试卷(四)详解

一、单项选择题

1. 设矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{i_j})_{r\times r}$, $\boldsymbol{C}=(c_{i_j})_{r\times n}$, 且 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{O}$, 以下正确答案是 ( )

(A) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})<r$, 则有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$;

(B) 若 $\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{O}$, 则有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$;

(C) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=r$, 则有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$;

(D) 得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$.

分析 当矩阵 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{O}$ 时,不存在“$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 至少有一个零矩阵”的情况,所以选项 B, D 的结论是错误的,排除之. 只有通过 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})$ 的情况来证明或推导出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 才能选择出正确的结论.

解 应选 C.

若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=r$, 所以矩阵 $\boldsymbol{C}_{r\times n}$ 行满秩,从而存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{CQ}=(\boldsymbol{E}_r, \boldsymbol{Q}_{r\times n-r})$.

由 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{BCQ}=\boldsymbol{O}_{r\times n}$, 故

$$\boldsymbol{BCQ}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}_r, \boldsymbol{O})=(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{O})=(\boldsymbol{O}_r, \boldsymbol{O}_{r\times n-r}),$$

由相等矩阵的对应元素相等得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})<r$ 时,推导不出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 的结果.

点评 当矩阵 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{O}$ 时,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 有可能都是非零矩阵. 例如

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{O},\ 但\ \boldsymbol{BC}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

2. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$, 则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件是 ( )

(A) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$; (B) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$;

(C) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ (D) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$.

分析 非齐次线性方程组有无穷多解的充分必要条件.

解 应选 B.

n 元非齐次线性方程组有无穷多组解的充分必要条件是

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < n.$$

3. 下面正确的命题是 (　　)

(A) 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则其任一部分组也线性相关;

(B) 如果两个向量组等价,则它们所含向量的个数相同;

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分必要条件是其任一向量都不能由其余向量线性表出;

(D) 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r,则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 r 个向量都线性无关.

分析 4 个选项分别是 4 个概念:

其一是向量组与其部分组的相关性问题,即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则任一部分组也线性无关;向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的部分组线性相关,则向量组也线性相关.

其二是等价向量组的性质,即等价的向量组其秩相等;

其三是向量组线性无关的概念.

其四是向量组的秩及极大无关组的概念,即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r,则向量组的极大无关组含向量的个数为 r,向量组的极大无关组不唯一,但不是任意 r 个向量都可以是极大无关组.

解 应选 C.

可以用反证法证明此命题是正确的.

$\Rightarrow$ 假设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一个向量可由其余向量线性表出,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关. 此乃与条件 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关矛盾.

$\Leftarrow$ 假设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则其中至少有一个向量可由其余向量线性表出,这与条件任一向量都不能由其余向量线性表出矛盾.

故选项 C 是正确的.

点评 选项 C 中命题可作为向量组线性无关的性质定理,在有关的证明题中直接运用.

4. 设有两个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$,且 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t)$,以下正确的结论是 ( )

(A) 两个向量组等价;

(B) 当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 能由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出时,两个向量组等价;

(C) 当 $s = t$ 时,两个向量组等价;

(D) 当 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) + r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t)$ 时,两向量组等价.

分析 等价向量组与其秩的关系的结论:

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 等价 $\Rightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t)$.

解 应选 B.

设 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t) = r$,且 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 分别是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 的极大无关组,由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 能由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出知 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 线性表出,即有

$$(\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}) = (\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r})\boldsymbol{C}_{r\times r},$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 为表出系数矩阵,且 $r(\boldsymbol{C}) = r$.

事实上,由于$(\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r})$是$(\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r})$与 $\boldsymbol{C}$ 的乘积,因此有

$$r(\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}) \leqslant \min\{r(\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r}), r(\boldsymbol{C})\},$$

即

$$r \leqslant \min\{r, r(\boldsymbol{C})\}.$$

由此有 $r(\boldsymbol{C}) \geqslant r$,且 $\boldsymbol{C}$ 为 $r\times r$ 矩阵,只有 $r(\boldsymbol{C}) \leqslant r$. 故 $r(\boldsymbol{C}) = r$, $\boldsymbol{C}$ 为可逆矩阵. 所以有

$$(\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r}) = (\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r})\boldsymbol{C}^{-1},$$

此式表示 $\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 可互相线性表出，故两个向量组等价，又由于向量组与其极大无关组等价，据等价的传递性可推出向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 为等价向量组 .

