试 卷 （四）

一、单项选择题（每题 2 分，共 20 分）

1. 设矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{r\times r}$，$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{r\times n}$，且 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{O}$，以下正确答案是 （　　）

（A）若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})<r$，则有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；

（B）若 $\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{O}$，则有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；

（C）若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=r$，则有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；

（D）得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件是 （　　）

（A）$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$； （B）$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$；

（C）$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$； （D）$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$.

3. 下面正确的命题是 （　　）

（A）如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则其任一部分组也线性相关；

（B）如果两个向量组等价，则它们所含向量的个数相同；

（C）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分必要条件是其任一向量都不能由其余向量线性表出；

（D）如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 r 个向量都线性无关.

4. 设有两个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$，且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$，以下正确的结论是 （　　）

（A）两个向量组等价；

（B）当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出时，两个向量组等价；

(C) 当 $s=t$ 时,两个向量组等价;

(D) 当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) + \mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t)$ 时,两向量组等价.

5. 指出下列结论中一条错误的结论,错误的结论是(　　)设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,且

(A) 若行列式 $|\boldsymbol{A}|>0$,则 $\boldsymbol{A}$ 正定;

(B) 若 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在且正定,则 $\boldsymbol{A}$ 正定;

(C) 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于零,则 $\boldsymbol{A}$ 正定;

(D) 若 $\boldsymbol{A}$ 合同于单位矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 正定.

6. n 阶矩阵可对角化的充分必要条件是　　(　　)

(A) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个相异的特征值;

(B) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有 n 个相异的特征值;

(C) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个相异的特征向量;

(D) $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值的重数与其对应的线性无关特征向量的个数相同.

7. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是　　(　　)

(A) $\boldsymbol{A}$ 的任意两个列向量线性相关;

(B) $\boldsymbol{A}$ 的任意两个列向量线性无关;

(C) $\boldsymbol{A}$ 中必有一列向量是其余列向量的线性组合;

(D) $\boldsymbol{A}$ 中任一列向量都是其余列向量的线性组合.

8. 下列向量集合中能构成向量空间的是　　(　　)

(A) $V_1=\{\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3) \mid x_1+2x_2+3x_3=1, x_i\in\mathbb{R}\}$;

(B) $V_2=\{\boldsymbol{x}=(x_1, 0, x_3) \mid x_1, x_3\in\mathbb{R}\}$;

(C) $V_3=\{\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, x_i\in\mathbb{R}\}$;

(D) $V_4=\{\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3) \mid x_1\cdot x_2\cdot x_3=0, x_i\in\mathbb{R}\}$.

9. 设 $n(n\geqslant 3)$ 阶可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$,常数 $k\neq 0, \pm 1$,则 $(k\boldsymbol{A})^*=$　　(　　)

(A) $k\boldsymbol{A}^*$;　　(B) $k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$;

(C) $k^n\boldsymbol{A}^*$;　　(D) $k^{-1}\boldsymbol{A}^*$.

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个线性无关的部

分组,若满足下列条件之一(　　),就称 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$, …, $\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大线性无关组.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$, …, $\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 等价;

(B) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少还存在一个与 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$, …, $\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 有相同个数的线性无关的部分组;

(C) $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$, …, $\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不等价;

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 中其余的每个向量都不可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$, …, $\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出.

二、填空题(每题 2 分,共 12 分)

1. 设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 为线性空间的一组基,写出由基 ξ_3, ξ_2, ξ_1 到基 ξ_1, $\xi_2+\xi_3$, $\xi_1+\xi_2+\xi_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{A}=$________.

2. 已知$\mathbb{R}^3$中的两个向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$, 则与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 都正交的单位向量是________.

3. 已知 $f(x)=\begin{vmatrix}5&4&3&2&x&0\\4&3&2&-x&0&0\\3&2&x&0&0&0\\2&-x&0&0&0&0\\x&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&2\end{vmatrix}$, 则 x^5 的系数为____.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\3&1&5\end{bmatrix}$, 其伴随矩阵的逆矩阵 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$________.

5. 已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, −1, 2, 则矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2$ 的特征值为________, 行列式 $|\boldsymbol{B}|=$________.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{bmatrix}$, 则 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=$________.

三、计算题(每题 9 分,共 54 分)

1. 已知 3 阶行列式的值为 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a$, $\begin{vmatrix} d_1 & c_1 & b_1 \\ d_2 & c_2 & b_2 \\ d_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = b$,

计算 $D = \begin{vmatrix} a_1 + 2d_1 & a_2 + 2d_2 & a_3 + 2d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + 3b_1 & c_2 + 3b_2 & c_3 + 3b_3 \end{vmatrix}$.

2. 计算 $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^n$.

3. 设有两个矩阵分别为 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, 求满足方程 $\boldsymbol{AX} = 3\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}$ 的矩阵 $\boldsymbol{X}$.

4. 已知一个向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

求该向量组的一个极大线性无关组及该向量组的秩,并把其余向量表成极大线性无关组的线性组合.

5. 讨论方程组 $\begin{cases} kx_1 + (k-1)x_2 + x_3 = 1, \\ kx_1 + kx_2 + x_3 = 2, \\ 2kx_1 + 2(k-1)x_2 + kx_3 = 2, \end{cases}$ 当 k 取何值时:

(1) 方程组无解?

(2) 方程组有唯一解?

(3) 方程组有无穷多解? 并求出通解.

6. 设四元二次型为 $f = -2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4$，求正交线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将 f 化为标准形,并求出正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

四、证明题(每题 7 分,共 14 分)

1. 设有方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} - 10\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 证明:$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{E}$ 都是可逆矩阵,并求它们的逆矩阵.

2. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,且向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意 $m-1$ 个向量都线性无关. 证明:一定存在 m 个全不为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{0}$.