Graphes

2. Concepts de base

Solen Quiniou

solen.quiniou@univ-nantes.fr

IUT de Nantes

Année 2023-2024 – BUT 1 (Semestre 2)

[Mise à jour du 18 janvier 2024]

IUT Nantes
Pôle Sciences et technologie
Nantes Université

Plan du cours

Graphes orientés

Définition : graphes orientés

Graphe orienté : couple $G = (S, A)$ avec

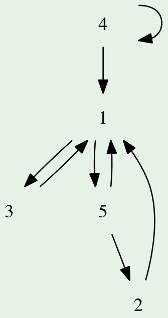
- S : ensemble fini d'éléments appelés sommets
  - $|S| = n$: ordre du graphe
- A : ensemble fini de couples de sommets appelés arcs
  - $A \subseteq S \times S$
  - $|A| = m$: taille du graphe

Définitions : arcs

- Soit $a = (x, y) \in A$ un **arc** de G
  - a peut aussi se noter $x \to y$
  - x est le début (ou l'origine) de a
  - y est la fin (ou l'extrémité finale) de a
- $a = (x, x)$ est une boucle

Graphes orientés

Exemple



- $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 3), (1, 5), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 4), (5, 1), (5, 2)\}$

- Sommet 1 : origine de l'arc $(1, 3)$
- Sommet 3 : destination de l'arc $(1, 3)$
- Arc $(4, 4)$: boucle

Graphes non orientés

Définition : graphes non orientés

Graphe non orienté : couple $G = (S, A)$ avec

- S : ensemble fini d'éléments appelés sommets
- A : ensemble fini de paires de sommets appelés arêtes

Définitions : arête

- **Arête** : paire de sommets notée $\{x, y\}$

Remarque : lien entre graphe orienté et non orienté

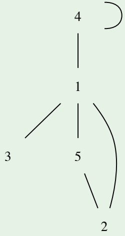
- $G = (S, A)$: graphe orienté

$\rightarrow$ $G' = (S, A')$: **graphe non orienté associé** avec

  - S le même ensemble de sommets
  - A' l'ensemble d'arêtes vérifiant $\{x, y\} \in A' \Leftrightarrow (x, y) \in A$ *ou* $(y, x) \in A$

Graphes non orientés

Exemple



- $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- $A = \{\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 1\}, \{4, 1\}, \{4, 4\}, \{5, 2\}\}$.

Plan du cours

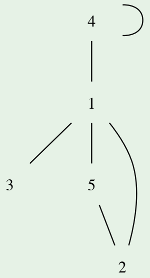
Sommets adjacents et voisins – graphes non orientés

Définition : sommets adjacents et voisins

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté

- Les sommets s et t sont **adjacents** ou **voisins** dans G si $\{s, t\}$ est une arête de G

Exemple



- Sommets 1 et 3 **adjacents**
- Sommet 5 **voisin** du sommet 1

Prédécesseurs et successeurs – graphes orientés

Définitions : prédécesseurs, successeurs et voisins

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté

- Le sommet r est le **prédécesseur** du sommet s si (r, s) est un arc de G

→ Ensemble des prédécesseurs du sommet s : $\Gamma^-(s) = \{r \in S \,|\, (r, s) \in A\}$

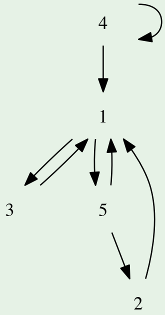
- Le sommet t est le **successeur** du sommet s si (s, t) est un arc de G

→ Ensemble des successeurs du sommet s : $\Gamma^+(s) = \{t \in S \,|\, (s, t) \in A\}$

→ Ensemble des voisins du sommet s : $\Gamma(s) = \Gamma^+(s) \cup \Gamma^-(s)$

Prédécesseurs et successeurs – graphes orientés

Exemple



- Ensemble des successeurs du sommet 1 : $\Gamma^{+}(1) = \{3, 5\}$
- Ensemble des prédécesseurs du sommet 1 : $\Gamma^{-}(1) = \{2, 3, 4, 5\}$

Plan du cours

Sommets source et puits

Définitions : sources et puits

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté.

