# 人工智能学院本科生 2019—2020 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（A 卷）

专业(大类)：____________________ 年级：20 _____ 学号：____________ 姓名：________________ 成绩:

说明：$A^T$ 表示矩阵 $A$ 的转置矩阵，$A^*$表示矩阵 $A$ 的伴随矩阵，$E$ 是单位矩阵，$O$ 是零矩阵, $R(A)$或 $r(A)$表示矩阵 $A$ 的秩

$A^{-1}$ 表示可逆矩阵 $A$ 的逆矩阵, $|A|$表示方阵 $A$ 的行列式,$\langle\alpha,\beta\rangle$表示向量$\alpha,\beta$ 的内积。

草 稿 区

| 得 分 |
| --- |
| |

一 .客观题：1–3 小题为判断题，在对的后面括号中填 " √ "，错的后面括号中填"×"，

4–8 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (每小题 2 分，共 16 分)。

1. 对应于 $n(n>3)$阶实矩阵的相异特征值的实特征向量必是正交的。 ( )

2. 欧式空间$V$ 中的向量$\alpha,\beta$满足$|\alpha|=|\beta|$，则$\alpha+\beta$与$\alpha-\beta$ 正交。 ( )

3. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是$R^n$中一个正交向量组，则它们作为列向量组构成的矩阵的秩必为 $m$。 ( )

4. 设三阶矩阵 $A$，满足$|A|=-1$，则$|2A^*|=$ ( )

   (A) -8 (B) 8 (C) -2 (D) 2

5. 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵， 满足 $AB=O$，且 $B\neq 0$ 则： ( )

   (A) $A$ 的列向量组线性无关 (B) $A=O$

   (C) $A$ 的列向量组线性相关 (D) $A$ 的行向量组线性无关

6. 对于方阵 $A$ 与 $A^{\mathrm{T}}$，下面说法错误的是： ( )

   (A) 它们有相同的特征根 (B) 它们有相同的特征向量

   (C) 它们有相同的特征多项式 (D) 它们的行列式值相同

7. $n$元齐次线性方程组$Ax=0$有非零解的充要条件是: ( )

   (A) $R(A)>n$ (B) $R(A)<n$ (C) $R(A)=n$ (D) $R(A)\le n$

8. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$其中$a>b>0$且$a^2+b^2=1$，则 $A$ 为: ( )

   (A) 正定矩阵 (B) 负定矩阵 (C) 初等矩阵 (D)正交矩阵

| 得 分 |
|---|
| |

## 二 、行列式计算 （第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分，共 14 分）

草 稿 区

1．计算行列式 $|D_n|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 0 \end{vmatrix}$，其中 $n>2$。

2. 计算 $n$ 阶行列式 $|D_n|=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_1+x \end{vmatrix}$，其中 $n>2$。

| 得 分 |
| --- |
| |

三、已知$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$，求$|A^4|$及$|A^*|$。（本题 10 分）

草 稿 区

| 得 分 |
| --- |
| |

四、当$a$与$b$取何值时，下面方程组有唯一解？无解？有无穷解？当有无穷解时，求出全部解。

（本题 14 分）

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = 2b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

草 稿 区

| 得 分 |
| --- |
| |

五、设在线性空间$P_4[x]$中，有序基底(I)为$\left[x^4, x^3, x^2, x, 1\right]$，有序基底(II)为

$\left[1,\ 1+x,\ 1+x+x^2,\ 1+x+x^2+x^3,\ 1+x+x^2+x^3+x^4\right]$，

(1) 求基底(I)到基底(II)的过渡矩阵。

(2) 求多项式$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$在基底(II)下的坐标。（本题 9 分）

草 稿 区

| 得 分 |
| --- |
| |

六、已知二次型：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$，（本题 14 分）

用正交变换化 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形，并求出所用正交变换矩阵 $\mathbf{Q}$ 及该二次型的符号差。

草 稿 区

| 得 分 |
| --- |
| |

七、已知向量组(I) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 3，向量组(II) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 3，向量组(III) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 的秩为 4，证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 的秩为 4。（本题 9 分）

草 稿 区

| 得 分 |
| --- |
| |

八、设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都是 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵，其中 $|\boldsymbol{A}|=6$ 并且 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$ ，

求证：$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|$。（本题 9 分）

草 稿 区

| 得 分 |
| --- |
| |

九、$A$ 是三阶实对称方阵，且满足条件 $A^2-2A=O$，已知 $R(A)=2$。

（1）求 $A$ 的全部特征值。

（2）当 $k$ 为何值时，矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵，其中 $E$ 为三阶单位矩阵。（本题 5 分）

草 稿 区