Materiais Elétricos e Magnéticos para Engenharia

Professor: Marcus V. Batistuta

Aula-6

Equações de Transporte de Cargas

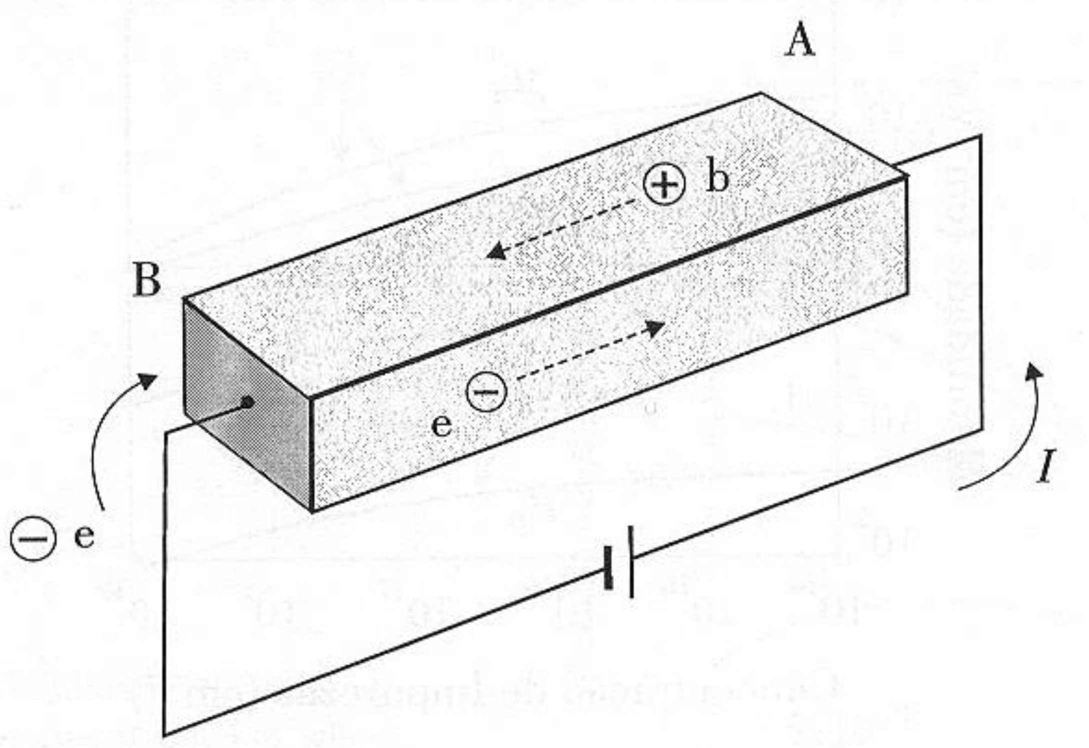
1º Semestre de 2018

FGA - Universidade de Brasília

Densidade Total de Corrente de Deriva:

$$J = (\sigma_n + \sigma_p)\mathcal{E} = \sigma\mathcal{E}$$

$$\sigma = e(n_0\,\mu_n + p_0\,\mu_p)$$



Efeito Hall

Lorentz: $\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$

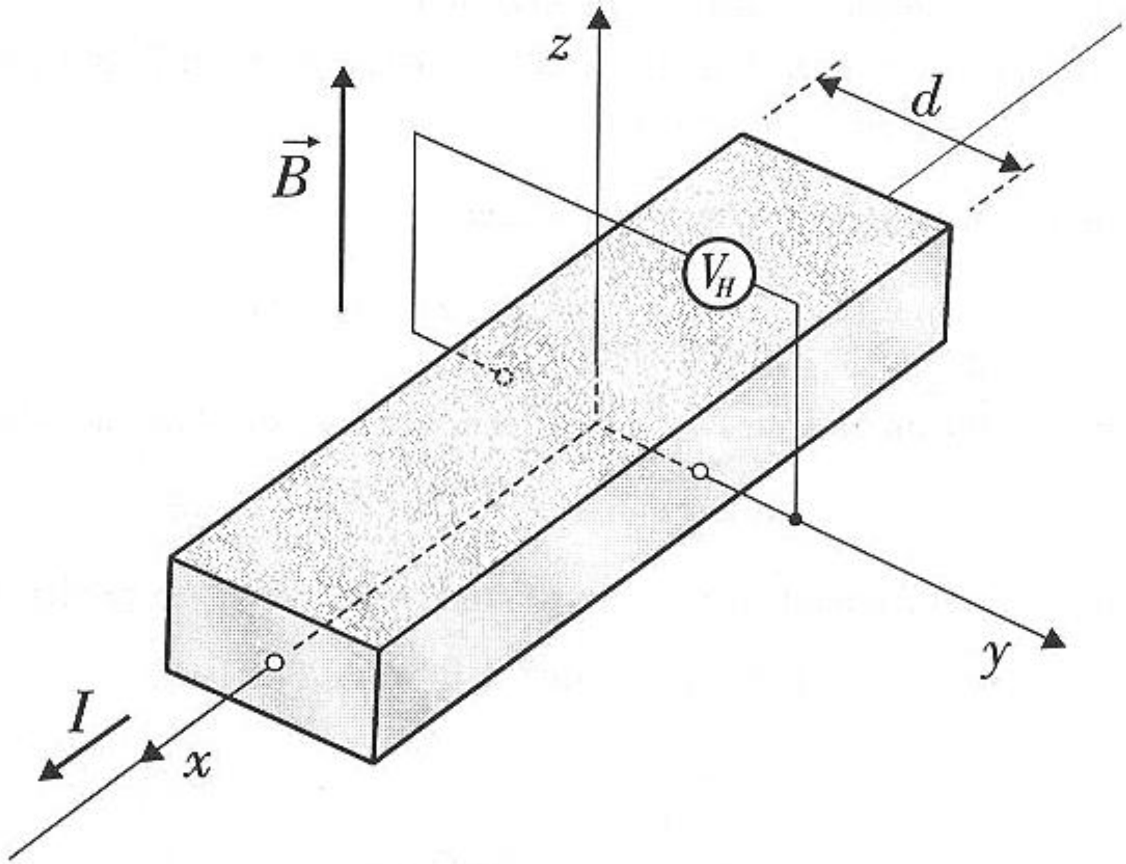


Figura 5.19: Efeito Hall num semicondutor. A aplicação de um campo magnético numa barra com corrente resulta numa diferença de potencial transversal V_H que permite medir a concentração de portadores.

$$\vec{F} = q\left(\vec{\mathcal{E}} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

$$\mathcal{E}_y = -(\vec{v} \times \vec{B})_y = v_x B_z$$

Tensão Hall: $V_H = \mathcal{E}_y d$

$$J_p = e\, p_0\, v_x$$

$$\mathcal{E}_y = \frac{J_p}{e p_0} B_z \equiv R_H\, J_p\, B_z$$

$R_H = (e p_0)^{-1}$ é o **coeficiente Hall**

A tensão Hall permite determinar: $p_0 - n_0$

Exemplo 5.7: Uma barra de silício tipo p, com concentração de impurezas $N_a = 10^{14}$ cm^{-3}, com espessura $d = 0,5$ mm, é usada como sensor Hall. Calcule a tensão Hall para uma corrente de prova de 100 mA quando o campo magnético é perpendicular ao plano da dimensão maior e tem intensidade $B = 10^{-1}$ T.

