IUT Nantes
Pôle Sciences et technologie

Nantes Université

BUT Info 1

Cours Outils mathématiques fondamentaux

2023-2024

1 Arithmétique

1.1 Principes fondamentaux

Définition 1.1 *Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que* _ _ _ _ _ _ _ *et on note* _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _

On dit également que a est un multiple de b.

Exemples

- $7|21, -6|24$
- Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ on a $a|0$ et $1|a$
- Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ on a $a|a$ (Réflexivité)
- Si $a|b$ et $b|a$ alors _ _ _ _ _ (pas antisymétrique dans $\mathbb{Z}$ mais antisymétrique dans $\mathbb{N}^*$)
- Si $a|b$ et $b|c$ alors _ _ (transitivité)

Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Soit $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que :

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Les entiers q et r sont appelés, respectivement, le _ _ _ _ _ _ et le _ _ _ _ de la division euclidienne de a par b.

Cas particulier de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Soit $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Définition 1.2 (PGCD, PPCM) *Le plus grand commun diviseur de deux entiers a et b non nuls est le plus grand entier qui les divise simultanément. On le note $PGCD(a, b)$ ou $a \wedge b$.*

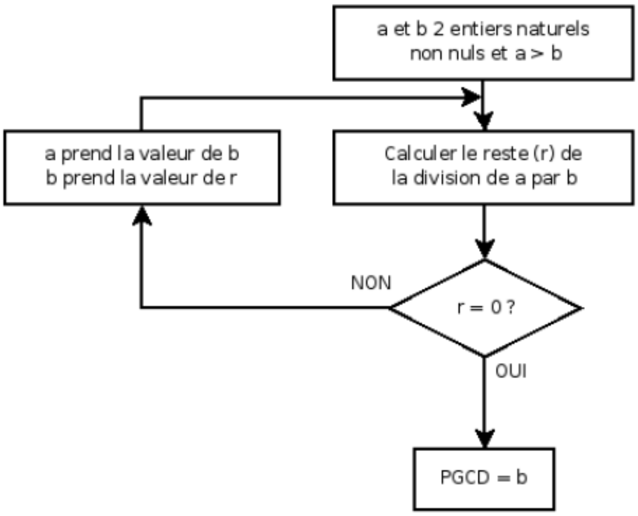
Le plus petit commun multiple de deux entiers a et b est le plus petit entier naturel qui soit multiple de ces deux nombres. On le note $PPCM(a, b)$ ou $a \vee b$.

Exemples

- $PGCD(90, 12) =$ et $PPCM(90, 12) =$ _ _
- Si $b|a$, alors $PGCD(a, b) =$ _

Algorithme d'Euclide dans $\mathbb{N}$

Pour deux entiers naturels a et b non nuls avec $a > b$, en écrivant la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$, on obtient aisément que ________ . En exploitant ceci on obtient par l'algorithme, décrit schématiquement ci-après, le PGCD de a et b.



Identité de Bézout dans $\mathbb{N}$

Soient a, b deux entiers naturels non nuls. Soit d le PGCD de a et b.
Alors il existe au moins un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que ________ .

Les entiers u et v sont des coefficients de Bézout. Ils peuvent s'obtenir en "remontant" l'algorithme d'Euclide ou, comme c'est illustré ci-après, en mettant en place l'algorithme d'Euclide étendu où chaque reste est exprimé comme combinaison linéaire de a et b

Algorithme d’Euclide étendu pour $(a, b) = (210, 55)$

$$rg_0 = rg_1 \times q + rg_2 \quad \rightarrow \begin{cases} \mathbf{a} \times (\mathbf{u_0} - q \times \mathbf{u_1}) \quad + \quad \underline{b} \times (\underline{v_0} - q \times \underline{v_1}) & = rg_2 \\ \qquad \mathbf{a} \times \mathbf{u_2} \qquad + \qquad \underline{b} \times \underline{v_2} & = rg_2 \end{cases}$$

$$\underbrace{210}_{rg_0} = \underbrace{55}_{rg_1} \times 3 + \underbrace{45}_{rg_2} \quad \rightarrow \begin{cases} \mathbf{210 \times 1} \quad + \quad \underline{55} \times (-3 \times \underline{1}) & = 45 \\ \mathbf{210 \times 1} \quad + \quad \underline{55 \times (-3)} & = 45 \end{cases}$$

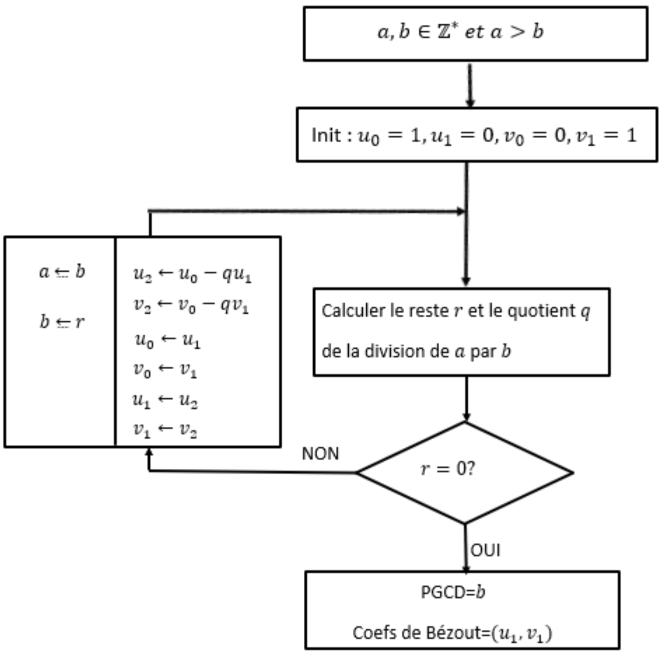
$$\underbrace{55}_{rg_0} = \underbrace{45}_{rg_1} \times 1 + \underbrace{10}_{rg_2} \quad \rightarrow \begin{cases} 55 + 45 \times (-1) = 10 \\ \underline{55} + (\mathbf{210} + \underline{55 \times (-3)}) \times (-1) = 10 \\ \mathbf{210} \times (-\mathbf{1}) + \underline{55 \times 4} = 10 \end{cases}$$

