北 京 交 通 大 学

2023-2024-1-《几何与代数 B》 第一次月考　参考答案

一、选择题（本题满分 30 分，共有 10 道小题，每道小题 3 分）

1、函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-6 \\ 4x & 4x-3 & 6x-4 & 4x-1 \end{vmatrix}$ 的零点个数为【　D　】.

（A）0　　（B）2　　（C）4　　（D）无穷多个.

解：第一列的（-1）倍，散于各列，得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-6 \\ 4x & 4x-3 & 6x-4 & 4x-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -3 \\ 4x & -3 & 2x-4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & 2x-4 & -4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ 2x-4 & -4 \end{vmatrix}\equiv 0.$$

因此，$f(x)$ 有无穷多个零点.

2、若 $\begin{cases}(2+\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1, \\ 2x_1+(5+\lambda)x_2-4x_3=2, \\ -2x_1-4x_2+(5+\lambda)x_3=\lambda-1\end{cases}$ 有唯一解，则 λ 满足【　D　】.

（A）$\lambda\neq 1,\ \lambda\neq 10$　　（B）$\lambda\neq -1,\ \lambda\neq 10$

（C）$\lambda\neq 1,\ \lambda\neq -10$　　（D）$\lambda\neq -1,\ \lambda\neq -10$.

解：由克莱姆法则知 $Ax=b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 非奇异 $\Leftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2+\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5+\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5+\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda+10).$$

3、四阶行列式 D 的第一行元素依次为 2，3，$t+3$，$t-5$，且其对应的余子式依次为 $M_{11}=-1$，$M_{12}=12$，$M_{13}=6$，$M_{14}=9$，则 $\lim\limits_{t\to 2}D=$【　A　】.

（A）19　　（B）25　　（C）31　　（D）37.

解：由按行展开性质，有

$$D=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}-a_{14}M_{14}=-2-36+6t+18+45-9t=25-3t\ .$$

故 $\lim\limits_{t\to2}D=\lim\limits_{t\to2}(25-3t)=19$.

4、矩阵 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}a_{12}&a_{11}+a_{13}&a_{13}\\a_{22}&a_{21}+a_{23}&a_{23}\\a_{32}&a_{31}+a_{33}&a_{33}\end{bmatrix}$，$P_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，

则 $B=$【 B 】.

（A）AP_1P_2 （B）AP_2P_1 （C）P_1P_2A （D）P_2P_1A .

5、设 A 是 n 阶非零阵，$A^3=O$，I 为 n 阶单位阵. 以下命题正确的是【 A 】.

（A）$I-A$ 可逆，$I+A$ 可逆 （B）$I-A$ 不可逆，$I+A$ 可逆

（C）$I-A$ 可逆，$I+A$ 不可逆 （D）$I-A$ 不可逆，$I+A$ 不可逆.

解：显然，有 $I-A^3=I\Rightarrow(I-A)(I+A+A^2)=I\Rightarrow I-A$ 可逆；

$$I+A^3=I\Rightarrow(I+A)(I-A+A^2)=I\Rightarrow I+A\text{ 可逆.}$$

6、A_1,A_2,A_3 分别为 k_1 阶，k_2 阶，k_3 阶矩阵，$A=\begin{bmatrix}&&A_1\\&A_2&\\A_3&&\end{bmatrix}$，则 $|A|=$【 D 】.

（A）$-|A_1|\cdot|A_2|\cdot|A_3|$ （B）$(-1)^{k_1+k_2+k_3}\cdot|A_1|\cdot|A_2|\cdot|A_3|$

（C）$(-1)^{k_1\cdot k_2\cdot k_3}\cdot|A_1|\cdot|A_2|\cdot|A_3|$ （D）$(-1)^{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}\cdot|A_1|\cdot|A_2|\cdot|A_3|$.

解：从右向左，逐列相邻向前对换，得

$$|A|=\begin{vmatrix}&&A_1\\&A_2&\\A_3&&\end{vmatrix}=(-1)^{k_1k_2}\begin{vmatrix}A_1&&\\&&A_2\\A_3&&\end{vmatrix}=(-1)^{k_1k_2+k_1k_3}\begin{vmatrix}A_1&&\\&&A_2\\&A_3&\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}\begin{vmatrix}A_1&&\\&A_2&\\&&A_3\end{vmatrix}=(-1)^{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}|A_1|\cdot|A_2|\cdot|A_3|\ .$$

7、设 A^* 是 $n(n\geq2)$ 阶方阵 A 的伴随矩阵，A^T 是 A 的转置矩阵. 则下列陈述中，完全正确的个数是【 C 】.