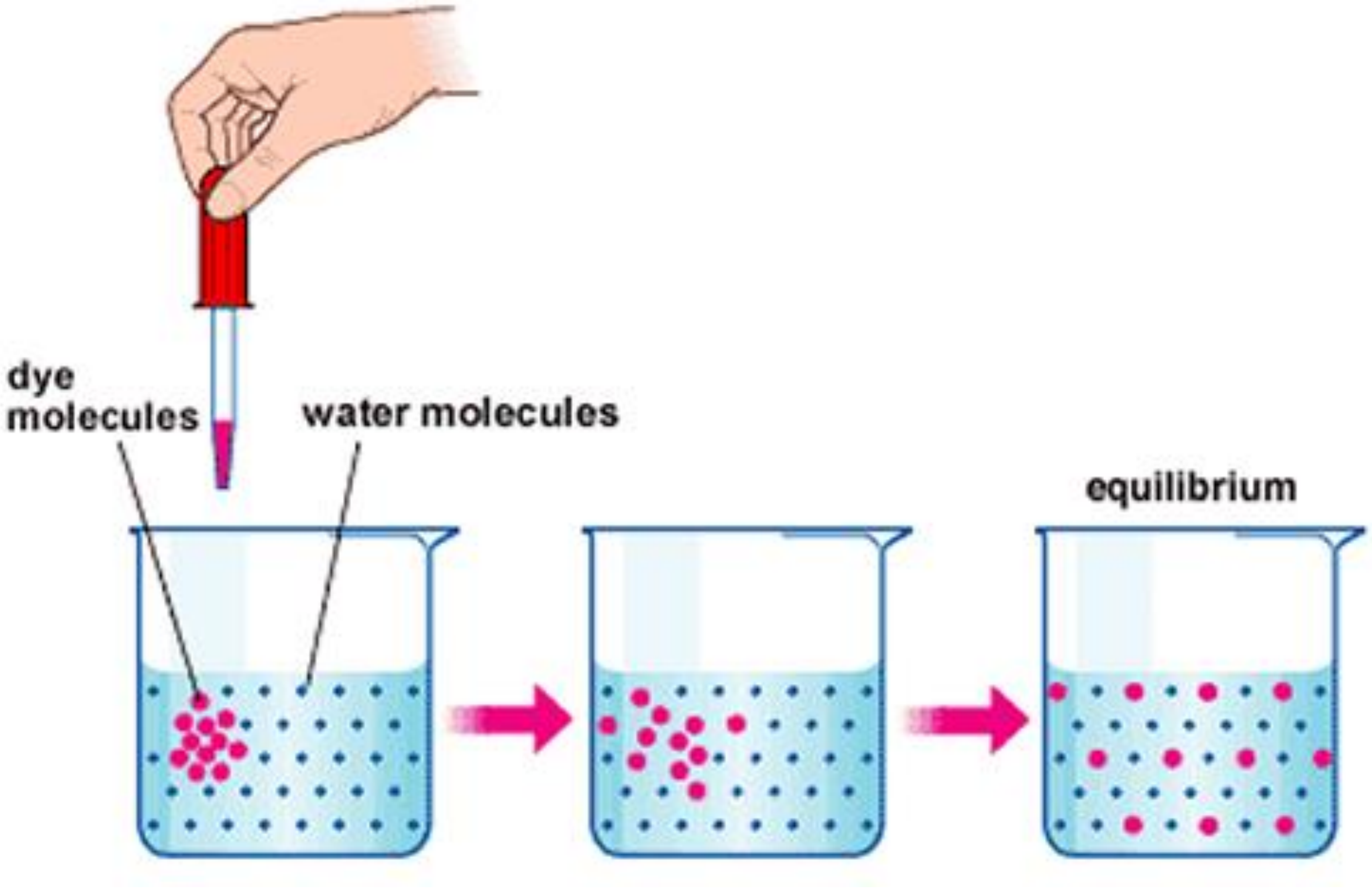
A tensão Hall é dada por $V_H = \mathcal{E}_y \, \ell$ e a densidade de corrente é $J = I/(\ell d)$, onde ℓ e d são largura e a espessura da barra. Sendo $N_a \gg n_i$, $p_0 \simeq N_a \gg n_0$, a corrente é dominada pelos buracos. Então, usando (5.56) e convertendo todas as unidades para o sistema internacional temos,

$$V_H = \frac{I/(\ell d)}{e\, p_0} B_z \ell = \frac{I\, B_z}{e\, p_0\, d} =$$

$$= \frac{10^{-1} \times 10^{-1}}{1,6 \times 10^{-19} \times 10^{14} \times 10^{6} \times 0,5 \times 10^{-3}} = 1,25 \text{ V} .$$

Este exemplo mostra que a tensão Hall tem um valor relativamente alto, para circuitos eletrônicos, para um valor de campo típico de laboratórios. Isto não ocorre em metais, porque a concentração de elétrons livres ($\sim 10^{22}$ cm^{-3}) é muito maior do que em semicondutores.

