# 人工智能学院本科生 2019—2020 学年第一学期线性代数（A 卷）参考答案

一.　(每个小题 2 分)　1.× 2. √ 3. √ 4.B 5.C 6.B 7.B 8.D

二.

1. 法一、$i(i=2,3,\cdots,n)$ 各行减去第一行，然后所有行再加到首行

$$|D_n|=\begin{vmatrix}0&2&3&\dots&n-1&n\\1&0&3&\dots&n-1&n\\1&2&0&\dots&n-1&n\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&2&3&\dots&0&n\\1&2&3&\dots&n-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2&3&\dots&n-1&n\\1&-2&0&\dots&0&0\\1&0&-3&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&0&0&\dots&-(n-1)&0\\1&0&0&\dots&0&-n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n-1&0&0&\dots&0&0\\1&-2&0&\dots&0&0\\1&0&-3&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&0&0&\dots&-(n-1)&0\\1&0&0&\dots&0&-n\end{vmatrix}$$

(2 分)　(2 分)

$=(-1)^{n-1}(n-1)n!$　(2 分)

法二、各列提出公因子

$$|D_n|=\begin{vmatrix}0&2&3&\dots&n-1&n\\1&0&3&\dots&n-1&n\\1&2&0&\dots&n-1&n\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&2&3&\dots&0&n\\1&2&3&\dots&n-1&0\end{vmatrix}=n!\begin{vmatrix}0&1&1&1&\dots&1\\1&0&1&1&\dots&1\\1&1&0&1&\dots&1\\1&1&1&0&\dots&1\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&1&1&1&\dots&0\end{vmatrix}\qquad (2\text{ 分})$$

$$=n!\begin{vmatrix}n-1&n-1&n-1&n-1&\dots&n-1\\1&0&1&1&\dots&1\\1&1&0&1&\dots&1\\1&1&1&0&\dots&1\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&1&1&1&\dots&0\end{vmatrix}=n!(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&1&\dots&1\\1&0&1&1&\dots&1\\1&1&0&1&\dots&1\\1&1&1&0&\dots&1\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&1&1&1&\dots&0\end{vmatrix}\qquad (2\text{ 分})$$

$$=n!(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&1&\dots&1\\0&-1&0&0&\dots&0\\0&0&-1&0&\dots&0\\0&0&0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&0&\dots&-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)n!\qquad (2\text{ 分})$$

2. 法一、第 i 行 $x^{i-1}$ 加到第一行 $i=2,3,\cdots,n$

$$|D_n|=\begin{vmatrix}x&0&0&\dots&0&a_n\\-1&x&0&\dots&0&a_{n-1}\\0&-1&x&\dots&0&a_{n-2}\\0&0&-1&\dots&0&a_{n-3}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&-1&a_1+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&0&\dots&0&a_n+\sum_{i=1}^{n-2}a_{n-i}x^i+(a_1+x)x^{n-1}\\-1&x&0&\dots&0&a_{n-1}\\0&-1&x&\dots&0&a_{n-2}\\0&0&-1&\dots&0&a_{n-3}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&-1&a_1+x\end{vmatrix}\qquad (3\text{ 分})$$

$$=(x^n+\sum_{i=1}^{n}a_ix^{n-i})(-1)^{1+n}\begin{vmatrix}-1 & x & 0 & \dots & 0\\ 0 & -1 & x & \dots & 0\\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1\end{vmatrix}=(x^n+\sum_{i=1}^{n}a_ix^{n-i})(-1)^{1+n}(-1)^{n-1}=x^n+\sum_{i=1}^{n}a_ix^{n-i}$$

(3 分) (2 分)

法二、 按照第一行展开

$$|D_n|=\begin{vmatrix}x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n\\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & a_{n-1}\\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & a_{n-2}\\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & a_{n-3}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_1+x\end{vmatrix}=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix}-1 & x & \dots & 0\\ 0 & -1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & x\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=xD_{n-1}+a_n$$

(2 分) (2 分)

而 $D_2=\begin{vmatrix}x & a_2\\ -1 & a_1+x\end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2$ (1 分)

从而推得 $D_3=x(x^2+a_1x+a_2)+a_3=x^3+\sum_{i=1}^{3}a_ix^{3-i},\dots,|D_n|=x^n+\sum_{i=1}^{n}a_ix^{n-i}$ (3 分)

三. 解：采用 Laplace 定理求得

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 3\\ 0 & 0 & 5 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix}8 & 3\\ 5 & 2\end{vmatrix}=(5-4)(16-15)=1$$ (3 分)

所以 $|A^4|=|A|^4=1$ (2 分)

由于 $AA^*=|A|E$，两边同取行列式得 $|A||A^*|=||A|E|=|A|^4$，而 $|A|=1\neq 0$，得到 $|A^*|=1$

(3 分) (2 分)

四、解：

$$B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & a-3 & -2 & 2b\\ 3 & 2 & 1 & a & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & a-3 & -2 & 2b\\ 3 & 2 & 1 & a & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 2b+1\\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0\end{bmatrix}$$

(写出增广矩阵 2 分) (3 分)

因此当 $a\neq 1$时，系数矩阵的秩为 4，增广矩阵的秩也为 4，此时方程组有唯一解； (2 分)
当 $a=1$时，系数矩阵的秩为 2，

此时若 $b=-1/2$，增广矩阵的秩也为 2，因此方程组将有无穷多组解 (1 分)

