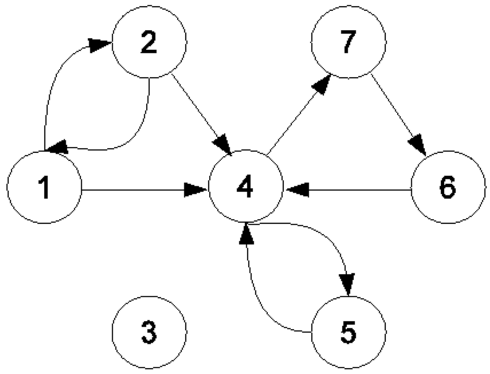
Feuille de TD 3 : ascendants/descendants, connexité, fermeture transitive et chemins/chaînes

Exercice 1 : Ascendants, descendants et connexité

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté dont voici une représentation sagittale :



(a) Donnez tous les descendants du sommet 4.

(b) Donnez tous les ascendants du sommet 2.

(c) G est-il un graphe connexe ? Sinon, précisez ses composantes connexes.

(d) G est-il un graphe fortement connexe ? Sinon, précisez ses composantes fortement connexes.

Solution:

(a) $desc_G(4) = \{4, 5, 6, 7\}$.

(b) $asc_G(2) = \{1, 2\}$.

(c) Le graphe n'est pas connexe et comporte 2 composantes connexes : {3} et {1,2,4,5,6,7}.

   i. La propriété de connexité concerne les graphes non orientés. Comme nous avons, ici, un graphe orienté, il faut tout d'abord considérer son graphe non orienté associé. Ensuite, pour qu'un graphe soit connexe, il doit être possible de trouver une chaîne allant de n'importe quel sommet à tous les autres sommets du graphe. Comme, par exemple, il n'y a pas de chaîne entre le sommet 3 et tout autre sommet, ce graphe n'est pas connexe.

   ii. Dans chacune des **composantes connexes**, il est possible de trouver une **chaîne** allant de chaque sommet de la composante connexe à chacun des autres sommets de la composante connexe. De plus, il faut que chaque sommet du graphe soit dans une et une seule composante connexe ; si un sommet n'est relié à aucun sommet du graphe (comme c'est le cas du sommet 3), alors il sera seul dans sa composante connexe (mais il ne faut pas oublier cette composante connexe).

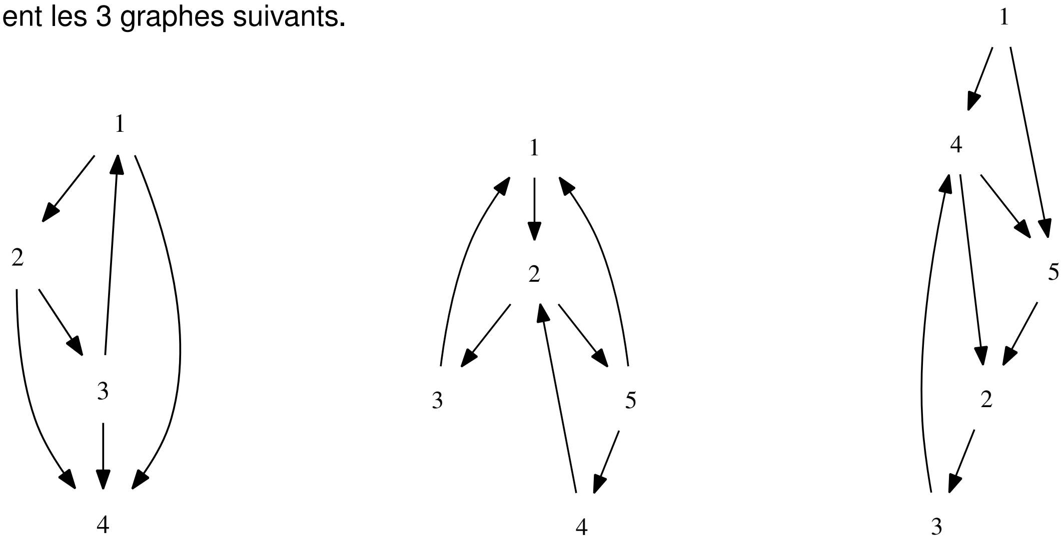
(d) Le graphe n'est pas fortement connexe et comporte 3 composantes fortement connexes sont : $\{1, 2\}$, $\{3\}$, $\{4, 5, 6, 7\}$.

   i. Le graphe n'étant pas connexe, il est par conséquent non fortement connexe.

ii. Dans chacune des **composantes fortement connexes**, il est possible de trouver un **chemin** allant de chaque sommet de la composante fortement connexe à chacun des autres sommets de la composante fortement connexe. De plus, il faut que chaque sommet du graphe soit dans une et une seule composante fortement connexe.

