草稿区

软件学院本科生 2021——2022 学年第 2 学期《算法导论》课程期末考试试卷（A 卷）

专业：软件工程　　年级：20级　　学号：20120912　　姓名：李某某　　成绩：85

得分 28

一、单选题（本题共 30 分，每小题 2 分）

1. 在算法复杂度分析中，以下对于Ω的定义正确的是（ A ）。

A. 如果存在正数c和n_0，使得对所有的$n \geq n_0$，有$T(n) \geq c \cdot f(n) \geq 0$，那么$T(n) = \Omega(f(n))$

B. 如果存在正数c和n_0，使得对所有的$n \geq n_0$，有$0 \leq T(n) \leq c \cdot f(n)$，那么$T(n) = \Omega(f(n))$

C. 如果存在正数c和n_0，使得对所有的$n \leq n_0$，有$T(n) \geq c \cdot f(n) \geq 0$，那么$T(n) = \Omega(f(n))$

D. 如果存在正数c和n_0，使得对所有的$n \leq n_0$，有$0 \leq T(n) \leq c \cdot f(n)$，那么$T(n) = \Omega(f(n))$

2. 以下关于时间复杂度性质的描述，错误的是（ A,D ）。

A. 如果对每个$r > 1$和每个$d > 0$，$n^d = O(r^n)$

B. 对于 $x > 0$，$b > 1$，$\log_b n = O(n^x)$ ✓

C. 如果$f = \Omega(h)$，且$g = \Omega(h)$，那么$f + g = \Omega(h)$ ✗

D. 如果$g = \Omega(f)$，那么$f + g = \theta(f)$

3. 给定一个排好序的含有n个数的数组 A，确定任给的数k是否属于这个数组所需要的时间复杂度至少为（ B ）。

A. $O(n)$　　B. $O(\log n)$　　C. $O(n \log n)$　　D. $O(n^2)$

4. 设排好序的查找表中共有 1000 个元素，用二分检索查找某数据元素最多需要比较（ C ）次可以断定数据是否在查找表中。

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

5. 下列不属于贪心法设计思想的是（ C ）。

A. 局部最优策略不一定都能导致全局最优，必须进行正确性证明 ✗

B. 通常采用举反例的方法否定错误的贪心策略 ✗

C. 需要获取各阶段间的递推关系式

D. 自顶向下求解，通过选择将问题归约为小的子问题

$n^2 > 2^n$

$2^k = 1000$

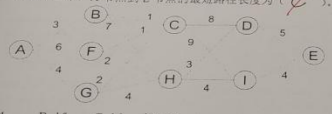
$k = \log 1000$

32 64 128 256

6. 给定客户集合 A={1, 2, 3, 4, 5}，客户服务时间<5, 8, 4, 10, 3>，服务完成时间<10, 12, 15, 11, 20>，在使最大延迟达到最小的调度中，该调度的最大延迟为（ B ）。

A. 10　　B. 12　　C. 14　　D. 16

7. 在以下图中，A 节点到 E 节点的最短路径长度为（ C ）。



A. 14　　B. 15　　C. 16　　D. 17

8. 现在有 10 级台阶，每次可以上 1 级、2 级或 3 级，则总共有（ C ）种上楼梯的方案。

A. 125　　B. 230　　C. 274　　D. 149

9. 现在有一个负重上限为W的背包，以及n个价值和重量分别为v_i和w_i的物品，使用动态规划的方法构造正确的递推方程（ A ）（其中$F[k, w]$表示装前k件物品，总重量不超过w时背包的最大价值）。

