Solusi Numerik Persamaan Medan Einstein Untuk Metrik Schwarzschild Dan Metrik Isotropik

Rian Afandi[1] , I Wayan Sudiarta[2] , Marzuki[3]

Program Studi Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mataram
Jalan Majapahit No.62 Mataram Kode Pos. 83125
Email : fandi.edison@outlook.co.id

Abstrak

Metode numerik Euler, Beda Hingga, Heun dan Numerov telah diaplikasikan pada penyelesaian persamaan medan Einstein untuk metrik Schwarzschild dan metrik Isotropik. Pada prinsipnya semua permasalahan yang tidak dapat diselesaikan secara analitik, dapat diselesaikan secara numerik. Metode numerik yang paling umum digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial adalah metode Euler, Beda Hingga dan metode Heun. Sedangkan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial dengan orde yang lebih tinggi, dapat digunakan metode Numerov. Akurasi dari suatu metode numerik dapat ditentukan dengan melihat nilai error relatif yang diberikan dalam proses perhitungan. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa solusi numerik dari persamaan medan Einstein dapat diselesaikan dengan metode Euler, Beda Hingga, Heun dan Numerov. Persamaan diferensial orde satu dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Heun dan Euler, sedangkan persamaan diferensial dengan orde yang lebih tinggi membutuhkan penyelesaian menggunakan metode Beda Hingga, Heun dan Numerov. Untuk kasus metrik Schwarzschild dan Isotropik yang melibatkan persamaan diferensial orde satu, pendekatan paling akurat adalah metode Heun. Sedangkan untuk kasus metrik isotropik yang melibatkan persamaan diferensial orde dua, pendekatan paling akurat adalah metode Beda Hingga.

Kata kunci : Akurasi Perhitungan Numerik , Metrik Schwarzschild dan Isotropik, Persamaan Medan Einstein

I. PENDAHULUAN

Gravitasi dalam teori relativitas umum Einstein didefinisikan sebagai efek dari kelengkungan ruang-waktu akibat kehadiran massa dan energi. Untuk memahami teori gravitasi Eintein tersebut maka perlu dilesaikan persamaan medan Einstein. Penyelesaian persamaan medan Einstein pada prinsipnya membutuhkan bentuk asumsi metrik dasar. Metrik paling umum yang dapat digunakan adalah asumsi metrik Schwarzschild, dengan bentuk geometri simetri bola. Penggunaan metrik Schwarzschild akan memungkinkan perhitungan solusi persamaan medan Einstein di luar objek bermassa sebagai sumber medan gravitasi. Selain metrik Schwarzschild, asumsi lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan medan Einstein adalah metrik Isotropik, yang memiliki elemen metrik diagonal yang sama pada bagian ruang. Sejumlah metode numerik dapat diterapkan dalam menyelesaikan persamaan medan Einstein. Penggunaan metode numerik dimaksudkan untuk mendapatkan sebuah solusi persamaan differensial yang sukar untuk diselesaikan secara analitik. Metode numerik yang paling umum digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial adalah metode Euler, Heun dan metode Beda hingga, sedangkan untuk persamaan differensial dengan orde yang lebih tinggi, maka dibutuhkan pendekatan metode numorov untuk menyelesaikannya. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui tingkat akurasi dari metode numerik Euler, Beda Hingga, Heun dan Numerov dalam menyelesaikan persamaan medan Einstein.

Persamaan medan Einstein tergolong kedalam persamaan diferensial non linier, yang membutuhkan matematika tensor dan metrik dalam penyelesaianya. Persamaan medan Einstein dapat menjelaskan efek kelengkungan ruang-waktu sebagai akibat adanya gravitasi pada suatu objek yang memiliki massa dan Energi. Persamaan medan Einstein dapat dituliskan sesuai persamaan berikut

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R = \frac{8\pi G}{c^4}\, T_{\mu\nu} \qquad (1)$$

dengan $R_{\mu\nu}$ merupakan tensor Ricci kovarian rank-2, R adalah skalar Ricci, $T_{\mu\nu}$ adalah tensor energi momentum, $g_{\mu\nu}$ disebut sebagai tensor metrik, G adalah konstanta gravitasi universal dalam satuan $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ dan c adalah cepat rambat cahaya dalam satuan m.s-1. Untuk studi kasus yang lebih sederhana, dengan mengabaikan sumer medan, maka persamaan medan Einstein dapat dibuat menjadi ebih sederhana, yaitu $R_{\mu\nu} = 0$