Difusão



Transporte de Portadores em Semicondutores Extrínsecos

Corrente de Difusão

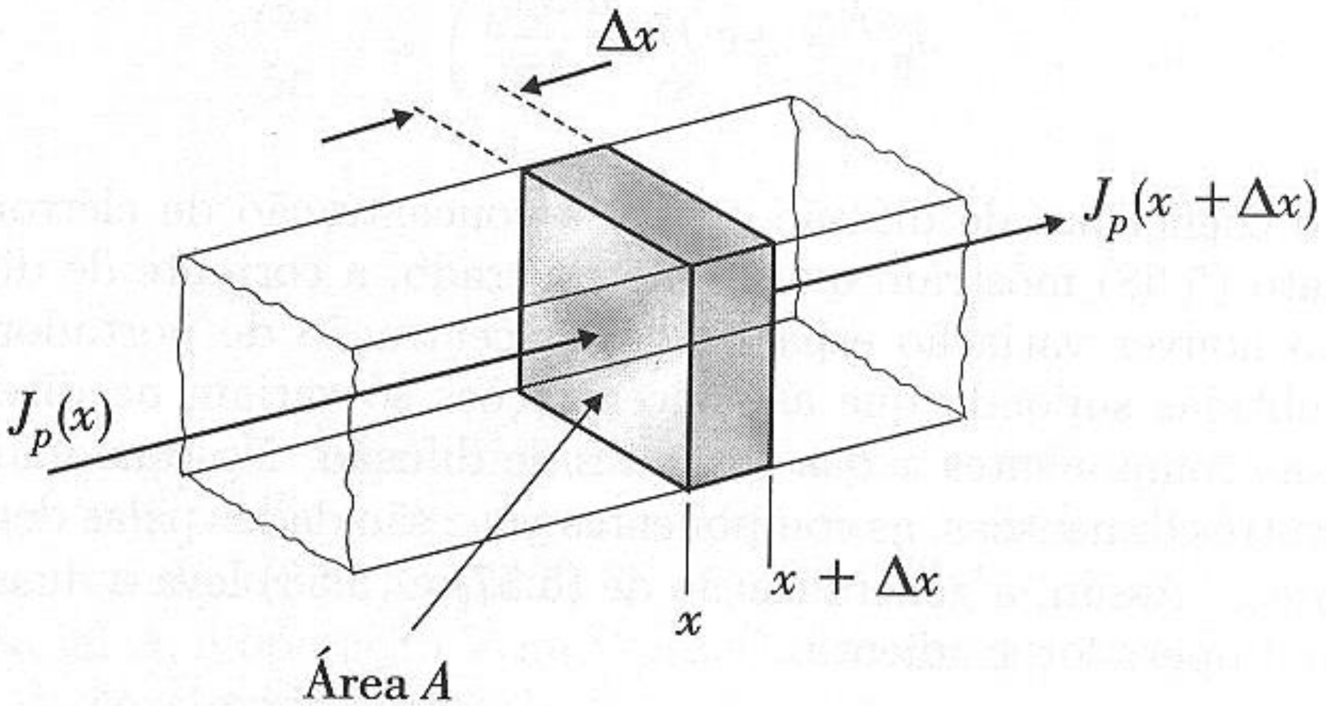


Figura 5.20: Ilustração das correntes entrando e saindo de uma região com volume $A\Delta x$ de carga.

$$J_p^{dif} = -e\ D_p\ \frac{dp(x)}{dx}$$

$$J_n^{dif} = +e\ D_n\ \frac{dn(x)}{dx}$$

$$\vec{J}_p^{dif} = -e\ D_p\ \nabla p$$

$$\vec{J}_n^{dif} = +e\ D_n\ \nabla n$$

Equação de Continuidade: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial J(x)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}\right) \qquad \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\rho = e\,(p - n)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = e\,\frac{\partial n}{\partial t}$$

$$\vec{J}_n^{dif} = +e\,D_n\,\nabla n$$

$$(\nabla .)$$

Equação de Difusão: $$D_n\,\nabla^2 n - \frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

Difusão e Deriva
$$\begin{cases} \vec{J}_n = e\,\mu_n\,n\,\vec{\mathcal{E}} + e\,D_n\,\nabla n \\ \vec{J}_p = e\,\mu_p\,p\,\vec{\mathcal{E}} - e\,D_p\,\nabla p \end{cases}$$