Exercice 2 : Sommets source, puits et forte connexité

Soient les 3 graphes suivants.



(a) Les graphes contiennent-ils des sommets source et/ou des sommets puits ? Si oui, donnez-les.

(b) Les graphes sont-ils fortement connexes ? Dans le cas contraire, donnez leurs composantes fortement connexes.

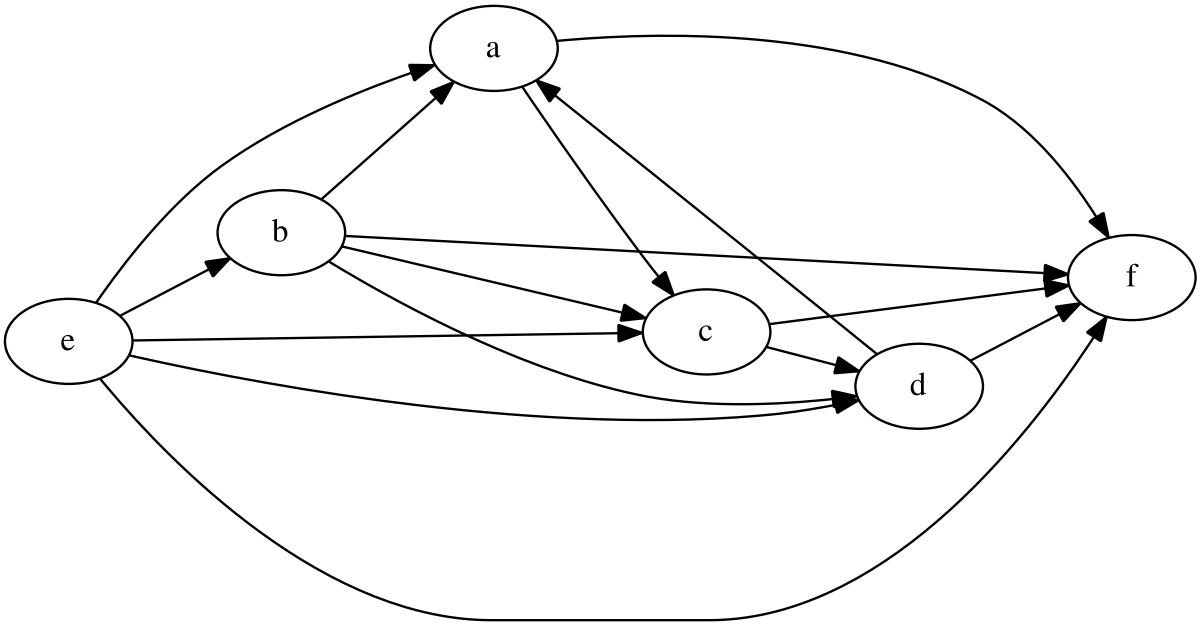
Solution:

(a) Voici les réponses pour chacun des graphes.
  i. Le graphe 1 n'a pas de sommet source mais a un sommet puits, le sommet 4.
  ii. Le graphe 2 n'a pas de sommet source et pas de sommet puits.
  iii. Le graphe 3 a un sommet source, le sommet 1, mais n'a pas de sommet puits.

(b) Voici les réponses pour chacun des graphes.
  i. Graphe 1 non fortement connexe ; composantes fortement connexes : $\{1, 2, 3\}$, $\{4\}$.
  ii. Graphe 2 fortement connexe.
  iii. Graphe 3 non fortement connexe ; composantes fortement connexes : $\{1\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$.

Exercice 3 : Forte connexité et algorithme

Soit le graphe orienté G, représenté par la figure suivante.



(a) Déterminez les composantes fortement connexes du graphe G, en utilisant le théorème suivant, vu en cours, pour définir la composante fortement connexe d'un sommet x_i, à partir de ses ascendants et de ses descendants.

$$cfc(x_i) = (desc_G(x_i) \cap asc_G(x_i)) \cup \{x_i\} \quad (1)$$

Vous calculerez l'ensemble des composantes fortement connexes du graphes, en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique et vous indiquerez à chaque fois les ascendants et les descendants du sommet considéré.