Penggunaan metrik dalam persamaan (1) bertujuan untuk mendefinisikan geometri dan jarak dalam ruang-waktu, sedangkan matematika tensor dipilih karena sifatnya yang invarian terhadap sistem koordinat, sehingga tidak mengubah bentuk dari hukum-hukum fisika pada pemilihan sebarang sistem koordinat. Terdapat dua buah asumsi metrik dasar yang umumnya digunakan untuk menyelesaikan persamaan medan Einstein yaitu metrik Schwarzschild dan metrik Isotropik. Metrik Schwarzschild memiliki asumsi berbentuk simetri bola dan sehingga dapat digunakan untuk menjelaskan medan gravitasi di uar sumber objek yang memiliki massa. Bentuk metrik tersebut dapat dituliskan menurut persamaan berikut

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Dengan μ dan ν pada persamaan (2) merupakan indeks yang bernilai 0 hingga 3 untuk tinjauan kasus 4 dimensi. Perbedaan mendasar antara bentuk metrik Schwarzschild dan isotropik hanyalah pada penambahan elemen $B(r)$ pada komponen g_{22} dan g_{33}.

II. METODE PENELITIAN

Bentuk solusi dari elemen $A(r)$ dan $B(r)$ untuk metrik Schwarzschild dan Isotropik dapat diselesaikan dengan mengunakan tensor Ricci yang memiliki bentuk matematik mengikuti persamaan (3)

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\alpha\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\Gamma^\beta{}_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\Gamma^\beta{}_{\alpha\nu} \qquad (3)$$

Persamaan (3) membutuhkan Christoffel yang dapat diperoleh dengan menggunakan bentuk matematik berikut

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}\right) \qquad (4)$$

Persamaan (3) dan (4) harus dikerjakan dengan mengikuti notasi penjumlahan Einstein. Dengan menerapkan persamaan (3) dan (4) tersebut kedalam kasus persamaan medan Einstein metrik Schwarzschild dan Metrik Isotropik, maka akan diperoleh persamaan diferensial yang selanjutnya dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik. Persamaan diferensial yang didapatkan dengan memanfaatkan bentuk (3) dan (4) untuk kasus metri Schwarzschild adalah

$$B'(r) = \frac{B(r)}{r}\left(1 - B(r)\right) \qquad (5)$$

$$A'(r) = \frac{1}{r} - \frac{1}{rB(r)} \qquad (6)$$

Sedangkan untuk kasus metrik Isotropik persamaan diferensial yang didapatkan dengan memanfaatkan bentuk (3) dan (4) adalah

$$B''(r) = -\frac{2B'(r)}{r} + \frac{3[B'(r)]^2}{4B(r)} \qquad (7)$$

$$A'(r) = -\frac{A(r)B'(r)[rB'(r) + 4B(r)]}{2rB(r)B'(r) + 4[B(r)]^2} \qquad (8)$$

Penyelesaian persamaan diferensial (5) hingga (8) dapat dilakukan dengan mengaplikasikan metode numerik Euler, Beda Hingga, Heun dan Numerov. Metode Euler merupakan metode eksplisit untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde pertama. Bentuk matematik dari metode Euler dapat dituliskan sebagai

$$A_{i+1} \approx A_i + A'_{i+1}\,\Delta r \qquad (9)$$

Perbaikan dari metode euler adalah metode Heun. Metode Heun juga disebut sebagai metode satu langkah (*one step*), karena dapat memprediksi nilai pada titik i+1 dengan hanya menggunakan satu nilai sebelumnya yaitu data pada titik ke i. Bentuk atemati metode Euler untuk persamaan diferensial orde satu dapat dituliskan meurut persamaan (10) berikut

$$A_{i+1} \approx A_i + \frac{\Delta r}{2}(A_i' + A_{i+1}') \qquad (10)$$

Sedangkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde dua dengan menggunakan metode Heun, maka prsamaan (10) harus dikerjakan dua kali. Selain metode Heun, metode Beda Hingga juga dapat diterapkan untuk menyelesaikan persamaan Medan Einstein. Secara matematis persamaan metode Beda Hingga untuk persamaan diferensial orde dua dapat dituliskan sebagai

$$B_{i+1} \approx 2B_{i-1} - B_i + B_i''(\Delta r)^2 \qquad (11)$$

Perinsip utama dari pendekatan metode Beda Hingga adalah deret taylor yang dipotong pada suku tertentu, sesuai dengan orde dari persamaan diferensial yang ingin diselesaikan, hal tersebut juga berlaku sama untuk pendekatan dengan metode Numerov yang memiliki bentuk matematik sesuai persamaan (12) berikut

$$B_{i+1} \approx 2B_i - B_{i-1} + \left[\frac{B_{i+1}'' + 10B_i'' + B_{i-1}''}{12}\right](\Delta r)^2 \qquad (12)$$