Corrente Total: $$\vec{J} = \vec{J}_n + \vec{J}_p$$

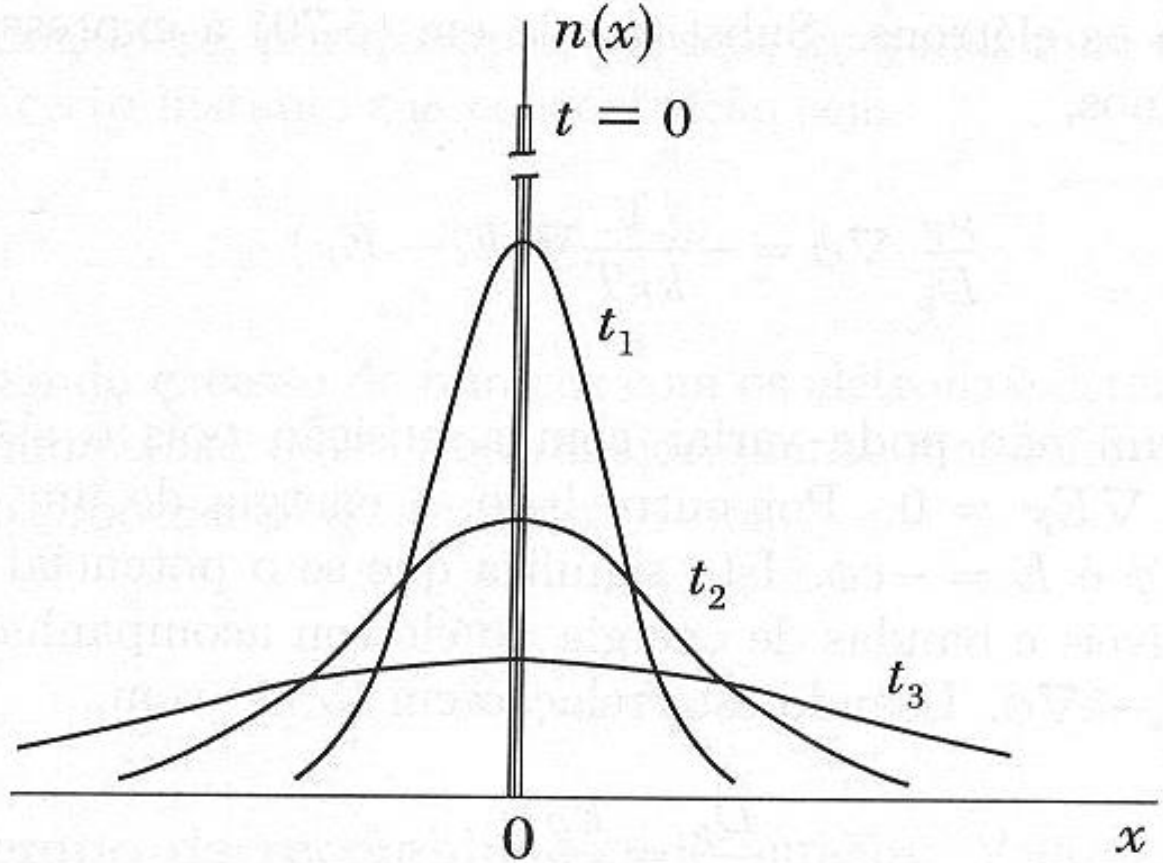


Figura 5.21: Ilustração da difusão de elétrons criados por um pulso em $x = 0$ no instante $t = 0$.

Exemplo de EDP: Modelo de Difusão (Segunda Lei de Fick)

Equação de Difusão Escalar (1D + Tempo): $$\frac{du}{dt} = D\frac{d^2u}{dx^2}$$

Forma Geral da Solução:

$$\frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow D\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \Rightarrow u(x) = ax + b$$