Solution:

1. Sommet a
   - $asc_G(a) = \{a, b, c, d, e\}$
   - $desc_G(a) = \{a, c, d, f\}$
   - **Composante fortement connexe 1** : $(\{a, b, c, d, e\} \cap \{a, c, d, f\}) \cup \{a\} = \{a, c, d\}$

2. Sommet b
   - $asc_G(b) = \{e\}$
   - $desc_G(b) = \{a, c, d, f\}$
   - **Composante fortement connexe 2** : $\{b\}$

3. Sommet e
   - $asc_G(e) = \emptyset$
   - $desc_G(e) = \{a, b, c, d, f\}$
   - **Composante fortement connexe 3** : $\{e\}$

4. Sommet f
   - $asc_G(f) = \{a, b, c, d, e\}$
   - $desc_G(f) = \emptyset$
   - **Composante fortement connexe 4** : $\{f\}$

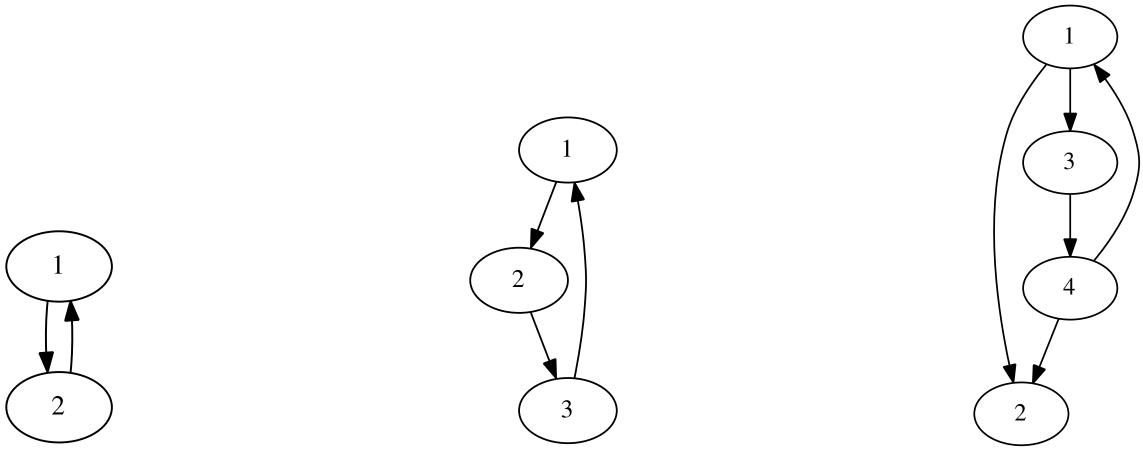
Exercice 4 : Fermeture transitive

Pour chacun des 3 graphes G_i suivants, déterminez :

(a) sa matrice d'adjacence M_i ;

(b) sa fermeture transitive G_i^+ ;

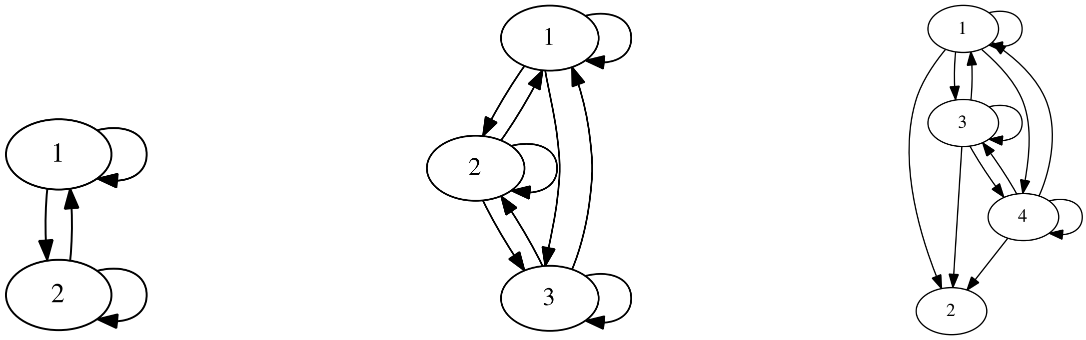
(c) la matrice d'adjacence M_i^+ de G_i^+.



Solution:

(a)

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



(b)

(c)

$$M_1^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_2^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_3^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour aller plus loin

Exercice 5 : La chèvre, le chou et le loup

Une chèvre, un chou et un loup se trouvent sur la rive gauche d'un fleuve. Un passeur souhaite les transporter sur la rive droite mais sa barque est trop petite : il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois.

Comment doit procéder le passeur afin de ne jamais laisser ensemble et sans surveillance le loup et la chèvre ainsi que la chèvre et le chou ?

(a) Représentez ce problème sous forme de graphe, en précisant s'il est orienté ou non ainsi que la signification de ses sommets et de ses arcs ou arêtes.

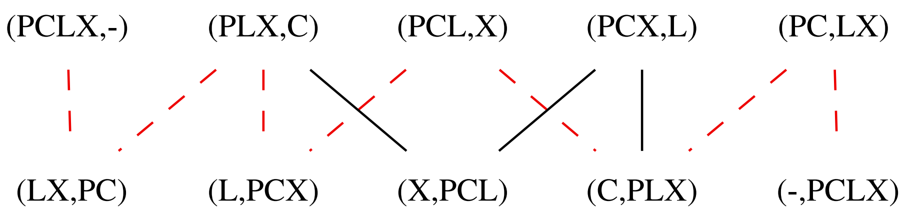
(b) Indiquez comment résoudre ce problème sur le graphe et donnez la solution obtenue.

