试卷(二)详解

一、单项选择题

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-a & b\\ b & a\end{bmatrix}$，其中 $a>b>0$，$a^2+b^2=1$，则 $\boldsymbol{A}$ 为 (　　)

(A) 正定矩阵；　　(B) 初等矩阵；

(C) 正交矩阵；　　(D) 以上都不是．

分析　准确知道以上几种矩阵的定义及判定方法．

解　应选 C.

题设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中两个列向量的内积为零，且由 $a^2+b^2=1$ 可知其均为单位向量，故 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵．

点评　判断矩阵为正交矩阵时，容易只注意到向量间是否两两正交而忽略看每个列向量是否都是单位向量．尤其是在求一个正交变换的过渡矩阵时，常常忘记将列向量单位化，这是以往同学们经常出现的错误．

2. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 4 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=2$，则 $|(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1})^2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=$ (　　)

(A) 64；　　(B) 32；　　(C) 8；　　(D) 16.

分析　本题为求抽象矩阵的行列式值，将运用方阵的行列式的性质及运算公式，这里将用到公式 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ 及公式 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，$|\boldsymbol{B}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{B}|}$，$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$．

解　应选 B.

$$\begin{aligned}|(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1})^2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|&=|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\\&=|\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{B}^{-1}||\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{B}^{-1}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}^*|^2|\boldsymbol{B}^{-1}|^2|\boldsymbol{A}|\end{aligned}$$

$$=|\boldsymbol{A}|^{6}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{B}|^{2}}\cdot|\boldsymbol{A}|=2^{5}=32.$$

点评 若是不用公式 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，就用公式 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，它是逆矩阵公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$ 的常用形式，因此

$$\begin{aligned}|(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1})^2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|&=|4(\boldsymbol{A}^{-1})^2(\boldsymbol{B}^{-1})^2||\boldsymbol{A}|\\&=4^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2=32.\end{aligned}$$

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则必有 ( )

(A) $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 同时可逆或不可逆；

(B) $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征向量；

(C) $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均与同一个对角矩阵相似；

(D) 矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相等．

分析 由题设条件矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 应该有相同的特征多项式乃至有相同的特征值．

解 应选 A.

相似矩阵相同的特征值对应的特征向量未必相同，故选项 B 不对. 另外，相似矩阵虽然特征值相同但不一定与同一个对角矩阵相似，因为对角矩阵的对角线元素相同但排列顺序未必相同，故选项 C 不对．又，相似矩阵有相同的特征多项式，即 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，故选项 D 不对．

点评 这里还有一个概念，即 n 阶矩阵 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，其中 λ_1，λ_2，…，λ_n 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值．由此，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似即有相同的特征值，故有 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，即同时可逆或不可逆．另外，特征多项式相同即 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，而矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 并不相等．这是容易混淆的地方，希望注意．

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 m 个 n 维向量，则命题“$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关”与命题( )不等价．

(A) 对任意一组不全为零的数 k_1，k_2，…，k_m 必有 $\sum_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\neq\boldsymbol{0}$；

(B) 若 $\sum_{i=1}^{m} k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}$，则必有 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$；

(C) 不存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得 $\sum_{i=1}^{m} k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}$；

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中没有零向量．

分析 针对向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的定义将各命题加以比对，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关即对 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$ 仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时才成立．

解 应选 D.

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，其中必没有零向量，但是没有零向量的向量组也有可能是线性相关的．

点评 命题的逆否命题是正确的，选项 A 即是命题"$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关"的逆否命题，故是等价命题．选项 B 和 C 即是原命题的另外方式的表述．

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶正交矩阵，则矩阵(　　)与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征值．

(A) $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQB}$；　　(B) $(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQB}^{-1}$；

(C) $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQB}$；　　(D) $\boldsymbol{BQ}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}$.

分析 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同特征值的矩阵即是与 $\boldsymbol{A}$ 有相同特征多项式的矩阵，因而看哪个矩阵有可能与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征多项式．这里要注意的是 $\boldsymbol{B}$ 仅为可逆矩阵，$\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，故有 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}^{-1}$.

解 应选 A.