$$\underbrace{45}_{rg_0} = \underbrace{10}_{rg_1} \times 4 + \underbrace{5}_{rg_2} \quad \rightarrow \begin{cases} 45 + 10 \times (-4) = 5 \\ \mathbf{210} + \underline{55 \times (-3)} + (\mathbf{210} \times (-\mathbf{1}) + \underline{55 \times 4}) \times (-4) = 5 \\ \\ mathbf210 \times 5 + \underline{55 \times (-19)} = 5 \end{cases}$$

$$10 = 5 \times 2 + 0$$

On obtient donc le fait que le PGCD de 210 et 55 _ _ _ _ _ _ _ _ _ (grâce à l’algorithme d’Euclide sur la partie gauche) et on obtient les coefficients de Bézout _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ sur la partie droite.

On remarque par ailleurs que pour exprimer un reste à une étape quelconque ($i = 2$) comme combinaison linéaire de a et b il nous faut pouvoir faire appel aux deux expressions précédentes ($i = 0$ et $i = 1$) pour les restes apparaissant dans l’algorithme d’Euclide. En posant les notations suivantes $r_i = a \times u_i + b \times v_i$, on obtient l’algorithme d’Euclide étendu :



Algorithme d'Euclide étendu pour $(a, b) = (275, 78)$

Théorème de Bézout

Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- _
- _

Un corollaire : Théorème de Gauss

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Si _ _ _ et _ _ _ _ _ _ alors _ _

Définition 1.3 *Soit $n \in \mathbb{N}^*, (a, b) \in \mathbb{Z}^2$; on dit que a est _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ , et on note _ _ _ _ _ si et seulement si _ _ _ _ _ _ _ _ _ _*

Propriété

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation $\equiv [n]$ est _

Notation

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}$ _

_ _ _

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{x}$ la classe de x dans $\mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}$: _

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$:

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _}$$

et :

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _}$$

En particulier si $a \equiv b[n]$, alors _

Exemples d'exploitation

- La preuve par neuf
  Principe : chaque nombre en écriture décimale étant congru modulo 9 à la somme des chiffres le composant, on peut montrer que le résultat d'un calcul est faux si les règles de compatibilité modulo 9 ne sont pas respectées.
  L'assertion suivante $137 \times 55 + 58^3 = 202647$ est peut-être vraie car :
  — $137 \times 55 + 58^3 \equiv$ _
  — $202647 \equiv$ _ _ _ _ _ _
- L'arithmétique de l'horloge
  Principe : Une horloge avec aiguilles s'est arrêtée 50 heures plus tôt. Pour évaluer le déplacement à effectuer sur la petite aiguille on évalue _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- Montrer que $2^{345} + 5^{432}$ est divisible par 3.
  Démonstration : $2^{345} + 5^{432} \equiv$ _ .

Définition 1.4 (Elément générateur) *Un élément $\overline{x}$ est dit* _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ *(ou* _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ *) si pour toute classe c de $\mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que* _ _ _ _ _ _

Propriété

Soit $x \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq x \leq n - 1$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- _
- _

Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout entier strictement positif peut être écrit (on dira aussi décomposé) comme un unique produit fini de nombre premiers. Ainsi pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe un seul n-uplet $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ représentant des exposants associés à n nombre premiers distincts p_i (unicité à l'ordre près) :

$$m = \prod_{1\leq i\leq n} p_i^{v_i}$$

Exemple

- $924 =$ _
- $630 =$ _

Petit théorème de Fermat

Soit p un nombre premier et $a \in \mathbb{Z}$.
Alors $a^p \equiv a[p]$
Et si a est un nombre premier avec p (c'est-à-dire tel que $PGCD(a,p) = 1$), alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$

Démonstration :

Si a est multiple de p alors a^p l'est aussi (nullité modulo p), donc $a^p \equiv a[p]$

Supposons à présent que a ne soit pas un multiple de p.

L'application, qui au nombre n compris entre 0 et $p-1$, fait correspondre le produit $na[p]$, est une application de $[\![0;p-1]\!]$ dans lui-même.