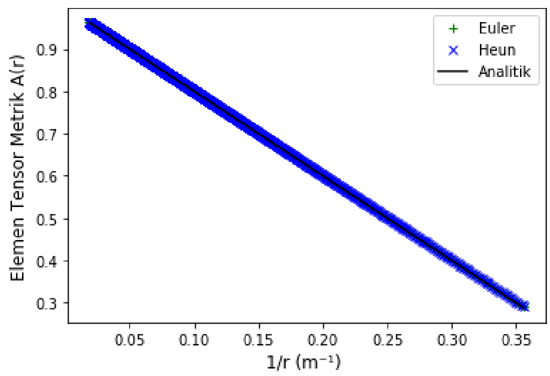
Dengan menggunakan pedekatan numerik dari persamaan (9) hingga (12), maka berikutnya dapat ditentukan akurasi dari setiap metode numerik tersebut dengan menggunakan persamaan error relatif.

$$\varepsilon = \frac{f(r)^* - f(r)}{f(r)} \qquad (13)$$

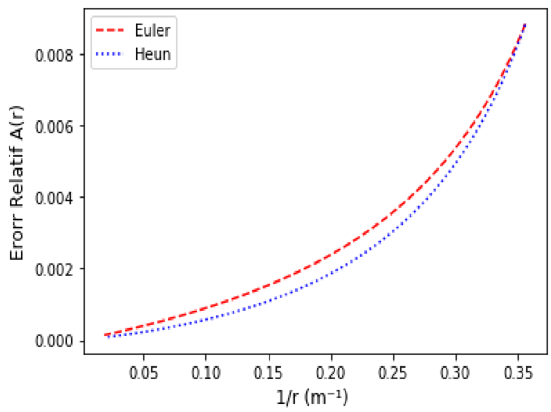
Dengan $f(r)^*$ adalah fungsi yang dihitung secara numerik, dan $f(r)$ adalah fungsi yang dihitung secara analitik, mengikuti persamaan (5) hingga (12). Dari persamaan (13) tersebut, kemudian akan dibuat sebuah grafik menggunakan bahasa pemerograman python utuk menampilkan nilai maksimum error relatif dari setiap metode, sehingga dapat ditentukan tingkat akurasi dari metode numerik tersebut.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Elemen tensor metrik A(r) dan B(r) yang menjadi solusi dalam persamaan Medan Einstein akan dihitung tingkat akurasinya untuk setiap metode numerik yang digunakan. Berdasarkan hasil pada (Gambar 1) dan (Gambar 2) dapat dilihat bahwa perhitungan numerik elemen tensor metrik A(r) untuk metrik Schwarzschild dan metrik Isotropik hanya dapat dilakukan dengan menggunakan metode Euler dan Heun. Hal ini dikarenakan persamaan diferensial yang dihasilkan melalui tensor Ricci memiliki orde satu.



(a)

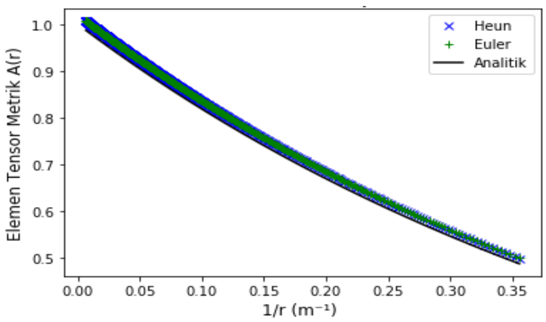


(a)

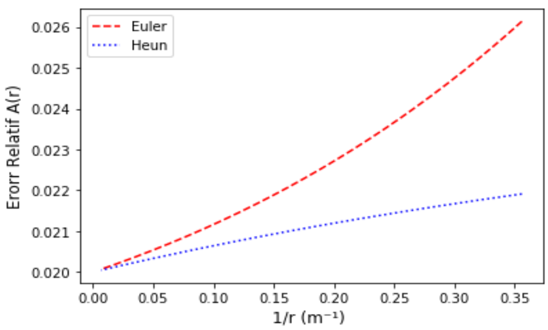
ISSN : 1759-9274
Journal F MIPA Universitas Mataram Vol.12, No.9, 20 November 2019

