TD Dipôles Champs Statiques

Rappel des symboles

- ◊ Exercice Application du cours
- ♡ Exercice Incontournable au concours
- ♣ Exercice donné en colle
- Δ Exercice d'approfondissement

I. Dipôles Électriques

Cours ♢ ○ ○ ○

1. Donner la définition du moment dipolaire de deux charges opposées
2. Démontrer l'expression du champ dipolaire
3. Citer et démontrer l'expression de la force, du couble subi et de l'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ extérieur homogène
4. Quel est le comportement qualitatif d'un dipôle dans un champ magnétique non homogène ?

Exercice 1: Interaction dipôle-charge ♢ ♡ ○ ○ ○

Un dipôle $\vec{p}$ rigide, dont la norme est constante, se situe à une distance r' d'une charge $q > 0$ située en O.

1. Montrer que le dipôle s'oriente radialement par rapport à O.
2. La résultante des forces subies par le dipôle est dans ce cas $\vec{F} = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E})$ où le gradient d'une fonction qui ne dépend que de r en sphérique est $\nabla f(r) = \frac{df}{dr}\vec{u_r}$. Exprimer la force $\vec{F}$ subie par le dipôle et déterminer son mouvement.
3. Exprimer la force subie par la charge en O et commenter.

Exercice 2: Deux sphères chargées ♢ ♡ ○ ○ ○

Deux cylindres infinis de centres O_1 et O_2, de mêmes rayons R, sont chargés uniformément en volume avec des densités volumiques de charge opposées $\pm\rho$. Leurs centres sont décalés de $O_1O_2 = a\vec{u}_z$ avec $a < R$.

1. Déterminer dans une approximation le champ en tout point de l'espace (sauf dans la petite zone où la charge est non nulle, trop petite pour être intéressante).
2. Définir le moment dipolaire $\vec{p}$ pour l'ensemble de la distribution tel que le champ à l'extérieur soit égal à celui créé par ce dipôle.
3. Lorsque $a \to 0$, on peut assimiler cette distribution de charge à celle d'un cylindre chargé surfaciquement σ, à condition que σ tende vers l'infini.

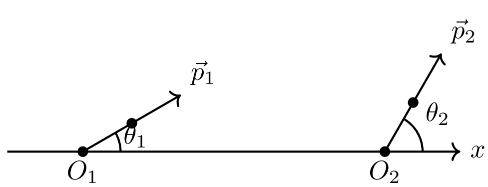
Exercice 3 : Ligne dipolaire ● ○ ○

Soient deux fils rectilignes infinis, parallèle à l'axe Oz et d'équations respectives ($x = a$ et $y = 0$) et ($x = -a$, $y = 0$) et de charges respectives λ et $-\lambda$ ($\lambda > 0$). On note A_1 et A_2 leurs intersections respectives avec le plan $z = 0$. La ligne dipolaire est obtenue comme la limite de cette distribution lorsque $a \to 0$ en maintenant $2a\lambda$ constant. On note $K = \frac{\lambda a}{\pi\varepsilon_0}$ M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z). Nous considérons le cas limite $r >> a$

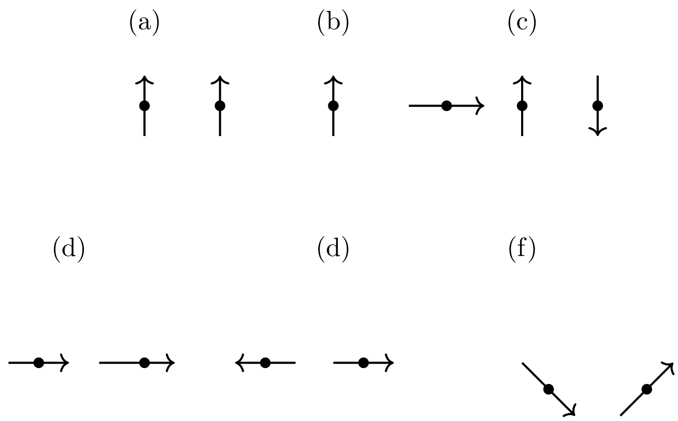
1. Exprimer le potentiel créé par une ligne dipolaire.
2. En déduire le champ.
3. Représenter qualitativement les lignes de champ et équipotentielles.