Si deux nombres sont différents modulo p, alors leurs images par l'application sont aussi différentes (raisonnement par l'absurde en s'appuyant sur l'existence d'un inverse pour a). L'ensemble des $p-1$ images $a[p]; 2a[p]; \dots ; (p-1)a[p]$ coïncide donc avec les $p-1$ valeurs de l'ensemble d'arrivée $1; 2; \dots ; p-1$ (non nécessairement dans le même ordre). On a donc en faisant les produits modulo p :

$$1 \times 2 \times \cdots \times (p-1) \equiv a \times 2a \times \cdots \times (p-1)a[p]$$

Chaque élément de $[\![0;p-1]\!]$, étant premier avec p, possède un inverse modulo p et en multipliant successivement par ces inverses on obtient :

$$1 \equiv a^{p-1}[p]$$

2 Introduction aux matrices

Premier exemple

On considère un ensembles de programmes (p_1, p_2, p_3, p_4) exécutables par un ordinateur.

Chacun de ces programmes utilise des ressources (r_1, r_2, r_3) de l'ordinateur (r_1 : quantité de RAM, r_2 : temps de processeur, r_3 : énergie consommée)

$\rightarrow$ Comment représenter ces données ?

Représentation par un tableau à double entrée :

ressources \ programmes	p_1	p_2	p_3	p_4
r_1	5	1	3	10
r_2	4	10	2	10
r_3	6	10	1	100

Manipulation de ces données

Supposons que lors d'une session, on exécute 3 fois le programme p_1, 2 fois p_2 et 1 fois p_4.

$\rightarrow$ Quelle quantité de chacune des ressources sera utilisée ?

- Pour r_1 : ________________
- Pour r_2 : _________________
- Pour r_3 : __________________

Supposons qu'on sache que, lors d'une session, on a utilisé en tout 48 unités de r_1, 50 de r_2 et 232 de r_3.

$\rightarrow$ Combien de fois chaque programme a-t-il été exécuté ?

Résolution d'un système linéaire d'équations :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \_\_ & + & \_ & + & \_\_ & + & \_\_ & = & \_\_ \\ \_\_ & + & \_\_ & + & \_ & + & \_\_ & = & \_\_ \\ \_\_ & + & \_\_ & + & \_ & + & \_\_\_ & = & \_\_ \end{array}\right.$$

3 Calcul Matriciel

3.1 Les ensembles de matrices

Définition 3.1 (matrice) *On appelle A une matrice à coefficients réels à n lignes et p colonnes un tableau de nombres réels comportant n lignes et p colonnes que l'on note :*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Le coefficient à l'intersection de la $i^{ième}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne est noté a_{ij}. L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et le couple (n,p) est appelé la **taille de la matrice**.

matrices à coefficients complexe $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, booléennes $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{B})\dots$

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{4 colonnes}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}}\right\} \text{3 lignes}$$

$$M \in \mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R})$$

La numérotation des lignes et colonnes commence à 1 (et pas à 0)

$$m_{23} = 1$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & \text{3}^{\text{ième}}\text{ colonne} & \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{2}^{\text{ième}}\text{ ligne} \end{array}$$

Matrices particulières

matrice (vecteur) ligne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$$

matrice triangulaire inférieure

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

matrice (vecteur) colonne

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$$

matrice triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

matrice nulle

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{4,3} \in \mathscr{M}_{4,3}(\mathbb{R})$$

matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

matrice carrée d'ordre 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -6 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

matrice identité

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_3$$

Définir une matrice par son élément courant $a_{i,j}$ et sa taille

Construire la matrice $\mathbf{A}$ de taille $(\mathbf{4}, \mathbf{3})$ telle que $\mathbf{a_{i,j} = i + j}$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} j=1 & j=2 & j=3 \end{array} \\ \begin{array}{c} i=1 \\ i=2 \\ i=3 \\ i=4 \end{array} & \begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix} \end{array}$$

3.2 Algèbre des matrices

On considère une entreprise agricole produisant différentes céréales : c_1 : blé, c_2 : maïs et c_3 : avoine sur deux sites s_1 et s_2.

On regroupe dans deux tableaux les productions destinées à la vente et destinées au nourrissage du bétail de l'entreprise.

	s_1	s_2
c_1	13	34
c_2	7	23
c_3	11	17

Vente

	s_1	s_2
c_1	24	15
c_2	13	42
c_3	63	16

Bétail

→ Déterminer la production totale par site et par céréale.

Production totale :

	s_1	s_2
c_1	_ _ _ _ _ _ _ _ _	_ _ _ _ _ _ _ _ _
c_2	_ _ _ _ _ _ _ _	_ _ _ _ _ _ _ _ _
c_3	_ _ _ _ _ _ _ _ _	_ _ _ _ _ _ _ _ _

Addition des matrices

Définition 3.2 *On appelle addition des matrices l'opération interne sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par*

$$+ \quad : \quad \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

$$A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \longmapsto A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

✎ exemple

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 11 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$+$ est le modèle des opérations « termes à termes »

Proposition 3.3 *L'addition des matrices vérifie les propriétés suivantes :*

commutativité $\forall A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad A + B = B + A$

associativité $\forall A, B, C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad A + (B + C) = (A + B) + C$

élément neutre $\mathbf{0}_{n,p}$ *(la matrice nulle)*

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad A + \mathbf{0}_{n,p} = \mathbf{0}_{n,p} + A = A$$

existence d'un symétrique $A' = -A$

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \exists A' = (-a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),$$

$$A + A' = A' + A = \mathbf{0}_{n,p}$$

DÉMONSTRATION <u>Se ramener à comparer les éléments courant en position (i, j)</u>

