1. 任何实对称矩阵都可表示成一系列初等矩阵的乘积。（ 错 ）
2. 极大线性无关组唯一的向量组未必是线性无关的向量组。（对 ）
3. 设矩阵 A 与 B 相似，则必有 A、B 同时可逆或不可逆。(对)

4. 设矩阵 $B=(b_{ij})_{r\times r}$，$C=(c_{ij})_{r\times n}$，且 BC=O，以下正确的是（C）

（A）若 r(C)<r,则有 B=O (B) 若 C≠O，则必有 B=O

(C) 若 r(C)=r,则有 B=O (D) B=O，且 C=O

5. 设 A 为 n 阶方阵，且满足 $A^2=A$，且 $A\neq E$，则有 (D)

（A）A 为可逆矩阵 （B）A 为零矩阵

（C）A 为对称矩阵 （D）A 为不可逆矩阵

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是线性空间 V 的一组基,则下面也是 V 的基的是 (C)

（A）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ （B）$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$

（C）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ （D）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$

7. 设线性方程组 $Ax=b$，其中 A 是 $m\times n$ 矩阵，$b\neq O$，则方程组 $Ax=b$ (D)

（A） 有唯一解 (B) 有无穷多解 (C) 无解 (D) 可能无解

8. 若矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & a & -1 & 2\\ 0 & -1 & a & 2\\ 1 & 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$ 的秩为 2，则有 a 等于 (A)

（A） 0 (B) 0 或-1 (C) -1 (D) -1 或者 1

二，行列式计算

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a+1 & 0 & 0 & 0 & a+2\\ 0 & a+5 & 0 & a+6 & 0\\ 0 & 0 & a+9 & 0 & 0\\ 0 & a+7 & 0 & a+8 & 0\\ a+3 & 0 & 0 & 0 & a+4\end{vmatrix}$ **的值。**

解 将行列式 D 按第 3 行展开，得

$$D=(a+9)\begin{vmatrix}a+1 & 0 & 0 & a+2\\ 0 & a+5 & a+6 & 0\\ 0 & a+7 & a+8 & 0\\ a+3 & 0 & 0 & a+4\end{vmatrix},$$

再将上式中的 4 阶行列式按第 2 和第 3 行用拉普拉斯定理展开，得

$$D=(a+9)\begin{vmatrix}a+5 & a+6\\ a+7 & a+8\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a+1 & a+2\\ a+3 & a+4\end{vmatrix}$$
$$=(a+9)[(a+5)(a+8)-(a+6)(a+7)]\cdot$$

$$[(a+1)(a+4)-(a+2)(a+3)]$$
$$=4(a+9).$$

2. 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$的值。

解：

$$D \xrightarrow[\substack{c_1+c_3 \\ c_1+c_4}]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$10\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 160$$

4. 已知：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$**，求矩阵** X

解：

记 $AX = B$，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$，故

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. 已知线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = b. \end{cases}$$

（1）当 a,b 取何值时，无解，有惟一解，有无穷多解？

（2）当方程组有无穷多解时求其通解。

解 (1) 记方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，对方程组的增广矩阵施以行初等变换，得

$$[\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & a & 1 & b\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2-a & b-1\end{bmatrix}.$$

当 $a=2$ 且 $b=1$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})=2<3$，方程组有无穷多解；

当 $a\neq 2$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})=3$，方程组有唯一解；

当 $a=2$ 且 $b\neq 1$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2\neq\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})=3$，方程组无解．

(2) 当 $a=2$ 且 $b=1$ 时，由

$$[\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}]\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

可得齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $x_1=x_3$，$x_2=-x_3$，$x_3=x_3$，其中 x_3 为自由变量．令 $x_3=1$ 得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

又可得非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解为 $x_1=1+x_3$，$x_2=-x_3$，$x_3=x_3$，其中 x_3 为自由变量．令 $x_3=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解

$$\boldsymbol{\alpha}_p=(1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}.$$

因此，当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解时，其通解

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_p+k\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},$$