记 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{QB}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQB}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|.$$

点评 由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 必可对角化，即存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$. 实际上，在 4 个选项中要选择出 $\boldsymbol{A}$ 的相似对角矩阵，这就要看哪个矩阵能表示为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$. 所以除选项 A 之外的三个矩阵都不可表示为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=$

(　　)

(A) $4(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$;　　　　(B) $\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$;

(C) $\pm\frac{1}{2}\boldsymbol{E}$;　　　　(D) 不能确定.

分析　按照逆矩阵的定义,若存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{B}$ 即为 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$.

解　应选 B.

由 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 得 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=4\boldsymbol{E}$. 即 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=4\boldsymbol{E}$, 亦即 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\left[\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E}$, 所以 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$.

点评　也可以用选项中的矩阵与$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$相乘,乘积矩阵为单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的,选之. 例如: $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}+4\boldsymbol{E})=\frac{1}{4}(\boldsymbol{O}+4\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$, 其中用到已知条件 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$.

7. 正定实二次型的矩阵必是　　(　　)

(A) 实对称且所有元素为正数;

(B) 实对称且对角线上元素为正数;

(C) 实对称且各阶顺序主子式为正数;

(D) 实反对称且行列式值为正数.

分析　正定矩阵必是实对称矩阵,正定矩阵的充分必要条件是顺序主子式全大于零.

解　应选 C.

正定矩阵的所有元素不一定为正数,只要能保证顺序主子式为正数即可,故选项 A 不对. 副对角线上的元素为负数的实对称矩阵有可能是正定矩阵,故选项 B 不对;而反对称矩阵主对角线上的元素全为零,不可能是正定矩阵,所以选项 D 也是不对的.

点评　正定矩阵为实对称且主对角线上的元素为正数,选项 B 中只说对角线上元素为正数,就包括了副对角线的元素. 所以在选择各选项时,要特别仔细,常常对错仅在一字之差.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 实矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$，则 (　　)

(A) $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 的行列式值不为零；

(B) $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 必与单位矩阵相似；

(C) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的行列式值不为零；

(D) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 必与单位矩阵相似．

分析　矩阵 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 是 n 阶方阵，且方程组 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组，故系数矩阵的秩相同，即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$. 而矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵，无从由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$ 说明什么．

解　应选 A.

由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 反之若 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$；故实向量 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由此证得方程组 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组，故有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$，所以方阵 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 的行列式 $|\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|\neq 0$.

由于 $(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 为实对称矩阵，必可相似对角化，即与对角矩阵相似，而相似对角矩阵一般不是单位矩阵．故选项 B 不对．而选项 C 和 D 中矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵，由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$ 这一条件无法判断其是否满秩，而且“实对称矩阵必与单位矩阵相似”的说法也是不对的．

点评　只有正定矩阵才能与单位矩阵合同．一个满秩的方阵与单位矩阵只能是等价的关系，即存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$. 也就是说，可逆矩阵可经初等变换成为标准形 $\boldsymbol{E}$.

9. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，则 (　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 未必能被 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出；

(B) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 必能被 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可被 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出；

(D) 以上全不对．

分析　涉及向量组的相关性问题．线性无关的向量组中的每个向量都不可以由其余向量线性表出，线性相关的向量组中至少有一个向量可由其余向量线性表出．

解　应选 B.

由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，有 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 一定可由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不可能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，当然不能被 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出.

点评　要熟练掌握有关向量组线性相关性的定理、推论及性质，并能灵活运用.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = m$，且方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解，则　　　　(　　)

(A) 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}(\forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^n)$ 有唯一解；

(B) $m \neq n$；

(C) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关；

(D) 以上都不对.

分析　有关齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 解的情况，应熟记当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$ 时方程组有唯一零解，当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < n$ 时方程组有非零解.

解　应选 A.

由方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解及 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = m$ 可知 $m = n$，所以系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是满秩方阵，于是 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的唯一解.

点评　齐次线性方程组解的情况及非齐次线性方程组解的情况，也是必须熟练掌握且运用的内容.

二、填空题

1. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 均为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{ABCD} = \boldsymbol{E}$，则

$$(\boldsymbol{BC})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{DA})^{\mathrm{T}} = \underline{\qquad\qquad}.$$

分析　运用转置运算法则及逆矩阵的概念.

