

Feuille de TD 5 : arbres couvrants

Exercice 1 : Algorithmes de Prim et de Kruskal (1)

Soit G_1 , le graphe non orienté donné par la matrice de valuation M_1 (les sommets sont nommés par les lettres de A à F) :

$$M_1 = \begin{pmatrix} +\infty & 12 & 9 & 5 & 7 & 6 \\ 12 & +\infty & 1 & 14 & 10 & 11 \\ 9 & 1 & +\infty & 8 & 15 & 3 \\ 5 & 14 & 8 & +\infty & 4 & 2 \\ 7 & 10 & 15 & 4 & +\infty & 13 \\ 6 & 11 & 3 & 2 & 13 & +\infty \end{pmatrix}$$

- En utilisant la matrice M_1 , calculez un arbre couvrant de poids minimal, en utilisant l'algorithme de Kruskal. Vous dessinerez l'arbre obtenu à chaque étape de l'algorithme.
- En utilisant la matrice M_1 , calculez un arbre couvrant de poids minimal, en utilisant l'algorithme de Prim (en partant du premier sommet, nommé A). Vous dessinerez l'arbre obtenu à chaque étape de l'algorithme.
- Comparez les résultats obtenus avec les deux algorithmes.

Exercice 2 : Réseau intranet (DS du 01/04/2015)

L'Université de Nantes souhaite se moderniser en installant un réseau intranet neuf, tout en minimisant le coût total des travaux à réaliser.

La matrice suivante donne le coût (en k€) du câblage à effectuer entre les différents sites de l'Université (les sommets sont nommés par les lettres de A à I) :

$$M = \begin{pmatrix} +\infty & 4 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 8 \\ 4 & +\infty & 8 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 11 \\ +\infty & 8 & +\infty & 7 & +\infty & 4 & +\infty & 2 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 7 & +\infty & 9 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & 9 & +\infty & 10 & +\infty & +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty & 4 & +\infty & 10 & +\infty & 2 & +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 2 & +\infty & 6 & 1 \\ +\infty & +\infty & 2 & +\infty & +\infty & +\infty & 6 & +\infty & 7 \\ 8 & 11 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 1 & 7 & +\infty \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ce problème, on souhaite calculer un arbre couvrant de poids minimum.

Pour chacune des questions suivantes, **vous préciserez l'arête choisie à chaque étape de l'algorithme**, en ordonnant les sommets de chaque arête dans l'ordre alphabétique (par exemple, $\{A, E\}$ et non $\{E, A\}$). De plus, en cas d'égalité des valuations de plusieurs arêtes, vous choisirez les arêtes selon l'ordre alphabétique de leurs sommets (par

exemple, $\{B, E\}$ sera choisie avant $\{D, G\}$ et $\{B, E\}$ sera choisie avant $\{B, G\}$). Vous dessinerez enfin l'arbre couvrant obtenu et vous indiquerez son poids, c'est-à-dire le coût minimum pour réaliser le nouveau réseau intranet.

- Utilisez l'algorithme de Kruskal, pour calculer un arbre couvrant de poids minimum.
- Utilisez l'algorithme de Prim à partir du sommet A , pour calculer un arbre couvrant de poids minimum.
- Comparez les résultats obtenus aux deux questions précédentes.

Pour aller plus loin

Exercice 3 : Algorithmes de Prim et de Kruskal (2)

Soit G_2 , le graphe non orienté correspondant à la matrice M_2 suivante (les sommets sont nommés par les lettres de A à K) :

$$M_2 = \begin{pmatrix} +\infty & 1 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 3 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \\ 1 & +\infty & +\infty & +\infty & 5 & +\infty & 2 & +\infty & 2 & +\infty & 6 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 4 & +\infty & 1 & +\infty & 3 & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 4 & +\infty & 2 & +\infty & 1 & +\infty \\ +\infty & 5 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 5 & +\infty & 4 & +\infty & 7 \\ +\infty & +\infty & 4 & 4 & +\infty & +\infty & +\infty & 3 & +\infty & +\infty & +\infty \\ 3 & 2 & +\infty & +\infty & 5 & +\infty & +\infty & +\infty & 3 & +\infty & 7 \\ +\infty & +\infty & 1 & 2 & +\infty & 3 & +\infty & +\infty & +\infty & 2 & +\infty \\ +\infty & 2 & +\infty & +\infty & 4 & +\infty & 3 & +\infty & +\infty & +\infty & 6 \\ +\infty & +\infty & 3 & 1 & +\infty & +\infty & +\infty & 2 & +\infty & +\infty & +\infty \\ +\infty & 6 & +\infty & +\infty & 7 & +\infty & 7 & +\infty & 6 & +\infty & +\infty \end{pmatrix}$$

- Appliquez l'algorithme de Kruskal.
- Appliquez l'algorithme de Prim, en partant du sommet A . Que constatez-vous ?
- Appliquez l'algorithme de Prim en partant du sommet C .
- Comparez les résultats obtenus aux trois questions précédentes.