若 $b\neq -1/2$，则增广矩阵的秩为 3，方程组将无解 (1 分)

方程组有无穷多组解时 $a=1$ 且 $b=-1/2$，此时方程组为：$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_2+2x_3+2x_4=1\end{cases}$ (1 分)

取 $x_3, x_4$ 为自由未知量，方程组化为 $\begin{cases} x_1 = -1 + x_3 + x_4 \\ x_2 = 1 - 2x_3 - 2x_4 \end{cases}$ (1 分)

因此方程组的解为：

$\begin{cases} x_1 = -1 + \tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 \\ x_2 = 1 - 2\tilde{x}_3 - 2\tilde{x}_4 \\ x_3 = \tilde{x}_3 \\ x_4 = \tilde{x}_4 \end{cases}$，写成向量形式：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{x}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{x}_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2 分)

其中 $\tilde{x}_3, \tilde{x}_4$ 为任意实数。 (1 分)

五．解：

（1）易得

$$\left[1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3, 1+x+x^2+x^3+x^4\right] = \left[x^4, x^3, x^2, x, 1\right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ (3 分)

故求基底(I)到基底(II)的过渡矩阵 $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (1 分)

(2) $$(M, E) = \left[\begin{array}{ccccc:ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc:ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc:ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ 故 $M^{-1} = \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2 分)

多项式 $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$ 在基底(I)下的坐标 $X = (5,4,3,2,1)^{\mathrm{T}}$ ， (1 分)

故在基底（II)下的坐标为 $Y = M^{-1}X$ (1 分)

$= (-1,-1,-1,-1,5)^T$ (1 分)

六、解： 二次型矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$， (2 分)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -4 & 2\\ -2 & \lambda-9 & 4\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

故特征根为 $\lambda_1=1$(二重) $\lambda_2=10$ (2 分)

将 $\lambda_1=1$ 代入 $(\lambda E-A)x=\begin{bmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{bmatrix}x=0$，即 $\begin{bmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{bmatrix}x=0$

解得基础解系 $\alpha_1=\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ (2 分)

正交化得 $p_1=\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix},p_2=\begin{bmatrix}2/5\\ 4/5\\ 1\end{bmatrix}$ (1 分)

标准化得 $\eta_1=\begin{bmatrix}-2/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5}\\ 0\end{bmatrix},\eta_2=\begin{bmatrix}2/(3\sqrt{5})\\ 4/(3\sqrt{5})\\ 5/(3\sqrt{5})\end{bmatrix}$ (2 分)

类似得 $\lambda_2=10$ 的特征向量 $p_3=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$ (1 分)

标准化得 $p_3=\begin{bmatrix}-1/3\\ -1/3\\ 1/3\end{bmatrix}$ (1 分)

构造正交矩阵 $Q=\begin{bmatrix}-2/\sqrt{5} & 2/(3\sqrt{5}) & -1/3\\ 1/\sqrt{5} & 4/(3\sqrt{5}) & -2/3\\ 0 & 5/(3\sqrt{5}) & 2/3\end{bmatrix}$ (1 分)

正交变换 $X=QY$ 把二次型化为标准型 $y_1^2+y_2^2+10y_3^2$ (1 分)

该二次型符号差为 3. (1 分)

七. 证明：已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 3，向量组(II) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 3，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关。 （1 分）

因此，$\alpha_4$ 可以被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出。 （2 分）

设 $\alpha_4$ 可表示为 $\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中 $k_1,k_2,k_3$ 为数， （1 分）

其中已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性无关。又矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -k_1\\ 0 & 1 & 0 & -k_2\\ 0 & 0 & 1 & -k_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 可逆， （3 分）

因此$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$线性无关，因此$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为 4。（2 分）

八．证明：由$|A|=6$已知，因此$A$可逆。（1 分）

因此$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$（2 分）

此式两边取行列式，由于左边第一个矩阵行列式为 1，因此有

$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|$（3 分）

根据行列式乘法的公式，以及已知$AC=CA$，有

$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|=|AD-ACA^{-1}B|=|AD-CAA^{-1}B|=|AD-CB|$。（3 分）

九．解：设$A$的特征值为$\lambda$，属于$\lambda$的特征向量为$X$，则有$AX=\lambda X$。

由已知$A^2-2A=O$，有 $0=0X=(A^2-2A)X=A^2X-2AX=\lambda^2X-2\lambda X=(\lambda^2-2\lambda)X$，

因$X\neq 0$，所以$\lambda^2-2\lambda=0$。故$A$的特征值只能是 0 或 2。且$A$与对角形矩阵相似。所相似的对角形矩阵的秩与$A$的秩相等，为 2，且对角形矩阵对角线上元素都是$A$的特征值，因此$A$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=0$。（3 分）

$A$是实对称矩阵，则存在正交矩阵$C$，使$C^TAC=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，于是

$C^T(A+kE)C=C^TAC+kE=\begin{pmatrix} 2+k & 0 & 0 \\ 0 & 2+k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$，

即$A+kE$与此对角形矩阵合同，该对角形矩阵正定的充要条件是$k>0$，因此$k>0$时，$A+kE$正定。（2 分）