解　应填 E.

由于 $(\boldsymbol{BC})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{DA})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{DABC})^{\mathrm{T}}$，已知 $\boldsymbol{ABCD} = \boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{ABC})^{-1}$，故有 $(\boldsymbol{DABC})^{\mathrm{T}} = [(\boldsymbol{ABC})^{-1}(\boldsymbol{ABC})]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$.

点评　此题的关键是条件 $\boldsymbol{ABCD} = \boldsymbol{E}$ 的运用，除了上面的方法外，还可令 $\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{CD})^{-1}$，于是

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{BC})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{DA})^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{DABC})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{D}(\boldsymbol{CD})^{-1}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}} \\ &= (\boldsymbol{DD}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

2. 设 $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$，则 $x=$________.

分析 此题行列式为“箭式”行列式“|＼”，这种行列式的计算有固定的方法，即利用对角线上的元素将行列式化作三角行列式，从而得到行列式的值．

解 应填 $\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{c_1+(-x)c_i \to c_1} \begin{vmatrix} 1-3x^2 & x & x & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-3x^2 = -3,$$

解得 $x^2 = \dfrac{4}{3}$, $x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

点评 箭式行列式除了本题的形式外，还有∠，／|，＼| 的形式，一些 n 阶行列式在计算过程中会出现箭式行列式．出现这种形式的行列式，一定可以很方便地求出行列式的值，其方法就是利用行列式的性质，以对角线上的元素将一条“边”化为零元素，使行列式变成三角行列式即可得到行列式的值．

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^2 - 5\boldsymbol{A} + 6\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是________.

分析 此类问题可有两种方法去求，一种是变换题设中的等式，推导出矩阵的特征多项式，由此得到特征值；另一种是由矩阵的特征值和矩阵多项式的特征值的关系来求出特征值．

解 应填 2 或 3.

方法 1 已知 $\boldsymbol{A}^2 - 5\boldsymbol{A} + 6\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，故 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O}$，两边取行列式为 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}||\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}| = 0$，则

$$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}| = 0 \text{ 或 } |\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}| = 0,$$

即 $\quad |2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{0}$ 或 $|3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{0}$，从而 $\lambda=2,3$.

方法 2 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，由 $\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 有 $\lambda^2-5\lambda+6=0$，即 $(\lambda-2)(\lambda-3)=0$，故 $\lambda=2,3$，并可证得特征值 2 的重数与特征值 3 的重数之和为 n.

点评 可以证出特征 2 的重数为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})$，特征值 3 的重数为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$，且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=n$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 2 或 3. 由于是填空题，所以省略证明.

4. 设 V 为全体 3 阶实方阵构成的线性空间，则由所有 3 阶反对称实方阵构成的子空间的一组基为________.

分析 如线性空间中的一个向量组为线性无关的向量组，且线性空间中任一向量都可由这个向量组线性表出，则这个线性无关的向量组为线性空间的一组基. 根据这个定义，并注意 3 阶反对称矩阵的形式，由此可确定所求的基.

解 应填 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

记 3 阶反对称实方阵构成的子空间为 $\boldsymbol{W}$，$\forall \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{W}$，取 $\boldsymbol{W}$ 中矩阵

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

则由

$$\begin{aligned} & k_1\boldsymbol{A}_1+k_2\boldsymbol{A}_2+k_3\boldsymbol{A}_3 \\ = & k_1\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & k_1 & k_2\\ -k_1 & 0 & k_3\\ -k_2 & -k_3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得 $k_1=k_2=k_3=0$，因此 A_1，A_2，A_3 线性无关．又，可由

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$
$$=a\boldsymbol{A}_1+b\boldsymbol{A}_2+c\boldsymbol{A}_3,$$

即 W 中任一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可由 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{A}_3$ 线性表出，故 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{A}_3$ 可作为 W 的一组基．

点评 确定子空间 W 的基，关键在于 W 中元素的形式，由于 $\forall\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{bmatrix}\in \boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{A}$ 中需要确定的是 a，b，c，由此想到一组基中应该含向量的个数，并且 W 中的基不唯一，但每组基中含向量的个数是相同的，这个数即是线性子空间 W 的维数．