点评 记住这一结论："等价向量组，其秩相等，反之不真". 要使逆命题成立，必须加强条件，即若两个向量组的秩相等，且其中一个向量组可由另一个向量组线性表出时，这两个向量组等价 . 等价的向量组与各自含向量的个数无关 .

5. 指出下列结论中一条错误的结论，错误的结论是(　　)设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，且

(A) 若行列式 $|\boldsymbol{A}|>0$，则 $\boldsymbol{A}$ 正定；

(B) 若 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在且正定，则 $\boldsymbol{A}$ 正定；

(C) 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于零，则 $\boldsymbol{A}$ 正定；

(D) 若 $\boldsymbol{A}$ 合同于单位矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 正定 .

分析 正定矩阵的定义为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全大于零 .

解 应选 A.

可以明显看出选项 A 与正定矩阵的定义不符，只有行列式 $|\boldsymbol{A}|>0$，不能保证其顺序主子式全大于零 .

点评 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于零与 $\boldsymbol{A}$ 合同于单位矩阵都是 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵的等价命题 . 而 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在且正定，说明 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值全大于零，因而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值的倒数也全大于零，故 $\boldsymbol{A}$ 也是正定矩阵，所以选项 B, C, D 都是正确的 .

6. n 阶矩阵可对角化的充分必要条件是　　(　　)

(A) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个相异的特征值；

(B) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有 n 个相异的特征值；

(C) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个相异的特征向量；

(D) $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值的重数与其对应的线性无关特征向量的个数相同 .

分析 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 .

解 应选 D.

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值时,必有 n 个线性无关的特征向量,则 $\boldsymbol{A}$ 必能对角化. 但 $\boldsymbol{A}$ 可对角化不一定必是因 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个相异的特征值,所以选项 A 只是矩阵可对角化的充分条件而不是必要条件.

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 s 个不同的特征值,它们的重数分别为 n_1, n_2, $\cdots$, n_s,且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$,那么任一特征值的重数与其对应的线性无关特征向量的个数相同,就是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个线性无关的特征向量,所以选项 D 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件.

点评 实际上 D 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的定理的推论,即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值的重数与其对应的线性无关特征向量的个数相同.

7. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是 ( )

(A) $\boldsymbol{A}$ 的任意两个列向量线性相关;

(B) $\boldsymbol{A}$ 的任意两个列向量线性无关;

(C) $\boldsymbol{A}$ 中必有一列向量是其余列向量的线性组合;

(D) $\boldsymbol{A}$ 中任一列向量都是其余列向量的线性组合.

分析 设齐次线性方程组的系数矩阵为 $m \times n$ 矩阵,则方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < n$,即 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关. 于是在 4 个选项中应选择:$\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关为其充分必要条件.

解 应选 C.

选项 A 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关的充分条件,不是必要条件;选项 B 本身就是错误结论;选项 D 也是错误结论. 因为线性相关的向量中不是任一向量都可以由其余向量线性表出的.

点评 正确结论:向量组线性相关,其中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

例如向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$ 线性相关. 因为存在不全为零的数 $-2, 1, 0$,使 $-2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出,所以线性相关的向量组中不是任一个向量都可由

其余向量线性表出的.

8. 下列向量集合中能构成向量空间的是 (　　)

(A) $V_1=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)\mid x_1+2x_2+3x_3=1,\ x_i\in\mathbb{R}\}$;

(B) $V_2=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\ 0,\ x_3)\mid x_1,\ x_3\in\mathbb{R}\}$;

(C) $V_3=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\ x_i\in\mathbb{R}\}$;

(D) $V_4=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)\mid x_1x_2x_3=0,\ x_i\in\mathbb{R}\}$.