Gambar 1 : Perhitungan elemen tensor metrik A(r) dan nilai error relatifnya, untuk metrik Schwarzschild. (a) Hasil hitung elemen tensor metrik A(r) pada interval $2{,}8 \leq r \leq 47{,}2$ m, dr = 0,01 m dan rs = 2m (b) Nilai error relatif dengan metode Euler dan Heun

Plot nilai tensor metrik $A(r)$ pada persamaan medan Enstein menunjukan waktu, yang nilainya akan mendekati satu seiring dengan pertambahan jarak yang diberikan dalam iterasi perhitungan. (Gambar 1) dan (Gambar 2) juga menjelaskan bahwa nilai kelengkungan yang diperoleh akan berkurang hingga menjadi konstan, seiring dengan bertambahnya jarak objek dari sumber medan gravitasi. Nilai konstanta tersebut dikenal sebagi metrik minkowsky atau ruang-waktu datar. Hasil perhitungan error relatif untuk metode Euler memiliki nilai maksimum yaitu $14{,}0 \times 10^{-5}$, sedangkan nilai maksimum error relatif elemen $A(r)$ metrik Schwarzschild dengan menggunakan metode Heun adalah $7{,}4 \times 10^{-5}$. Dengan demikian pendekatan paling akurat adalah metode Heun. Tingkat akurasi yang diperoleh dengan pendekatan metode Euler dan Heun memiliki niali yang berkurang seiring dengan penambahan nilai $1/r$ yang dierikan. Hal ini berlaku sama pada elemen $A(r)$ metrik isotropik.



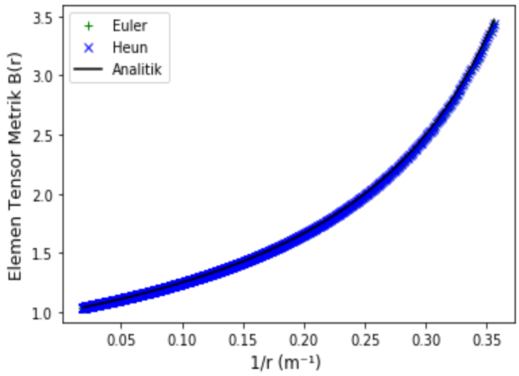
(a)



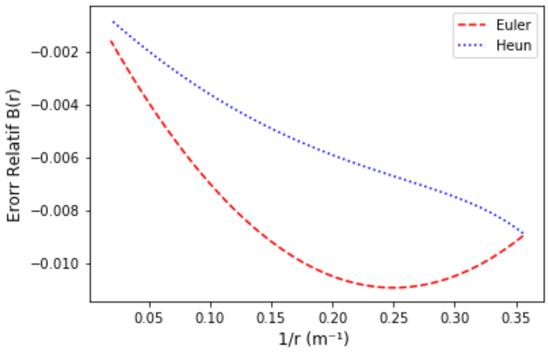
(b)

Gambar 2 : Perhitungan elemen tensor metrik $A(r)$ dan nilai error relatifnya, untuk metrik Isotropik. **(a)** Hasil hitung elemen tensor metrik $A(r)$ pada interval $2{,}8 \leq r \leq 47{,}2$ m, dr = 0,01 m dan $r_s = 2$m **(b)** Nilai error relatif dengan metode Euler dan Heun

Hasil perhitungan nilai maksimum error relatif untuk elemen $A(r)$ metrik isotropik adalah $0{,}02006$ dengan menggunakan metode Euler. Sedangkan untuk metode Heun, nilai maksimum error relatifnya adalah $0{,}02004$. Penggunaan iterasi $1/r$ dilakukan untuk menunjukkan bahwa sifat dari elemen metrik $A(r)$ berbanding terbalik dengan elemen metrik $B(r)$



