一、　**填空题**（要求在答题纸相应位置上，不写解答过程，本大题共 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分）。

1. 设 4×4 矩阵 A=$\left(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\right)$，B=$\left(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\right)$，其中$\alpha,\ \beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$,均在 4 维列向量，且已知$|A|$=4，$|B|$=1，则行列式$|A+B|$=___________；

2.设 A 为 n 阶矩阵，$|A|\neq 0$，A^*为 A 的伴随矩阵，若 A 有特征值λ，则A^*的一个特征值为__________；

3.设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零，且$R\left(A\right)$=n-1，则线性方程组AX =0 的通解为__________；p133

4.设$\alpha=\left(a_{1,}\,a_2,\cdots,a_n\right)^T$，$\beta=\left(b_1,b_2,\cdots b_n\right)^T$为非零向量，且满足条件$\left(\alpha,\beta\right)=0$，记 n 阶矩阵$A=\alpha\beta^T$，则$A^2$=__________；

5.设二阶矩阵 A=$\begin{bmatrix}7 & 12\\ y & x\end{bmatrix}$与 B=$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$相似，则$x$=_____,$y$=_____。

二、　**单项选择题**（从下列各题四个备选答案中选出一个正确答案。并将其代号写在答题纸相应位置处。答案错选或未选者，该题不得分。每小题 3 分，共 15 分）。

1.　设三阶矩阵 A 的特征值为 1，2，3，则$\left|A^2-2I\right|$=【　】

A. 0　　B. 24　　C. -14　　D. 20

2.　设有向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3 & 0 & 7 & 14\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5 & 10\end{pmatrix}$ 则该向量组的极大无关组是【　】

$A.\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　$B.\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　　$C.\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$　　$D.\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$

3.　n 阶方阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角阵相似的【　】

A.　充分必要条件　B.　充分而非必要条件

C.　必要而非充分条件　D.即非充分也非必要条件

4. 设 A 为 n 阶方阵，且$|A|$=0，则　【　D】

A. A 中至少有一行（列）的元素为全为零

B. A 中必有两行（列）的元素对应成比例

C. A 中任意一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合

D. A 中必有一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合

5. 设 A、B 为同阶可逆矩阵，则【　D】

A. AB=BA

B.存在可逆矩阵 P，使$P^{-1}AP=B$

C.存在可逆矩阵 C，使 $C^T AC = B$

D.存在可逆矩阵 P 和 Q，使 $PAQ = B$

三、　计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 12 分）

计算行列式 $D = \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$

四、　计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 12 分）

设 A 满足 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 满足 $A^* BA=2BA\text{-}8I$ ，求 B

五、　计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 12 分）

根据 K 的取值求解非齐次线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = k-3 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = -2 \end{cases}$

六、　计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 12 分）

设 A 为三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维列向量，且满足 $A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$，

$A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3$，$A\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3$，

（1）求三围矩阵 B，使 $A\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}B$；（2）求矩阵 A 的特征值。

七、　计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 12 分）

用正交矩阵将实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ 对角化。

八、　证明题（要求在答题纸相应位置上写出详细证明步骤，本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

1. 设 A,B 是两个 n 阶反对称矩阵，证明：$AB-BA$ 是 n 阶反对称矩阵。
2. 设 X_1，X_2 为某个齐次线性方程组的基础解系，证明：$X_1 + X_2$，$2X_1 - X_2$ 也是该齐次线性方程组的基础解系。

3. **一、填空题**（本大题共 5 个小题，每个小题 3 分，共 15 分）

4. 1. 40　　2. $\dfrac{|A|}{\lambda}$　　3. $k\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} k\in R$　　4. 0　　5. -2，-1

5. **二、单项选择题**（每个小题 3 分，共 15 分）

6. 1. C　　2. B　　3. B　　4. D　　5. D

7. **三、计算题**（本题 12 分）

8. $D=abcdef\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\\1 & 1 & -1\end{vmatrix}(6')=4abcdef\,(6')$

9. **四、计算题**（本题 12 分）

10. $|A|=-2$　　$(2')$

11. $(2I-A^*)BA=8I$　　$(2')$

12. 而 $A^*=|A|A^{-1}=-2A^{-1}$ 故 $(I+A^{-1})BA=4I$　　$(2')$

13. 上式左乘 A，右乘 A^{-1} 得 $(A+I)B=4I$　　$(2')$

14. $B=4(A+I)^{-1}$　　$(2')$

15. $=4\begin{bmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & & \\ & -4 & \\ & & 2\end{bmatrix}$　　$(2')$