$\forall i = 1, \ldots, n, \forall j = 1, \ldots, p,$

commutativité $a_{i,j} + b_{i,j} = b_{i,j} + a_{i,j} \Longrightarrow A + B = B + A$

associativité $a_{i,j} + (b_{i,j} + c_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j}) + c_{i,j} \Longrightarrow A + (B + C) = (A + B) + C$

neutre $a_{i,j} + 0 = 0 + a_{i,j} = a_{i,j} \Longrightarrow A + \mathbf{0}_{n,p} = \mathbf{0}_{n,p} + A = A$

symétrique $a_{i,j} + (-a_{i,j}) = (-a_{i,j}) + a_{i,j} = 0 \Longrightarrow A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}_{n,p}$

On reprend l'exemple d'introduction.

programmes / ressources	p_1	p_2	p_3	p_4
r_1	5	1	3	10
r_2	4	10	2	10
r_3	6	10	1	100

$\rightarrow$ Exprimer les ressources consommées si on exécute 3 fois le programme p_1, 2 fois p_2 et 1 fois p_4.

$$\begin{pmatrix} \_\_\_ & + & \_\_\_ & + & \_\_\_\_ \\ \_\_\_ & + & \_\_\_\_ & + & \_\_\_\_ \\ \_\_\_ & + & \_\_\_\_ & + & \_\_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_ \\ \_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$$

Produit d'une matrice par un vecteur

Définition 3.4 (Produit par un vecteur) *On appelle produit d'une matrice par un vecteur l'opération suivante*

$$\begin{array}{rccc} \times & : & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ & & A = (a_{i,j}), X = (x_j) & \longmapsto & A \times X = (y_i) \end{array}$$

où $y_i =$ -

> Remarque : le vecteur doit avoir autant de coordonnées que la matrice possède de colonnes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \text{- -}$$

$$= \text{- - - - -}$$

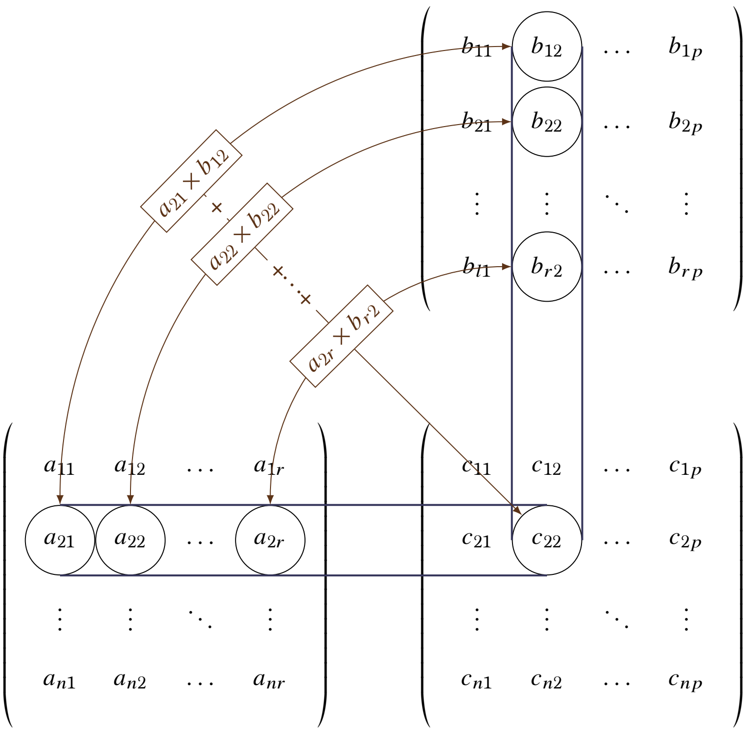
res \ prog	p_1	p_2	p_3	p_4
r_1	5	1	3	10
r_2	4	10	2	10
r_3	6	10	1	100

prog \ sess	s_1	s_2
p_1	6	5
p_2	2	3
p_3	1	4
p_4	1	0

→ Exprimer les ressources consommées pour chaque session :

$$\begin{pmatrix} \text{- -} & \text{- - - - - - - - - - - - - - -} \\ \text{- -} & \text{- - - - - - - - - - - - - - - - -} \\ \text{- -} & \text{- - - - - - - - - - - - - - - - -} \end{pmatrix}$$

B : r lignes et p **colonnes**



A : n **lignes** et r colonnes

$C = A \times B$: n **lignes** et p **colonnes**

Définition 3.5 (Produit matriciel) *On appelle produit matriciel l'opération suivante*

$$\begin{array}{rcl} \times \; : \; \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) & \longmapsto & A \times B = (m_{ij}) \end{array}$$

$$\text{où} \qquad m_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ir} b_{rj}$$

En particulier quand $n = r = p$ le produit matriciel $\times$ est une opération interne dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rcl} \times \; : \; \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \\ A, B & \longmapsto & A \times B \end{array}$$

Existence et taille du résultat

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \;\; et \;\; B \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \Longrightarrow A \times B \in \;\_\_\_\_\_\_$$

Calcul des coefficients

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} \text{- - - - - - - - - - - - - - - - -} & \text{- - - - - - - - - - - - - - - -} \\ \text{- -} & \text{- - - - - - - - - - - - - - - -} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{-} & \text{-} \\ \text{-} & \text{-} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Disposition pour le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

