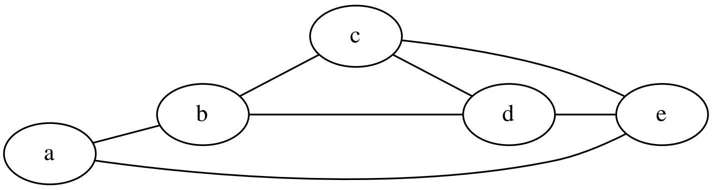
Feuille de TD 4 : graphes eulériens et hamiltoniens

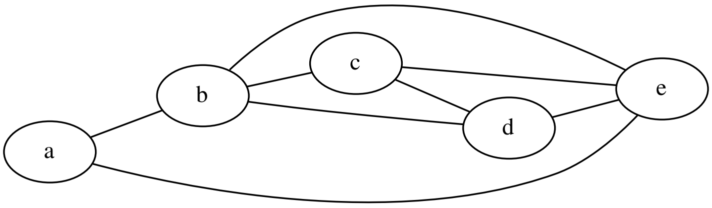
Exercice 1 : Graphes non orientés eulériens

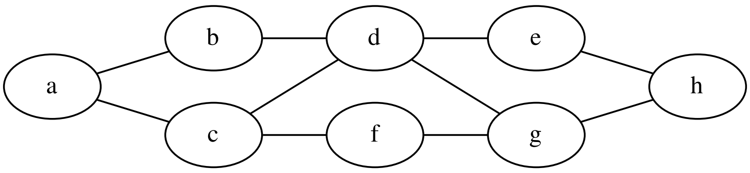
(a) En utilisant le théorème d'Euler, identifiez les graphes eulériens et les graphes semi-eulériens, parmi les 4 graphes suivants.

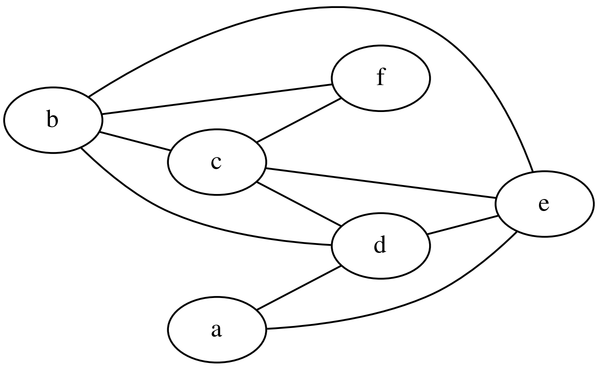
(b) Pour les graphes eulériens, donnez un cycle eulérien, en utilisant l'algorithme vu en cours, et en détaillant chacune des étapes de la construction du cycle.

(c) Pour les graphes semi-eulériens, donnez une chaîne eulérienne, en utilisant l'algorithme vu en cours, et en détaillant chacune des étapes de la construction de la chaîne.









Solution:

Graphe	Sommets de degré impair	Graphe eulérien ?	Graphe semi-eulérien ?
1	4 sommets : b, c, d, e	non	non
2	2 sommets : c, d	non	oui
3	2 sommets : c, g	non	oui
4	aucun	oui	-

(a) Le tableau ci-dessus indique, pour chacun des 4 graphes, le nombre de sommets de degré impair : cela permet de déduire si le graphe est eulérien, semi-eulérien ou ni l'un, ni l'autre. En effet, d'après le théorème d'Euler, les graphes eulériens ne comportent que des sommets de degré pair (donc aucun sommet de degré impair) et les graphes semi-eulériens comportent exactement 2 sommets de degré impair. Dans les autres cas, les graphes ne sont ni eulériens, ni semi-eulériens.

Ainsi, parmi les 4 graphes donnés, seul le 4^e graphe a tous ses sommets de degré pair : c'est donc le seul graphe eulérien. Le 2^e et le 3^e graphes ont 2 sommets de degré impair : ils sont donc semi-eulériens.

Enfin, le 1^{er} graphe a 4 sommets de degré impair : il n'est donc ni eulérien, ni semi-eulérien.