Exercice 4 : Interaction dipôle-dipôle ♢ ♡ ♣ ● ○ ○

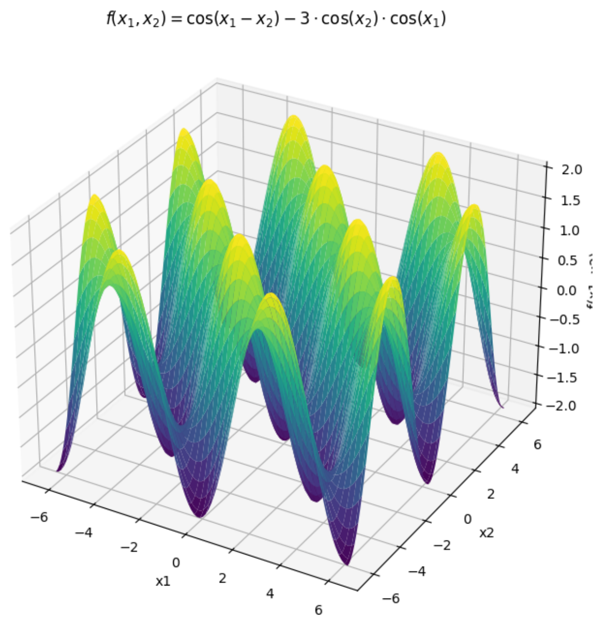
Deux dipôles $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$ rigides ($|\vec{p_1}| = |\vec{p_2}|$) sont astreints aux positions O_1 et O_2, mais libres de tourner autour de leurs axes respectifs.



1. Parmi les configurations ci-dessous, indiquer, en justifiant, celle(s) qui correspond(ent) à une position d'équilibre stable.



Remarque Pour une fonction de deux variables $f(x,y)$ un point stationnaire est un minimum local si en ce point $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$



Exercice 5 : Mouvement d'une particule dans un champ dipolaire

● ○ ○

Soit une particule chargée de masse m et de charge q, placée dans un champ électrique généré par un dipôle électrostatique $\vec{p}$ fixé en O. On se place dans un repère polaire avec : à l'instant initial $t = 0$, $\overrightarrow{v}(t=0)$, $\overrightarrow{OM}$ et $(O, \overrightarrow{p})$ définissant un même plan.

1. Redémontrer l'expression du potentiel et du champ électrique généré par un dipôle électrostatique.
2. Trouver trois équations du mouvement de la particule chargée en fonction de r et θ.
3. En déduire que $r^2 = Kt^2 + \alpha t + \beta$ où K, α, β sont des constantes dont on précisera la signification physique. On pourra poser $u = r^2$

4. On étudie le mouvement particulier où la trajectoire s'inscrit sur un cercle de centre O. Déterminer l'énergie nécessaire pour caractériser ce mouvement en précisant notamment l'expression de sa période.

Exercice 6 : Modèle de solvatation d'un ion ♢ ♡ ● ○ ○

On peut représenter la molécule d'eau par un dipôle électrostatique de moment dipolaire $p = 6,2 \times 10^{-30}$ C.m. Considérons quatre molécules d'eau situées aux sommets G_1, G_2, G_3, et G_4 d'un tétraèdre régulier. On note la distance de chaque sommet du tétraèdre au centre du tétraèdre $d = CG_i$. On impose que l'axe des dipôles soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{CG_i}$, mais pas forcément de même sens.

Dans un tétraèdre, l'angle au centre entre deux sommets est $\beta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 109°28'$
On introduit

$$U = \frac{p^2}{32\pi\epsilon_0 d^3 \sin\frac{\beta}{2}}\left(1 + \frac{2}{\tan^2(\beta/2)}\right)$$

1. Établir l'expression de l'énergie d'interaction de deux dipôles en fonction de p, d et β. Montrer que trois cas peuvent se présenter.
2. Montrer que seuls cinq arrangements sont possibles pour les quatre molécules d'eau respectant les conditions imposées. En déduire les expressions de l'énergie d'interaction de ces quatre molécules d'eau en fonction de U pour les cinq arrangements.

   On complète l'édifice en plaçant en C un ion positif de charge $q = e$, fixant la valeur de $d = 3 \times 10^{-10}$ m. L'énergie de solvatation de cet ion est $-240\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$. On introduit $U' = \frac{pe}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$.
3. Exprimer de nouveau les énergies d'interaction correspondant aux cinq arrangements.
4. Quel est l'arrangement le plus stable ? Commenter le modèle.