其中 k 为任意常数．

根据 K 的取值求解非齐次线性方程组 $\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=k-3\\ x_1+kx_2+x_3=-2\\ x_1+x_2+kx_3=-2\end{cases}$

$$|A|=\begin{vmatrix}k & 1 & 1\\ 1 & k & 1\\ 1 & 1 & k\end{vmatrix}=(k+2)(k-1)^2$$

当 $k\neq-2$ 且 $k\neq 1$ 时非齐次线性方程组有唯一解。

唯一解：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}k-3&1&1\\-2&k&1\\-2&1&k\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{(k-1)^3}{(k+2)(k-1)^2}=\frac{k-1}{k+2}$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}k&k-3&1\\1&-2&1\\1&-2&k\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-3(k-1)^2}{(k+2)(k-1)^2}=-\frac{3}{k+2}$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}k&1&k-3\\1&k&-2\\1&1&-2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-3(k-1)^2}{(k+2)(k-1)^2}=-\frac{3}{k+2}$$ $(4')$

当 $k=-2$ 时，非齐次线性方程组的增广矩阵

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&-5\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&-2\\0&1&-1&0\\0&0&0&-3\end{array}\right]$$

$\because R(A)=2\quad R(\overline{A})=3$ $\therefore$非齐次线性方程组无解 $(4')$

当 $k=1$ 时，非齐次线性方程组的增广矩阵

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-2\\1&1&1&-2\\1&1&1&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

因为 $R(A)=R(\overline{A})=1<3$ 所以非齐次线性方程组有无穷多解

通解为：$X=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ k_1,k_2 为任意实数

5. 设 R^3 中的两组基分别为：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\text{及}\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}.$$

（1）求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$;

（2）若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的坐标．

由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，…，$\boldsymbol{\eta}_n$ 的基变换公式为

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{C}.$$

记向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}$，在基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，…，$\boldsymbol{\eta}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}'$，则

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}'\text{ 或 }\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}.$$

解 （1）由 $(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{C}$，则

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)^{-1}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&1&2\\0&2&1\\-1&-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&1\\0&2&1\\-1&-2&1\end{bmatrix}.$$

（2）由 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的坐标为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}3&3&1\\0&2&1\\-1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\2\\-8\end{bmatrix}.$$

6. 已知二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

（1）t 为何值时，该二次型是正定的

（2）取 t=1，用可逆线性变化化二次型为标准型，并写出所用的

线性变换。

（1）二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & t & -1\\ 1 & -1 & t\end{pmatrix}$，选取 t 使得

$$\Delta_1=t>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}t & 1\\ 1 & t\end{vmatrix}=t^2-1>0,\quad \Delta_3=|A|=(t+1)^2(t-2)>0$$

故当 $t>2$ 时，二次型 f 正定.

（2）$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3=$

$$[x_1^2+2x_1(x_2+x_3)]+x_2^2+x_3^2-2x_2x_3=(x_1+x_2+x_3)^2-4x_2x_3$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3\\ y_2=x_2\\ y_3=x_3\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2-y_3\\ x_2=y_2\\ x_3=y_3\end{cases}$，得 $f=y_1^2-4y_2y_3$

再令 $\begin{cases}y_1=z_1\\ y_2=z_2+z_3\\ y_3=z_2-z_3\end{cases}$，得标准形为 $f=z_1^2-4z_2^2+4z_3^2$

所用的可逆线性变换为 $\begin{cases}x_1=z_1-2z_2\\ x_2=z_2+z_3\\ x_3=z_2-z_3\end{cases}$

7. 证明

7.2 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\ (n\geq 3)$ 中，前 $n-1$ 个向量线性相关，后 $n-1$ 个向量线性无关，试证明：

（1）α_1 可表示为 $\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 的线性组合；

（2）α_n 不能表示为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 的线性组合。

证明：（1）由题设知 $\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性无关，

又 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性相关，

所以 α_1 可表示为 $\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 的线性组合。

（2）反证法。

若 α_n 能表示为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 的线性组合，

由（1），α_n 能表示为 $\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 的线性组合，

所以 $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关，矛盾。