A. $F_k(y) = \max\{F_{k-1}(y),\ F_{k-1}(y - w_k) + v_k\}$

B. $F_k(y) = \max\{F_{k-1}(y),\ F_k(y - w_k) + v_k\}$

C. $F_k(y) = \max\{F_{k-1}(y) + v_k,\ F_{k-1}(y - w_k)\}$ ✗

D. $F_k(y) = \max\{F_{k-1}(y) + v_k,\ F_k(y - w_k)\}$ ✗

10. 下列关于回溯算法表述有误的是（ D ）。

A. 适用于解决搜索问题或组合优化问题　　B. 通常用树的结构表示搜索空间

C. 需要判断是否满足多米诺性质　　D. 搜索过程中树的结构都是确定的，不会动态变化

X. 最大子段和问题，为在给定序列$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$中，找出连续的子段使子段之和最大的问题，使用暴力算法的时间复杂度为（ A ），使用动态规划方法的时间复杂度为（　　）。

A. $O(n^3)$　　$O(n)$　　B. $O(n^3)$　　$O(n \log n)$　　C. $O(n^3)$　　$O(n \log n)$　　D. $O(n^2)$　　$O(n)$

12. 影响回溯算法效率的因素有（ D ）。

A. 搜索树的结构　　B. 解的分布

C. 约束条件的判断　　D. 以上三种

13. 下面关于线性规划解的可能的说法中，错误的是（ C ）。

A. 有唯一的最优解　　B. 有无穷多个最优解

C. 有可行解，则必有最优解　　D. 无可行解，更无最优解 ✗

14. 以下关于动态规划算法实现方法的说法错误的是（ A ）。

A. 递归实现的时间复杂度高于迭代实现

$f(n-1) + f(n-2) + f(n-3)$

for 循环

草稿区

B. 递归实现可以有效利用已经计算过的子问题结果，避免重复计算
C. 自底向上计算，是迭代实现的计算方法
D. 采用动态规划算法时需要判断该问题是否满足优化原则

15. 下列线性规划中属于标准形的是（ D ）。

A. $\max z = 3x_1 - 2x_2 + x_3$
s.t. $x_1 + 3x_2 - 3x_3 \le 10$
$4x_1 - x_2 - 5x_3 \le -30$
$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

B. $\min z = -x_1 + 3x_2 + x_3$
s.t. $x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10$
$4x_1 - x_2 - 5x_3 = -30$
$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

C. $\max z = 3x_1 - 2x_2 + x_3$
s.t. $x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10$
$4x_1 - x_2 - 5x_3 = 5$
$x_1, x_2, \ge 0\ x_3 \le 0$

D. $\min z = -x_1 + 3x_2 + x_3$
s.t. $x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10$
$4x_1 - x_2 - 5x_3 = 5$
$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

得分 15

二、填空题（本题共 20 分，每空 2 分）

1. 按照阶从低到高对以下三个函数进行排序：$\log(n!)$, $n!$, $n2^n$, ___n!, n2^n, log(n!)___
2. 根据主定理，求解递推方程 $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$，$T(n) = \theta($___log₂n___$)$。
3. 使用快速排序算法对序列[27, 99, 0, 8, 13, 64, 86, 16, 7, 10, 88, 25, 90]进行排序，基准数取 27，则一趟排序(找到 27 的正确位置)后的结果为___25,0,8,13,10,7,16,27,86,64,88,99,90___，快速排序最坏情况下的时间复杂度是 $\theta($___n^2___$)$。
4. 在最小生成树算法：Prim 算法和 Kruskal 算法中，如果图中的边较多，选择 ___Prim 算法___ 更好。
5. 对贪心法局部最优策略的正确性进行证明方法通常采取的方法是___数学归纳法___和___反证法证法___。
6. 回溯算法采用分支限界算法时搜索停止分支的依据是___代价函数不超过界___。
7. 4 皇后问题总共有___2___种放置方案。
8. 若序列 X = [B, C, A, D, B, C, D] 和 Y = [A, C, B, A, B, D, C, D]，则 X 和 Y 的一个最长公共子序列为___[C, A, D, C, D]___。