(b) Seul le quatrième graphe est eulérien. Voici le détail du calcul d'un cycle eulérien, pour ce graphe, en indiquant chacune des étapes de l'algorithme vu en cours (il s'agit ici d'un exemple de cycle eulérien car il est possible de construire de nombreux autres cycles eulériens) :

1. $s = a$; $C_1 = [a, d, e, a]$
2. $s_1 = d$; $C_2 = [a,$ **d, b, c, d**$, e, a]$
3. $s_2 = b$; $C_2 = [a, d,$ **b, e, c, f, b**$, c, d, e, a]$

(c) Les deuxième et troisième graphes sont semi-eulériens : on peut donc construire une chaîne eulérienne pour chacun d'eux. Il existe également de nombreuses chaînes eulériennes possibles mais chacune d'elle commence par un des 2 sommets de degré impair et se termine par le second sommet de degré impair.

i. Voici un exemple de calcul d'une chaîne eulérienne, pour le deuxième graphe :

1. $s = c$; $C_1 = [c, d]$
2. $s_1 = c$; $C_2 = [$**c, b, e, c**$, d]$
3. $s_2 = b$; $C_3 = [c,$ **b, a, e, d, b**$, e, c, d]$

ii. Voici un exemple de calcul d'une chaîne eulérienne, pour le troisième graphe :

1. $s = c$; $C_1 = [c, f, g]$
2. $s_1 = c$; $C_2 = [$**c, a, b, d, c**$, f, g]$
3. $s_2 = d$; $C_3 = [c, a, b,$ **d, e, h, g, d**$, c, f, g]$

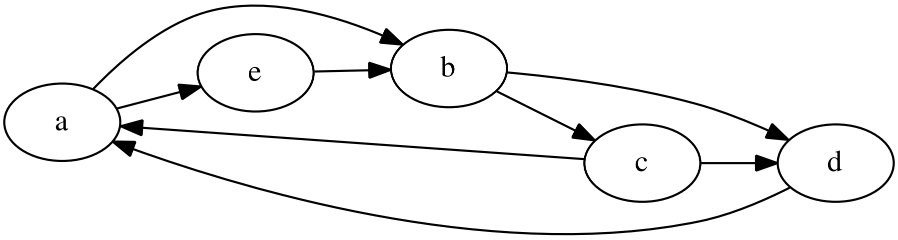
Remarque Si on souhaite construire les chaînes et les cycles de manière déterministe, on peut tout d'abord sélectionner le premier sommet de la chaîne ou du cycle qui possède des arêtes non encore utilisées et, s'il en possède plusieurs, on pourra d'abord choisir l'arête vers le sommet dont le nom est « inférieur » aux autres. Par exemple, si on a la chaîne $[c, a, b, d]$, on choisit le sommet c, pour construire de nouveaux cycles, si le sommet c possède des arêtes non encore utilisées. Si le sommet c possède les arêtes non encore utilisées $\{c, a\}$ et $\{c, d\}$, on choisira préférablement le cycle qui commence par l'arête $\{c, a\}$.

