试　卷　（二）

一、单项选择题（每题 2 分，共 20 分）

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-a & b\\ b & a\end{bmatrix}$，其中 $a>b>0$，$a^2+b^2=1$，则 $\boldsymbol{A}$ 为　　　（　　）

（A）正定矩阵；　　　　（B）初等矩阵；

（C）正交矩阵；　　　　（D）以上都不对．

2. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 4 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=2$，则 $|(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1})^2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=$　　　（　　）

（A）64；　　　　（B）32；

（C）8；　　　　（D）16.

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则必有　　　（　　）

（A）$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 同时可逆或不可逆；

（B）$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征向量；

（C）$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均与同一个对角矩阵相似；

（D）矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相等．

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 m 个 n 维向量，则命题“$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关”与命题（　　）不等价．

（A）对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 必有 $\sum\limits_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\neq\boldsymbol{0}$；

（B）若 $\sum\limits_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0}$，则必有 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$；

（C）不存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $\sum\limits_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0}$；

（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中没有零向量．

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶正交矩阵，则矩阵(　　)与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征值 .

(A) $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQB}$；　　(B) $(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQB}^{-1}$；

(C) $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQB}$；　　(D) $\boldsymbol{BQ}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}$.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=$ (　　)

(A) $4(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$；　　(B) $\dfrac{1}{4}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$；

(C) $\pm\dfrac{1}{2}\boldsymbol{E}$；　　(D) 不能确定 .

7. 正定实二次型的矩阵必是 (　　)

(A) 实对称且所有元素为正数；

(B) 实对称且对角线上元素为正数；

(C) 实对称且各阶顺序主子式为正数；

(D) 实反对称且行列式值为正数 .

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 实矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$，则 (　　)

(A) $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 的行列式值不为零；　(B) $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 必与单位矩阵相似；

(C) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的行列式值不为零；　(D) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 必与单位矩阵相似 .

9. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，则 (　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 未必能被 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出；

(B) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 必能被 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可被 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出；

(D) 以上全不对 .

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$，且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，则 (　　)

(A) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}(\forall\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^n)$ 有唯一解；

(B) $m\neq n$；

(C) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关；

(D) 以上都不对 .

二、填空题(每题 2 分,共 12 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ 均为 n 阶方阵,且 $\boldsymbol{ABCD}=\boldsymbol{E}$, 则 $(\boldsymbol{BC})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{DA})^{\mathrm{T}}=$________.

2. 设 $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-3$, 则 $x=$________.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,且 $\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是________.

4. 设 V 为全体 3 阶实方阵构成的线性空间,则由所有 3 阶反对称实方阵构成的子空间的一组基为________.

5. 向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基,则向量 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}$ 在该基下的坐标为________.

6. 设 V 为线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_i\in V\ (i=1,2,\cdots,5)$, V 的 3 个线性子空间 $W_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $W_2=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, $W_3=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5)$ 的维数分别为 3, 3, 4,则 $W_4=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的维数为________.

三、计算题(每题 9 分,共 45 分)

1. 计算分块矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行列式,其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ 2\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

2. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$，且满足方程 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，试求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

3. 问：a 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1-ax_2-2x_3=-1,\\ x_1-x_2+ax_3=2,\\ 5x_1-5x_2-4x_3=1 \end{cases}$$

有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解的情况下用基础解系表示其通解．

4. 用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化二次型

$$f=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准形，并写出相应的正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

5. 在线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中给定两组基：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\text{及}\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}.$$

(1) 求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$；

(2) 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的坐标．

四、证明题（每题 8 分，共 16 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称方阵，$k\geqslant 2$ 为正整数，$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$. 证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

2. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 证明：对任意实数 k，矩阵 $(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})$ 是可逆矩阵，并求其逆矩阵．

五、应用题(本题 7 分)

设某省人口总数保持不变,每年有 20%的农村人口流入城镇,有 10%的城镇人口流入农村．试问:该省的城镇人口和农村人口的分布最终是否会趋于一个稳定状态?并说出你的理由．

(提示:设 $\boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ 为该省第 n 年人口分布情况,其中 a_n, b_n 分别代表第 n 年农村与城镇人口数,利用矩阵乘法建立第 n 年与第一年人口分布关系式,然后判断 $\boldsymbol{x}_n$ 的极限是否存在,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n$ 定义为 $\begin{bmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} a_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n \end{bmatrix}$.)