姓名　　　学号　　　专业　　　任课教师

南开大学 2020 级“多元函数微积分（信）”结课统考试卷（A 卷） 2021 年 4 月 24 日

（说明：答案务必写在装订线右侧，写在装订线左侧无效。影响成绩后果自负。）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	卷面成绩	核分签名	复核签名
得分											

一题得分	

一、求曲面 $x^2+yx+e^z=3$ 上点 $(x,y,z)=(1,1,0)$ 处的切平面与法线方程.(本题 10 分)

解：设 $F(x,y,z)=x^2+yx+e^z-3$ 　$F_x'=2x+y$ 　$F_y'=x$ 　$F_z'=e^z$

在点 $(1,1,0)$ 处 　$F_x'=3$ 　$F_y'=1$ 　$F_z'=1$

$\therefore$ 切平面方程：$3(x-1)+y-1+z=0 \Longrightarrow 3x+y+z-4=0$

法线方程：$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$

二题得分	

二、求函数 $f(x,y)=xy^2(4-x-y)$ 在闭区域 $D=\{(x,\ y):x,y\ge 0,x+y\le 6\}$ 上的最大值、最小值（10 分）

解：当 $x+y<6$ 时，$f(x,y)=xy^2(4-x-y)$ 　$\frac{\partial f}{\partial x}=4y^2-2xy^2-y^3=0$ 　$\frac{\partial f}{\partial y}=8xy-2x^2y-3xy^2=0$

得 $x=1,y=2$ 或 $x=0,y=4$ 或 $y=0$, ~~x为~~ $0\le x\le 6$

$f(1,2)=4$ 　$f(0,4)=0$ 　$f(x,0)=0$

当 $x+y=6$ 时，$f(x,y)=-2xy^2=-2(6-y)y^2=-12y^2+2y^3$ 　$\frac{\partial f}{\partial y}=-24y+6y^2=0$

得 $y=0$ 或 $y=4$ 　$y=0$ 时 $f(x,y)=0$

$y=4$ 时 $f(x,y)=-64$

综上所述，$f(x,y)$ 的最大值为 4，最小值为 -64。

三题得分	

三、计算下列二重积分：（每小题 8 分）

（1）$\iint\limits_D (2x^2+y^2)dxdy$，其中 D：$0\le x\le 1, 0\le y\le 1$；

姓名	学号	专业	任课教师

（2）$\iint\limits_D (x^2+y^2)^2\,dxdy$，其中区域 D 为：$y^2+x^2 \le a^2, (a>0)$

解(1) 原式 $= \int_0^1 dx \int_0^1 (2x^2+y^2)dy = \int_0^1 (2x^2+\frac{1}{3})dx = (\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}x)\Big|_0^1 = 1$

(2) 原式 $= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^5 dr = 2\pi \times \frac{1}{6}a^6 = \frac{\pi a^6}{3}$

四、计算下列三重积分（每小题 8 分）：

四题得分	

（1）$I = \iiint\limits_\Omega (y+2z)\,dxdydz$，其中 Ω 为由平面 $z+x+y=1$ 与三个坐标面所围的区域；

解：已知 Ω：$x+y+z \le 1$，$x,y,z \ge 0$ 关于 $y=x, y=z, z=x$ 对称，

$\therefore \iiint\limits_\Omega (y+2z)dxdydz = 3\iiint\limits_\Omega y\,dxdydz = 3\int_0^1 dz \int_0^{1-z} y\,dy \int_0^{1-y-z} dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-z)^3 dz$

$= -\frac{1}{8}(1-z)^4\Big|_0^1 = \frac{1}{8}$

利用对称性.

(2) $I = \iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)z^2\,dxdydz$，其中 Ω 为柱面 $x^2+y^2=1$，与平面 $z=0, z=2$ 所围的区域。

解：原式 $= \int_0^2 z^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr$

$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3}z^3\Big|_0^2$

$= \frac{4\pi}{3}$

转换坐标.