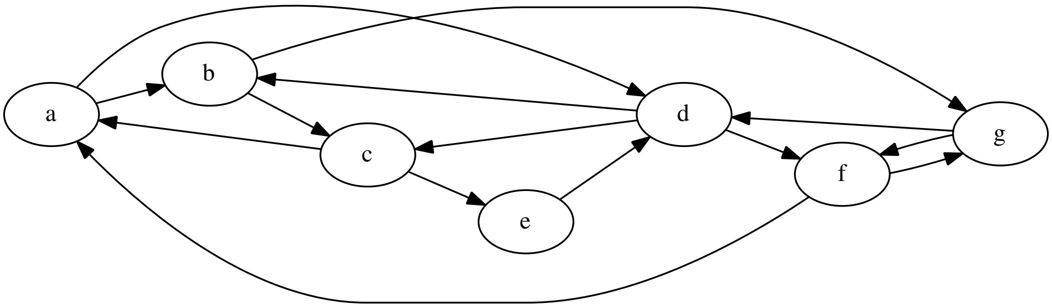
Exercice 2 : Graphes orientés eulériens

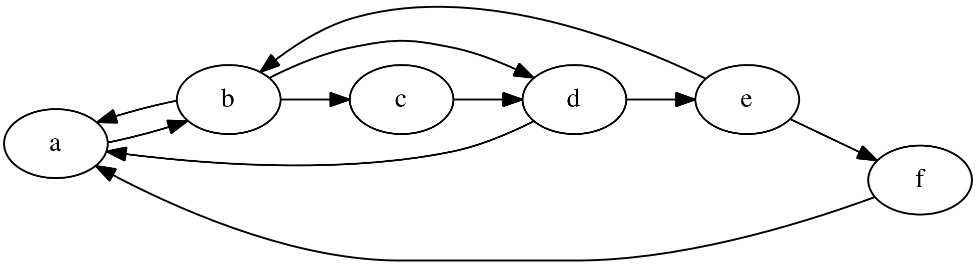
(a) En utilisant le théorème d'Euler, identifiez les graphes eulériens et les graphes semi-eulériens, parmi les 4 graphes suivants.

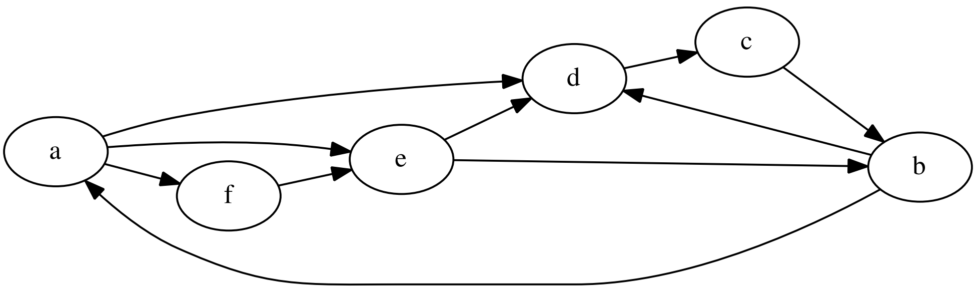
(b) Pour les graphes eulériens, donnez un circuit eulérien, en utilisant l'algorithme vu en cours, et en détaillant chacune des étapes de la construction du circuit.

(c) Pour les graphes semi-eulériens, donnez un chemin eulérien, en utilisant l'algorithme vu en cours, et en détaillant chacune des étapes de la construction du chemin.









Solution:

Graphe	Nombre de sommets avec $d^-(x) \neq d^+(x)$	Graphe eulérien ?	Graphe semi-eulérien ?
1	$d^+(c) - d^-(c) = 1$ $d^+(d) - d^-(d) = -1$	non	oui
2	0	oui	-
3	3 : a, b, e	non	non
4	$d^+(a) - d^-(a) = 2$ $d^+(d) - d^-(d) = -2$	non	non

(a) Le tableau ci-dessus indique, pour chacun des 4 graphes, le nombre de sommets x dont le degré entrant, $d^{-}(x)$, est différent du degré sortant, $d^{+}(x)$: cela permet de déduire si le graphe est eulérien, semi-eulérien ou ni l'un, ni l'autre. En effet, d'après le théorème d'Euler, les graphes eulériens ne comportent que des sommets de degré entrant égal à leur degré sortant et les graphes semi-eulériens comportent exactement 2 sommets de degré entrant différent de leur degré sortant et la différence entre les degrés entrant et sortant de chacun de ces 2 sommets doit être égal à 1 ou -1. Dans les autres cas, les graphes ne sont ni eulériens, ni semi-eulériens.

Ainsi, parmi les 4 graphes donnés, seul le 2^e graphe a tous ses sommets de degré entrant égal à leur degré sortant : c'est donc le seul graphe eulérien.

Le 1^{er} graphe a 2 sommets de degré entrant différent de leur degré sortant : le sommet c a une différence de 1 entre ses 2 degrés et le sommet d a une différence de -1. Le graphe est donc semi-eulérien.