分析 4 个选项中的向量集合均是线性空间$\mathbb{R}^3$的子集合,判断其是否构成$\mathbb{R}^3$的子空间,只要看子集合对于$\mathbb{R}^3$中的加法和数乘运算是否是封闭的.

解 应选 B.

$\forall\,\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in V_2$,则$\boldsymbol{x}=(x_1,\ 0,\ x_3)$,$x_1,\ x_3\in\mathbb{R}$,$\boldsymbol{y}=(y_1,\ 0,\ y_3)$,$y_1,\ y_3\in\mathbb{R}$. 因为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,\ 0,\ x_3+y_3),\ x_1+y_1,\ x_3+y_3\in\mathbb{R},$$

$$k\boldsymbol{x}=(kx_1,\ 0,\ kx_3),\ kx_1,\ kx_3\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{P},$$

所以$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V_2$,$k\boldsymbol{x}\in V_2$,$V_2$ 关于$\mathbb{R}^3$的加法和数乘运算封闭,故 V_2 构成向量空间,即$\mathbb{R}^3$的线性子空间.

再看选项 A:$\forall\,\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in V_1$ 有 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$,$x_1+2x_2+3x_3=1$,$\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)$,$y_1+2y_2+3y_3=1$. 因为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3),$$

而

$$\begin{aligned}&(x_1+y_1)+2(x_2+y_2)+3(x_3+y_3)\\=&(x_1+2x_2+3x_3)+(y_1+2y_2+3y_3)\\=&1+1=2,\end{aligned}$$

所以
$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\,\overline{\in}\,V_1,$$
V_1 对$\mathbb{R}^3$中的加法运算不封闭,故 V_1 不构成向量空间.

同理可得选项 C, D 中的 V_3,V_4 都不构成向量空间.

点评 在判断 V_1 是否是向量空间时,也可用 V_1 对$\mathbb{R}^3$中的数乘运算不封闭,或者$\mathbb{R}^3$中的零向量 $\mathbf{0}\,\overline{\in}\,V_1$,即 V_1 不满足基本运算律,从而

判断 V_1 不是向量空间,V_3, V_4 同理.

9. 设 $n(n\geqslant 3)$ 阶可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$,常数 $k\neq 0, \pm 1$,则 $(k\boldsymbol{A})^* =$ (　　)

(A) $k\boldsymbol{A}^*$; (B) $k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$;

(C) $k^n\boldsymbol{A}^*$; (D) $k^{-1}\boldsymbol{A}^*$.

分析 此题需要运用公式 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 进行运算得出结果.

解 应选 B.

由于 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,故有公式 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$, 于是

$$(k\boldsymbol{A})^* = |k\boldsymbol{A}|(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^n|\boldsymbol{A}|\cdot\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1} = k^{n-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*.$$

点评 看到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$,常会想到关于 $\boldsymbol{A}^*$ 的重要公式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$. 此题也可利用这个公式:

$$(k\boldsymbol{A})(k\boldsymbol{A})^* = |k\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,且 $k\neq 0$, 故 $k\boldsymbol{A}$ 也是可逆矩阵. 将上式两边左乘 $(k\boldsymbol{A})^{-1}$,得

$$(k\boldsymbol{A})^* = (k\boldsymbol{A})^{-1}|k\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}\cdot k^n|\boldsymbol{A}| = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*.$$

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个线性无关的部分组,若满足下列条件之一(　　),就称 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大线性无关组.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 等价;

(B) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少还存在一个与 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 有相同个数的线性无关的部分组;

(C) $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 不等价;

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中其余的每个向量都不可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出.

分析 熟悉向量组的极大无关组的概念及其性质.

解 应选 A.