草稿

姓名

学号

专业

任课教师

草稿区

五、计算下列曲线积分与曲面积分：（每小题 10 分）

五题得分	

（1）计算曲线积分 $\int_C x^2 y dx + 2xy dy$，其中 C 为抛物线 $y = x^2$，从O(0,0)到B(1,1)，的那一段弧线。

解：原式 $= \int_C x^2 \cdot x^2 dx + 2x \cdot x^2 \cdot 2x dx$

$= \int_0^1 5x^4 dx$

$= x^5 \big|_0^1 = 1$

（2）求曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} (y^4 + z^4) dS$，其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, (R > 0)$

解：由轮换对称性得：$\iint\limits_{\Sigma} y^4 dS = \iint\limits_{\Sigma} z^4 dS = \iint\limits_{\Sigma} x^4 dS$

$\therefore$ ~~原式~~ $I = \iint\limits_{\Sigma} 2y^4 dS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} y^4 dS$ 这里 Σ_1：$x^2+y^2+z^2=R^2$ $(R>0, z>0)$.

$\because z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ $\therefore dS = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dxdy$

$\therefore I = 4\iint\limits_{D_3} \frac{Ry^4}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dxdy$ $D: x^2+y^2 \le R^2$

$= 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{Rr^5 \sin^4\theta}{\sqrt{R^2-r^2}} dr = 4R\int_0^{2\pi} \sin^4\theta d\theta \int_0^R r^5 (R^2-r^2)^{-\frac{1}{2}} dr = 4\pi R \int_0^R -r^4 d(R^2-r^2)^{\frac{1}{2}}$

$= 4\pi R\left[(R^2-r^2)^{\frac{1}{2}} r^4 \big|_0^R - 3\int_0^R r^3 (R^2-r^2)^{\frac{1}{2}} dr\right.$

$= -4\pi R \int_0^R r^2 d(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}$ 运用分部积分公式.

$= -4\pi R \int_0^R (R^2-r^2)^{\frac{3}{2}} d(R^2-r^2)$.

$= -4\pi R \times \frac{2}{5} (R^2-r^2)^{\frac{5}{2}} \big|_0^R$

$= \frac{8\pi R^6}{5}$

六、（10 分）求曲线积分 $I = \oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$，其中 L 是以（0,1）为中心，2 为半径的圆周，取逆时针方向；

六题得分	

解：~~令 L_0 是~~ 令 L_0 是以(0,0)为中心，$4x^2+y^2=r^2$ 的椭圆(r无限小)，取顺时针方向。

由格林公式 $I_0 = \int_{L+L_0^+} \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2} = 0$

$\therefore \int_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2} = \int_{L_0^-} \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2} = \frac{1}{r^2}\int_{L_0^-} xdy - ydx = \frac{2}{r^2}\iint\limits_{D_0} ds = \frac{2}{r^2} \times \frac{r^2}{2}\pi = \pi$.

姓名　　学号　　专业　　任课教师

草稿区

七、(10 分) 设 Σ 是球面 $z^2+x^2+y^2=1$ 的外侧，

七题得分	

求曲面积分： $I=\iint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+4y^2+z^2)^{3/2}}$

解：设 Σ_0 是 $x^2+4y^2+z^2=r^2$ (r 无限小) 的内侧，由高斯公式

$\therefore \iint_{\Sigma+\Sigma_0}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+4y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$

$\therefore I=\iint_{\Sigma_0^-}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+4y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r^3}\iint_{\Sigma_0^-} xdydz+ydzdx+zdxdy = \frac{1}{r^3}\iiint_{\Omega_0}(1+1+1)dxdydz$ (Ω_0 为 Σ_0 所围区域).

