IUT Nantes
Pôle Sciences et technologie
Nantes Université

BUT Info 1

Exercices Mathématiques discrètes

2023-2024

1 Logique

Exercice 1 Langage formel / langage courant

Soit p la proposition énoncée par Mathieu quant à son dernier déjeuner « J'ai mangé une boîte de pâtes (tu sais de celles que tu mets au micro-ondes et hop c'est prêt ?) » et q la proposition « J'ai mangé une salade de quinoa ». Traduire par une phrase en français :

1. $p \wedge q$
2. $p \vee q$
3. $\neg(\neg p \vee q)$

Exercice 2

On considère les propositions atomiques :

- P : « Ils ont bu du Perrier »,
- S : « Ils ont dansé la salsa »,
- C : « Ils ont écouté l'intégrale de Céline Dion »,
- H : « Ils étaient tous de bonne humeur »,
- I : « Leur soirée a été inoubliable »,
- T : « Leur soirée a été torride ».

2.1. Énoncez des phrases simples traduisant les propositions suivantes :

a. $(S \wedge T) \Rightarrow P$ **b.** $H \Rightarrow (I \Leftrightarrow C)$

2.2. Traduisez par une proposition simple les phrases :

a. « Ils n'étaient pas tous de bonne humeur s'ils n'ont pas dansé la salsa ».

b. « Ils ont pu être tous de bonne humeur seulement s'ils ont bu du Perrier ».

c. « Ils étaient tous de bonne humeur si et seulement si ils ont bu du Perrier et ont dansé la Salsa ».

d. « Il était suffisant d'écouter l'intégrale de Céline Dion pour que la soirée soit inoubliable ».

e. « Il était nécessaire d'écouter l'intégrale de Céline Dion pour que la soirée soit inoubliable ».

Exercice 3 Illustration de l'implication

3.1. On considère la proposition P : « Si une chose est un vélo, alors cette chose est bleue ».

a. Vous possédez un vélo bleu, est-ce que cela contredit P ?

b. Vous possédez une voiture rouge, est-ce que cela contredit P ?

c. Vous possédez une voiture bleue, est-ce que cela contredit P ?

d. Vous possédez un vélo vert, est-ce que cela contredit P ?

3.2. Pour chacune des situations précédentes, exprimez les valeurs de vérité de « cette chose est un vélo » et « cette chose est bleue ».

Présentez-le sous forme de tableau, avec la valeur de vérité de P associée.

Que reconnaissez-vous ?

Exercice 4

On considère la formule : $F_1 : (p \Rightarrow q) \wedge \neg r$.

4.1. Établir la table de vérité de F_1.

4.2. Est-ce que F_1 est une tautologie ?

4.3. Donner une valuation de p, q, r satisfaisant F_1.

4.4. Donner une valuation de p, q, r ne satisfaisant pas F_1.

4.5. En utilisant les règles de manipulation, exprimer F_1 sous forme normale disjonctive à l'aide des seuls connecteurs $\neg$, $\wedge$ et $\vee$.

Exercice 5

Comparer les deux formules suivantes :

$$(A \wedge B) \Rightarrow C \quad \text{et} \quad A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$$

Exercice 6

6.1. Montrer les équivalences suivantes de deux manières (tables de vérité et manipulation de formules sauf pour les deux premières à traiter exclusivement avec tables de vérité) :

a. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

b. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

c. $p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q$

d. $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \equiv p$

e. $p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv 1$

f. $(p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q \equiv 0$

Exercice 7

7.1. Montrer que $\wedge$, $\vee$ et $\Leftrightarrow$ sont associatifs et commutatifs.

7.2. Montrer que $\wedge$ se distribue sur $\vee$ et inversement.

i.e. montrer que $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ *et* $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

7.3. Est-ce que $\Rightarrow$ est associative ? commutative ?

7.4. Est-ce que $\Rightarrow$ est transitive ? *i.e.* est-ce que si $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow r$, alors $p \Rightarrow r$?

Exercice 8 Contraposée, réciproque et négation d'une implication

8.1.

a. La contraposée de $A \Rightarrow B$ est $\neg B \Rightarrow \neg A$. Une implication et sa contraposée sont-elles équivalentes ?

b. La réciproque de $A \Rightarrow B$ est $B \Rightarrow A$. Une implication et sa réciproque sont-elles équivalentes ?

c. Exprimez $\neg(A \Rightarrow B)$ avec les opérateurs $\neg$, $\wedge$ et $\vee$ mais sans parenthèses ni $\Rightarrow$.