因为向量组中的每一个向量都可由极大无关组线性表出,并且极

大无关组中的向量本身就是向量组的部分组，当然可由本向量组线性表出，所以向量组与其极大无关组可以互相线性表出，因此它们是等价的．

选项 C，D 是相反结论，显然不对．

选项 B 中结论不一定成立，例如向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ 的极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，不再存在其他与 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 个数相同的线性无关的部分组．

点评　一般情况下，向量组的极大无关组可以不唯一．例如向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}4\\1\\-1\end{bmatrix}$ 中，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$；$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 都是它的极大无关组．

当向量组中含有零向量，例如前面提到的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，它的极大无关组是唯一的．另外，若向量组本身线性无关，其本身就是它的极大无关组，此时向量组的极大无关组也是唯一的．

二、填空题

1. 设 ξ_1，ξ_2，ξ_3 为线性空间的一组基，写出由基 ξ_3，ξ_2，ξ_1 到基 ξ_1，$\xi_2+\xi_3$，$\xi_1+\xi_2+\xi_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{A}=$________．

分析　由基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_n$ 的基变换公式为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为过渡矩阵．

解　应填$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

因为

$$(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)=(\boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_1)\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

所以得到过渡矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

点评　由于基 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$ 中的每个向量都是基 $\boldsymbol{\xi}_3$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_1$ 的线性组合，组合系数明显，故可直接写出基变换公式中的过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{A}$ 中的每一列元素即是基 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$ 每个向量由基 $\boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_1$ 线性表示的表示系数．

2. 已知$\mathbb{R}^3$中的两个向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$，则与 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 都正交的单位向量是________．

分析　所求向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ 应满足 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x})=0$ 及 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{x})=0$，再将求出的向量 $\boldsymbol{x}$ 单位化．

解　应填$\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$.

设向量 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$，且满足

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x})=x_1+x_2+x_3=0,\\(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{x})=2x_1+x_2=0.\end{cases}$$

由 $$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix},$$

取 $$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix},$$

将其单位化为 $$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

点评 欧氏空间中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 正交的充要条件为 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$.

3. 已知 $f(x)=\begin{vmatrix}5&4&3&2&x&0\\4&3&2&-x&0&0\\3&2&x&0&0&0\\2&-x&0&0&0&0\\x&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&2\end{vmatrix}$，则 x^5 的系数为____.

分析 求 6 阶行列式 $f(x)=|\boldsymbol{a}_{ij}|_6$ 中某一项的值，选择不同行、不同列的 6 个元素，要求乘积含 x^5，然后根据 $(-1)^{\tau(j_1\cdots j_6)}\boldsymbol{a}_{1j1}\boldsymbol{a}_{2j2}\cdots\boldsymbol{a}_{6j6}$ 确定此项的符号及值.

解 应填 2.

记行列式为 $f(x)=|\boldsymbol{a}_{ij}|_6$，取不同行不同列的 6 个元素，此项为

$$(-1)^{\tau(543\,216)}a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}a_{66}=(-1)^{10}\cdot 2x^5=2x^5.$$

点评 此题也可用计算行列式的方法去求，即将行列式按第 6 行展开，即

$$f(x)=2\cdot(-1)^{6+6}\begin{vmatrix}5&4&3&2&x\\4&3&2&-x&0\\3&2&x&0&0\\2&-x&0&0&0\\x&0&0&0&0\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{\frac{5\times4}{2}}\cdot x^5=2x^5,$$

这个行列式的值就是 $2x^5$.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\3&1&5\end{bmatrix}$，其伴随矩阵的逆矩阵 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$________.

分析 用 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 代入后进行计算.

解 应填 $\frac{1}{10}\boldsymbol{A}$.

由于 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\3&1&5\end{vmatrix}=10$,

则
$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=\frac{1}{10}\boldsymbol{A}.$$

点评 此类型题目切记要用矩阵间的关系式及矩阵的运算性质去求，如果先求伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$，再求 $\boldsymbol{A}^*$ 的逆矩阵，将极其麻烦.

5. 已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，-1，2，则矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2$ 的特征值为________，行列式 $|\boldsymbol{B}|=$________.

分析 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式 $f(\boldsymbol{A})$，则当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ 时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $f(\lambda)$，且矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行列式的值等于其所有特征值的乘积.

解 应填 -1，-3，0；0.

记矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2=f(\boldsymbol{A})$，仍为 3 阶方阵，又因方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda=1$，-1，2，所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $f(\lambda)=\lambda^3-2\lambda^2$，即

$f(1)=1^3-2\times1^2=-1$，$f(-1)=(-1)^3-2\times(-1)^2=-3$，$f(2)=2^3-2\times2^2=0$，

从而
$$|\boldsymbol{B}|=(-1)\times(-3)\times0=0.$$

点评 利用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 与矩阵多项式 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值 $f(\lambda)$ 的关系求 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值，是最简单的方法.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=$________.