$= \frac{3}{r^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot r\cdot\frac{r}{2}\cdot r$

$=2\pi$

八、(8 分) 设有椭球体 $\Omega:\frac{(x+y+1)^2}{4}+\frac{(x-y+2)^2}{9}+(z+1)^2\le 1$，试计算下列积分，

八题得分	

$I=\iiint_{\Omega}z^2dxdydz$

解：令 $\frac{x+y+1}{2}=u$，$\frac{x-y+2}{3}=v$，$z+1=w$

得 $\begin{cases}x+y+1=2u\\ x-y+2=3v\end{cases}$ $\therefore x=\frac{2u+3v-3}{2}$ $y=\frac{2u-3v+1}{2}$ $z=w-1$

$\therefore J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}1 & \frac{3}{2} & 0\\ 1 & -\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=-3$ $|J|=3$

原式 $=3\iiint_{\Omega'}(w-1)^2dudvdw$ Ω': $u^2+v^2+w^2\le1$

$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}}(w^2-2w+1)dw$

$=6\pi\int_0^1 r[\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{1-r^2}]dr$

$=-3\pi\int_0^1\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{1-r^2}\,d(1-r^2)$

$=-3\pi[\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{2}}+2\times\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}]\Big|_0^1=3\pi\times(\frac{4}{15}+\frac{4}{3})$

$=\frac{24\pi}{5}$

一.解：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)n}{n^2+1}=1$ 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 为发散级数 $\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}$ 发散

原级数非绝对收敛

又$\because f(x)=\frac{x+3}{x^2+1}$ $f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2-6x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-6x+1}{(x^2+1)^2}<0$ 在 $x\geq 1$ 时恒成立

$\therefore f(x)$ 单调递减 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2+1}=0$

$\therefore$ 原级数条件收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n(\frac{n}{n+1})^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{4}{e}>1$

$\therefore$ 原级数发散

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$

$\therefore$ 原级数收敛

(4) $1-\cos\frac{\pi}{n}=2\sin^2\frac{\pi}{2n}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(1-\cos\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi^2}{4n}}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2=2$

又$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{4n}$ 发散

$\therefore$ ~~级~~原级数发散.

二.解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(n+1)+2}{n^2-n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+2}{n^2-n+2}=1=\rho$ $\therefore R=\frac{1}{\rho}=1$

$x=1$时 原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2-n+2$ 发散；$x=-1$时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+2)$ 发散

$\therefore$ 收敛域为 $(-1,1)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2-n+2)x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n-1)nx^n+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=S_1(x)+S_2(x)=S(x)$

对于 $S_2(x)=\frac{2x}{1-x}$ $S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^n=x^2\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=x^2S_3(x)$

$S_3(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$ $\int_0^x S_3(x)dx=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\int_0^x n(n-1)x^{n-2}dx=\sum\limits_{n=2}^{\infty}nx^{n-1}=S_4(x)$

$S_4(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}nx^{n-1}$ $\int_0^x S_4(x)dx=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^n=\frac{x^2}{1-x}$

$S_4(x)=(\frac{x^2}{1-x})'=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$ $\therefore S_3(x)=S_4'(x)=\left[\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right]'=\frac{2}{(1-x)^3}$

$\therefore S_1(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3}$

$\therefore S(x)=\frac{2x}{1-x}+\frac{2x^2}{(1-x)^3}$

三. 解: $f(x)=\frac{1}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\right)\right]=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1\right]x^n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}}{1-\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\times\frac{2^{n+2}-(-1)^{n+1}}{2^{n+1}-(-1)^n}=1$$

$x=\pm1$时, 原级数发散, 故收敛域为$(-1,1)$

四. 解 (1) $e^y dy=(1+x+x^2)dx$

$\therefore \int e^y dy=\int(1+x+x^2)dx$

$\therefore e^y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+C_1$

即 $y=\ln\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)+C$

(2) $\frac{1}{y}dy=\frac{2x}{1+x^2}dx$

$\therefore \int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1}{1+x^2}dx^2$

即 $\ln y=\ln(1+x^2)$

$\therefore y=C(1+x^2)$

(3) 特征方程(齐次)为: $\lambda^2+\lambda=0$

$\therefore \lambda_1=-1,\ \lambda_2=0$

通解: $y=C_1e^{-x}+C_2$

原方程特解可设为:

$y^*=ax+b$

代入: $0+ax+b=2+x$

解得: $a=1,\ b=2$

$\therefore y^*=x+2$

$\therefore$ 原方程通解为 $y=C_1e^{-x}+x+\cancel{2}\,C_1$

(4) 特征方程(齐次)为:

$\lambda^2+2\lambda+1=0$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=-1$

即通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$

设原方程特解可设为

$y^*=\cancel{A\sin x}\ A\cos x$

代入得 $\cancel{A\cos x}$

$\cancel{A\sin x+2A\cos x+A\sin x}$

$-A\cos x-2A\sin x+A\cos x=-2\sin x$

$\therefore A=1$

$\therefore y^*=\cos x$

$\therefore$ 原方程通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\cos x$

(5) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2$

令 $u=\frac{y}{x}$, 即 $y=ux$

$\therefore \cancel{\frac{du}{dx}=}\ \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=u-(u)^2$

$\therefore x\frac{du}{dx}=-u^2$

$\therefore \int\frac{du}{-u^2}=\int\frac{dx}{x}$

$\therefore \frac{1}{u}=\ln|x|+C$

即 $u=\frac{1}{\ln|x|+C}$ 进而可得 $y=\frac{x}{\ln|x|+C}$ 又$\because y(1)=1$ $\therefore y=\frac{x}{\ln|x|+1}$

五. 解 (1) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx=-\int_1^{+\infty}\ln x\, d(x+1)^{-1}=-\frac{\ln x}{x+1}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx=[\ln x-\ln(x+1)]\Big|_1^{+\infty}=\ln 2$

(2) $\cancel{\int_1^{+\infty}\cdots\cdots}$ 令 $\sqrt{x-1}=u$ $\quad x=u^2+1$ $\quad dx=2udu$

$\therefore$ 原式 $=\int_0^{+\infty}\frac{2u}{u(u^2+4)}du=\int_0^{+\infty}\frac{2}{u^2+4}du=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(\frac{u}{2})^2+1}du=\arctan\frac{u}{2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$

六. 解: $f(x)=f(-x)$

$\therefore a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x-1)dx=\frac{2}{\pi}(x^2-x)\Big|_0^{\pi}=2\pi-2$

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(2x-1)d\sin nx=-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{4}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{n^2\pi}[(-1)^n-1] \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0 \end{cases}$$

$\therefore f(x)=\pi-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi}[(-1)^n-1]\cos n\pi \qquad x\in[-\pi,\pi]$.

七. 解: $I(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$

当 $x\to0$ 时, $\ln(1+x^2)\sim x^2$

$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\alpha-2}\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=1$

当 $\alpha-2<1$, $\alpha<3$ 时, $\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 收敛

当 $\alpha-2\geq1$, $\alpha\geq3$ 时, $\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 发散.

当 $\alpha\leq1$ 时 $\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}>\frac{1}{x^\alpha}$ $(x>2)$

而 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ 发散, $\therefore\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 发散.

当 $\alpha>1$ 时 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha-\frac{\alpha-1}{2}}\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\frac{\alpha-1}{2}}}=0$

而 $\alpha-\frac{\alpha-1}{2}=\frac{\alpha+1}{2}>1$ 即 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}dx$ 收敛

$\therefore\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 收敛.

综上所述: 当 $1<\alpha<3$ 时 $I(\alpha)$ 收敛

当 $0<\alpha\leq1$ 或 $\alpha\geq3$ 时 $I(\alpha)$ 发散.

八. 解: 令 $f(x,\alpha)=\frac{\arctan(\alpha\sin x)}{\sin x}$ $\qquad f(x,\alpha)=\frac{1}{1+(\alpha\sin x)^2}$

$I'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\alpha\sin x)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\alpha^2+1)\sin^2x+\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{(\alpha^2+1)\tan^2x+1}=\frac{\arctan(\sqrt{\alpha^2+1}\tan x)}{\sqrt{\alpha^2+1}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2+1}}$

$\therefore I(\alpha)=I(0)+\int_0^{\alpha}\frac{\pi}{2\sqrt{t^2+1}}dt=\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1})\quad(\alpha>0)$