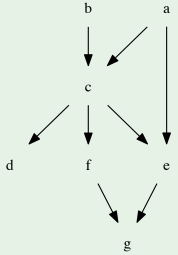
- **Source** de G : sommet sans prédécesseur

$\rightarrow$ Ensemble des sources de G : $sources(G) = \{s \in S \setminus \{s\} \mid d^-(s) = 0\}$

- **Puits** de G : sommet sans successeur

$\rightarrow$ Ensemble des puits de G : $puits(G) = \{s \in S \setminus \{s\} \mid d^+(s) = 0\}$

Exemple



- $sources(G) = \{a, b\}$
- $puits(G) = \{d, g\}$

Plan du cours

Degré des sommets – graphes non orientés

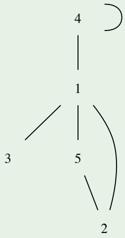
Définitions : degré d'un sommet

Soit G un graphe non orienté

- **Degré** du sommet s, noté $d(s)$: nombre d'arêtes dont l'extrémité est s (en comptant 2 fois les boucles)

$\rightarrow$ $d(s)$ correspond au nombre de voisins de s

Exemple



- $d(1) = 4$
- $d(4) = 3$

Degrés des sommets – graphes orientés

Définitions : degré entrant, degré sortant et degré total

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté

- **Degré entrant** d'un sommet s, noté $d^-(s)$: nombre d'arcs dont l'extrémité finale est s ou nombre de prédécesseurs de s

$\rightarrow$ $d^-(s) = |\Gamma^-(s)|$

- **Degré sortant** d'un sommet s, noté $d^+(s)$: nombre d'arcs dont l'origine est s ou nombre de successeurs de s

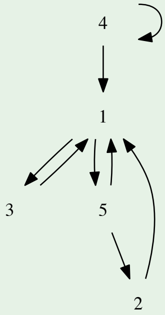
$\rightarrow$ $d^+(s) = |\Gamma^+(s)|$

- **Degré total** d'un sommet s, noté $d(s)$: nombre d'arcs dont l'origine ou l'extrémité finale est s (boucles comptées deux fois) ou nombre de voisins de s

$\rightarrow$ $d(s) = d^-(s) + d^+(s)$

Degrés des sommets – graphes orientés

Exemple



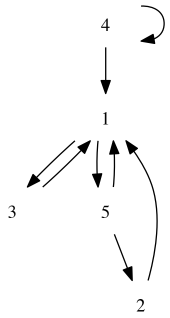
- $d^-(1) = 4$ $\quad d^+(1) = 2$ $\quad d(1) = 6$
- $d^-(4) = 1$ $\quad d^+(4) = 2$ $\quad d(4) = 3$

Plan du cours

Représentation sagittale

- **Représentation sagittale** : représentation sous forme de dessin

→ Représentation non unique



→ Comment représenter un graphe pour coder efficacement un algorithme ?
Le choix dépend de l'algorithme !

Représentation par matrice d'adjacence

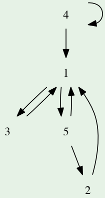
Définition : matrice d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté avec les sommets numérotés de 1 à n

- **Matrice d'adjacence** de G : matrice $M = (m_{ij})$, de taille $n \times n$, avec

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ (i,j) \in A, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Exemple



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'adjacence

$\rightarrow$ Définition similaire pour les graphes non orientés

Représentation par matrice d'adjacence

Avantages

- Facile à utiliser et à construire
- Accès rapide à une arête (ou un arc) particulière (temps constant)

Inconvénients

- Occupation de n^2 cases mémoire quel que soit le nombre d'arêtes (ou d'arcs) du graphe

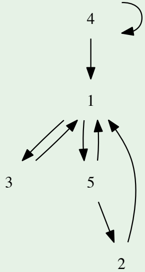
Représentation par liste des successeurs

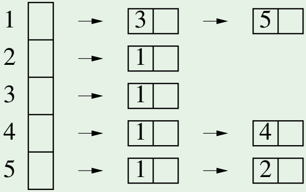
Définition : liste des successeurs

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté avec les sommets numérotés de 1 à n

- **Liste des successeurs** de G : liste des successeurs (respectivement voisins, pour les graphes non orientés) de chaque sommet, donnée sous la forme d'une liste chaînée

Exemple





Liste des successeurs

Représentation par liste des successeurs

Avantages

- Occupation minimale de la mémoire : codage uniquement des arêtes (ou arcs) présentes dans le graphe
- Accès rapide au successeur d'un sommet

Inconvénients

- Plus complexe à mettre en œuvre que la matrice d'adjacence
- Accès plus long aux prédécesseurs d'un sommet, par exemple