分析 由于$|\boldsymbol{A}|$是3阶范德蒙行列式，可直接得出行列式的值．再由方阵的行列式的性质将$|\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|$化为$|\boldsymbol{A}|^2$，即可得到结果．

解 应填$(b-a)^2(c-a)^2(c-b)^2$．

由于 $$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b),$$

则 $$|\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|^2=(b-a)^2(c-a)^2(c-b)^2.$$

点评 n阶范德蒙行列式

$$\boldsymbol{V}_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

在计算范德蒙行列式时，可根据上式直接写出行列式的值．

三、计算题

1. 已知3阶行列式的值为$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=a$，$\begin{vmatrix}d_1&c_1&b_1\\d_2&c_2&b_2\\d_3&c_3&b_3\end{vmatrix}=b$，

计算 $D=\begin{vmatrix}a_1+2d_1&a_2+2d_2&a_3+2d_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1+3b_1&c_2+3b_2&c_3+3b_3\end{vmatrix}$．

分析 利用行列式的性质计算行列式．

解 $$D=\begin{vmatrix}a_1+2d_1&a_2+2d_2&a_3+2d_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1+3b_1&c_2+3b_2&c_3+3b_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1+2d_1&a_2+2d_2&a_3+2d_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=a-2b.
$$

点评 本题要利用行列式的如下性质：如果行列式某行的各元素都是两个元素的和，则这个行列式等于两个行列式之和．D 中有两行的各元素都是两个元素的和，所以也可以两次运用这个性质，先按第 1 行分开成两个行列式之和，然后再按第 3 行分开，绝对不可以将两行同时分开成两个行列式之和．

错误做法：

$$
D=\begin{vmatrix} a_1+2d_1 & a_2+2d_2 & a_3+2d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1+3b_1 & c_2+3b_2 & c_3+3b_3 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2d_1 & 2d_2 & 2d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \end{vmatrix}
$$

$$
=a\neq a-2b.
$$

2. 计算$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^n$.

分析 此题为求方阵的幂 $\boldsymbol{A}^n$，可先求出 $\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}^3$，…，最后归纳得出 $\boldsymbol{A}^n$．也可利用 $\boldsymbol{A}$ 的特点用矩阵相乘的性质来求．

解 *方法 1* 证方阵为 $\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{A}$ 的各列元素成比例，故可将 $\boldsymbol{A}$ 表示为列向量与行向量的乘积．

记 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(1,-1,2)$，则

$$A = \alpha\beta^{T} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

于是 $A^n = \underbrace{(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)\cdots(\alpha\beta^T)}_{n个} = \alpha \underbrace{(\beta^T\alpha)(\beta^T\alpha)\cdots(\beta^T\alpha)}_{n-1个}\beta$,

由于 $$\beta^T\alpha = (1 \ -1 \ 2)\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -1,$$

所以 $$A^n = \alpha(-1)^{n-1}\beta^T = (-1)^{n-1}\alpha\beta^T = (-1)^{n-1}A.$$

方法 2 记 $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. 由 $A^2 = (-1)A$, 得

$$A^3 = (-1)A^2 = (-1)^2A, \cdots, A^n = (-1)^{n-1}A.$$

点评 列向量与行向量的乘积矩阵必各列各行对应成比例,所以若矩阵的各列各行成比例,就一定可分解为列向量与行向量的乘积.正因为题设矩阵的各列各行成比例,所以可有方法 1 中所述的解法.

3. 设有两个矩阵分别为 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, 求满足方程 $AX = 3X + B$ 的矩阵 X.

分析 解矩阵方程,先写出未知矩阵 X 的表达式,然后计算.

解 由 $AX = 3X + B$, 得

$$(A - 3E)X = B,$$

则 $$X = (A - 3E)^{-1}B.$$

$$(A - 3E \vdots B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

所以
$$X=\begin{bmatrix}1&1\\0&-2\\0&2\end{bmatrix}.$$

点评 用初等行变换求 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B}$ 比先求 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 的逆矩阵再求两矩阵的乘积要简单，不妨将这种方法作为求矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的常用方法.