Proposition 3.6 *Le produit matriciel vérifie les propriétés suivantes :*

associativité $\forall A \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{R}), B \in \mathscr{M}_{r,l}(\mathbb{R}), C \in \mathscr{M}_{l,p}(\mathbb{R}), A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

distributivité *par rapport à l'addition* $\forall A \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{R}), B, C \in \mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{R}), A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$

élément neutre $\times$ *dans* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *possède un élément neutre à droite* Id_p *et un élément neutre à gauche* Id_n *:* $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad A \times Id_p = A \quad et \quad Id_n \times A = A$

DÉMONSTRATION DISTRIBUTIVITÉ DE $\times$ SUR $+$

Vérifier que tous les produits et les sommes sont bien définis

$A \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{R}), B, C \in \mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{R})$ on a : $\begin{cases} A \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{R}) \;\; et \;\; B + C \in \mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times (B + C) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ A \times B, A \times C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \Rightarrow (A \times B) + (A \times C) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \end{cases}$

Comparer les éléments courants

- Pour $N = A \times B$ on a $N_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{ir} b_{rj}$
- Pour $Q = A \times C$ on a $Q_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} c_{kj} = a_{i1} c_{1j} + \cdots + a_{ir} c_{rj}$
- Pour $S = B + C$ on a $S_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$
- Pour $M = A \times (B + C) = A \times S$ on a
  $$M_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} s_{kj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj}$$
- Pour $P = (A \times B) + (A \times C)$ on a
  $$P_{ij} = Q_{ij} + N_{ij} = (\sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}) + (\sum_{k=1}^{r} a_{ik} c_{kj}) = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj}$$

Propriétés du produit matriciel pour les matrices carrées

Proposition 3.7 élément neutre $\times$ *est une LCI dans* $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ *d'élément neutre* Id_n

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}), \quad A \times Id_n = Id_n \times A = A$$

puissance *on peut définir la puissance d'une matrice par :*

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}),\ A^0 = Id_n\ et\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = A \times A^{n-1}$$

non-commutative $\times$ *n'est pas commutative* $\exists A, B \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}),\quad A \times B \neq B \times A$

symétrique *il n'a pas d'inverse pour certains éléments :* $\exists A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,n}\},\ \ \forall M \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}),\quad A \times M \neq Id_n$

inverse d'un produit *si* A *et* $B \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ *possèdent des inverses alors* $A \times B$ *possède un inverse* $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

DÉMONSTRATION

- quand $p = n$ les éléments neutres de $\times$ à droite et à gauche sont tous les deux égaux à Id_n qui est donc bien l'élément neutre de $\times$ dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$
- La définition du produit assure que l'on a bien

$$A^2 = A \times A, \dots A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$$

et que $A^1 = A \times A^0 = A \times Id_n = A$

- $\times$ n'est pas commutative dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, contre exemple dans le cas $n = 2$

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} & \neq & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \| & & \| \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

- absence d'inverse pour certains éléments, exemple dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

- pour l'inverse de $A \times B$ il suffit de faire le produit en utilisant l'associativité du produit :

$$(B^{-1} \times A^{-1}) \times (A \times B) = B^{-1} \times (A^{-1} \times A) \times B = B^{-1} \times Id_n \times B = B^{-1} \times B = Id_n$$

de même dans l'ordre inverse, donc $(B^{-1} \times A^{-1}) = (A \times B)^{-1}$.

Proposition 3.8 *Pour* $A, B \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})\ A \times B = 0_{n,n} \not\Rightarrow A = 0_{n,n}\ \ ou\ \ B = 0_{n,n}$
soit encore dit autrement $\exists A, B \neq 0_{n,n},\quad A \times B = 0_{n,n}$

<u>Produit non-simplifiable</u>

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mais $A \neq 0_{2,2}$ donc $A \times A = A \times 0_{2,2} \not\Rightarrow \cancel{A} \times A = \cancel{A} \times 0_{2,2}$

3.3 Autres opérations matricielles

Produit par les réels

Définition 3.9 *On appelle multiplication des matrices par les réels l'opération qui consiste à multiplier tous les coefficients d'une matrice par le même réel :*

$$\begin{array}{rcccl} \cdot & : & \mathbb{R} \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ & & \alpha, A & \longmapsto & \alpha \cdot A = (\alpha a_{ij}) \end{array}$$

✎ Exemple de produit par un réel

$$\alpha = 2 \text{ et } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 10 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Attention, erreurs fréquentes dans les calculs : Identités remarquables

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= (A+B) \times (A+B) = A^2 + A \times B + B \times A + B^2 \\ &= A^2 + 2.A \times B + B^2 \textbf{ si } A \times B = B \times A \\ &\neq A^2 + 2.A \times B + B^2 \textbf{ si } A \times B \neq B \times A \end{aligned}$$

Mise en facteurs

$$\begin{aligned} A^2 + 2 \cdot A &= A \times A + (2 \cdot Id_n) \times A = (A + 2 \cdot Id_n) \times A \\ &= A \times A + A \times (2 \cdot Id_n) = A \times (A + 2 \cdot Id_n) \\ &\neq A \times (A+2) \end{aligned}$$

$A + 2 =$matrice + réel = ?