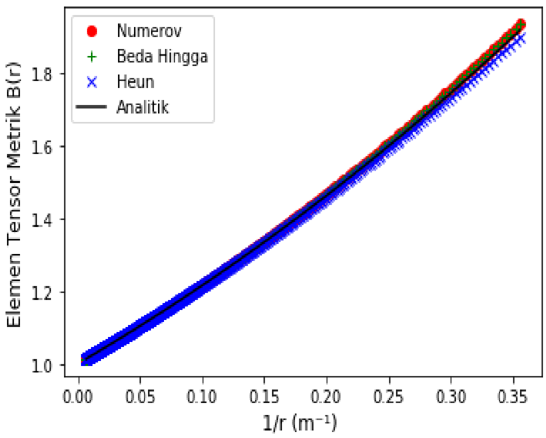
(a)



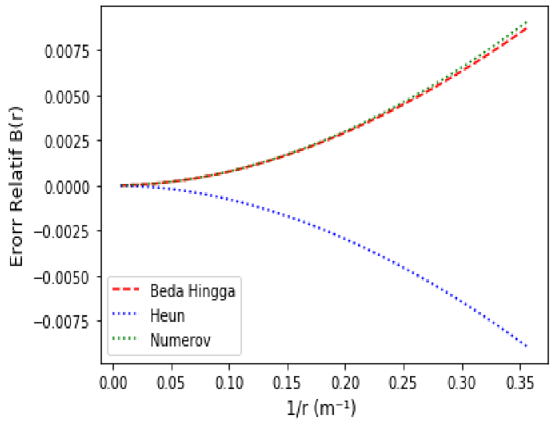
(b)

Gambar 3 : Perhitungan elemen tensor metrik B(r) dan nilai error relatifnya, untuk metrik Schwarzschild. **(a)** Hasil hitung elemen tensor metrik B(r) pada interval $2{,}8 \leq r \leq 47{,}2$ m, dr = 0,01 m dan $r_s = 2$m **(b)** Nilai error relatif dengan metode Euler dan Heun

Elemen $B(r)$ pada metrik Schwarzschild dan metrik Isotropik menunjukkan ruang. Untuk kasus metrik Schwarzschild, persamaan diferensial yang diperoleh dengan menggunakan tensor Ricci memiliki orde satu. Sedangkan untuk asumsi metrik Isotropik, persamaan diferensial yang dihasilkan memiliki orde dua. Oleh karena elemen $B(r)$ metrik Schwarzschild melibatkan persamaan diferensial orde satu maka pendekatan yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan metode Euler dan Heun, seperti halnya pada elemen $A(r)$ metrik Schwarzschild dan Isotropik. Berdasarkan hasil pada (Gambar 3) dapat dilihat bahwa akurasi numerik yang diperoleh semakin menurun seiring dengan bertambahnya nilai r. Hal ini dikarenakan adanya akumulasi error pada iterasi perhitungan yang membuat nilai errornya semakin bertambah setiap penambahan nilai r. Hasil perhitungan nilai maksimum error relatif dengan menggunakan metode Euler adalah $-0,0016$, sedangkan dengan menggunakan metode Heun, nilai maksimum error relatifnya adalah $-0,0008$. Tanda negatif menunjukkan bahwa hasil perhitungan menggunakan metode numerik lebih kecil dibandingkan hasil perhitungan secara analitik, sehingga ketika selisihnya dihitung sesuai persamaan (13) maka akan menghasilkan nilai negatif. Berdasarkan (Gambar 1) hingga (Gambar 3) dapat diketahui bahwa pendekatan menggunakan metode Beda Hingga tidak dapat dilakukan karena metode tersebut membutuhkan persamaan diferensial pada posisi $r + dr/2$ yang sukar untuk ditentukan dalam iterasi.



(a)



(b)

Gambar 4 : Perhitungan elemen tensor metrik B(r) dan nilai error relatifnya, untuk metrik Isotropik. **(a)** Hasil hitung elemen tensor metrik A(r) pada interval $2,8 \leq r \leq 47,2$ m, dr = 0,01 m dan $r_s = 2$m **(b)** Nilai error relatif dengan metode Beda Hingga Heun dan Numerov.