4. 已知一个向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\2\end{bmatrix}$,
$$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}2\\5\\-1\\4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\-1\end{bmatrix},$$
求该向量组的一个极大线性无关组及该向量组的秩，并把其余向量表成极大线性无关组的线性组合.

分析 将向量组作为列组成矩阵，用矩阵的初等行变换化矩阵为阶梯形矩阵，可知向量组的秩和极大无关组，再继续用初等行变换化阶梯形矩阵为规范阶梯形矩阵，即可由此写出其余向量是极大无关组的线性组合的表示式.

解 记
$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&2&4&-1\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&\frac{3}{2}&0&1\\0&1&\frac{1}{2}&0&2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5) = 3$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 为向量组的一个极大无关组，并且

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, \ \boldsymbol{\alpha}_5 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3 .$$

点评 在由阶梯形矩阵化为规范阶梯形矩阵时，为避免出现分数，可根据矩阵中元素的特点，用如下方法：

$$\boldsymbol{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

由此可得 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 为向量组的一个极大无关组，并且

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = -3\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_3, \ \boldsymbol{\alpha}_5 = -5\boldsymbol{\alpha}_1 + 4\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_4 .$$

5. 讨论方程组 $\begin{cases} kx_1 + (k-1)x_2 + x_3 = 1, \\ kx_1 + kx_2 + x_3 = 2, \\ 2kx_1 + 2(k-1)x_2 + kx_3 = 2, \end{cases}$ 当 k 取何值时：

(1) 方程组无解？

(2) 方程组有唯一解？

(3) 方程组有无穷多解？并求出通解．

分析 求增广矩阵的秩．取 k 值，使 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \neq \mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})$ 时方程组无解；$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$ 时方程组有唯一解；$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}}) < 3$ 时方程组有无穷多解．

解 对方程组所对应的增广矩阵进行初等行变换：

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} k & k-1 & 1 & 1 \\ k & k & 1 & 2 \\ 2k & 2(k-1) & k & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} k & k-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k-2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} k & 0 & 1 & 2-k \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k-2 & 0 \end{bmatrix},$$

可知① 当 $k=0$ 时

$$r(\boldsymbol{A})=r\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}=2,\ r(\overline{\boldsymbol{A}})=r\begin{bmatrix}0&0&1&2\\0&1&0&1\\0&0&-2&0\end{bmatrix}=3,$$

因此方程组无解．

② 当 $k\neq0$，$k\neq-2$ 时

$$r(\boldsymbol{A})=r\begin{bmatrix}k&0&1\\0&1&0\\0&0&k-2\end{bmatrix}=3,\ r(\overline{\boldsymbol{A}})=r\begin{bmatrix}k&0&1&2-k\\0&1&0&1\\0&0&k-2&0\end{bmatrix}=3,$$

方程组有唯一解 $$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{2-k}{k}\\1\\0\end{bmatrix}.$$

③ 当 $k=2$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，则方程组有无穷多解．

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{bmatrix}2&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

得 $$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}x_3,\\x_2=1,\\x_3=\qquad x_3.\end{cases}$$

方程组的通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix},$$

其中 k 为任意实数．

点评 此题方程组对应的增广矩阵位于第 1 行第 1 列的元素无法

化作 1,因为是参数 k,故不能将第 1 行除以 k. 所以只能按解题中的方法化为阶梯形矩阵,在确定 k 值看 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, $\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})$时,不能只看第 3 行,也要顾及前两行中的 k 值.

6. 设四元二次型为 $f=-2x_1x_2-2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3-2x_2x_4-2x_3x_4$,求正交线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,将 f 化为标准形,并求出正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

分析 可用正交变换把实二次型化为标准形.