8.2. Déterminez les contraposées, les réciproques puis les négations des propositions suivantes :

a. Si la route n'est pas droite, la pente semble forte.

b. Jamal peut franchir un cap seulement s'il change de braquet.

Exercice 9 Nouvel opérateur logique

On définit le connecteur $\oplus$ par :

$$1 \oplus 1 = 0 \quad 1 \oplus 0 = 1 \quad 0 \oplus 1 = 1 \quad 0 \oplus 0 = 0$$

9.1. Quel nom est traditionnellement donné à cet opérateur ?

9.2. Simplifier :

a. $x \oplus 0$ **b.** $x \oplus 1$ **c.** $x \oplus x$ **d.** $x \oplus \neg x$

9.3. Montrer que :

a. $x \oplus y \equiv (x \vee y) \wedge \neg (x \wedge y)$ **b.** $x \oplus y \equiv (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$

9.4. L'opération $\oplus$ est-elle commutative ?

9.5. Vrai ou faux ?

a. $x \oplus (y \oplus z) \equiv (x \oplus y) \oplus z$

b. $x \vee (y \oplus z) \equiv (x \vee y) \oplus (x \vee z)$

c. $x \oplus (y \vee z) \equiv (x \oplus y) \vee (x \oplus z)$

Exercice 10

Déterminez toutes les fonctions qui prennent deux booléens en argument et renvoient un booléen (et retrouvez le nom des fonctions classiques).

Exercice 11 Mise sous forme normale conjonctive ($\rightarrow$ SAE)

Mettre sous forme normale conjonctive les formules suivantes :

a. $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

b. $\neg (p \wedge \neg (q \vee r))$

c. $\neg ((\neg p \wedge q) \Rightarrow (r \vee s))$

d. $\neg (p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$

e. $(p \Rightarrow (q \Leftrightarrow \neg r)) \wedge (r \Leftrightarrow \neg s)$

Exercice 12 jeu logique

Certains jeux font appel à des énigmes logiques régies par le calcul des propositions.

On considère la règle suivante : ≪ *Les propositions composant une énigme sont alternativement vraies et fausses, c'est-à-dire que :*

- *soit les propositions de numéro pair sont vraies et les propositions de numéro impair fausses ;*
- *soit les propositions de numéro pair sont fausses et les propositions de numéro impair vraies.* ≫

Dans un labyrinthe, vous vous retrouvez bloqué dans une salle face à une porte sur laquelle se trouvent deux interrupteurs étiquetés A et B en position ouverte. On dispose de l'indication suivante :

Pour ouvrir la porte :

P1 *Il faut fermer l'interrupteur A.*

P2 *Il faut fermer simultanément les interrupteurs A et B.*

P3 *Il ne faut pas fermer l'interrupteur B.*

Attention, en cas d'erreur la salle s'auto-détruira...

12.1. Exprimer P1 , P2 et P3 sous la forme de formules du calcul des propositions dépendant de A et de B.

12.2. Exprimer la règle du jeu dans le contexte des propositions P1 , P2 et P3.

12.3. En utilisant le calcul des propositions, déterminer l'action à effectuer pour ouvrir la porte.

Exercice 13

Trois collègues, Albert, Bernard et Charles déjeunent ensemble. Les affirmations suivantes sont vraies :

1. Si Albert commande un dessert, Bernard en commande un aussi.
2. Soit Bernard, soit Charles, mais pas les deux, commandent un dessert.
3. Albert ou Charles, ou les deux, commandent un dessert.
4. Si Charles commande un dessert, Albert fait de même.

13.1.

a. Exprimer les données du problème comme des formules propositionnelles.

b. Que peut-on en déduire sur qui commande un dessert ?

c. Pouvait-on arriver à la même conclusion en supprimant l'une des quatre affirmations ?

Exercice 14

Trois personnes, A , B et C , chacune d'elle étant soit mathématicien(ne) soit informaticien(ne), ont la discussion suivante :

A : C et moi sommes mathématiciens ;
B : C n 'est pas mathématicien ;
C : B est mathématicien ou A est informaticien.

14.1. Sachant que les mathématiciens disent toujours la vérité alors que les informaticiens mentent systématiquement, pouvez-vous dire qui est quoi ?