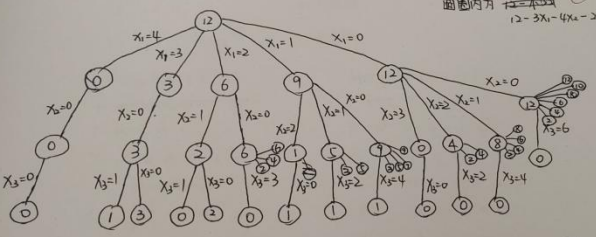
草稿区

得分 22

三、简答与计算（本题共 24 分，每小题 8 分）

1. 请采用回溯算法求解搜索问题的思路，绘制出下列不等式的搜索树。

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 12 \\ x_1, x_2, x_3 \text{为非负整数} \end{cases}$$



圈圈内为 $12 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3$ 的值

解向量 (4,0,0) (3,0,0) (2,1,0) (2,1,1) (2,0,3) (2,0,2) (2,0,1) (2,0,0) (0,3,0) (1,2,0) (1,1,2) (1,1,1) (1,1,0) (0,2,2) (0,1,4) (0,0,6)

x_1 取值 {0,1,2,3,4}
x_2 取值 {0,1,2,3}
x_3 取值 {0,1,2,3,4,5,6}

草稿区

2. 设a是一个给定实数，计算a^n，其中n为自然数。
(1) 用直接相乘的方法，求出算法时间复杂度。
(2) 使用分治算法，写出算法伪代码，并求出算法时间复杂度。

8

(1) 两数相乘时间复杂度 $O(1)$
共相乘 $n-1$ 次，时间复杂度 $O(n-1)=O(n)$ $T(n)=$

(2)
$$a^n=\begin{cases} a^{\frac{n}{2}}\times a^{\frac{n}{2}} & ,n\text{为偶数} \\ a^{\frac{n-1}{2}}\times a^{\frac{n-1}{2}}\times a & ,n\text{为奇数} \end{cases}$$

MergeMult(a, n)
~~1. while q n > 1 do~~
1. rest ← 1
2. while ~~q~~ n > 1 do
~~if q n %~~
3. if n mod 2 = 1
then rest ← a
a ← a * a
~~q~~ n ← ⌊~~q~~ n / 2⌋
if

MergeMult(a, n)
1. rest ← 1 ; q ← n ;
2. while q > 1 do
3. if q mod 2 = 1
4. then rest ← a×rest
5. a ← a * a
6. q ← ⌊q/2⌋
7. if q = 1
8. then a ← a * rest
9. return a

$T(n)=O(\log_2 n)$

a×a

$\begin{cases} a^{\frac{n}{2}}\times a^{\frac{n}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}}\times a^{\frac{n-1}{2}}\times a \end{cases}$

while
if

a

if n = 1
~~rest~~ return

草稿区

3. 使用单纯形法求解线性规划，需写出求解过程。

$$\max z=-2x_1+x_2-x_3$$
$$\text{s.t. } 2x_1+x_2\le 10$$
$$-4x_1-2x_2+3x_3\le 10$$
$$x_1-2x_2+x_3\le 14$$
$$x_1,x_2,x_3\ge 0$$

6

化为标准形

$$\min z=2x_1-x_2+x_3$$
$$\text{s.t. } 2x_1+x_2+x_4=10$$
$$-4x_1-2x_2+3x_3+x_5=10$$
$$x_1-2x_2+x_3+x_6=14$$
$$x_i\ge 0,\ i=1,2,3,\cdots,6$$

单纯形表

			2	-1	1	0	0	0	
C_B	X_B	β	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
0	x_4	10	2	[1]	0	1	0	0	10
0	x_5	10	-4	-2	3	0	1	0	-
0	x_6	14	1	-2	1	0	0	1	-
	$-z$	0	2	[-1]	1	0	0	0	
-1	x_2	10	2	1	0	1	0	0	
0	x_5	30	0	0	3	2	1	0	
0	x_6	34	5	0	1	2	0	1	
	$-z$	10	4	0	1	1	0	0	