5. 向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，则向量 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}$ 在该基下的坐标为________．

分析 求出 $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 中的 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，即是向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 下的坐标．

解 应填 $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$．

设 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 为向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 下的坐标，则由 $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$，

得
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})^{-1}\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

点评 用初等行变换的方法求，即

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

由于题设的向量数字比较简单，所以有时通过观察也可凑出所求的坐标，即

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

6. 设 V 为线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_i \in V\ (i = 1, 2, \cdots, 5)$，$V$ 的 3 个线性子空间 $W_1 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，$W_2 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$，$W_3 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_5)$ 的维数分别为 3, 3, 4，则 $W_1 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4 - \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3)$ 的维数为________.

分析 由一组向量的生成子空间的维数是这组向量的极大无关组含向量的个数，这是解决此问题的关键.

解 应填 4.

由 $W_1 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 的维数为 3 可知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，由 $W_2 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 的维数为 3 可知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，记 $\boldsymbol{\alpha}_4 = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3$. 再由 $W_3 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_5)$ 的维数为 4 可知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关. 又因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_5) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_5)$$

$$\xrightarrow{\text{初等列变换}} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5),$$

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关．于是有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4 - \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3)$$

$$\xrightarrow[(\boldsymbol{\alpha}_4 = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3)]{\text{初等列变换}} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5),$$

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4 - \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,故由这组向量生成子空间的维数为 4.

点评　这里用了初等变换不改变矩阵的秩的方法,并且矩阵的秩等于其列向量组的秩,再由列向量组的秩和向量组向量的个数来判定向量组的线性相关性．

三、计算题

1. 计算分块矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行列式,其中

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ 2\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

分析　分块对角矩阵的行列式按拉普拉斯展开定理展开,然后计算子块的行列式．

解　先计算子块 $\boldsymbol{A}$ 的行列式,即

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i + r_1 \to r_i}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!,$$

于是

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{B}| &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ 2\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot (-1)^{n(2n+1)} \cdot |2\boldsymbol{A}| \\ &= (-1)^n \cdot 2^n |\boldsymbol{A}|^2 = (-2)^n (n!)^2. \end{aligned}$$

点评 对于二阶分块矩阵的行列式,可记住以下公式:

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 为 m 阶方阵,则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,$$

其中第 2 个公式,据拉普拉斯展开定理,有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} &= |\boldsymbol{A}| \cdot (-1)^{1+2+\cdots+n+(m+1)+(m+2)+\cdots+(m+n)} \cdot |\boldsymbol{B}| \\ &= (-1)^{2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+mn} |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \\ &= (-1)^{mn} |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|. \end{aligned}$$

用这个公式,得 $|\boldsymbol{B}| = (-1)^{n^2} |\boldsymbol{A}||2\boldsymbol{A}| = (-1)^{n^2} 2^n (n!)^2$.

2. 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,且满足方程 $\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,试求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

分析 解矩阵方程,用矩阵运算性质及有关 $\boldsymbol{A}^*$ 的公式写出未知矩阵的表达式,然后再计算.

解 由于 $|\boldsymbol{A}| = -1 \neq 0$,所以 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵. 又,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|$

$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{E}$，将等式 $\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{E}$ 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$，右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得

$$-\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} - 9\boldsymbol{E}, \qquad \text{即 } (2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})\boldsymbol{B} = 9\boldsymbol{E}.$$

由于

$$|2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0,$$

所以 $(2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})^{-1}$ 存在，故

$$\boldsymbol{B} = 9(2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})^{-1},$$

由

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

得 $$(2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{故 } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}.$$

点评　由题目给出的矩阵方程写出未知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的表达式的方法很多，此题也可先移项，得出 $(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 9\boldsymbol{E}$，然后得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= 9(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = 9[\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^*)]^{-1} = 9(2\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^{-1} \\ &= 9(2\boldsymbol{A} - |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})^{-1} = 9(2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})^{-1}, \end{aligned}$$

此前先假定矩阵 $2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^*$ 是可逆的.