Le 3^e graphe a 3 sommets de degré entrant différent de leur degré sortant : il n'est donc ni eulérien, ni semi-eulérien.

Enfin, le 4^e graphe a 2 sommets de degré entrant différent de leur degré sortant mais la différence entre le degré entrant et le degré sortant de chaque sommet est de $\pm\, 2$: le graphe n'est donc ni eulérien, ni semi-eulérien.

(b) Seul le deuxième graphe est eulérien. Voici le détail du calcul d'un circuit eulérien, pour ce graphe, en indiquant chacune des étapes de l'algorithme vu en cours (il s'agit ici d'un exemple de circuit eulérien car il est possible de construire de nombreux autres circuits eulériens) :

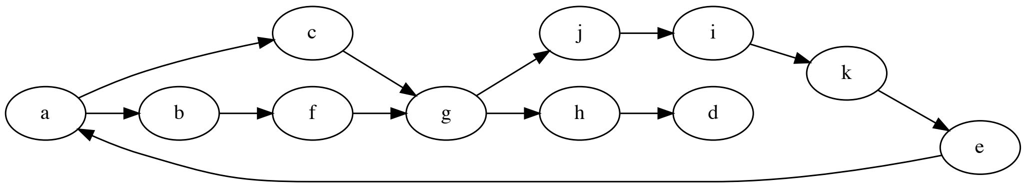
1. $s = a$; $C_1 = [a, b, c, a]$
2. $s_1 = a$; $C_2 = [$**a, d, f, a**$, b, c, a]$
3. $s_2 = b$; $C_3 = [a, d, f, a,$ **b, g, d, b**$, c, a]$
4. $s_3 = c$; $C_3 = [a, d, f, a, b, g, d, b,$ **c, e, d, c**$, a]$
5. $s_4 = f$; $C_3 = [a, d,$ **f, g, f**$, a, b, g, d, b, c, e, d, c, a]$

(c) Le premier graphe est semi-eulérien : on peut donc construire un chemin eulérien pour celui-ci. Il existe également de nombreux chemins eulérien possibles mais chacun d'eux commence par le sommet dont le degré sortant est supérieur au degré entrant et se termine par le sommet de degré sortant inférieur au degré entrant. Voici le détail du calcul d'un chemin eulérien pour ce graphe :

1. $s = c$; $C_1 = [c, d]$
2. $s_1 = c$; $C_2 = [$**c, a, b, c**$, d]$
3. $s_2 = a$; $C_3 = [c,$ **a, e, b, d, a**$, b, c, d]$

Exercice 3 : Visite de remparts (DS du 01/06/2023 - exercice 1)

La ville de Guérande souhaite proposer des parcours dans la ville fortifiée, pour visiter une partie des remparts et une partie des ruelles. Le graphe, représentant la ville, est donné par la figure ci-dessous : les sommets correspondent aux portes d'entrée dans la ville ou à des monuments et les arcs correspondent aux ruelles et aux remparts de la ville.



(a) Une première idée de parcours consiste à partir de la porte identifiée par le sommet a, à visiter tous les remparts et toutes les ruelles, une et une seule fois, puis à revenir à la porte de départ.
   i. Est-ce possible ? Justifiez votre réponse.
   ii. Si c'est possible, donnez un circuit correspondant à ce parcours.

(b) Une deuxième idée de parcours consiste à partir de la porte identifiée par le sommet a puis à visiter tous les remparts et toutes les ruelles, une et une seule fois (sans nécessairement revenir à la porte de départ).
   i. Est-ce possible ? Justifiez votre réponse.
   ii. Si c'est possible, donnez un chemin correspondant à ce parcours.

Solution:

(a) Cela revient à chercher un circuit eulérien dans le graphe.
   i. D'après le théorème d'Euler, il existe un circuit eulérien si le graphe ne comporte que des sommets de degré entrant égal à leur degré sortant. Or, ce n'est pas le cas des sommets a et d. Le graphe n'est donc pas eulérien et il n'est ainsi pas possible de trouver un circuit eulérien.
   ii. Comme le graphe n'est pas eulérien, il n'est pas possible de trouver un circuit correspondant à ce parcours, comme indiqué à la question précédente.

