Graphes

4. Fermeture transitive d'un graphe et connexité

Solen Quiniou

solen.quiniou@univ-nantes.fr

IUT de Nantes

Année 2023-2024 – BUT 1 (Semestre 2)

[Mise à jour du 18 janvier 2024]

IUT Nantes
Pôle Sciences et technologie
Nantes Université

Plan du cours

Fermeture transitive d'un graphe

Définitions : fermeture transitive et fermeture réflexo-transitive

Soit $G = (S, A)$ un graphe

- $G^+ = (S, A^+)$ **fermeture transitive** de G : vérifie la propriété

$$(x, y) \in A^+ \Leftrightarrow \exists[x, \ldots, y] \in G$$

- $G^* = (S, A^*)$ **fermeture réflexo-transitive** de G : vérifie la propriété

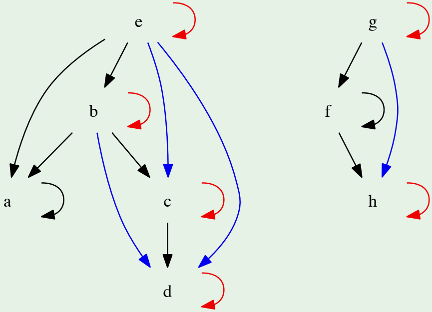
$$(x, y) \in A^* \Leftrightarrow x = y \text{ ou } \exists[x, \ldots, y] \in G$$

Remarque

- **Fermeture transitive :** pour chaque chemin $[x, \ldots, y]$ dans G, on ajoute un arc (x, y) dans G^+
- **Fermeture réflexo-transitive :** fermeture transitive à laquelle on ajoute des boucles sur chacun des sommets qui n'en ont pas déjà (pour vérifier la propriété de réflexivité)

Calcul de la fermeture transitive

Exemple de fermeture transitive



- Arcs en bleu : ajoutés par transitivité

→ **Fermeture transitive :** arcs noirs + arcs bleus

- Arcs en rouge : ajoutés par réflexivité

→ **Fermeture réflexo-transitive :** arcs noirs + arcs bleus + arcs rouges

Plan du cours

1. Fermeture transitive d'un graphe

2. Connexité et forte connexité
   - Connexité
   - Forte connexité

Connexité et forte connexité

Problème de la recherche de **composantes connexes** : problème d'un intérêt pratique dans de nombreuses applications où on veut savoir quels sommets sont reliés sans chercher à savoir explicitement comment

→ Notion de **connexité** liée à l'existence de chaînes (graphes non orientés)
→ Notion de **forte connexité** liée à l'existence de chemins (graphes orientés)

Graphes connexes

Définition : graphe connexe

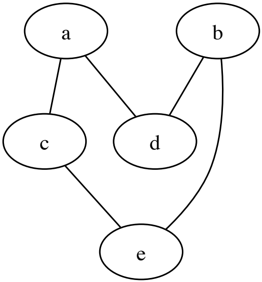
- **Graphe non orienté connexe** si, pour tout couple de sommets x et y, il existe une chaîne reliant x à y

$\rightarrow$ **Graphe orienté connexe** si son graphe non orienté associé est connexe

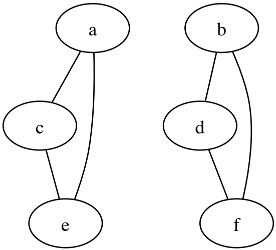
Théorème

Il existe une chaîne simple entre chaque paire de sommets (distincts) d'un graphe simple connexe

Exemples de graphes connexes et non connexes



Graphe connexe



Graphe non connexe

Composantes connexes

Définition : composante connexe

- **Composante connexe** d'un graphe $G = (S, A)$, notée C : sous-ensemble maximal de sommets tels que deux sommets quelconques du sous-ensemble sont reliés par une chaîne

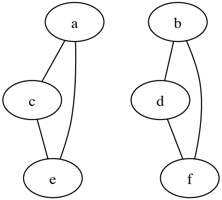
$\rightarrow$ si $x \in C$ alors

$$\forall y \in C, \text{ il existe une chaîne reliant } x \text{ à } y$$
$$\forall z \in S \setminus C, \text{ il n'existe pas de chaîne reliant } x \text{ à } z$$

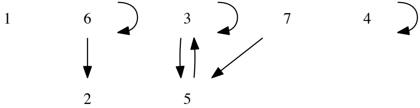
Remarques

- Ensemble des composantes connexes d'un graphe $G = (S, A)$: **partition** de l'ensemble des sommets S
- Graphe connexe $\Leftrightarrow$ une seule composante connexe