Exercice 15

Trois autres personnes, D, E et F, chacune d'elle étant soit mathématicien(ne) soit informaticien(ne), ont la discussion suivante :

D : F est informaticien ;
E : D et F sont mathématiciens ;
F : E est mathématicien.

15.1. Sachant que les mathématiciens disent toujours la vérité alors que les informaticiens mentant systématiquement, pouvez-vous dire qui est quoi ?

Exercice 16 Etude satisfiabilité avec arbres $\rightarrow$ SAE

Etudier la satisfiabilité des formules suivantes (en cnf) en représentant systématiquement l'arbre illustrant la méthode de backtracking (avec simplification de formule) et l'arbre illustrant l'algorithme DPLL (avec règles de clause unitaire et littéral pur pour prioriser respectivement les hypothèses émises sur des variables dans le parcours de l'arbre) :

- $a\bar{b}cd$, $\bar{a}\bar{c}\bar{d}$, $\bar{b}d$, $ab\bar{c}$, $\bar{b}c$, $\bar{a}b$
- $\bar{a}\bar{b}$, $b\bar{c}$, $a\bar{b}c$, $a\bar{c}$, bc
- $ac\bar{d}e$, $\bar{a}\bar{b}\bar{d}$, $b\bar{c}\bar{e}$, $a\bar{c}d\bar{e}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$, $a\bar{b}\bar{d}e$

Exercice 17 $\rightarrow$ SAE

17.1. Mettre sous forme normale conjonctive les formules suivantes :

a. $\Big((\neg\, (p \vee \neg q)\,) \Rightarrow \neg(q \wedge r) \Big) \wedge \big(r \vee (p \wedge q)\,\big)$

b. $(p \vee q) \Leftrightarrow (r \wedge \neg p)$

17.2. Etudier la satisfiabilité des formules suivantes en représentant un arbre illustrant l'algorithme de backtracking :

a. $(a \vee \neg b \vee c \vee d) \wedge (a \vee b \vee d) \wedge (c \vee \neg d) \wedge (b \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$

b. $(a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg a \vee d) \wedge (\neg a \vee b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)$

Exercice 18

Dans $\mathbb{R}$, on considère les prédicats suivants :

- $p(x) : ((x < 4) \Rightarrow (x \leqslant 5))$
- $q(x) : ((x > 5) \Rightarrow (x < 2))$
- $r(x) : (x^2 \leqslant 4x)$

18.1. Quelles sont les valeurs de vérité des propositions :

a. $p(6)$

b. $q(2)$

c. $p(6) \Leftrightarrow q(2)$

d. $p(5) \wedge q(1)$

e. $r(1)$

f. $\forall x : p(x)$

g. $\exists x : p(x)$

h. $\forall x : r(x)$

i. $\exists x : q(x)$

Exercice 19

Préciser, à l'aide d'un quantificateur, le sens du mot "un" dans les phrases suivantes :

a. Youri regarde un film.

b. Un brasseur a été champion du monde de natation.

c. Un entier naturel est pair ou impair.

d. Un étudiant a toujours un sujet à étudier.

e. Dans un triangle isocèle une médiane est également hauteur.

f. Un étudiant a remarqué qu'un enseignant a toujours tendance à être mieux compris par un étudiant lorsque ce dernier est présent.

Exercice 20

On pose :

- $h(x)$: « x est un homme »
- $l(x)$: « x est un lapin »
- $g(x)$: « x est gentil »
- $m(x, y)$: « x a mangé y »

On considère que l'univers de référence est l'ensemble des créatures vivantes.

Traduire les phrases suivantes avec des quantificateurs :

a. « Tous les lapins sont gentils »

b. « Toutes les créatures méchantes sont des hommes »

c. « Il y a un homme qui n'est pas méchant »

d. « Il n'existe pas de lapin méchant »

e. « Aucun homme n'est gentil »

f. « Tous les hommes ont (déjà) mangé du lapin »

g. « Un lapin a mangé un homme »

Exercice 21

Soit $\mathscr{E} = \{1, 2, 3\}$ l'univers de référence.

21.1. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $\exists x, \forall y : x^2 < y + 1$
- $\exists y, \forall x : x^2 + y^2 < 12$

Exercice 22

Soit le prédicat $H(x)$ qui signifie « x est un humain », le prédicat $LG(x)$ qui signifie « x est une langue » et le prédicat $P(x, y, z)$ qui signifie « x et y parlent la langue z ».

