2018 级多元函数微积分 参考答案

一、求曲面$x^2+y^2+z^3=1$上点$(1,1,-1)$处的切平面与法线方程。

解：记曲面方程为

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^3-1=0$$

有

$$\begin{cases}F_x=2x=2\\F_y=2y=2\\F_z=3z^2=3\end{cases}$$

故

$$\vec{n}=(2,2,3)$$

故切平面方程为

$$2(x-1)+2(y-1)+3(z+1)=0$$

或

$$2x+2y+3z=1$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{3}.$$

二、求函数$f(x,y,z)=(x+2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2$在条件$x^2+y^2+z^2\le 1$下的最大、最小值。

解：先证明，最值一定在边界上取到。不妨先证明最大值的情况。用反证法，假设在球域内部一点取到最大值，连接该点与点$(-2,-2,1)$，这条直线与球面$x^2+y^2+z^2=1$必有两个交点，对于远离$(-2,-2,1)$的交点，它到这一点的距离比球内部的点还要大，自然$f(x,y,z)$不会在球域内部取得最大值，最小值亦然。

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=(x+2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

令

$$\begin{cases}L_x=2x+4+2\lambda x=0\\L_y=2y+4+2\lambda y=0\\L_z=2z-2+2\lambda z=0\\L_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{2}{3} \\ y = \pm\dfrac{2}{3} \\ z = \mp\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

故最大值为 16，最小值为 4.

（注：事实上，如果关注到$f(x,y,z)$与两点间距离公式的类似性，可以认为它描绘了空间中的点到点$(-2,-2,1)$距离的平方，毫无疑问，在球面上找一点与给定点距离最长与最短，自然是“点到球心距离$\pm$半径”。）

三、计算下列二重积分：

(1) $\iint_D |x^2+y^2-1| dxdy$, 其中$D: x^2+y^2 \le 4$；

解：先分类去掉绝对值号，即

$$D = D_1 + D_2$$

$$D_1: x^2+y^2 \le 1$$

$$D_2: 1 < x^2+y^2 \le 4$$

作极坐标换元，故原式可写为

$$I = \iint_{D_1} (1-x^2-y^2)dxdy + \iint_{D_2} (x^2+y^2-1)dxdy$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2)rdr + \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_1^2 (r^2-1)rdr = 5\pi.$$

(2) $\iint_D (x+y)\, dxdy\,, D: x+y \le 2, x \ge 0, y \ge 0.$

解：直接化为累次积分

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x+y)dy = \frac{8}{3}.$$

（注：如果实在难以割舍对对称性的渴求，也可以作这样的变量替换

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = y \end{cases}$$

它的雅可比行列式为 1，事实上这是一个剪切变换，故原式就化为

$$I = \iint_{D'} ududv = \int_0^2 du \int_0^u udy = \frac{8}{3}.$$

这样计算亦可。）

四、计算下列三重积分：

(1) $\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz$, 其中$V: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1, a, b, c > 0$；

解：作广义球坐标换元

$$\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = cr\cos\varphi \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^1 r^4 dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4\pi}{5}.$$

(2) $\iiint_V (1+z^3)dxdydz$, V是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=1$围成的区域。

解：利用柱坐标换元，将原积分写为

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^1 (1+z^3)dz = 2\pi.$$

五、计算下列曲线积分与曲面积分

(1) 设C为曲线$y=\sqrt{\pi}x^2$从$O(0,0)$到$A(1,\sqrt{\pi})$的曲线段，求$\int_C \cos y^2\, dx - 2xy\sin y^2\, dy$；

解：注意到

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y\sin y^2 = \frac{\partial P}{\partial y}$$

故该积分与路径无关，得

$$\int_C \cos y^2\, dx - 2xy\sin y^2\, dy = \int_C \cos y^2\, dx + xd(\cos y^2) = \int_C d(x\cos y^2)$$

记$F(x,y) = x\cos y^2$，故原积分为

$$I = F(1,\sqrt{\pi}) - F(0,0) = -1.$$

(2) 求$I=\iint_S z^3 dS$, 其中S为球面$x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$，在第一卦限的部分。

解：直接化为二重积分

$$I = \iint_D (R^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$= R\iint_D (R^2-x^2-y^2)dxdy$$

再化为极坐标，故

$$I = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R (R^2-r^2)rdr = R\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{8}R^5.$$

六、求曲线积分

$$\oint_L \frac{(x+4y)dy + (x-y)dx}{x^2+4y^2}$$

其中L是单位圆$x^2+y^2=1$，取逆时针方向。

解：容易发现

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{4y^2-x^2-8xy}{(x^2+4y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

但此时L所围区域内包含不可导点$(0,0)$，故以该点为中心，作椭圆

$$C: x^2 + 4y^2 = \epsilon^2$$

使椭圆完全包含于圆域内部，对两曲线所夹部分用格林公式，得

$$I = \oint_{L+C} - \oint_C = \oint_C \frac{1}{\epsilon^2}[(x+4y)dy + (x-y)dx]$$

故此时在椭圆域上用格林公式

$$I = \frac{1}{\epsilon^2}\iint_D 2d\sigma = \frac{2\pi}{\epsilon^2}\cdot\frac{\epsilon^2}{2} = \pi.$$

七、设Σ是曲面$z = \sqrt{4-(x^2+y^2)}$的外侧，求

$$I = \iint_\Sigma xydydz + xdzdx + x^2dxdy$$

解：容易发现该曲面是一球面的上半面，而

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y + 0 + 0 = y$$

且没有偏导数不连续点。在所求区域内，补面用高斯公式，在xy面上补充平面

$$C: x^2 + y^2 \le 4$$

取下侧，有

$$I = \oiint_{\Sigma+C} - \iint_C = \iiint_V ydxdydz + \iint_{C^+} x^2dxdy$$

当然，注意到积分区域V关于xz平面对称，故第一个积分为零。将第二个积分化为累次积分，得到

$$I = 0 + \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^2 r^2\cos^2\theta\, rdr\ = 4\pi.$$

八、设Ω是由曲面$x^2 + (y-z)^2 = 4, z = 0, z = 1$围成的立体区域，求三重积分

$$\iiint_\Omega (y-z)^2z^2dxdydz$$

解：先作换元

$$\begin{cases} u = x \\ v = y - z \\ w = z \end{cases}$$

其雅各比行列式为

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

故原积分化为

$$I = \iiint_V v^2w^2dudvdw$$

其中V为

$$V:\begin{cases} u^2+v^2\le 4 \\ 0\le w\le 1 \end{cases}$$

故

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_0^1 r^2\cos^2\theta\, w^2dw=\frac{4\pi}{3}.$$