Em regime

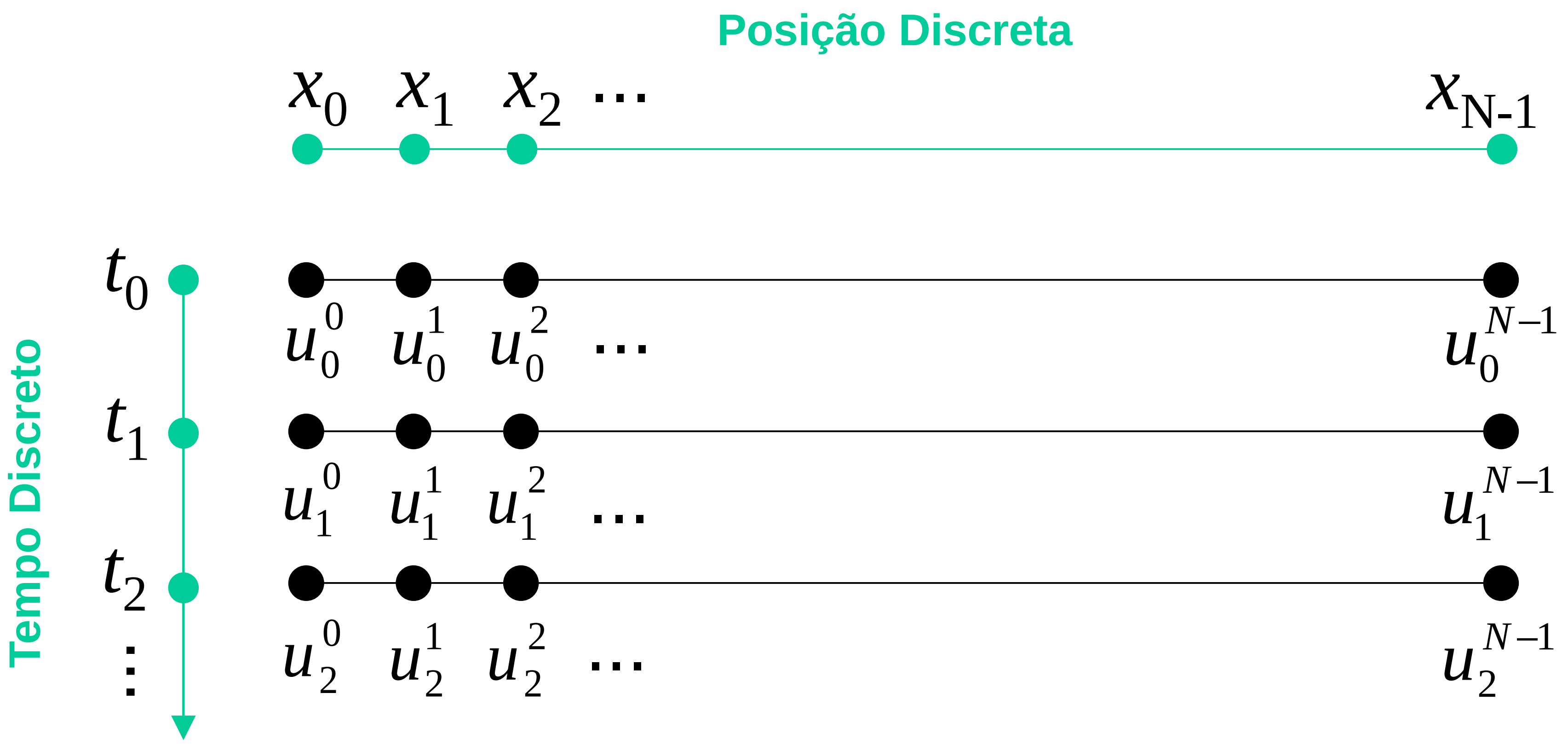
$t \to \infty$

Equação Vetorial (3D + Tempo): $$\frac{d\vec{u}}{dt} = D\nabla^2\vec{u}$$

Equações Diferença – Difusão (1D)

$$i = 0,1,2,\ldots, N-1 \qquad x_i = i.\Delta x$$

$$k = 0,1,2,\ldots, \infty \qquad t_k = k.\Delta t$$



Difusão (1D)

Forward Time Central Space (FTCS)

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_k^{i+1} - 2u_k^i + u_k^{i-1}}{\Delta x^2}} \qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{k+1}^i - u_k^i}{\Delta t}}$$

$$\frac{du}{dt} = D\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$\frac{u_{k+1}^i - u_k^i}{\Delta t} = D\frac{u_k^{i+1} - 2u_k^i + u_k^{i-1}}{\Delta x^2}$$

$$\boxed{u_{k+1}^i = u_k^i + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_k^{i+1} - 2u_k^i + u_k^{i-1}\right)} \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,N \\ k = 0,1,2,\ldots,\infty \end{array} \right.$$

$$\boxed{u_{k+1}^i = u_k^i + K_D\left(u_k^{i+1} - 2u_k^i + u_k^{i-1}\right)} \qquad K_D = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{2}$$

Estabilidade

Forma Matricial das Equações Diferença

Equação de Difusão (1D)

N = 5

Equações: $\boxed{u_{k+1}^{i} = u_{k}^{i} + K_D\left(u_{k}^{i+1} - 2u_{k}^{i} + u_{k}^{i-1}\right)}$ $\quad \begin{cases} i = 1,2,\ldots,N \\ k = 0,1,2,\ldots,\infty \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} u_{k+1}^{0} \\ u_{k+1}^{1} \\ u_{k+1}^{2} \\ u_{k+1}^{3} \\ u_{k+1}^{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{k}^{0} \\ u_{k}^{1} \\ u_{k}^{2} \\ u_{k}^{3} \\ u_{k}^{4} \end{bmatrix} + K_D \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k}^{0} \\ u_{k}^{1} \\ u_{k}^{2} \\ u_{k}^{3} \\ u_{k}^{4} \end{bmatrix}$$

- Fronteiras Fechadas

N Condições Iniciais

Forma Matricial das Equações Diferença

Equação de Difusão (1D)

N = 5

Equações: $\boxed{u_{k+1}^{i} = u_k^i + K_D\left(u_k^{i+1} - 2u_k^i + u_k^{i-1}\right)}$ $\quad \begin{cases} i = 1,2,\ldots,N \\ k = 0,1,2,\ldots,\infty \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} u_{k+1}^0 \\ u_{k+1}^1 \\ u_{k+1}^2 \\ u_{k+1}^3 \\ u_{k+1}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_k^0 \\ u_k^1 \\ u_k^2 \\ u_k^3 \\ u_k^4 \end{bmatrix} + K_D \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k^0 \\ u_k^1 \\ u_k^2 \\ u_k^3 \\ u_k^4 \end{bmatrix}$$

- Fronteiras Constantes (Fontes e Drenos)