22.1. Exprimer :

a. tous les humains parlent une langue

b. il existe une langue universelle pour les humains

c. il existe une personne qui parle toutes les langues

d. deux humains quelconques peuvent communiquer par le biais d'un interprète.

On suppose que « personne » et « interprète » sont des humains.

Exercice 23

23.1. Vrai ou faux ? (Justifier)

a. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = x$

b. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 < 101$

c. $\exists x \in \mathbb{R},\ (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

d. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y = x - 1$

e. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y = x - 1$

f. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ x + nx = (n + 1)x$

g. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ x + nx = (n + 1)x$

h. $\exists n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ n - p$ est divisible par 2

i. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ n - p$ est divisible par 2

Exercice 24

Pour chaque proposition, donner sa valeur de vérité, énoncer sa négation puis donner la valeur de vérité de celle-ci :

a. $\exists x \in \mathbb{R},\ 3x = 2$

b. $\forall x \in \mathbb{R},\ x = x + 1$

c. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y$

d. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x^2 = y$

e. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x^2 = y$

2 Ensembles

Exercice 25 Ensembles égaux

25.1. Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui sont égaux ?

a. $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x^2 - 4x + 3 = 0\}$

b. $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x^2 - 3x + 2 = 0\}$

c. $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x < 3\}$

d. $D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x < 5 \text{ et } x \text{ est impair }\}$

e. $E = \{1, 2\}$

f. $F = \{1, 2, 1\}$

g. $G = \{3, 1\}$

h. $H = \{1, 1, 3\}$

Exercice 26 Ensembles définis en extension

On considère l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

26.1. Définir en extension les ensembles suivants :

a. $A_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \in E\}$

b. $A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in E\}$

c. $A_3 = \{x \in E \mid x^2 \in E\}$

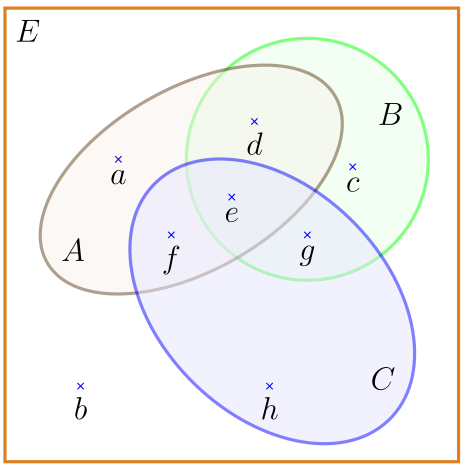
d. $A_4 = \{x \in E \mid \sqrt{x} \in E\}$

e. $A_5 = \{x \in E \mid 2x \in E\}$

f. $A_6 = \left\{x \in E \mid \frac{x}{2} \in E\right\}$

Exercice 27

On considère le diagramme de Venn suivant, avec A, B, C trois parties d'un ensemble E, et a,b,c,d,e,f,g,h des éléments de E.



27.1. Déterminez si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

a. $g \in A \cap \overline{B}$

b. $g \in \overline{A} \cap \overline{B}$

c. $g \in \overline{A} \cup \overline{B}$

d. $f \in C \backslash A$

e. $e \in \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

f. $\{h, b\} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

g. $\{a, f\} \subset A \cup C$

Exercice 28 Définitions des relations ensemblistes

28.1.

a. Comment définir la relation d'inclusion $\subset$ à partir de la relation d'appartenance $\in$?

b. Comment définir la relation d'égalité ensembliste $=$ à partir de la relation d'appartenance $\in$?

c. Comment définir la relation d'égalité ensembliste $=$ à partir de la relation d'inclusion $\subset$?

Exercice 29 Propriétés des relations ensemblistes

29.1. La relation d'inclusion $\subset$ est-elle réflexive ? irréflexive ? transitive ? symétrique ? anti-symétrique ?

29.2. Même question pour la relation d'égalité ensembliste.

29.3. Qu'en est-il de la relation d'appartenance $\in$?

Exercice 30

On considère les ensembles et entiers suivants : $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{N}$, $B \subset \mathbb{N}$.