Exemples de composantes connexes



Graphe avec 2 composantes connexes : $\{a, c, e\}, \{b, d, f\}$



Graphe avec 4 composantes connexes : $\{1\}, \{2, 6\}, \{3, 5, 7\}, \{4\}$

Graphes fortement connexes

Définition : graphe fortement connexe

Graphe orienté fortement connexe si, pour tout couple de sommets x et y, il existe un chemin reliant x à y

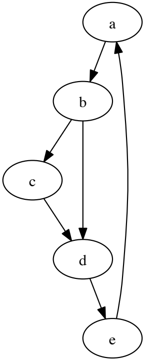
Théorème

Graphe fortement connexe ssi, pour tout couple de sommets x et y, il existe un circuit passant par x et y

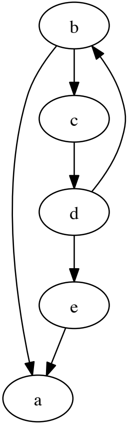
Théorème

Graphe orienté fortement connexe $\Rightarrow$ graphe connexe

Exemples de graphes fortement connexes et non fortement connexes



Graphe fortement connexe



Graphe non fortement connexe

Composantes fortement connexes

Définition : composante fortement connexe

- **Composante fortement connexe** d'un graphe $G = (S, A)$, notée C : sous-ensemble maximal de sommets tels que deux sommets quelconques du sous-ensemble sont reliés par un chemin

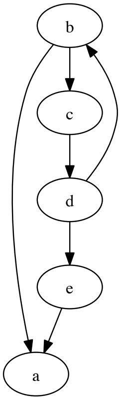
$\rightarrow$ si $x \in C$ alors

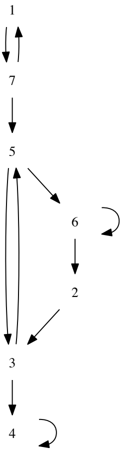
$$\forall y \in C, \text{ il existe un circuit passant par } x \text{ et } y$$
$$\forall z \in S \setminus C, \text{ il n'existe pas de circuit passant par } x \text{ et } z$$

Remarques

- Ensemble des composantes fortement connexes d'un graphe $G = (S, A)$: **partition** de l'ensemble des sommets de S
- Graphe fortement connexe $\Leftrightarrow$ une seule composante fortement connexe

Exemples de composantes fortement connexes





Graphe avec 3 composantes fortement connexes : $\{a\}, \{b, c, d\}, \{e\}$

Graphe avec 3 composantes fortement connexes : $\{1, 7\}, \{2, 3, 5, 6\}, \{4\}$

Calcul des composantes fortement connexes

Théorème : calcul d'une composante fortement connexe

$Y = (desc_G(x_i) \cap asc_G(x_i)) \cup \{x_i\}$: composante fortement connexe du graphe G

$\rightarrow$ Ce théorème donne un algorithme pour déterminer chacune des composantes fortement connexes d'un graphe

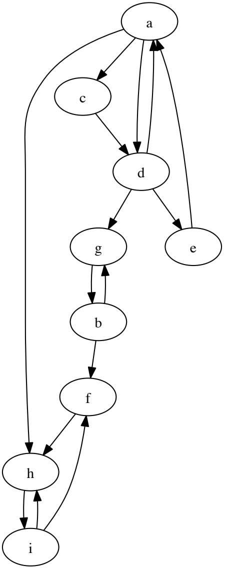
Exemple

- Une administration veut améliorer le cadre de vie de ses 9 employés qui travaillent dans la même salle

→ Objectif : répartir les employés dans plusieurs bureaux en ne séparant pas ceux qui s'échangent des documents

- Les 9 employés a, b, c, d, e, f, g, h et i échangent entre eux des documents tel qu'indiqué sur le graphe ci-contre

→ Solution : calculer les composantes fortement connexes du graphe



Exemple - suite

1. Calcul de la composante fortement connexe du sommet a
   - $desc_G(a) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
   - $asc_G(a) = \{a, c, d, e\}$
   - Composante fortement connexe 1 :
     $(\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\} \cap \{a, c, d, e\}) \cup \{a\} = \{a, c, d, e\}$

2. Calcul de la composante fortement connexe du sommet b
   - $desc_G(b) = \{b, f, g, h, i\}$
   - $asc_G(b) = \{a, b, c, d, e, g\}$
   - Composante fortement connexe 2 :
     $(\{b, f, g, h, i\} \cap \{a, b, c, d, e, g\}) \cup \{b\} = \{b, g\}$

3. Calcul de la composante fortement connexe du sommet f
   - $desc_G(f) = \{f, h, i\}$
   - $asc_G(f) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
   - Composante fortement connexe 3 :
     $(\{f, h, i\} \cap \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}) \cup \{f\} = \{f, h, i\}$