Ex 7: Interactions de type Van Der Walls ♢ ♡ ♣ ● ● ○

Couplage de deux dipôles électriques

1. Calculer l'énergie potentielle d'interaction W de deux diôles électriques seuls dans l'espace. On pourra se placer dans les coordonnées sphériques.
2. Calculer $< W >$, la moyenne satistique de W sur toutes les orientatios possibles des dipôles. On utilisera la statistique de Maxwell-Boltzmann, en se plaçant dans le cas $W << kT$
3. En déduire $< F >$, la force moyenne d'interaction entre les dipôles dite force de Van der Waals.
4. Justifier l'approximation effectuée.

Exercice 8: Sur la polarisation de l'eau

I.A - Moment dipolaire des molécules d'eau

I.A.1) Donner la configuration électronique des atomes composant la molécule d'eau.

I.A.2) Représenter son schéma de Lewis et prévoir sa géométrie d'après la théorie V.S.E.P.R. Justifier la valeur expérimentale de 105° de l'angle des liaisons HÔH.

I.A.3) Le moment dipolaire de la molécule d'eau vaut $p = 1,85\,D$ (avec $1\,D = 0,33 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{C \cdot m}$). En supposant que ce moment ne résulte que de la polarisation des liaisons $\mathrm{O-H}$, déduire le moment dipolaire de ces liaisons (sens et norme).

I.B - Polarisation de l'eau de mer — Permittivité relative

I.B.1) L'eau de mer contient approximativement $0,5\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$ de chlorure de sodium. Sa masse volumique est d'environ $1,03 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Évaluer le nombre n_1 de molécules d'eau par m^3 et le nombre n_2 d'ions chlorure et d'ions sodium par m^3 d'eau de mer. En l'absence de champ électrique, l'orientation des molécules d'eau est quelconque et le vecteur polarisation, défini comme le moment dipolaire moyen par unité de volume, est nul. Sous l'action d'un champ électrique E, les molécules d'eau s'orientent partiellement et le vecteur polarisation P_1 dû à ces orientations est proportionnel à E. On pose : $P_1 = n_1 \alpha_0 \varepsilon_0 E$ où α_0 est appelée polarisabilité d'orientation.

I.B.2) Quelle est l'unité de α_0 ?

I.B.3) α_0 est donnée par la loi de Curie :

$$\alpha_0 = \frac{p^2}{3\varepsilon_0 k_B T}$$

où T est la température exprimée en Kelvin.

Quel commentaire vous inspire cette formule ? Toujours sous l'action d'un champ électrique, les ions sodium et chlorure se déforment et il apparaît une polarisabilité dite électronique $\alpha_{\mathrm{Na}} = 2,8 \cdot 10^{-30}$ u.s.i. et $\alpha_{\mathrm{Cl}} = 37,7 \cdot 10^{-30}$ u.s.i.. On admet que les contributions au vecteur polarisation dues aux molécules d'eau et aux ions s'ajoutent :

$$P = P_1 + P_{\mathrm{Na}} + P_{\mathrm{Cl}}$$

I.B.4) Comparer les 3 termes pour une température de l'eau de $20°$ C. Conclure.

I.B.5) Quand le champ électrique varie au cours du temps, la polarisation du milieu ne suit pas instantanément les variations du champ électrique. La relation liant P à E est alors de la forme :

$$\tau \frac{dP}{dt} + P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E$$

où ε_r est appelée permittivité relative de l'eau de mer et τ une constante caractéristique de ce milieu.

a) Relier ε_r aux grandeurs précédemment introduites.

b) Montrer que $\underline{P}$ et $\underline{E}$ (respectivement grandeurs complexes associées à P et $E = E_0 \cos(\omega t)$) sont reliés par $\underline{P} = \varepsilon_0(\underline{\varepsilon_r} - 1)\underline{E}$. On explicitera la permittivité relative complexe $\underline{\varepsilon_r}$ en donnant sa partie réelle ε_r' et sa partie imaginaire ε_r''.

c) Donner l'allure de ε_r' et de ε_r'' en fonction de ω. On prendra $\tau = 10^{-11}$ s. Donner leurs valeurs numériques pour les fréquences 1 kHz, 1 MHz et 1 GHz. Conclure.

La salinité de l'eau de mer est la masse totale de substances solides dissoutes par kilogramme d'eau de mer. Cette masse est très difficile à déterminer en pratique.