30.1. Barrer les expressions mal formées (qui n'ont pas de sens).

$$\begin{array}{ccc}
A = B & A \in B & A \subset B \\
x = y & x \in y & x \subset y \\
x = A & x \in A & x \subset A \\
A = x & A \in x & A \subset x \\
A = \mathscr{P}(B) & A \in \mathscr{P}(B) & A \subset \mathscr{P}(B) \\
x = \mathscr{P}(B) & x \in \mathscr{P}(B) & x \subset \mathscr{P}(B) \\
\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B) & \mathscr{P}(A) \in \mathscr{P}(B) & \mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(B)
\end{array}$$

Exercice 31

On considère l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

31.1. Compléter, lorsque c'est possible, par un des symboles :

$$\in, \ni, \subset, =, \neq, \not\subset, \cdots$$

1. $2 \cdots E$,
2. $\{2, 3\} \cdots E$,
3. $\{2\} \cdots E$,
4. $\{2, 3, 4\} \cdots \{4, 3, 2\}$,
5. $\{2, 3, 4\} \cdots \{4, 3, 0\}$,
6. $\{\} \cdots E$,
7. $E \cdots E$,
8. $E \cdots \{E\}$,
9. $\{\} \cdots \{E\}$,
10. $E \cdots \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$,
11. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \cdots E$

Lorsqu'il y a plusieurs solutions, on choisira celle qui donne le plus d'information.

Exercice 32

Soit $A = \{3, 5, 7\}$ et $B = \{\diamondsuit, \heartsuit\}$.

32.1. Déterminer A^2 en extension, puis B^2, $A \times B$, et $B \times A$.

32.2. Donner $A^2 \times B$ en extension.

Exercice 33

Déterminer si chacun des énoncés suivants est vrai ou faux ?

a. $x \in \{x\}$

b. $\{x\} \subset \{x\}$

c. $\{x\} \in \{x\}$

d. $\{x\} \in \{\{x\}\}$

e. $\emptyset \subset \{x\}$

f. $\emptyset \in \{x\}$

Exercice 34

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\}$ et $C = \{(t + 1, 4t + 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

34.1. Démontrer que $A = C$.

Exercice 35

Soient A, B, C trois sous-ensembles de Ω.

35.1. Si $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.

35.2. Est-ce que $C \subset (A \cup B)$ entraîne $C \subset A \vee C \subset B$?

Exercice 36

On s'intéresse à la gestion de données de la prison d'aliens implantée à Roswell.

On considère un ensemble N de noms d'aliens, un ensemble de symboles $S = \{\mathsf{M}, \mathsf{F}, \mathsf{O}\}$, un ensemble P de noms de planètes et un ensemble C de numéros de cellules.

On pose $A = N \times S \times P \times C$.

On utilise un élément (n, s, p, c) de A pour associer le nom n d'un alien, son sexe s, sa planète p d'origine et le numéro c de la cellule dans laquelle il est retenu.

On dispose d'un ensemble R inclus dans A représentant l'ensemble des aliens détenus dans la prison de Roswell.

36.1. Donnez en compréhension l'ensemble des planètes d'origine des aliens détenus à Roswell.

36.2. Donnez en compréhension l'ensemble des cellules libres à Roswell.

36.3. Donnez une formule indiquant si la prison comporte deux aliens de même nom. (On fait l'hypothèse qu'il y a un seul alien par cellule).

36.4. Donnez une formule indiquant si deux aliens peuvent se reproduire dans la prison. (On fait l'hypothèse qu'il y peut y avoir plusieurs aliens par cellule).

Exercice 37

On désigne par F l'ensemble des voitures 2CV actuellement enregistrées en France et par P (sous-ensemble de F) celles enregistrées en Pays de la Loire.

F est un sous-ensemble du produit cartésien $I \times A \times C$ construit à partir de :

- I : ensemble désignant les immatriculations actuelles
- A : ensemble désignant les années de mise en circulation
- C : ensemble désignant la couleur du véhicule (rose, violet...)

Donner une formule pour vérifier :

a. Toutes les 2CV de 1968 enregistrées en France sont rose.

b. Il existe une 2CV violette enregistrée en France mais aucune en Pays de la Loire.