Plan du cours

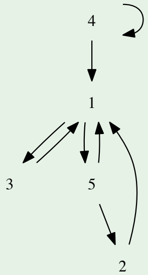
Sous-graphe

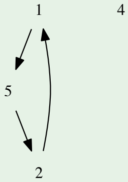
Définition : sous-graphe

Soit $G = (S, A)$ un graphe (orienté ou non)

- $G' = (S', A')$ **sous-graphe** de G si $S' \subset S$ et $A' \subset A$

Exemple





Sous-graphe

Sous-graphe induit

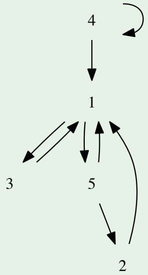
Définition : sous-graphe induit

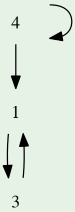
Soit $G = (S, A)$ un graphe (orienté ou non)

- $G' = (S', A')$ **sous-graphe induit** par S' si A' est formé de tous les arcs (ou arêtes) de G dont les extrémités sont dans S' :

$$\forall x, y \in S', (x, y) \in A' \Leftrightarrow (x, y) \in A$$

Exemple





Sous-graphe induit par $S' = \{1, 3, 4\}$

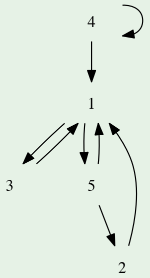
Sous-graphe couvrant

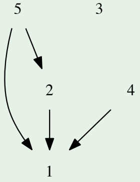
Définition : sous-graphe couvrant

Soit $G = (S, A)$ un graphe (orienté ou non)

- $G' = (S', A')$ **sous-graphe couvrant** s'il contient tous les sommets de S, c'est-à-dire $S' = S$

Exemple





Sous-graphe couvrant

Plan du cours

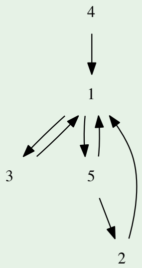
Graphe simple

Définition : graphe simple

Soit $G = (S, A)$ un graphe (orienté ou non)

- G **graphe simple** s'il ne comporte aucune boucle

Exemple



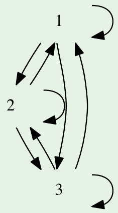
Graphe complet

Définition : graphe complet

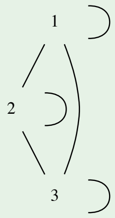
- Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté
  G **graphe complet** si $A = S \times S$
- Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté
  G **graphe complet** si toute paire de sommets apparaît dans A

$\rightarrow$ On peut également ne pas tenir compte des boucles sur les sommets

Exemples



Graphe complet orienté



Graphe complet non-orienté

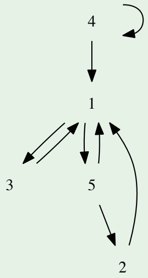
Graphe complémentaire

Définition : graphe complémentaire

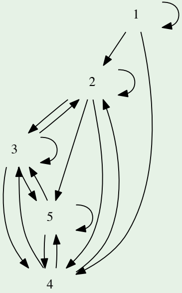
Soit $G = (S, A)$ un graphe

- $\bar{G}$ **graphe complémentaire** de G : mêmes sommets que G mais deux sommets sont adjacents dans $\bar{G}$ ssi ils ne le sont pas dans G

Exemple



G



$\bar{G}$

Graphe réciproque et graphe symétrique

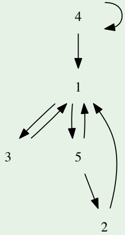
Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté

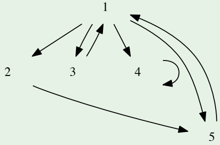
- $G^{-1} = (S, A^{-1})$ **graphe réciproque** de G si $A^{-1} = \{(x, y) \in S \times S | (y, x) \in A\}$

- $G_S = (S, A \cup A^{-1})$ **graphe symétrique** de G

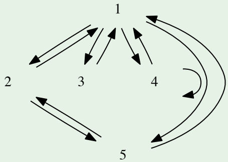
Exemple



G



G^{-1}



G_S

Graphe biparti

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe

- G **graphe biparti** si
  - S peut être divisé en deux ensembles disjoints S_1 et S_2
  - chaque arc (arête) relie un sommet de S_1 et un sommet de S_2 donc $A \subset \{\{s_1, s_2\}, s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$

Exemple