一、判定下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{(1+n^2)}(-1)^n$ 令 $f(x)=\frac{x+3}{1+x^2}$ 则 $f'(x)=\frac{-x^2-6x+1}{(1+x^2)^2}<0$ $(x\geq 1)$ $\frac{n+3}{n^2+1}=f(n)$ 单↓ 且显然趋于0 ∴收敛

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}4^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 记 $x_n=4^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 则 $\sqrt[n]{x_n}=\frac{4}{\underbrace{(1+\frac{1}{n})^n}_{e}}\to\frac{4}{e}>1$ ∴发散.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ 记 $y_n=\frac{2^n n!}{n^n}$ $\frac{y_{n+1}}{y_n}=2\cdot\frac{n+1}{(n+1)^{n+1}}\cdot n^n=\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{2}{e}<1$ ∴收敛

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}n(1-\cos\frac{\pi}{n})$ 记 $z_n=n(1-\cos\frac{\pi}{n})$ $z_n\sim n\cdot\frac{1}{2}(\frac{\pi}{n})^2=\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 ∴发散

二、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-n+2)x^n$ 的收敛域、和函数

$a_n=(n^2-n+2)$ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2-n+2}{n^2+n+2}\right|=1$ $|x|<1$ 收敛区间 $x\in(-1,1)$

$x=-1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+2)$ 发散 $x=1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-n+2)$ 发散

∴收敛域为 $(-1,1)$

由 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$ $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}$

$=\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)x^m$ $=\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)x^m$

$n^2-n+2=1\cdot(n+2)(n+1)+(-4)(n+1)+4$

原式 $=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{4}{(1-x)^2}+\frac{4}{1-x}-2$

三、将函数 $f(x)=\frac{1}{(x^2+x-2)}$ 展开为 x 的幂级数 并说明其收敛域

$f(x)=\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\right)=\frac{1}{3}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n(-1)^n\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1-\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n$

$x\in(-1,1)$

$x=-1$ 时 $f(x)$ 连续 级数收敛

$x=1$ 时 $f(x)$ 无定义

∴收敛域为 $[-1,1)$

四、(1) $\frac{dy}{dx}=e^{-y}(1+x+x^2)$

$e^y dy=(1+x+x^2)dx$ 积分

$e^y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x$

$y=\ln(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x)+C$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{1+x^2}$

$\frac{1}{2y}dy=\frac{x}{1+x^2}dx$ 积分

$\int\frac{1}{2y}dy=\int\frac{x}{1+x^2}dx$

$\frac{1}{2}\ln y=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\ln C$

$\ln\sqrt{y}=\ln C\sqrt{1+x^2}$

$y=C(1+x^2)$

(3) $y''+y=2+x$

$\lambda^2+1=0$ $\lambda_{1,2}=\pm i$

通解 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$

令 $y^*=ax+b$ 代入

$ax+b=2+x$ $\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$

∴ $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+2$

(4) $y''+2y'+y=-2\sin x$

$\lambda^2+2\lambda+1=0 \quad (\lambda+1)^2=0 \quad \lambda_1=\lambda_2=-1$

通解 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$

y^*

微分方程不太记得了

下 下

(5) $x^2\frac{dy}{dx}=xy-y^2,\ y(1)=1,\ (x\neq 0)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2$ 令 $\frac{y}{x}=u$ 则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

故 $x\frac{du}{dx}=-u^2$

$\frac{-du}{u^2}=\frac{dx}{x}$ 积分 $-\int\frac{du}{u^2}=\int\frac{dx}{x}$ 即 $\frac{1}{u}=\ln|x|+C$

$u=\frac{1}{\ln|x|+C}$ 回代 $y=\frac{x}{\ln|x|+C}$ $y|_{x=1}=1$ $C=1$

故特解为 $y=\frac{x}{\ln|x|+1}$

五. 广义积分

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$

$=-\int_1^{+\infty}\ln x\, d(\frac{1}{x+1})$

$\overset{分部}{=}-\frac{\ln x}{x+1}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx$

$=-\frac{\ln x}{x+1}\Big|_1^{+\infty}+\ln x\Big|_1^{+\infty}-\ln(x+1)\Big|_1^{+\infty}$

$=\ln 2$

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x-1}(x+3)}$

令 $t=\sqrt{x-1}$ 则 $x=t^2+1$ $dx=2t\,dt$

原式 $=\int_0^{\infty}\frac{2t\,dt}{t(t^2+4)}=\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}$

六. 依题意 (偶) $b_n=0$ $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x-1)dx=2(\pi-1)$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x-1)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}(2x-1)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\cdot 2dx$

$=\frac{4}{n^2\pi}((-1)^n-1)=\begin{cases}0 & n=2m\\ \frac{-8}{\pi(2m+1)^2} & n=2m+1\end{cases}$

$\therefore f(x)\sim S(x)=(\pi-1)-\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$

七 瑕点 0 $+\infty$ 区间

记 $f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}$

(i) $x\to 0^+$ 时 $f(x)\sim x^{2-\alpha}$ $\therefore\int_0^1 f(x)dx$ 收敛 当且仅当 $2-\alpha>-1$ 时 即 $\alpha<3$

(ii) $x\to+\infty$ 时 ① $\alpha>1$ 时 取 $p=\frac{1+\alpha}{2}\in(1,\alpha)$

则 $\frac{f(x)}{x^{-p}}=\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\alpha-p}}\to 0$ $\therefore\int_1^{\infty}f(x)dx$ 收敛

② $\alpha\le 1$ 时 $\frac{f(x)}{x^{-1}}=x^{1-\alpha}\ln(1+x^2)\to\infty$

$\therefore\int_1^{\infty}f(x)dx$ 发散

?

$\therefore$ 综上 $\int_0^{\infty}f(x)dx$ 收敛 当且仅当 $\alpha\in(1,3)$

八、 $I'(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+\alpha^2\sin^2 x}\frac{dx}{\sin x}$

令 $t=\mathrm{tg}\,x$ 则 $dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$

$I'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2 x}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+(1+\alpha^2)\sin^2 x}$ $\int_0^{\infty} dt\,\frac{1}{1+(1+\alpha^2)t^2}=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{1+\alpha^2}\,t)\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$

又 $I(0)=0$

$\Rightarrow I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\int_0^{\alpha}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{\pi}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_0^{\alpha}=\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})$