解向量 $X^*=(0,10,0,0,30,34)$
$z_{min}=-10$

-4 - -4
10 - -20
0 - -2
1 -
14 - -2
2 - -1

草稿区

得分 22

四、综合题（本题共26分）

1. 一个旅行者要驾车从A地到B地，A、B两地间距离为s。A、B两地之间有n个加油站，已知第i个加油站离起点A的距离为d_i公里，$0 = d_1 < d_2 < \cdots < d_n \leq s$。车加满油后可行驶$m$公里($m \geq d_{i+1} - d_i, i = 1, 2, \ldots, n-1$)，且出发之前汽车油箱为空。应如何加油使得从A地到B地沿途加油次数最少？(本小题14分)

(1) 给出一种正确求解该最优化问题的贪心策略描述：

(2) 写出该贪心策略的伪码：

(3) 对该贪心策略进行正确性证明。

(1) ~~将加油站离A距离从小到大排序~~

~~依次到下一排序~~ 的最大值，设从i出发

找 加满 能跑过m公里所能到达的最远站j

则加能跑$d_j - d_i$公里数的油

(2)
```
MinCnt(d, n, x[n])
1. 找到 d_{i+1} - d_i (i=1,2,...,n-1)的最大值 m
2. i ← 1; cnt ← 1;
3. while i < n do
4.     ~~if d_i while d_i + m~~ j ← i+1
5.     while d_i + m ≥ d_j do
6.         j ← j+1
7.     i ← j-1; ~~x[i]~~ x[i] = d_{i-1} - d_i
8.     cnt ← cnt + 1;
9. return cnt; x;
```

(3) 命题：该算法在规模为n的问题中可得到最优解

当$n=1$时，加能跑$s-d_1$公里的油便可

此时只加一次油，显然是最优解

假设$n=k$时 能获得最优解 I，集合$S=\{d_1, \cdots, d_n\}$

~~和~~此时经过站点$A=\{d_1, d_2, \cdots, d_i\}$

设B为S-A的剩余问题 $\{d_{i+1}, \cdots, d_n\}$

B的最优解 I'

草稿区

2. 设S_1和S_2是两个字符串，我们要将字符串S_1转换为字符串S_2。这里所说的字符操作包括：

(1) 删除一个字符；(2) 插入一个字符；(3) 将一个字符替换为另一个字符。

将字符串S_1变换为字符串S_2所用的最少字符操作数称为字符串S_1到S_2的编辑距离，记为C。对任给的两个字符串$S_1[1..n]$和$S_2[1..m]$，计算出它们的编辑距离。(本小题12分)

(1) 试设计一个有效的动态规划算法，求解以上问题；

(2) 写出该算法的伪码；

(3) 求该算法的时间复杂度。

(1) $C[i,j]$表示编辑到 $S_1[i]$、$S_2[j]$时的最小编辑距离

S_1~~只~~删除一个字符时，$C[i-1,j]+1$（编辑距离$C[i,j]$声明）

将$S_2[j]$插入到$S_1[i]$后，$C[i,j-1]+1$

将$S_2[j]$替换成$S_1[i]$，$C[i-1,j-1]+1$

$S_2[j]$与$S_1[i]$相等，$C[i-1,j-1]+1$

$$\therefore C[i,j] = \begin{cases} 0 & , i,j<1 \\ \min\{C[i-1,j]+1,\ C[i,j-1]+1,\ C[i-1,j-1]+t[i,j]\} & , 0<i\leq n,\ 0<j\leq m \end{cases}$$

其中 $t[i,j] = \begin{cases} 0 & , S_1[i] = S_2[j] \\ 1 & , S_1[i] \neq S_2[j] \end{cases}$

(2)
```
transform(S1, S2)
1. for i ← 0 to n do
2.     C[i,0] ← 0
3. for i ← 0 to m do
4.     C[0,j] ← 0
5. for j ← 1 to m do
6.     for i ← 1 to n do
7.         if S1[i] = S2[j]
8.         then C[i,j] ← C[i-1,j-1]
9.         else C[i,j] = min(C[i-1,j]+1,
                             C[i,j-1]+1,
                             C[i-1,j-1]+1)
10.    return C[i,j]
```

(3) $T(n) = O(mn)$