Untuk elemen $B(r)$ metrik Isotropik yang melibatkan persamaan diferensial orde dua, dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Heun, Beda Hingga dan Numerov. Hasil . Hasil perhitungan nilai maksimum dengan menggunakan metode Heun adalah sebesar $-3{,}45 \times 10^{-6}$. Hal tersebut menunjukkan bahwa tingkat akurasi metode Heun tidak bergantung pada orde dari persamaan diferensial yang ingin diselesaikan, akan tetapi bergantung pada bentuk dari persamaan diferensial nya. Untuk perhitungan nilai maksimum error relatif menggunakan metode Beda Hingga dan Numerov diperoleh nilai yang hampir sama yaitu $3{,}447 \times 10^{-6}$ dan $3{,}448 \times 10^{-6}$. Hal ini dikarenakan bentuk matematis dari kedua metode numerik tersebut hampir sama. Berdasarkan (Gambar 4) diperoleh bahwa pendekatan numerik paling akurat untuk elemen $B(r)$ metrik isotropik adalah metode Beda Hingga.

IV. KESIMPULAN

Persamaan medan Einstein untuk metrik Schwarzschild dan Isotropik yang melibatkan persamaan diferensial orde satu dapat diselesaikan menggunakan pendekatan metode Euler dan Heun, dengan pendekatan paling akurat adalah metode Heun. Sedangkan untuk kasus metrik

Isotropik yang melibatkan persamaan diferensial orde dua, dapat diselesaika menggunakan pendekatan metode Beda Hingga, Heun dan Numerov, dengan pendekatan paling akurat adalah metode Beda Hingga.

DAFTAR PUSTAKA

Anugraha, Rintaro. 2011. *Teori Relativitas dan Kosmologi*. Yogakarta: Universitas Gadjah Mada.

Bacchini F, B.Riperda, A.Y Chen dan L.sironi. 2018. *Generalized, Energy-Conserving Numerical Simulations Of Particle in General Relativity. I Timelike And Null Geodesics*. KU Leuven University Arxiv : Vol.3 No.1810.02378v3 [astro-ph.HE].

Baumgarte,Thomas W, dan Stuart L Shapiro. 2010. *Numerical Relativity Solving Einstein Euations On Computer.* USA : Cambridge University.

Carroll, Sean. 2014. *Spacetime and Geometry An Introduction to General Relativity.* England British Library : Pearson Education Limited

Chapra, Steven C dan Raymond P. Canale. 2006. *Numerical Method For Engginering.* New York : Mc Graw Hill.

Crowell, Benjamin. 2018. *General Relativity.* California : Fullerton Light And Matter.

Crothers, Stephen J. 2006. *On Issotropic Coordinates And Einsteins Gravitational Filed.* Australia : Queensland university.

Eddington, A.S. 1924. *The Mathematical Theory Of Relativity (2nd ed)*. London : Cambridge University Press Page.93.

Fernando Milinda, David Neilsen, dan Hyun Lim. 2018. *Massively Parallel Simulations Of Binary Black Hole Intermediate-Mass-Ratio Inspiral*. Utah and Brigham Young University Arxiv : Vol.1 No.1807.06128v1 [Gr-Qc].

Gatton, Averell. 2008. *Visually Exploring The Einstein Equations.* USA : College Of Woster.

Gron,Oyvind dan Arne Naes. 2007. *Einstein Theory A Rigorous Introductions for The Mathematically Untrained*. Oslo Universyty Collage : Springger.

Hidayat, Taufiq. 2010. *Teori Relativitas Einstein*. Bandung : Institut Teknologi Bandung.

Mathews, John H. 1987. *Numerical Method for Computer Science Engginering and Mathematics.* USA: Prentice-Hall International, Inc.

Misner, Carles W, Kip S Thorne, dan john Archibalad Wheeler. 1973. *Gravitation.* San Francisco : W.H Freeman And Company.

Numerov, Boris Vasil'evich. 1927. *A Method of Exstrapolations of Pertubations, Monthly of The Royal Astronomical Society*. NASA Property, DOI : 10.1093/mnras/84.8.592.

Ngubelanga S. A. dan S. D. Maharaj. 2013. *A Relativistic Algorithm with Isotropic Coordinates*. University of KwaZulu-Natal : Hindawi Publishing Corporation, http://dx.doi.org/10.1155/2013/905168.

Ohanian, Hans C dan Remo Ruffini. 2013. *Gravitation and Spacetime Third Edition.* USA : Cambridge University Perss.

Overbye, Dennis. 2019. *Black Hole Picture Revealed For The First Time-Astronomers At Last Have Captured An Image Of The Darknest Entities In The Cosmos.* USA : New York Times.

Shigemoto, Kazuyasu. 2017. *Isotropic Metric in the Theory of General Relativity.* Tezukayama University, Nara 631, Japan Arxiv : Vol.1 No.1704.01838v1 [Physics.gen-Ph].