(b) Cela revient à chercher un chemin eulérien dans le graphe.
   i. D'après le théorème d'Euler, il existe un chemin eulérien si le graphe est connexe et s'il comporte exactement 2 sommets de degré entrant différent de leur degré sortant, et pour lesquels la différence est de +1 pour un des sommets et de -1 pour l'autre sommet (les autres sommets ont leur degré entrant égal à leur degré sortant). Ici, le graphe est connexe et, comme vu à la question précédente, tous les sommets ont leur degré entrant égal à leur degré sortant, sauf les sommets a et d. De plus, le sommet a a un degré entrant de 1 et un degré sortant de 2 (soit une différence de +1 entre le degré sortant et le degré entrant) et le sommet d a un degré entrant de 1 et un degré sortant de 0 (soit une différence de -1 entre le degré sortant et le degré entrant). Les conditions du théorème d'Euler sont bien satisfaites, ce qui permet de conclure que le graphe est ici semi-eulérien et il est ainsi possible de trouver un chemin eulérien.
   ii. On utilise l'algorithme vu en cours, pour obtenir, par exemple, le chemin eulérien suivant : $[a, b, f, g, j, i, k, e, a, c, g, h, d]$.

Pour aller plus loin

Exercice 4 : tournée musicale (Test du 25/09/2013 - exercice 4)

Le groupe de musique Boys in the Woods veut organiser sa tournée en France dans 7 salles de concert. Pour aller d'une salle à une autre, le groupe ne peut combiner que les trajets suivants : Antipode–Stereolux, Antipode–Vapeur, Antipode–Cargo, Vapeur–Cargo, Vapeur–Trabendo, Vapeur–Phare, Cargo–Trabendo, Olympia–Trabendo, Olympia–Phare, Trabendo–Phare, Stereolux–Phare.

(a) Représentez ce problème par un graphe en précisant la nature du graphe, la signification des sommets ainsi que celle des arcs ou arêtes (les salles seront désignées par leur initiale). Dessinez le graphe correspondant.

(b) Le groupe souhaite commencer sa tournée par le Stereolux puis ne passer qu'une seule fois par chaque salle.
   i. Est-ce possible ? Justifiez.
   ii. Si c'est possible, donnez un trajet pour cette tournée, en indiquant comment vous avez construit le trajet.

(c) Le groupe souhaite maintenant commencer sa tournée par le Stereolux puis ne passer qu'une seule fois par chaque salle et enfin revenir faire un dernier concert au Stereolux.
   i. Est-ce possible ? Justifiez.
   ii. Si c'est possible, donnez un trajet pour cette tournée, en indiquant comment vous avez construit le trajet.

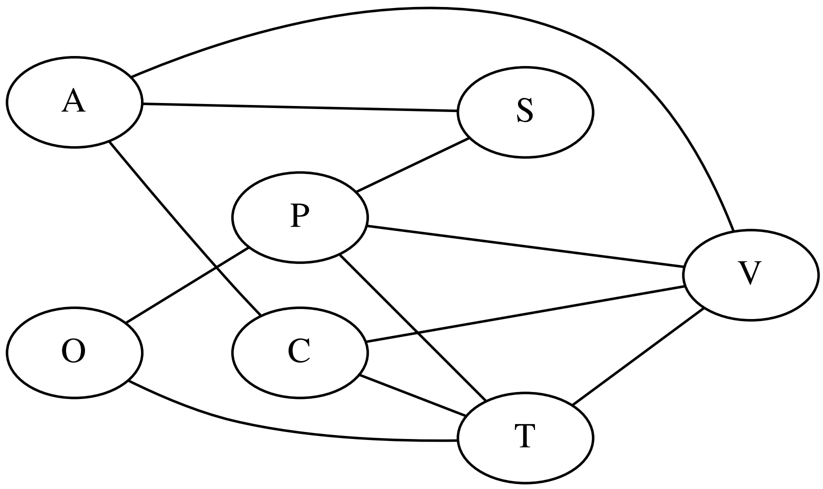
(d) Le groupe souhaite maintenant emprunter une et une seule fois chacun des trajets entre les salles, en passant éventuellement plusieurs fois par certaines salles.
   i. Est-ce possible ? Justifiez.
   ii. Si c'est possible, donnez un trajet pour cette tournée, en indiquant comment vous avez construit le trajet.
   iii. Quelles sont les salles dans lesquelles le groupe va jouer plusieurs fois ?
   iv. La tournée peut-elle commencer au Stereolux ?

