南开大学《高等数学 A》课程试卷

________学院________系________年级________专业

经管类试卷：（A 卷）　考试时间 2020.1.21

一、　填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1．设 $f(x)=\int_0^x \sin(x-t)dt$，则 $f'(x)=\sin x$．

2. 已知边际成本为 $C'(x)=7+\frac{25}{\sqrt{x}}$，固定成本为 1000，则总成本函数为 $C(x)=7x+50\sqrt{x}+1000$．

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x dx=\frac{\pi}{8}$

4. 已知 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$．

5. 由曲线 $y=\sqrt{4x}$，$y=\sqrt{2x-x^2}$ 及 $x=2$ 所为图形的面积为 $\frac{8}{3}\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}$．

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 曲线 $y=\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$（D）.

A. 无渐近线　　B. 仅有水平渐近线

C. 仅有垂直渐近线.　　D. 既有水平又有垂直渐近线.

2. 函数 $y=x^x$ 在区间 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上（ B ）.

A. 不存在最大值和最小值　　B. 最小值是 $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

C. 最大值是 $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$　　D. 最大值是 $e^{\frac{1}{e}}$

3. 以下广义积分发散的是（ C ）.

A. $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$　B. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx$　C. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}dx$　D. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

4. 设 $\ln f(t)=\sin t$，则 $\int \frac{tf'(t)}{f(t)}dt=$（ A ）.

A. $t\sin t+\cos t+C$　　B. $t\sin t-\cos t+C$

C. $t\sin t+t\cos t+C$　　D. $t\sin t-t\cos t+C$

5. 设 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)>0$，且 $f'(x)>0, f''(x)>0$，令 $S_1=\int_a^b f(x)dx$，

$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则（ C ）.

A. $S_1<S_2<S_3$　　B. $S_2<S_1<S_3$

C. $S_1<S_3<S_2$　　D. $S_3<S_1<S_2$

三、计算题（每小题 7 分，共 35 分）

1. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}-2\int\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}-\int\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$

2.

$$\int_0^2\frac{x}{(x^2-2x+2)^2}dx=\int_0^2\frac{x}{((x-1)^2+1)^2}dx\ \underline{\underline{x-1=\tan t}}\ \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan t+1}{\sec^2 t}dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

3. $\int_0^{\pi}\frac{(x+2)\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{\pi}\frac{2\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{\pi}\frac{2\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{4}+\pi$

4. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{1-\cos^2 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1-\cos^2 x}dx$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx=2\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2$

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x+1 & 0\le x<1 \\ \frac{1}{2}x^2 & 1\le x\le 2 \end{cases}$，求 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $[0,2]$ 上的表达式.

解：当 $0\le x<1$ 时，$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x (t+1)dt=\frac{x^2+2x}{2}$；

当 $1\le x\le 2$ 时，$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 (t+1)dt+\int_1^x \frac{t^2}{2}dt=\frac{4}{3}+\frac{x^3}{6}$

故 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\begin{cases} \frac{x^2+2x}{2} & 0\le x\le 1 \\ \frac{4}{3}+\frac{x^3}{6} & 1\le x\le 2 \end{cases}$。

四、应用题和证明题（共 4 题, 30 分）

1.（10 分）设抛物线 $y=ax^2+bx$，当 $0\le x\le 1$ 时，$y\ge 0$. 又该抛物线与直线 $x=1$ 及 x 轴所围平面图形的面积为 $\frac{1}{3}$，求 a,b 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积最小.

解：因为

$$S=\int_0^1 (ax^2+bx)dx=\left(\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}\Rightarrow 2a+3b=2,$$

$$b=\frac{2}{3}(1-a)$$

又因为 $V_x=\int_0^1 \pi(ax^2+bx)^2dx=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3}\right)$

$$V_a=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{a(1-a)}{3}+\frac{4(1-a)^2}{27}\right) \qquad V_a'=\pi\left(\frac{2a}{5}+\frac{1-2a}{3}-\frac{8(1-a)}{27}\right)$$

$$V_a'=0\Rightarrow a=-\frac{5}{4},b=\frac{3}{2}.$$

2. （10 分）设 $a>1$，$f(x)=a^x-ax$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点为 $\varphi(a)$，求 a 使 $\varphi(a)$ 最大，

并求最大值.

解：因为 $f'(x)=a^x\ln a-a=0$ 所以 $x=\varphi(a)=\log_a\frac{a}{\ln a}=1-\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}$

$$\varphi'(a)=-\frac{\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{a}\cdot\ln a-\ln(\ln a)\cdot\frac{1}{a}}{(\ln a)^2}=-\frac{1}{a}\cdot\frac{1-\ln(\ln a)}{(\ln a)^2}=0$$

$$1-\ln(\ln a)=0\Rightarrow\ln(\ln a)=1\Rightarrow\ln a=e\Rightarrow a=e^e$$

所以最大值 $\varphi(a)=1-\frac{1}{e}$.

3. （5 分）设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续的单增函数，证明：$(a+b)\int_a^b f(x)dx\le 2\int_a^b xf(x)dx$.

证明：作辅助函数 $F(x)=(a+x)\int_a^x f(t)dt-2\int_a^x tf(t)dt$，因为

$$F'(x)=\int_a^x f(t)dt-(x-a)f(x)=[f(\xi)-f(x)](x-a),\quad \xi\in(a,x)$$

因为 $f(x)$ 单增，所以 $f(\xi)-f(x)\le 0$，即 $F'(x)\le 0, F(x)$］，

又 $F(0)=0, F(b)\le F(0)=0$，所以有 $(a+b)\int_a^b f(x)dx\le 2\int_a^b xf(x)dx$.

4. （5 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续的二阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，又 $\max\limits_{0\le x\le 1}\{f(x)\}=1$，

试证：存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f''(\xi)\ge -8$.

证明：由题设条件知，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值点只能在 $[0,1]$ 区间内取到，即存在 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)=\max\limits_{0\le x\le 1}\{f(x)\}=1$，且由费尔马定理得 $f'(c)=0$。

由泰勒公式

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2=1+\frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$$

令 $x=0$，则 $f(0)=1+\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2$，$(0<\xi_1<c)$ ①

令 $x=1$，则 $f(1)=1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2$，$(c<\xi_2<1)$ ②

当 $0<c\le\frac{1}{2}$ 时，由①式，$0=1+\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2\le 1+\frac{1}{8}f''(\xi_1)$，即 $f''(\xi_1)\ge -8$，取 $\xi=\xi_1$；

当 $\frac{1}{2}<c<1$ 时，由②式，$0=1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2\le 1+\frac{1}{8}f''(\xi_2)$，即 $f''(\xi_2)\ge -8$，

取$\xi=\xi_2$，

综上所述就有：存在$\xi\in(0,1)$使$f''(\xi)\geq -8$。