Proposition 3.10 *On a les propriétés suivantes pour le produit des matrices par un réel :*

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha\, \beta) \cdot A$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), (\alpha + \beta) \cdot A = (\alpha \cdot A) + (\beta \cdot A)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \alpha \cdot (A + B) = (\alpha \cdot A) + (\alpha \cdot B)$
- $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), 1 \cdot A = A$ *et* $-1.A = -A =$ *symétrique de* A *pour* $+$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \alpha \cdot A = \mathbf{0}_{n,p} \Longleftrightarrow \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad A = \mathbf{0}_{n,p}$

Transposition

Définition 3.11 (transposition) *L'opération qui consiste à prendre les colonnes d'une matrice pour en faire les lignes d'une nouvelle matrice s'appelle la transposition des matrices, elle se note :*

$$\begin{array}{rcccl} {}^t & : & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ & & M = (m_{ij}) & \longmapsto & {}^tM = (m_{ji}) \end{array}$$

Calcul d'une transposée

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \Longrightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} \_ & \_ \\ \_\_ & \_ \\ \_ & \_ \end{pmatrix} \in \_\_\_\_\_\_$$

ne pas confondre transposée et inverse !

$A^{-1} \neq {}^tA$ la transposée existe toujours contrairement à l'inverse.

Proposition 3.12 *La transposition vérifie les propriétés suivantes*

- $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{R}, {}^t(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot^t A$
- $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *on a* ${}^t({}^tA) = A$
- $\forall A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *on a* ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
- $\forall A \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ *et* $\forall B \in \mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{R})$ *on a :* ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$

Attention aux changements d'ordre dans les produits

$${}^tA \times^t B \neq {}^tB \times {}^tA$$

DÉMONSTRATION comparer taille et élément courant

- ${}^t(\alpha \cdot A)$ de taille $p \times n \Rightarrow \alpha \cdot^t A$ de taille $p \times n$ Elément courant de $\alpha \cdot A$: $\alpha a_{ij} \Rightarrow$ pour ${}^t(\alpha \cdot A)$ c'est αa_{ji} le même résultat que pour $\alpha \cdot^t A$
- A de taille $n \times p \Rightarrow {}^tA$ de taille $p \times n \Rightarrow {}^t({}^tA)$ de taille $n \times p$ L'élément courant de A est a_{ij} $\Rightarrow {}^tA = (a_{ji}) \Rightarrow {}^t({}^tA) = (a_{ij})$
- ${}^t(A+B)$ et ${}^tA + {}^tB$ de taille $p \times n$ et élément courant de $A+B$ est $a_{ij} + b_{ij} \Rightarrow {}^t(A+B) = (a_{ji} + b_{ji})$ de même que ${}^tA + {}^tB$
- A de taille $n \times k$ et B de taille $k \times p$
  $\Rightarrow A \times B$ de taille $n \times p \Rightarrow {}^t(A \times B)$ de taille $p \times n$
  ${}^tA$ de taille $k \times n$ et ${}^tB$ de taille $p \times k \Rightarrow {}^tB \times^t A$ de taille $p \times n$
  — élément courant de $A \times B$ est $\sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj}$
  — élément courant de ${}^t(A \times B)$ est $\sum_{k=1}^r a_{jk} b_{ki}$
  — élément courant de ${}^tB \times^t A$ est $\sum_{k=1}^r b_{ki} a_{jk}$

3 Systèmes d'équations linéaires

3.1 La méthode de Gauss

Retour sur l'exemple introductif

programmes / ressources	p_1	p_2	p_3	p_4
r_1	5	1	3	10
r_2	4	10	2	10
r_3	6	10	1	100

On sait que lors d'une session, on a utilisé en tout 48 unités de r_1, 50 de r_2 et 232 de r_3.
$\rightarrow$ Combien de fois chaque programme a-t-il été exécuté ?
Résolution d'un système linéaire d'équations :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 5x & + & y & + & 3z & + & 10t & = & 48 \\ 4x & + & 10y & + & 2z & + & 10t & = & 50 \\ 6x & + & y & + & 4z & + & 100t & = & 232 \end{array}\right.$$

Proposition 3.1 (Système linéaire d'équations) *Soit un système linéaire de n équations à p inconnues :*

$$(\mathscr{E}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & y_n \end{array}\right.$$

les x_i sont les inconnues, les y_i sont les seconds membres et les $a_{i,j}$ sont les coefficients du système. Le système $(\mathscr{E})$ correspond à l'égalité entre un vecteur et une combinaison linéaire de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui peut aussi s'écrire sous forme d'un produit matriciel $(\mathscr{E}) \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{y}$:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + \cdots + x_p \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Proposition 3.2 (Méthode de Gauss) *Soient $\mathscr{E}$ un système linéaire de n équations à p inconnues, la méthode de Gauss consiste à transformer le système en un système triangulaire*

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & y_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & y_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} \tilde{a}_{11}x_1 & +\tilde{a}_{12}x_2 & +\dots & +\tilde{a}_{1p}x_p & = & \tilde{y}_1 \\ & \tilde{a}_{22}x_2 & +\dots & +\tilde{a}_{2p}x_p & = & \tilde{y}_2 \\ & & \ddots & & \vdots & \\ & & & \tilde{a}_{np}x_p & = & \tilde{y}_n \end{array}\right.$$