3. 问：a 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - ax_2 - 2x_3 = -1, \\ x_1 \quad x_2 + ax_3 = 2, \\ 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$$

有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解的情况下用基础解系表示其通解．

分析 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})$ 时方程组无解，当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=n$ 时方程组有唯一解，当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})<n$ 时方程组有无穷多解．

解 $$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}1 & -a & -2 & -1\\ 1 & -1 & a & 2\\ 5 & -5 & -4 & 1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -a & -2 & -1\\ 0 & a-1 & a+2 & 3\\ 0 & 0 & -5a-4 & -9\end{bmatrix}.$$

$a=-\dfrac{4}{5}$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，$\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组无解；

$a\neq-\dfrac{4}{5}$，且 $a\neq1$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组有唯一解；

$$a=1\text{ 时，}\overline{\boldsymbol{A}}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & -9 & -9\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})<3$，方程组有无穷多解．

由于 $\overline{A}$ 的规范阶梯形对应

$$\begin{cases}x_1=1+x_2,\\ x_2=\quad\ \ x_2,\\ x_3=1,\end{cases}$$

所以方程组的通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},$$

其中 k 为任意常数．

点评 特别要注意的是增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 化作阶梯形矩阵后第3行与第2行甚至第1行中都有含参数 a 的元素，所以在考虑 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 和 $\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})$ 时不能仅看第3行．此题当 $a\neq-\dfrac{4}{5}$ 且 $a\neq1$ 时方程组有唯一解，很容

易忘记考虑 $a \neq 1$ 时的情况．

4. 用正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化二次型

$$f = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为标准形，并写出相应的正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

分析 此为用正交变换化二次型为标准形的规范形的题目，其顺序为先写出二次型对应的实对称矩阵，求其特征值与对应的线性无关的特征向量，然后将其正交化、单位化，写出正交变换及二次型的标准形．

解 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1 - r_2 \to r_1} (\lambda - 2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda - 6 & -2 \\ -2 & -4 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 10\lambda + 16) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 8).$$

由 $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$，得特征值 $\lambda = 2, 2, 8$.

当 $\lambda = 2$ 时，解齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，有

$$2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

对应于

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - x_3, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = \qquad x_3, \end{cases}$$

得线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

当 $\lambda = 8$ 时,由齐次线性方程组 $(8\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 可得

$$8\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

对应于

$$\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = x_3, \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

的特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化为向量

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

再单位化,并将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化,得正交矩阵

$$P=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

通过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，二次型化为标准形

$$f=2y_1^2+2y_2^2+8y_3^2.$$

点评 以上是解此类题目的详细全过程，值得注意的是特征多项式即3阶行列式的求法．由于主对角线上元素都含 λ，所以要想方设法用行列式的性质提出一个因式 $(\lambda-\lambda_1)$，则行列式即是关于 λ 的二次多项式，这时就很容易分解了．尽量不要用对角线法，否则得出的是关于 λ 的三次多项式，这既不易分解又易出错．

5. 在线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中给定两组基：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$$

及

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}.$$

(1) 求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$；

(2) 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的坐标．

分析 此类题目只要记住基变换公式和坐标变换公式，便可将题设条件对号入座进行计算．

由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 的基变换公式为

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{C}.$$

记向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}$，在基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}'$，则

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}' \text{ 或 } \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}.$$

解 (1) 由 $(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{C}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C} &= (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)^{-1}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 由 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的坐标为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

点评 计算过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$ 时，用初等变换的方法最简单.

四、证明题

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称方阵，$k \geqslant 2$ 为正整数，$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{O}$. 证明：$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

分析 由条件 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{O}$ 想到 $\boldsymbol{A}$ 与其相似对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 有关系式 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$，而因 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，使关系式必然成立，由此推出 $\boldsymbol{A}$ 的特

征值全为零．再由 $\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{O}$ 推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证 由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，故可对角化，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix} \quad 即\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

故有

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}^k\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{O},$$

所以

$$\begin{bmatrix}\lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k\end{bmatrix}=\boldsymbol{O},\ 有\ \lambda_i=0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ 即$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{O}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{O}.$$

点评 证明过程中，因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\xlongequal{记}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，

故 $\boldsymbol{A}^k=\underbrace{(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})\cdots(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})}_{k个}$，根据矩阵乘法的结合律，得到 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$，这个关系式是证明此题的关键．

2. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 证明：对任意实数 k，矩阵 $(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})$ 是可逆矩阵，并求其逆矩阵．

分析 此题只有依照逆矩阵的定义，设法找出与矩阵 $(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})$ 相乘等于单位矩阵的那个矩阵，即是 $(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})$ 的逆矩阵，由此也就证明

了 $(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})$ 是可逆矩阵．

证 由于 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})[\boldsymbol{A}+(2-k)\boldsymbol{E}]+[2-2k+k^2]\boldsymbol{E}$，由 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 可得

$$(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})[\boldsymbol{A}+(2-k)\boldsymbol{E}]=-(k^2-2k+2)\boldsymbol{E}.$$

因为 $k^2-2k+2=(k-1)^2+1\neq 0$，所以有

$$(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})\frac{\boldsymbol{A}+(2-k)\boldsymbol{E}}{-(k^2-2k+2)}=\boldsymbol{E},$$

故 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 可逆，且

$$(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{-\boldsymbol{A}+(k-2)\boldsymbol{E}}{k^2-2k+2}.$$

点评 类似于多项式的除法，可用矩阵多项式 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 除以矩阵多项式 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$，得到商为 $\boldsymbol{A}+(2-k)\boldsymbol{E}$，余 $(2-2k+k^2)\boldsymbol{E}$. 因此得到等式

$$\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})[\boldsymbol{A}+(2-k)\boldsymbol{E}]+(2-2k+k^2)\boldsymbol{E}.$$

五、应用题

设某省人口总数保持不变，每年有 20%的农村人口流入城镇，有 10%的城镇人口流入农村．试问：该省的城镇人口和农村人口的分布最终是否会趋于一个稳定状态？并说出你的理由．

分析 设 $\boldsymbol{x}_n=\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$ 为该省第 n 年人口分布情况，其中 a_n，b_n 分别代表第 n 年农村与城镇人口数. 可利用矩阵乘法建立第 n 年与第一年人口分布关系，然后判断 $\boldsymbol{x}_n$ 的极限是否存在．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n$ 定义为 $\begin{bmatrix}\lim\limits_{n\to\infty}a_n\\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n\end{bmatrix}$.

解 设 a_n，b_n 分别为第 n 年农村与城镇人口数，$\boldsymbol{x}_n=\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$，据题

意有

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0.8a_n + 0.1b_n, \\ b_{n+1} = 0.2a_n + 0.9b_n, \end{cases}$$

令
$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix},$$

则
$$x_{n+1} = Ax_n = A^2x_{n-1} = \cdots = A^nx_1 .$$

由 $|\lambda E - A| = (\lambda - 0.7)(\lambda - 1) = 0$，得特征值 $\lambda = 0.7, 1$，故 A 可对角化，对应于 $\lambda = 0.7, 1$ 的特征向量分别为 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，即存在可逆矩阵 $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，使 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0.7 & \\ & 1 \end{bmatrix}$，

所以
$$A^n = P\begin{bmatrix} 0.7^n & \\ & 1 \end{bmatrix}P^{-1},$$

从而

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= A^nx_1 = P\begin{bmatrix} 0.7^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P^{-1}x_1 \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.7^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0.7^n\right)a_1 + \left(-\frac{1}{3} \times 0.7^n + \frac{1}{3}\right)b_1 \\ \left(-\frac{2}{3} \times 0.7^n + \frac{2}{3}\right)a_1 + \left(\frac{1}{3} \times 0.7^n + \frac{2}{3}\right)b_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

按照原题提示的方法取极限：

$$\lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}b_1 \\ \frac{2}{3}a_1 + \frac{2}{3}b_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ 2a_1 + 2b_1 \end{bmatrix},$$

所以该省的城镇人口的分布会趋于一个稳定状态，最终城镇人口和农村人口各占总人口的$\frac{2}{3}$和$\frac{1}{3}$.

试卷(二)考核内容分值表

考核内容	行列式及其计算	矩阵及其运算	向量与线性方程组	线性空间与线性变换	特征问题与相似对角矩阵	实二次型
分值	13	33	22	15	6	11