① $A^*=|A|A^{-1}$； ② $|A^*|=|A|^{n-1}$； ③ $(kA)^*=kA^*$； ④ $(A^*)^*=A$；

⑤ $|AA^*|=|A|^2$； ⑥ $(AA^T)^T=AA^T$； ⑦ $(A^T)^T=A$； ⑧ $|AA^T|=|A|^2$.

（A）2 （B）3 （C）4 （D）5 .

解：根据矩阵性质，只有②、⑥、⑦、⑧是正确的；

①、③、④、⑤是不严谨的.

8、$\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$，则下列陈述中，完全正确的是【 B 】.

（A）$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆　　（B）$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{A}$ 可逆

（C）$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆　　（D）$2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

解：由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$，知 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$、$2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 不一定可逆.

9、已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 中第 3 行的 -2 倍加到第 2 行得到矩阵 $\boldsymbol{A}_1$，将 $\boldsymbol{B}$ 中第 2 列加到第 1 列得到矩阵 $\boldsymbol{B}_1$，又知 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=$【 A 】.

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&2&6\\0&0&3\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&-6\\0&0&3\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&4\\0&0&3\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&-4\\0&0&3\end{pmatrix}$.

解：易知 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{PA},\ \boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{BQ}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

所以，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&2&6\\0&0&3\end{pmatrix}$.

10、设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，将 $\boldsymbol{A}$ 的第二行的 2 倍加到第一行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{BA}^*|=$【 B 】.

（A）-4　（B）4　（C）-8　（D）8.

解：由已知，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{KA}$，因此，

$$|\boldsymbol{BA}^*|=|(\boldsymbol{KA})\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{K}|\cdot|\boldsymbol{AA}^*|=1\cdot|\boldsymbol{A}|^2=4.$$

二、还是选择题（本题满分 20 分，共有 5 道小题，每道小题 4 分）

11、已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\gamma}$ 均为 3×1 矩阵，且行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\gamma}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\gamma}|=|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\gamma}|$ $=|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\gamma}|=2$，则 $|-2\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2|=$【 A 】.

（A）-24　（B）-36　（C）-48　（D）-72.

解：$|-2\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2|=-2\left(|\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2|+|\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2|\right)$

$=-2(|\gamma,\ \alpha_1,\ \beta_1|+|\gamma,\ \alpha_1,\ 2\beta_2|+|\gamma,\ \alpha_2,\ \beta_1|+|\gamma,\ \alpha_2,\ 2\beta_2|)$

$=-2(|\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma|+2|\alpha_1,\ \beta_2,\ \gamma|+|\alpha_2,\ \beta_1,\ \gamma|+2|\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma|)$

$=-2(2+4+2+4)=-24$.

12、$\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 是对换 $\boldsymbol{A}$ 的第二、三行所得矩阵，若 $|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$，则必有【 B 】.

（A）$|\boldsymbol{B}|=0$ （B）$|\boldsymbol{B}|\neq 0$ （C）$|\boldsymbol{AB}|=0$ （D）$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|\neq 0$.

解：由已知，得 $|\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}|$，再由 $|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$，故 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$.

13、设 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$ 的必要条件是【 D 】.

（A）$\boldsymbol{A}$ 中各列元素之和为零 （B）$\boldsymbol{A}$ 中有两行（或列）元素对应成比例

（C）$\boldsymbol{A}$ 中有一行（或列）元素全为零 （D）齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 有至少有两组解.

解：$|\boldsymbol{A}|=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{Ax}=0$ 有非零解（除了零解，还有很多不是零的解）.

14、设 $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶可逆矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=$【 C 】.

（A）$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ （B）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$

（C）$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$ （D）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

解：$(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1}$

$=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}$.

15、设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,...,x_n)^T$，$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=1$，令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$. 下述结论中正确的个数【 C 】.

① $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵； ② $\boldsymbol{A}$ 是单位矩阵； ③ $\boldsymbol{A}$ 是对角矩阵； ④ $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵；

⑤ $\boldsymbol{A}^2$ 是对称矩阵； ⑥ $\boldsymbol{A}^2$ 是单位矩阵；⑦ $\boldsymbol{A}^2$ 是对角矩阵； ⑧ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{I}$.

（A）4 （B）5 （C）6 （D）7.