à l'aide uniquement des opérations suivantes :

- *permuter l'ordre des équations de $\mathscr{E}$*
- *multiplier une équation par un $\lambda \neq 0$*
- *remplacer une équation par sa combinaison linéaire avec une des autres équations*

<u>Systèmes d'équations à une solution</u>

$$(\mathscr{E}) \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} -2x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & 1 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & -1 \\ -3x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 5 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ \text{- - - - - - - - - -} \\ \text{- - - - - - - - - - -} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} -2x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & 1 \\ & \text{- -} & \text{- -} & = & \text{- -} \\ & \text{- -} & + \text{- -} & = & \text{-} \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ \\ \text{- - - - - - - - - -} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} -2x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & 1 \\ & \text{- -} & \text{- -} & = & \text{- -} \\ & & \text{- - -} & = & \text{-} \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ \\ \text{- - - - - - - -} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} -2x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & 1 \\ & \text{- -} & \text{- -} & = & \text{- -} \\ & & \text{- -} & = & \text{-} \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right.$$

Il reste à repartir de la dernière équation pour identifier chaque variable

$$
(\mathscr{E}) \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl|l}
-2x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & 1 & \text{- - - - - - - - - - -} \\
 & 7x_2 & -x_3 & = & -1 & \text{- - - - - - - - - -} \\
 & & x_3 & = & 1 &
\end{array} \right.
$$

$$
\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl|l}
-2x_1 & +x_2 & & = & \text{-} & \\
 & 7x_2 & & = & \text{-} & \text{- - - - - - - -} \\
 & & x_3 & = & 1 &
\end{array} \right.
$$

$$
\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl|l}
-2x_1 & +x_2 & & = & \text{-} & \text{- - - - - - - - - -} \\
 & \text{- -} & & = & \text{-} & \\
 & & x_3 & = & 1 &
\end{array} \right.
$$

$$
\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl|l}
-2x_1 & & & = & \text{-} & \text{- - - - - - - - -} \\
 & x_2 & & = & \text{-} & \\
 & & x_3 & = & 1 &
\end{array} \right.
$$

$$
\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl|}
x_1 & & & = & \text{- -} \\
 & x_2 & & = & \text{-} \\
 & & x_3 & = & \text{-}
\end{array} \right.
$$

On trouve donc comme solution : $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{- -} \\ \text{-} \\ \text{-} \end{pmatrix}$

On vérifie avec le système de départ :

$$
\mathscr{E}) : \left\{ \begin{array}{rrrcll}
-2x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & -2\times(-2)+0-3\times 1 & = 1 \\
x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & -2+0+1 & = -1 \\
-3x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & -3\times(-2)+0-1 & = 5
\end{array} \right.
$$

Systèmes d’équations sans solution

$$(\mathscr{E}) \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcl} 2x_1 & -2x_2 & = & -3 \\ 4x_1 & -2x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & = & -1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \text{- - - - - - - - - -} \\ \text{- - - - - - - - -} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcl} 2x_1 & -2x_2 & = & -3 \\ & \text{- -} & = & \text{-} \\ & \text{- -} & = & \text{-} \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ \text{- - - - - - - - - - -} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcl} 2x_1 & -2x_2 & = & -3 \\ & \text{- -} & = & \text{-} \\ & \text{-} & = & \text{- -} \end{array} \right.$$

- -

Systèmes d’équations à infinité de solutions

$$(\mathscr{E}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrcl} x_1 & +x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & 2 \\ & -2x_2 & +x_3 & +3x_4 & = & -1 \\ & & & 4x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Il n’y a pas assez d’équations pour pouvoir trouver une solution unique, il y en a une infinité qui peuvent être paramétrées par x_3 par exemple :

$$(\mathscr{E}) \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & -2x_4 & = & 2+x_3 \\ & -2x_2 & +3x_4 & = & -1-x_3 \\ & & x_4 & = & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{- - - - - - - - - -} \\ \text{- - - - - - - - - -} \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & & = & 2+x_3 \\ & -2x_2 & & = & -1-x_3 \\ & & x_4 & = & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{- - - - - - - - - -} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} \text{- -} & & & = & \text{- - - -} \\ & \text{- - -} & & = & \text{- - - - -} \\ & & \text{-} & = & \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{- - - - - - -} \\ \text{- - - - - - - -} \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{3+x_3}{2} \\ x_2 & = & \frac{1+x_3}{2} \\ x_4 & = & 0 \end{array}$$

Une solution générale du système paramétrée par x_3 est donc :

$$\left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \exists a \in \mathbb{R},\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \text{- -} \\ \text{- -} \\ \text{-} \\ \text{-} \end{pmatrix} \right\}$$

Pour vérifier on effectue un choix sur le paramètre : pour $a = 0$, on obtient le vecteur $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

et le système devient :

$$(\mathscr{E}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & +x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} & = 2 \\ x_1 & -x_2 & & +x_4 & = & \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2} & = 1 \\ & 2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \times \dfrac{1}{2} & = 1 \\ x_1 & +5x_2 & -3x_3 & -4x_4 & = & \dfrac{3}{2} + 5 \times \dfrac{1}{2} & = 4 \end{array} \right.$$

Remarques

Infinité de solutions et paramètres

- Quand il y a une infinité de solutions, il y a plusieurs manières de les décrire (dans l'exemple précédent elles sont paramétrées par x_3, mais on aurait pu les paramétrer par x_2).
- On ne peut pas paramétrer l'ensemble des solutions par n'importe quelle coordonnée (dans l'exemple précédent, on ne peut pas paramétrer par x_4).
- Dans certains cas on peut paramétrer l'ensemble des solutions par plusieurs coordonnées.