N Condições Iniciais

Semicondutor em Equilíbrio Térmico e Nenhum Campo Aplicado

$$\vec{J}_n = \vec{J}_p = 0 \qquad \vec{\mathcal{E}} = -\nabla\phi$$

Lacunas:

$$\vec{J}_p = e\,\mu_p\,p\,\vec{\mathcal{E}} - e\,D_p\,\nabla p \qquad p_0 = n_i\,\mathrm{e}^{(E_i - E_F)/k_B T}$$

$$\frac{\mu_p}{D_p}\,\nabla\phi = -\frac{1}{p_0}\,\nabla p_0 \qquad \frac{\mu_p}{D_p}\,\nabla\phi = -\frac{1}{k_B T}\nabla(E_i - E_F)$$

$$\nabla E_F = 0 \qquad E = -e\phi \qquad \nabla E_i = -e\nabla\phi$$

$$\frac{D_p}{\mu_p} = \frac{k_B T}{e}$$

Elétrons e Lacunas: $\boxed{\frac{D_p}{\mu_p} = \frac{D_n}{\mu_n} = \frac{k_B T}{e}}$ **Relação de Einstein**

$D/\mu \approx 0{,}026$ [eV] **T = 300 K**

Recombinação

Injeção de Lacunas: $p = p_0 + \delta p$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} = -\frac{\delta p}{\tau_p}$$

$$\delta p(t) = A\, \mathrm{e}^{-t/\tau_p}$$

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} = -\frac{\delta n}{\tau_n}$$

Eq. De Difusão com Recombinação

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \delta n}{\partial t} &= D_n\, \nabla^2 \delta n - \frac{\delta n}{\tau_n} \\ \frac{\partial \delta p}{\partial t} &= D_p\, \nabla^2 \delta p - \frac{\delta p}{\tau_p} \end{aligned} \right.$$

Regime Estacionário

$$\partial/\partial t = 0 \quad \begin{cases} \nabla^2 \delta n = \dfrac{\delta n}{L_n^2} & \text{Elétrons} \\ \nabla^2 \delta p = \dfrac{\delta p}{L_p^2} & \text{Lacunas} \end{cases}$$

Comprimentos de Difusão: $L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$ e $L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$

Lacunas: $$\frac{d^2 \delta p(x)}{dx^2} = \frac{\delta p}{L_p^2}$$

$$\delta p(x) = C_1\, \mathrm{e}^{-x/L_p} + C_2\, \mathrm{e}^{x/L_p}$$

Como em $x = 0$, $\delta p = \Delta p$, a constante C_1 é igual a Δp.

$$\delta p(x) = \Delta p\, \mathrm{e}^{-x/L_p}$$

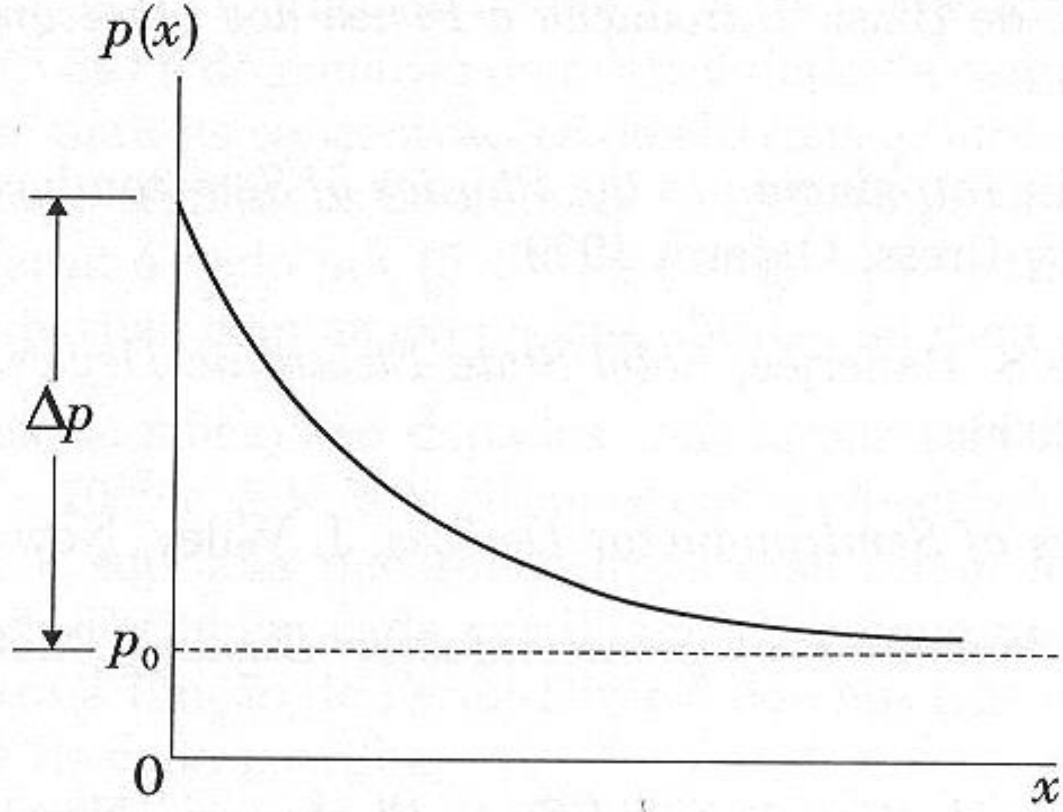


Figura 5.22: Concentração de buracos resultante de um processo de injeção com taxa constante em $x = 0$.

