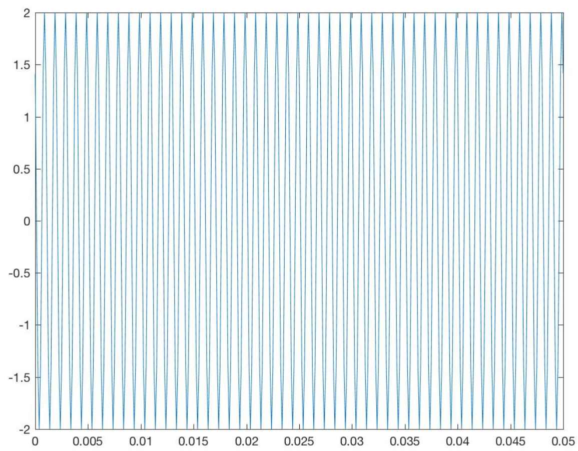

Рис. 13: Синусоидальный сигнал

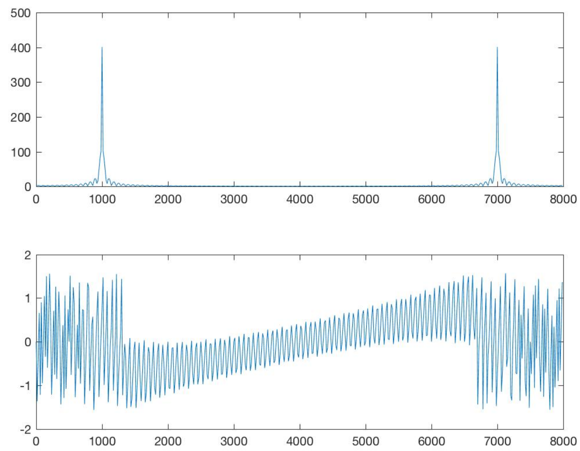

Рис. 14: Спектр синусоидального сигнала

Затухающая синусоида

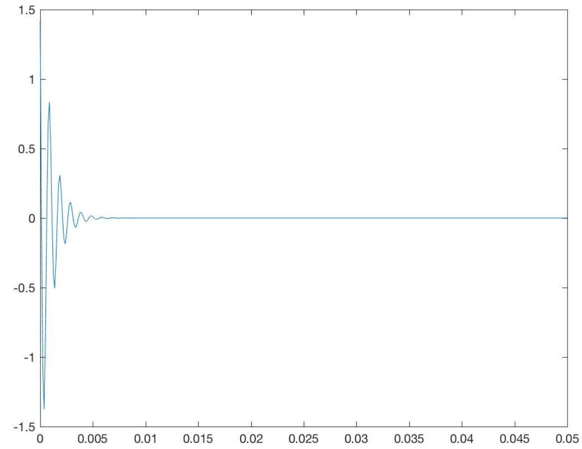

Рис. 15: Синусоидальный сигнал

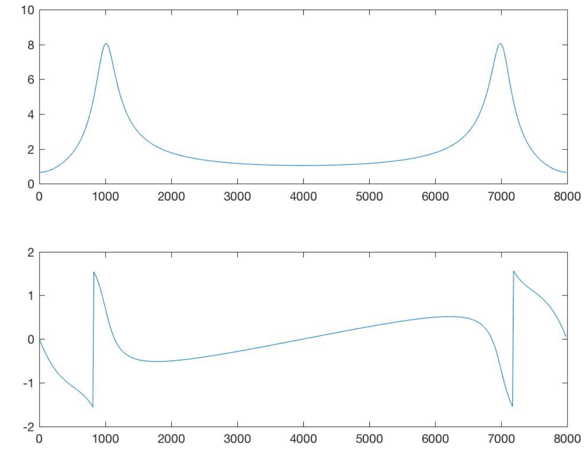

Рис. 16: Спектр синусоидального сигнала

8. Пилообразный сигнал Разложение в ряд Фурье:

$$S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{T}{k\pi} \sin(2k\pi/T)$$