À retenir (en général) :

- autant d'inconnues que d'équations $\Leftrightarrow$ une unique solution
- plus d'inconnues que d'équations $\Leftrightarrow$ plusieurs solutions
- moins d'inconnues que d'équations $\Leftrightarrow$ aucune solution

3.2 Cas particulier des matrices carrées

Définition 3.3 (Matrice inversible) *On dit d'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qu'elle est inversible s'il existe une matrice B telle que $A \times B = B \times A = I_n$. Dans ce cas cette matrice B est unique, on l'appelle matrice inverse de A et on la note A^{-1}.*

A noter qu'on peut montrer (mais ça n'est pas simple) que la propriété d'inversibilité d'une matrice est équivalente à la propriété d'inversibilité à gauche (soit l'existence d'une matrice B telle que $BA = I_n$) ou encore à la propriété d'inversibilité à droite (soit l'existence d'une matrice B telle que $AB = I_n$).

<u>Systèmes de n équations à n inconnues</u> Soit un système linéaire de n équations à n inconnues :

$$(\mathscr{E}) \Longleftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & y_n \end{cases}$$

<u>Vision matricielle</u>

$\mathscr{E} \Leftrightarrow A \times \mathbf{x} = \mathbf{y}$ avec $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

On a équivalence entre les deux propriétés suivantes

- A est inversible (A^{-1} existe)
- $\mathscr{E}$ possède une unique solution

Si A est inversible l'unique solution du système est alors $x = A^{-1}\mathbf{y}$

Inversion d'une matrice :

- Disposer la matrice M et la matrice Id_n (de même taille) côte à côte
$$M \big| Id_n$$
- appliquer la méthode de Gauss à M en effectuant les même opération sur la matrice Id_n jusqu'à ce que M soit triangulaire supérieur (Id_n est alors triangulaire inférieure) :
$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * & 1 \end{pmatrix}$$
- réappliquer la méthode de Gauss à M, toujours en effectuant les même opération sur la matrice Id_n, jusqu'à ce que M soit la matrice identité :
$$Id_n \big| \ M^{-1}$$
la matrice de gauche est alors l'inverse de M.

Exemple d'inversion d'une matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow \_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_ \\ L_3 \leftarrow \_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ \_ & \_\,\_ & \_\,\_ \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow \_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ \_ & \_\,\_ & \_\,\_ \\ \_ & \_ & \_\,\_ \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ \_ & \_\,\_ & \_\,\_ \\ \_ & \_ & \_\,\_ \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow \_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_ \\ L_2 \leftarrow \_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_\,\_\,\_ & \_ \\ \_ & \_ & \_\,\_ \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -3 & -3 & -9 \\ -27 & -9 & -45 \\ 5 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow \_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_$$

$$\begin{pmatrix} \_\,\_ & \_ & \_ \\ \_ & \_\,\_\,\_ & \_ \\ \_ & \_ & \_\,\_ \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -36 & -18 & -72 \\ -27 & -9 & -45 \\ 5 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow \_\,\_\,\_\,\_ \\ L_2 \leftarrow \_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_ \\ L_3 \leftarrow \_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 1.5 & 0.5 & 2.5 \\ -2.5 & -1.5 & -4.5 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Vérification :

$$\begin{aligned}
A \times A^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 1.5 & 0.5 & 2.5 \\ -2.5 & -1.5 & -4.5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -6+4.5+2.5 & -3+1.5+1.5 & -12+7.5+4.5 \\ -2-3+5 & -1-1+3 & -4-5+9 \\ 4-1.5-2.5 & 2-0.5-1.5 & 8-2.5-4.5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_3
\end{aligned}$$

<u>Matrices élémentaires</u> Chaque opération élémentaire sur les lignes d'une matrice carrée peut être réalisée par la multiplication à gauche de cette matrice par une matrice élémentaire. Cette matrice élémentaire peut-être obtenue en faisant subir à la matrice identité I_n la même opération que celle réalisée sur les lignes.

Par exemple pour une matrice carrée de taille 3 :

- Permuter les lignes L_1 et L_2 revient à utiliser la matrice élémentaire $E = \begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$
- Effectuer l'opération $L_3 \leftarrow 5 \times L_3$ revient à utiliser la matrice élémentaire $E = \begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$
- Effectuer l'opération $L_3 \leftarrow -2 \times L_3 + 5 \times L_2$ revient à utiliser la matrice élémentaire $E = \begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_\,\_ \end{pmatrix}$

Ainsi l'application de la méthode de Gauss pour obtenir l'inverse d'une matrice A peut se traduire par des multiplications à gauche successives par des matrices élémentaires $E_1, \cdots, E_k$ de sorte à avoir :

$$\underbrace{E_k \times \cdots \times E_1}_{A^{-1}} \times A = I_n$$