解：$\boldsymbol{A}^T=(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)^T=\boldsymbol{I}-2(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)^T=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=\boldsymbol{A}$；

$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+4\boldsymbol{\alpha}\underline{\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}^T=\boldsymbol{I}$；

显然，$\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$.

三、（满分 10 分）用克拉默（Cramer）法则解线性方程组.

$$\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ ax+by+cz=a^2+b^2+c^2 \\ bcx+cay+abz=3abc \end{cases}$$，式中 a,b,c 两两互异.

解：由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两互异，因此，

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{ac} & \boldsymbol{ab}\end{vmatrix}=\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}^2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})+\boldsymbol{c}^2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\neq 0\text{，}$$

所以，上述方程组有唯一解，再由

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} & 1 & 1\\ \boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2 & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\\ 3\boldsymbol{abc} & \boldsymbol{ac} & \boldsymbol{ab}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & 1 & 1\\ \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{abc} & \boldsymbol{ac} & \boldsymbol{ab}\end{vmatrix}=\boldsymbol{aD}\text{，}$$

$$\boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix}1 & \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} & 1\\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2 & \boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{bc} & 3\boldsymbol{aac} & \boldsymbol{ab}\end{vmatrix}=\boldsymbol{bD}\text{，}\quad \boldsymbol{D}_3=\boldsymbol{cD}\text{，}$$

所以，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c}$.

四、（满分 10 分）计算行列式

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix}\boldsymbol{x} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{x} & -1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{x} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{x} & -1\\ \boldsymbol{a}_n & \boldsymbol{a}_{n-1} & \boldsymbol{a}_{n-2} & \cdots & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_1\end{vmatrix}.$$

解：1° 当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}x & -1\\ a_2 & x+a_1\end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2$；

2° 假设对于 $(n-1)$ 阶行列式命题成立，即

$$D_{n-1}=x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1}\text{，}$$

将 D_n 按第 1 列展开：

$$D_n=xD_{n-1}+a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & x & -1\end{vmatrix}=xD_{n-1}+a_n$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\text{；}$$

因此，$D_n=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

五、（满分 10 分）已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1\quad 2\quad 3)$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，求 $\boldsymbol{A}^{2023}$．

解：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}6 & 3 & 2\\12 & 6 & 4\\18 & 9 & 6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=3$；

且 $\boldsymbol{A}^{2023}=\underbrace{(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\cdots(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})}_{2023\text{个}}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\underbrace{(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})}_{2022\text{个}}\boldsymbol{\beta}$，

所以，$\boldsymbol{A}^{2023}=3^{2022}\boldsymbol{A}=\dfrac{3^{2021}}{2}\begin{pmatrix}6 & 3 & 2\\12 & 6 & 4\\18 & 9 & 6\end{pmatrix}$．

六、（满分 10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}$，将 $\boldsymbol{A}$ 表示成三个初等矩阵的乘积．

解：利用初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}\to A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & -2\end{pmatrix}\qquad \text{记 } P_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to A_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}A_1=\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}\qquad \text{记 } P_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\to A_3=\begin{pmatrix}1 & -3\\0 & 1\end{pmatrix}A_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\qquad \text{记 } P_3=\begin{pmatrix}1 & -3\\0 & 1\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{E}$，因此，有

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1)^{-1}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_3^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

注：此题答案不惟一．

如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -\frac{3}{2}\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}$ 也是．

七、（满分 10 分）问 λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$ 1)有唯一解；2)无解；3)有无穷多组解？并将其无穷多组解求出来．

解：利用增广矩阵的初等行变换，有

$$(A,b)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda)\\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(\lambda+1)^2\end{pmatrix}$$

(1) 当$(\lambda-1)(1-\lambda)(2+\lambda)\neq 0$，即$\lambda\neq 1,-2$时，方程组有唯一解；

(2) 当$\lambda=-2$，$R(A)<R(A,b)$，此时方程组无解；

(3) 当$\lambda=1$，$R(A)=R(B)=1<3$，此时方程组有无穷多个解．此时，

$$(A,b)\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}，即 x_1+x_2+x_3=1，$$

因此，方程组的解为$\begin{cases}x_1=-c_1-c_2+1\\ x_2=\quad c_1\\ x_3=\quad\quad c_2\end{cases}$ （c_1,c_2为任意实数）

或 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \boldsymbol{x}_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{c}_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\boldsymbol{c}_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$， （$c_1,c_2$为任意实数）