解 二次型 f 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1&-1&1\\-1&0&1&-1\\-1&1&0&-1\\1&-1&-1&0\end{bmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1&-1\\1&\lambda&-1&1\\1&-1&\lambda&1\\-1&1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&1&1&-1\\1&\lambda&-1&1\\1&-1&\lambda&1\\1&1&1&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&1&1&-1\\0&\lambda-1&-2&2\\0&-2&\lambda-1&2\\0&0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3(\lambda-3),$$

可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1,\ \lambda_4=3.$$

对 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$,解线性方程组 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,

$$-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

对应于

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 - x_4, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = \qquad x_3, \\ x_4 = \qquad\qquad x_4. \end{cases}$$

取对应的特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

正交化后为 $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$

单位化后为 $\boldsymbol{r}_1 = \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{r}_2 = \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$

$$\boldsymbol{r}_3 = \frac{\boldsymbol{\beta}_3}{|\boldsymbol{\beta}_3|} = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

对 $\lambda_4 = 3$，解线性方程组 $(3\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

$$3\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对应于

$$\begin{cases} x_1 = x_4, \\ x_2 = -x_4, \\ x_3 = -x_4, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

取对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，单位化后为 $\boldsymbol{r}_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，

故正交距阵 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，

正交变换为 $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{12}}y_3 + \frac{1}{2}y_4, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{12}}y_3 - \frac{1}{2}y_4, \\ x_3 = \frac{2}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{12}}y_3 - \frac{1}{2}y_4, \\ x_4 = \frac{3}{\sqrt{12}}y_3 + \frac{1}{2}y_4, \end{cases}$

故可将二次形 f 化为标准形：$f = -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + 3y_4^2$.

点评　这是一道规范的二次型化为标准形的题目，并注意特征多项式为 4 阶行列式，必须用行列式的性质计算之 .

四、证明题

1. 设有方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}$ 都是可逆矩阵，并求它们的逆矩阵．

分析 设法由题设方程中分解出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}$，证明其行列式不等于零，由此得出其为可逆矩阵，然后再找出与 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}$ 相乘得到单位阵的矩阵就是它们的逆矩阵．

证 由 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，可得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=10\boldsymbol{E},\text{ 且 }\boldsymbol{A}\left[\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E},$$

则有 $|\boldsymbol{A}|\left|\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\right|=1\neq 0$，所以 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵．

又因 $\boldsymbol{A}\left[\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})$．

另一方面，由 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 可有

$$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=6\boldsymbol{E},\text{ 从而 }(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=6\boldsymbol{E},$$

所以有
$$(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\left[\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E},$$

则有
$$|\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}|\cdot\left|\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\right|=1\neq 0,\ |\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}|\neq 0,$$

故 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵，并且

$$(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}).$$

点评 实际上，得到等式 $\boldsymbol{A}\left[\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E}$，即可知 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})$．这是根据矩阵可逆的充分必要条件定理的推论，即对 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，若有 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$．

2. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，且向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$

中任意 $m-1$ 个向量都线性无关．证明：一定存在 m 个全不为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$．

分析 欲证 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$ 中的 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 全不为零，且已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意 $m-1$ 个向量都线性无关，那么当其中某个 $k_i=0$，即可得到所有的 $k_1, \cdots, k_m$ 都等于 0，这与向量组是线性相关相矛盾．所以本题用反证法证明较好．

证 用反证法．

假设 $k_i=0(i=1, 2, \cdots, m)$，由 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$ 可有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，故 $k_1, k_2, \cdots, k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_m$ 全为零，即 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$，这与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关矛盾．

因此，$k_i\neq0(i=1, 2, \cdots, m)$．

点评 此题若不用反证法，亦可用以下方法证明：

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

其中必有 $k_m\neq0$．

事实上，若 $k_m=0$，则上式为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}=\mathbf{0},$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{m-1}$ 不全为 0，这与题设向量组中任意 $m-1$ 个向量都线性无关矛盾，所以 $k_m\neq0$．

同理可证 $k_i\neq0(i=1, 2, \cdots, m-1)$．

故存在 m 个全不为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

试卷(四)考核内容分值表

考核内容	行列式及其计算	矩阵及其运算	向量与线性方程组	线性空间与线性变换	特征问题与相似对角矩阵	实二次型
分值	13	31	30	6	9	11