

南开大学 2020 年第 1 学期高等数学期末考试试卷

2020-2021 学年第 1 学期

考试科目：高等数学 A I

考试类型：（闭卷）考试

考试时间：120 分钟

学号 姓名 年级专业

题号	一	二	三	四	总分
得分					
评阅人					

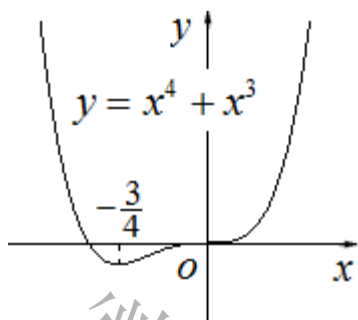
得分

一、填空题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$. $f'(0)$ 2. 曲线 $y = \frac{1 - \cos 2x}{2} + x$ 在 $(\frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2})$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$. $y = x + 1$ 3. 曲线 $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ 有垂直渐近线 $\underline{\hspace{2cm}}$ 和水平渐近线 $\underline{\hspace{2cm}}$. $x = \pm 1, y = 1$ 4. 设 $f(u)$ 可导, $y = \sin^2[f(e^x)]$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$. $\sin 2[f(e^x)] \cdot f'(e^x) \cdot e^x dx$ 5. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$. $2(e^2 + 1)$

二、单项选择题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1. 函数 $y = x^4 + x^3$ 的图形如图所示，则 $x = -\frac{3}{4}$ () .



- A. 是该函数的一个极小值点，且为最小值点
- B. 是该函数的一个极小值点，但不是为最小值点
- C. 是该函数的一个极大值点
- D. 不是该函数的一个极值点

2. 若函数 $f(x)$ 有一个原函数 $\cos 2x$ ，则不定积分 $\int f(x) dx =$ () .

- A. $-\sin 2x + C$
- B. $-\frac{1}{2}\sin 2x + C$
- C. $\cos 2x + C$
- D. $2\cos 2x + C$

3. 若定积分 $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{x^2+1} dx =$ () .

- A. $\frac{1}{2}\ln 2$

B. $\ln 2$ C. $\ln 3$

D. 2

4. 定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = ()$.

A. -1

B. 0

C. 1

D. $\frac{\pi}{2}$ 5. 曲线 $y = x^3 - 5x$ 的凸区间是 () .A. $(0, +\infty)$ B. $(-1, 4)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(-\infty, +\infty)$

三、计算题 (本大题共7小题, 每小题7分, 共49分)

1. 求函数 $y = \frac{2x}{1+x^2}$ 的极值与拐点.解: 函数的定义域 $(-\infty, +\infty)$.2. 设 $f(t)$ 可微且 $f'(t) \neq 0$ 若 $\begin{cases} x = e^{f(t)} \\ y = \cos f^2(t) \end{cases}$ 试求 $A(t)$ 使 $dy = A(t)dx$.3. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$, 则试求: $\int x f'(x) dx$.

确定 $y = e^{2x}(x^2 - 2)$ 的单调区间。

4. 设方程 $y^2 - 2xy + 9 = 0$ 确定隐函数 $y = y(x)$ ，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

5. 求函数 $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ 的单调区间，极值和拐点。

6. 计算定积分 $\int_1^e x \ln x dx$ 。

7. 求不定积分 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 。

四、解

得分

答题 (本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分)

1. 证

明不等式：当 $x > 0$ 时， $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ 。

2. 设 $a > 0$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，又 $f(a) = 0$ ，试证：存在

$\xi \in (a, b)$ ，使得 $f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$ 。

3. 如图，在区间 $[0, 1]$ 上给出函数 $y = x^2$ ，问 a 为何值时，图中阴影部分的面积 A_1 与

A_2 之和最小？

