

2016 级多元函数微积分 参考答案

一、求曲面 $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ 上点 $(1,1,1)$ 处的切平面与法线方程。

解：记曲面方程为

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3 = 0$$

有

$$\begin{cases} F_x = 3x^2 = 3 \\ F_y = 3y^2 = 3 \\ F_z = 3z^2 = 3 \end{cases}$$

故

$$\vec{n} = (1, 1, 1)$$

故切平面方程为

$$(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$$

或

$$x + y + z = 3$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

二、求函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ 在条件 $x^2 + y^2 \leq 1$ 下的最大、最小值。

解：先证明，最大值一定在边界上取到。用反证法，假设在圆域内部一点取到最大值，则过该点作平行于 y 轴直线，与圆的上侧交点处函数值必大于该点处函数值，矛盾！故最大值一定在边界处取到。

构造拉格朗日函数

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - x + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

令

$$\begin{cases} L_x = 2x - 1 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 4y + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

故最大值为 $\frac{9}{4}$ 。

再证明, 最小值一定于直线 $y = 0$ 上取到。用反证法, 假如在 $y = k (k \neq 0)$ 上取得一最小值点, 那么过该点作平行于 y 轴直线, 于 $y = 0$ 的交点处的函数值一定比这一点小, 矛盾! 故最小值一定于直线 $y = 0$ 上取得。即求

$$g(x) = x^2 - x, x \in [-1, 1]$$

的最小值, 容易知道最小值在 $x = \frac{1}{2}$ 处取, 为 $-\frac{1}{4}$ 。

(注: 也可以直接用 $y^2 = 1 - x^2$ 代换, 变为求一元函数最值问题)

三、计算下列二重积分:

(1) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq R^2 (R > 0)$;

解: 作极坐标换元, 故原式可写为

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2}.$$

(2) $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, $D: x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.

解: 直接化为累次积分

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y) dy = \frac{1}{4}.$$

四、计算下列三重积分:

(1) $\iiint_V (x + y + z)^2 dx dy dz$, 其中 $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$;

解: 先展开, 由奇偶性知

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) dx dy dz = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

此时, 作球坐标换元

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4\pi}{5}.$$

(2) $\iiint_V z dx dy dz$, V 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 与抛物面 $x^2 + y^2 = 2z$ 围成的区域。

解: 先解出其交线在 xy 平面上的投影

$$D: x^2 + y^2 \leq 2$$

作柱坐标换元, 得

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} z dz = 2\pi \cdot \int_0^{\sqrt{2}} r \left(\frac{3-r^2}{2} - \frac{r^4}{8} \right) dr = \frac{5\pi}{3}.$$

五、计算下列曲线积分

(1) 计算曲线积分 $I = \int_L x^2 y dx$, 其中 L 为抛物线 $y = 1 - x^2$ 上, 从点 $A(-1, 0)$ 到 $B(1, 0)$ 的有向弧;

解：直接化为定积分

$$I = \int_{-1}^1 x^2(1-x^2)dx = \frac{4}{15}.$$

(2) 求 $I = \iint_S f(x, y, z) dS$, 其中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$,

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, & z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0, & z < \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

解：首先化简积分形式

$$I = \iint_{S'} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dS$$

其中 S' 为球面被锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所截的部分，化为二重积分

$$I = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = a S_D = \frac{\pi a^3}{2}.$$

六、求曲线积分

$$\oint_L \frac{xdy - (y-1)dx}{6x^2 + (y-1)^2}$$

其中 L 是以 $(0,0)$ 为中心， $R (R > 0, R \neq 1)$ 为半径的圆周，取逆时针方向。

解：容易发现

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(y-1)^2 - 6x^2}{[6x^2 + (y-1)^2]^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

故分类讨论，当 $R < 1$ 时，此时满足格林公式的条件，故

$$I = 0$$

当 $R > 1$ 时，此时 L 所围区域内包含不可导点 $(0,1)$ ，故以该点为中心，作椭圆

$$C: 6x^2 + (y-1)^2 = \epsilon^2$$

使椭圆完全包含于圆域内部，对两曲线所夹部分用格林公式，得

$$I = \oint_{L+C} - \oint_{C^-} = \oint_C \frac{1}{\epsilon^2} [xdy - (y-1)dx]$$

故此时在椭圆域上用格林公式

$$I = \frac{1}{\epsilon^2} \iint_D 2d\sigma = \frac{2\pi}{\epsilon^2} \cdot \frac{\epsilon^2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}\pi.$$

七、设 Σ 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 0, z = 3$ 所围成的闭区域的边界曲面外侧，求

$$I = \oiint_{\Sigma} (x-y) dx dy + (y-z) x dy dz$$

解：容易发现

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y - z$$

且没有偏导数不连续点。在所求区域内，应用高斯公式，有

$$I = \iiint_V (y - z) dx dy dz$$

化为累次积分，得到

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^3 (r \sin \theta - z) dz = -\frac{9\pi}{2}.$$

八、求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 被平面 $2x + 2y + z = R (R > 0)$ 所截两部分的面积。

解：先求出原点到该平面的距离

$$d = \frac{R}{3}$$

故所求面积等价于，平面 $z = \frac{R}{3}$ 截该球面的面积，即

$$S = \iint_S dS$$

其中， S 在 xy 面上的投影为

$$D: x^2 + y^2 \leq \frac{8R^2}{9}$$

而

$$\begin{cases} z_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ z_y = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{cases}$$

故

$$S = \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

化为累次积分

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{2\sqrt{2}R}{3}} \frac{R\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho = \frac{4}{3}\pi R^2$$

而另一部分的面积为

$$S' = S_{\Sigma} - S = 4\pi R^2 - \frac{4}{3}\pi R^2 = \frac{8}{3}\pi R^2.$$