Equações Básicas para a Operação de Dispositivos Semicondutores

Equações de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J_c} = \vec{J_t}$$

$$\nabla . \vec{D} = \rho(x, y, z)$$

$$\nabla . \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

Equação de Laplace: $$\nabla^2 V = -\nabla . \vec{E} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

Baixas Frequências em Materiais Homogêneos e Isotrópicos

Equações da Densidade de Corrente

$$\overrightarrow{J_n} = e\mu_n n\vec{E} + eD_n \nabla n$$

$$\overrightarrow{J_p} = e\mu_p p\vec{E} - eD_p \nabla p$$

$$\overrightarrow{J_c} = \overrightarrow{J_n} + \overrightarrow{J_p}$$

Pequenos Campos Elétricos em Materiais Homogêneos e Isotrópicos.
Em equilíbrio térmico.

Equações Básicas para a Operação de Dispositivos Semicondutores

Equações de Densidade de Corrente

$$D_n = \frac{kT}{q}\mu_n \qquad\qquad D_p = \frac{kT}{q}\mu_p$$

$$\overrightarrow{J_n} = e\mu_n n\vec{E} + eD_n \nabla n = e\mu_n\left(n\vec{E} + \frac{kT}{q}\nabla n\right)$$

$$\overrightarrow{J_p} = e\mu_p p\vec{E} + eD_p \nabla p = e\mu_p\left(p\vec{E} - \frac{kT}{q}\nabla p\right)$$

$$\overrightarrow{J_c} = \overrightarrow{J_n} + \overrightarrow{J_p}$$

Pequenos Campos Elétricos em Materiais Homogêneos e Isotrópicos. Semicondutores não-degenerados, Sem campos magnéticos significativos. Em equilíbrio térmico.

Equações Básicas para a Operação de Dispositivos Semicondutores

Equações de Continuidade

$$\nabla . \overrightarrow{J_c} = -\frac{\partial \rho(x, y, z)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = G_n - R_n + \frac{1}{e} \nabla . \overrightarrow{J_n}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = G_p - R_p - \frac{1}{e} \nabla . \overrightarrow{J_p}$$

$$R_n \approx \frac{n - n_0}{\tau_n} \qquad R_p \approx \frac{p - p_0}{\tau_p}$$

$$\tau_n \approx \tau_p$$

Aproximações Válidas em Pequenos Desvios de Concentrações, Portadores Minoritários, Recombinação em Pares

Geração tem origem em processos de Avalanche ou absorção de Fótons

Equações de Fundamentais

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q}\nabla \cdot \mathbf{J}_N - r_N + g_N$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{q}\nabla \cdot \mathbf{J}_P - r_P + g_P$$

(Continuity equations)

$$\frac{\partial \Delta n_p}{\partial t} = D_N \frac{\partial^2 \Delta n_p}{\partial x^2} - \frac{\Delta n_p}{\tau_n} + G_L$$

$$\frac{\partial \Delta p_n}{\partial t} = D_P \frac{\partial^2 \Delta p_n}{\partial x^2} - \frac{\Delta p_n}{\tau_p} + G_L$$

(Minority carrier diffusion equations)

$$\nabla \cdot \mathscr{E} = \rho / K_S \varepsilon_0$$

(Poisson's equation)

Equações de Transporte

$$\mathbf{J}_\mathrm{N} = q\mu_\mathrm{n} n\mathscr{E} + qD_\mathrm{N}\nabla n = \mu_\mathrm{n} n\nabla F_\mathrm{N}$$

$$\mathbf{J}_\mathrm{P} = q\mu_\mathrm{p} p\mathscr{E} - qD_\mathrm{P}\nabla p = \mu_\mathrm{p} p\nabla F_\mathrm{P}$$

$$\rho = q(p - n + N_\mathrm{D}^+ - N_\mathrm{A}^-)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_\mathrm{N} + \mathbf{J}_\mathrm{P}$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{J}_\mathrm{N} + \mathbf{J}_\mathrm{P} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Pierret – Advanced Semiconductor Fundamentals