Indication : *il y a deux rives donc chaque sommet du graphe sera représenté par un couple (RG,RD) indiquant qui est présent sur chaque rive.*

Solution: Soit P le passeur, C la chèvre, L le loup et X le chou.
On représente ce problème par un graphe non orienté :

- les sommets du graphe sont des couples qui précisent qui est sur la rive gauche et qui est sur la rive droite, en ne considérant que les états autorisés (càd l'une des composantes des sommets ne peut pas être CX ou CL qui correspondent à des états interdits) ;
- une arête relie 2 sommets si le passeur peut passer de l'état du premier sommet à celui du deuxième sommet. Le graphe est donc un graphe biparti car les sommets correspondant aux états où le passeur est sur la rive gauche ne peuvent être reliés qu'à des sommets correspondant à des états où le passeur est sur la rive droite.

Pour résoudre ce problème, il suffit de trouver une chaîne (la plus courte, par exemple) qui relie l'état initial (PCLX,-) à l'état final (-,PCLX).



Chaîne solution, en pointillé sur le graphe (parmi les 2 chaînes possibles) :
$[(PCLX,-),(LX,PC),(PLX,C),(L,PCX),(PCL,X),(C,PLX),(PC,LX),(-,PCLX)]$

Soit les passages de rives suivants : faire passer la chèvre sur la rive droite, revenir seul sur la rive gauche, faire passer le chou sur la rive droite, revenir sur la rive gauche avec la chèvre, faire passer le loup sur la rive droite, revenir seul sur la rive gauche, faire passer la chèvre sur la rive droite et tout le monde est maintenant sur la rive droite !

Exercice 6 : Prélèvement de liquide

On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons à notre disposition deux récipients (non gradués !), l'un de 5 litres et l'autre de 3 litres.

Comment doit-on procéder ?

(a) Représentez ce problème sous forme de graphe, en précisant s'il est orienté ou non ainsi que la signification de ses sommets et de ses arcs ou arêtes.

(b) Indiquez comment résoudre ce problème sur le graphe et donnez la solution obtenue.

Solution: On représente ce problème par un graphe orienté (car actions non réversibles) :

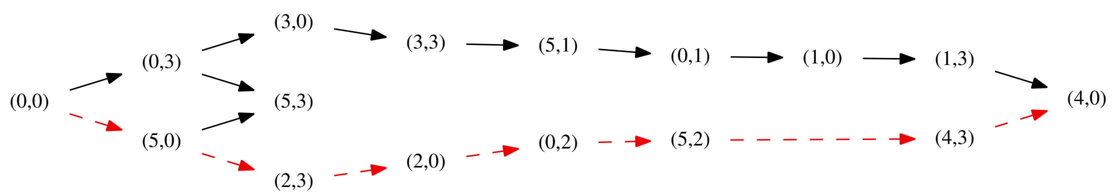
— les sommets du graphe sont des couples qui donnent le contenu du récipient de 5L et celui du récipient de 3L ;

— un arc relie 2 sommets si on peut passer de l'état représenté par le premier sommet à celui représenté par le second sommet.

→ Pour passer d'un état à un autre, il y a 3 actions possibles :

1. vider un des récipients ;
2. remplir entièrement un des récipients ;
3. transvaser le liquide d'un récipient dans l'autre.

Pour résoudre ce problème, il suffit de trouver un chemin (le plus court, par exemple) pour passer de la configuration initiale (0,0) à la situation finale (4,0) pour avoir, dans le récipient de 5L, les 4 litres à prélever du tonneau. On ne considère pas les arcs ramenant « en arrière », càd à des états déjà considérés (on construit ainsi un *arbre de recherche*).



Chemin solution, en pointillé sur le graphe (le plus court parmi les 2 chemins) :
$[(0,0),(5,0),(2,3),(2,0),(0,2),(5,2),(4,3),(4,0)]$

Cela correspond aux 7 transvasements suivants : remplir le récipient de 5L, transvaser son contenu dans le récipient de 3L jusqu'à le remplir (le récipient de 5L contient donc 2L), vider le contenu du récipient de 3L, transvaser le contenu du récipient de 5L dans celui de 3L (qui contient maintenant 2L), remplir le récipient de 5L, transvaser son contenu dans le récipient de 3L jusqu'à le remplir (le récipient de 5L contient donc 4L), vider le contenu du récipient de 3L et on a bien 4L dans le récipient de 5L et rien dans celui de 3L !