Exercice 38 Propriétés des opérations ensemblistes

38.1. En vous appuyant sur des lois de calcul sur les connecteurs logiques $\vee$ et $\wedge$, démontrez les résultats suivants :

1. Distributivité de $\cup$ sur $\cap$.
2. Distributivité de $\cap$ sur $\cup$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *(Loi de De Morgan sur le complément et l'union)*
4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *(Loi de De Morgan sur le complément et l'intersection)*

Exercice 39 Associativité de la différence symétrique

On cherche à comparer $(A\Delta B)\Delta C$ et $A\Delta(B\Delta C)$ avec A, B, C quelconques.

39.1. Faites 2 diagrammes de Venn sur lesquels vous colorierez successivement les ensembles $A\Delta B$ puis $(A\Delta B)\Delta C$.

39.2. Faites la même chose avec les ensembles $B\Delta C$ puis $A\Delta(B\Delta C)$.

Ces schémas ne constituent pas une preuve formelle, mais permettent de se faire une bonne intuition du résultat attendu.

39.3. Remplissez la table de vérité ci-dessous.

$a \in X$	$a \in Y$	$a \in X\Delta Y$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

39.4. En déduire la table de vérité ci-dessous.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A\Delta B$	$x \in (A\Delta B)\Delta C$	$x \in B\Delta C$	$x \in A\Delta(B\Delta C)$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

39.5. Conclure.

Exercice 40

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $x \mathscr{R} y$ si et seulement si $x^2 - y^2 = x - y$.

40.1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 41

Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont des relations d'équivalence dans l'ensemble de tous les habitants de la Terre ?

a. $\{(x, y) | x$ et y ont le même signe du zodiaque$\}$

b. $\{(x, y) | x$ et y sont nés la même année$\}$

c. $\{(x, y) | x$ et y se sont déjà trouvés dans la même ville$\}$

Exercice 42

On munit l'ensemble $E = \mathbb{R}^2$ de la relation $\mathscr{R}$ définie par :

$$(x, y)\mathscr{R}(x', y') \Leftrightarrow \exists a > 0, \exists b > 0, (x' = ax \wedge y' = by)$$

42.1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence

42.2. Donner la classe d'équivalence de l'élément $z = (1, 0)$.

Exercice 43

43.1. Parmi les paires d'éléments suivantes, lesquelles sont comparables dans l'ensemble partiellement ordonné $(\mathbb{Z}^+, |)$?

a. 5,15 **b.** 6,9 **c.** 8,16 **d.** 7,7

43.2. Trouver deux éléments incomparables dans les ensembles partiellement ordonnés suivants :

a. $(\mathscr{P}(\{0,1,2\}), \subset)$ **b.** $(\{1,2,4,6,8\}, |)$

Exercice 44

44.1. Démontrez que la relation $\mathscr{R}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par $(a,b)\mathscr{R}(c,d)$ si et seulement si $a+d = b+c$ est une relation d'équivalence.

44.2. Déterminez la classe d'équivalence de l'élément $(0,-2)$.

Exercice 45 Fonction injective, surjective

45.1. Déterminez si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives :

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x^2+2 \end{array}$
- $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x \; mod \; 3 \end{array}$
- $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$
- $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$
- $j : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$

Exercice 46

46.1. Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives (Justifier pour chaque propriété) ?

a. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (a,b) & \longmapsto & a-b \end{array} \right.$

b. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (x-1, y^2) \end{array} \right.$

Exercice 47 Composition de fonctions

Soit f une fonction de E vers F et g une fonction de F vers H. On note $g \circ f$ la fonction de E vers H telle que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

On considère à présent les fonctions suivantes :

$f = \{(1,c), (2,a), (3,b), (4,c)\}$,

$g = \{(a,2), (b,1), (c,4)\}$ et

$h = \{(1,A), (2,B), (3,D), (4,D)\}$.

47.1. Décrivez complètement, lorsque c'est possible :

a. $g \circ f$,

b. $f \circ g$,

c. $h \circ (g \circ f)$,

d. $h \circ g$,

e. $(h \circ g) \circ f$.

Exercice 48

Soient E et F deux ensembles **finis** et f une fonction de E vers F.

48.1. Que peut-on dire des cardinaux de E et F si :

a. f est injective ?

b. f est surjective ?

c. f est bijective ?

48.2. En admettant que les conditions nécessaires soient respectées sur les cardinaux de E et F, donner le nombre de fonctions de E dans F qui soient :

a. injectives

b. surjectives

c. bijectives

Exercice 49

Soit f une fonction de A vers B et g une fonction de B vers C.

49.1. Montrer que :

- $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective,
- $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.