(e) Le groupe souhaite maintenant emprunter une et une seule fois chacun des trajets entre les salles, en passant éventuellement plusieurs fois par certaines salles, puis revenir faire un dernier concert dans la salle de départ.
   i. Est-ce possible ? Justifiez.
   ii. Si c'est possible, donnez un trajet pour cette tournée, en indiquant comment vous avez construit le trajet.
   iii. Quelles sont les salles dans lesquelles le groupe va jouer plusieurs fois ?
   iv. La tournée peut-elle commencer au Stereolux ?

Solution:

(a) Le graphe correspondant (voir graphe ci-dessous) est un graphe non orienté (il n'y a pas de contrainte sur le sens de circulation d'une salle à l'autre) :
— les sommets correspondent aux salles de concert ;

— il y a une arête entre 2 salles si un trajet est possible entre celles-ci.



(b) Cela revient à chercher une chaîne hamiltonienne dans le graphe.

i. Il n'existe pas de propriété pour prouver qu'une chaîne hamiltonienne existe dans un graphe mais c'est bien le cas ici puisqu'on peut en trouver une « à la main ».

ii. Il n'existe pas d'algorithme général permettant de trouver une chaîne hamiltonienne mais la chaîne $[S, P, O, T, C, V, A]$ est une telle chaîne.

(c) Cela revient à chercher un cycle hamiltonien dans ce graphe.

i. Il n'existe pas de propriété pour prouver qu'un cycle hamiltonien existe dans un graphe mais c'est bien le cas ici puisqu'on peut en trouver un « à la main ».

ii. Il n'existe pas d'algorithme général permettant de trouver un cycle hamiltonien mais le cycle $[S, P, O, T, C, V, A, S]$ est un tel cycle.

(d) Cela revient à chercher une chaîne eulérienne dans le graphe.

i. D'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne eulérienne si le graphe est connexe et s'il comporte 0 ou 2 sommets de degré impair (les autres sommets étant de degré pair). Ici, le graphe est connexe et tous les sommets sont de degrés pairs sauf 2 sommets, les sommets A et C qui sont tous les deux de degré 3. Donc le graphe est ici semi-eulérien et il est possible de trouver une chaîne eulérienne.

ii. On utilise l'algorithme vu en cours, en initialisant la chaîne eulérienne avec la chaîne simple $[A, C]$. Puis, on ajoute petit à petit des cycles pour enfin obtenir, par exemple, le cycle eulérien $[A, C, V, P, S, A, V, T, O, P, T, C]$.

iii. Le groupe va jouer plusieurs fois dans 5 salles : l'Antipode, le Cargo, la Vapeur, le Phare et le Trabendo (A, C, V, P et T).

iv. La tournée ne peut pas commencer au Stereolux car la chaîne eulérienne doit commencer par un des deux sommets de degré impair du graphe. Or, le sommet S (représentant le Stereolux) a un degré pair.

(e) Cela revient à chercher un cycle eulérien dans le graphe.

i. D'après le théorème d'Euler, il existe un cycle eulérien si le graphe ne comporte que des sommets de degré pair. Or, comme vu précédemment, il existe des sommets de degré impair. Le graphe n'est pas eulérien et il n'est ainsi pas possible de trouver un cycle eulérien (et donc de répondre aux questions suivantes).