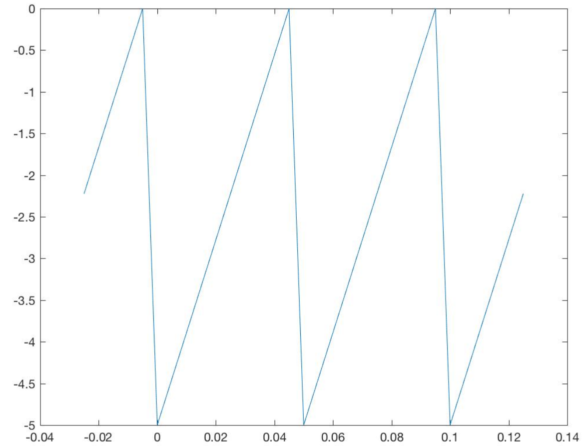

Рис. 17: Пилообразный сигнал

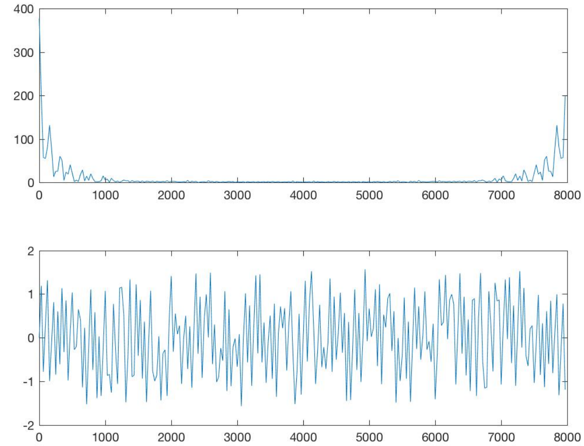

Рис. 18: Спектр пилообразного сигнала

Идеального пилообразного сигнала не получается. Это происходит из-за того, что сигнал умножается на прямоугольное окно. Это делается, т.к. на практике невозможно произвести расчет спектра путем численного интегрирования по всей оси времени. Поэтому фиксируют интервал временииi рассчитывают спектр на нём. Дельта-импульс превращается в функцию типа $sin(x)/x$.

9. Функция Дирихле

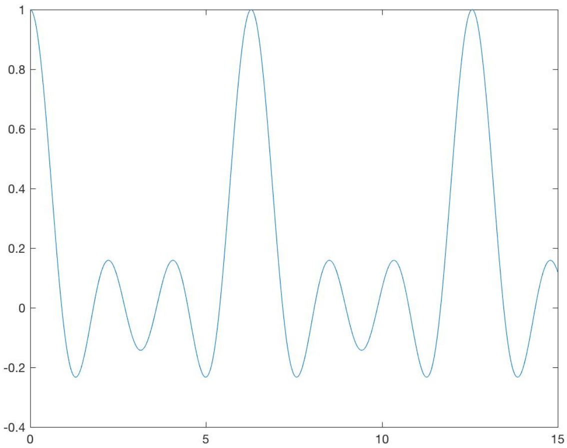

Рис. 19: Сигнал функции Дирихле

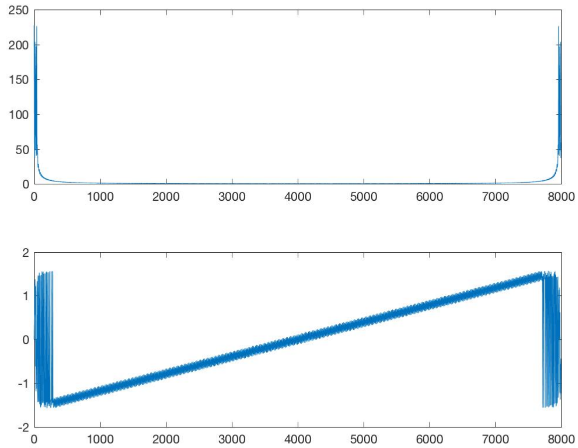

Рис. 20: Спектр сигнала

5 Корреляция сигналов

Для последовательности бит и синхропосылки найти положение пакета [101] в последовательности [0001010111000010], рассчитав корреляцию. Сравнить обычный метод и быстрый.
Для расчёта коэффициента корреляции воспользуемся функцией Matlab - **xcorr**:

Листинг 2: Вычисление обычной корреляции

```
function [ cor, m ] = correl( seq, pack )
    lngseq = length(seq);
    lngpack = length(pack);
    assert(lngseq ≥ lngpack);
    lags = 1:(lngseq-lngpack);
    tic();
    for i = lags
    c(i+1) = xcorr(seq(i+1:i+lngpack) - mean(seq(i+1:i+lngpack)), pack - ...
        mean(pack),0,'coeff');
    end
    toc();
    [m, i]=max(c);
    cor=c;
   m = lags(i);
end
```

Листинг 3: Вычисление быстрой корреляции

```
function [ cor ] = fast_cor( seq, pack )
    tic();
    F_seq = fft(seq, length(seq));
    F_pack = fft(pack, length(seq));
    comp_conj = conj(F_pack);
    cor = ifft(comp_conj.*F_seq);
    toc();
end
```

Проверим для синхропосылки и сигнала из задания.

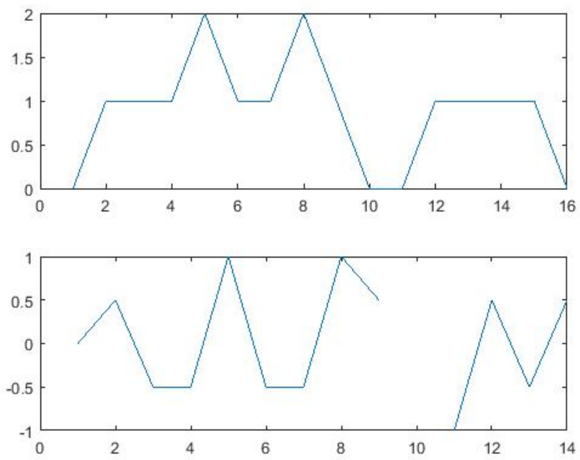

Рис. 21: Результат расчёта корреляции обычным и быстрым методами

- Fast: Elapsed time is 0.000039 seconds. Position = 5.
- Usua:l Elapsed time is 0.050465 seconds. Position = 5.

Полученный пакет данных - [01110000].

6 Выводы

В ходе лабораторной работы были изучены основы спектрального анализа и построения спектров различных сигналов и их последовательностей. Были рассчитаны ряды и преобразования Фурье, а также построены амплитудные и фазовые спектры некоторых сигналов. Спектры различают:

- У непрерывных сигналов

    Периодический - дискретный спектр(полосы), т.к. рассчитывается **Ряд Фурье**

    Непериодический - сплошной спектр, т.к. рассчитывается **Интеграл Фурье**

- У дискретных сигналов

    Периодический - спектр периодический

    Непериодический - спектр дискретный и периодический

Построенные спектры отличаются от теоретических. Это происходит из-за нескольких факторов:

- Невозможность произвести расчет спектра путем численного интегрирования по всей оси времени. Для исправления применяют умножение на прямоугольное окно.
- Для непериодических синалов необходимо использовать преобразование Фурье, вместо расчёта обычного ряда.
- При расчёте рядов и преобразований Фурье присутствуют погрешности.

Также была изучена **корреляция** и **свёртка**. Процесс корреляции занимает значительное место в обработке сигналов. Он используется в детектировании и идентификации сигналов в шуме, в идентификации двоичных кодовых слов в системе с импульсно-кодовой модуляцией и других областях. Идентификации было выявлено, что быстрая корреляция не всегда может быть точна. Если синхропосылка достаточно мала, чтобы результат ей умножения на пакет был схож с умножением на похожую синхропосылку, то могут возникнуть неточности: $110 * 111 = 110 * 110 = 110$
С помощью быстрого преобразования Фурье можно значительно ускорить алгоритм корреляции.

Корреляция также является неотъемлемой частью процесса свертки, который, по сути, — таже корреляция двух последовательностей данных, при вычислении которой одна из последовательностей обращена во времени. Стоит отметить, что спектр записанного сигнала состоит из свертки спектра сигнала со спектром вырезающей функции.