16. **五、计算题**（本题 12 分）

17. $|A|=\begin{vmatrix}k & 1 & 1\\1 & k & 1\\1 & 1 & k\end{vmatrix}=(k+2)(k-1)^2$

18. 当 $k\neq-2$ 且 $k\neq1$ 时非齐次线性方程组有唯一解。

19. 唯一解：$x_1=\dfrac{\begin{vmatrix}k-3 & 1 & 1\\-2 & k & 1\\-2 & 1 & k\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{(k-1)^3}{(k+2)(k-1)^2}=\dfrac{k-1}{k+2}$

20. $$x_2=\frac{\begin{vmatrix} k & k-3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & k \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-3(k-1)^2}{(k+2)(k-1)^2}=-\frac{3}{k+2}$$

21. $$x_3=\frac{\begin{vmatrix} k & 1 & k-3 \\ 1 & k & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-3(k-1)^2}{(k+2)(k-1)^2}=-\frac{3}{k+2}$$ (4')

22. 当 $k=-2$ 时，非齐次线性方程组的增广矩阵

23. $$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

24. $\because R(A)=2 \quad R(\overline{A})=3 \quad \therefore$ 非齐次线性方程组无解 (4')

25. 当 $k=1$ 时，非齐次线性方程组的增广矩阵

26. $$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

27. 因为 $R(A)=R(\overline{A})=1<3$ 所以非齐次线性方程组有无穷多解

28. 通解为：$X=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ k_1,k_2 为任意实数 (4')

29. **六、计算题**（本题 12 分）

30. （1）$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (3')

31. $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (3')

32. （2）由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维列向量知，矩阵 $C=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)$ 可逆，即矩阵 A 与 B 相似，故矩阵 A 与 B 有相同的特征值。 (3')

33. 由

34. $$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-2 & -2\\ -1 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0$$

35. 得矩阵 B 的特征值，即矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1\quad \lambda_3=4$。 $(3')$

36. **七、计算题**（本题 12 分）

37. A 的特征多项式为

38. $$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-1 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4)$$

39. 故 A 特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$ $(2')$

40. 对于 $\lambda_1=-2,\Rightarrow\begin{bmatrix}-4 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix}X=0\Rightarrow$ 基础解系 $\beta_1=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ $(2')$

41. 对于 $\lambda_2=1,\Rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}X=0\Rightarrow$ 基础解系 $\beta_2=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$ $(2')$

42. 对于 $\lambda_3=4,\Rightarrow\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}X=0\Rightarrow$ 基础解系 $\beta_3=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$ $(2')$

43. 由于 A 是实对称阵，特征向量 β_1,β_2,β_3 分别属于不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，故

β_1,β_2,β_3 正交。将其单位化，得

44. $$\alpha_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$ $(2')$

45. 令 $T=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$ 得 $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 4\end{bmatrix}$ $(2')$

46. **八、证明题**（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

47. 1. $\because A^T = -A \quad B^T = -B$ (1')

48. $(AB - BA)^T = (AB)^T - (BA)^T$ (1')

49. $= B^T A^T - A^T B^T$ (1')

50. $= (-B)(-A) - (-A)(-B) = BA - AB$

51. $= -(AB - BA)$

52. $\therefore AB - BA$ 是 n 阶反对称矩阵 (2')

53. 2. 由于 X_1, X_2 是某个齐次线性方程组的基础解系，故该齐次线性方程组的基础解系中含有 2 个解向量，且 $X_1 + X_2, 2X_1 - X_2$ 也是该齐次线性方程组的解，现只需证明 $X_1 + X_2, 2X_1 - X_2$ 线性无关即可。 (2')

54. 设有一组数 k_1, k_2，使 $k_1(X_1 + X_2) + k_2(2X_1 - X_2) = 0$

55. 即 $(k_1 + 2k_2)X_1 + (k_1 - k_2)X_2 = 0$ 由于 X_1, X_2 线性无关

56. $\therefore \begin{cases} k_1 + 2k_2 = 0 \\ k_1 - k_2 = 0 \end{cases} \qquad k_1 = k_2 = 0$

57. $\therefore X_1 + X_2, 2X_1 - X_2$ 线性相关

58. 故 $X_1 + X_2, 2X_1 - X_2$ 也是齐次线性方程组的基础解系。 (3')