II. Dipôles magnétiques

constante: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{H}.m^{-1}$

Cours ○ ○ ○

1. Définir le moment magnétique d'une spire.
2. Faire l'analogie entre dipôle électrique et magnétique pour exprimer le champ créé, la force, le couple subi et l'énergie potentielle d'un dipôle magnétique.
3. Exprimer le moment magnétique d'un électron en orbite circulaire autour d'un noyau.
4. Dessiner les lignes de champ magnétique terrestre et donner un ordre de grandeur du champ à la surface.

Exercice 1 : Champ magnétique terrestre ○ ○ ○

Le champ magnétique terrestre est modélisé par un dipôle permanent de moment $\vec{M}$ placé au centre de la Terre. On assimile la Terre à une sphère de rayon $R_T = 6,4 \times 10^3$ km. Le champ magnétique au pôle Nord magnétique de la Terre dans les îles du nord canadien a la valeur $B_0 = 6 \times 10^{-5}$ T. On rappelle qu'un dipôle magnétique crée le champ

$$\vec{B}(\vec{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(3\frac{\vec{r}\cdot\vec{M}}{r^2}\vec{r} - \vec{M}\right)$$

1. Quel est le sens du dipôle magnétique terrestre ?
2. Quelle est la valeur de $\vec{M}$?
3. Que valent les composantes horizontale et verticale du champ magnétique à la surface de la Terre aux latitudes de l'Antarctique ?

Exercice 2 : Expérience d'Oersted ○ ○ ○

L'aiguille d'une boussole est placée au voisinage d'un fil conducteur orienté dans la direction Nord-Sud. Lorsque l'on fait passer un courant I permanent dans le fil, l'aiguille de la boussole est déviée.

1. Pour observer cet effet, faut-il placer l'aiguille dans le plan horizontal contenant le fil, ou dans le plan vertical ?
2. Que se passe-t-il si le fil est orienté Est-Ouest ?

Exercice 3 : Oscillations d'une boussole ♢ ♡ ♣ ○ ○ ○

Une boussole est placée dans un champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B}$, orthogonal à l'axe de rotation de la boussole.

1. On lâche la boussole à partir d'une position quelconque. Quel est le mouvement de la boussole ? Position d'équilibre ? Temps caractéristique ?
2. Le champ magnétique uniforme est créé par un solénoïde long. On augmente d'un facteur 5 le courant permanent qui parcourt le solénoïde. Comment est modifié le mouvement de la boussole ?

Exercice 4 : Spin du noyau $\Diamond$ $\heartsuit$ ●●○

Un noyau atomique est modélisé par une sphère de centre O et de rayon R. Elle contient Z électrons, et on la modélise par une charge volumique uniforme. Elle tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe de rotation.

1. On considère une spire élémentaire comprise entre $r + dr$ et $r + dr + d\theta = 0$. On assimile cette spire à une spire de courant. Exprimer la charge comprise dans ce volume et en déduire le courant I créé par la rotation de la boule.
2. En déduire le moment dipolaire associé $d\vec{M}$ et calculer le moment magnétique total de cette boule en rotation.
3. Le moment d'inertie d'une boule en rotation autour d'un diamètre est donné par $J = \frac{2}{5}MR^2$. Quel est le rapport gyromagnétique de cette boule ? Commenter

Exercice 5 : Action d'une spire sur un dipôle magnétique $\Diamond$ $\heartsuit$ $\clubsuit$ ●●○

Une spire circulaire, de rayon R et d'axe Oz est parcourue par un courant I. Un dipôle $\vec{M}$ est placé sur l'axe, dans l'alignement de cette spire et est sans masse. La spire S exerce une force $\vec{F}$ sur le dipôle.

1. Étudier l'effet de $\vec{F}$ dans les différentes configurations possibles d'alignement, et en fonction du côté de la spire où est localisé le dipôle.
2. On désoriente graduellement le dipôle et discuter sa stabilité.
3. Calculer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre. An pour $R = 10\,\text{cm}, m = 10\,\text{g}, I = 100\,\text{mA}$.
4. Sur l'axe orienté d'une spire, le champ est de la forme $\overrightarrow{B(z)} = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{1}{1+(z/R)^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\overrightarrow{e_z}$.

Note: Dans les prochains exercices, on pourra utiliser ce resultat, sur l'axe orienté d'une spire de rayon R, de courant I, à hauteur z, le champ magnétique est de la forme

$$\overrightarrow{B(z)} = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{1}{1+(z/R)^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\overrightarrow{e_z}$$

Exerice 6: Couplage (I) $\Diamond$ $\heartsuit$ $\clubsuit$ Δ ●●○

On considère une spire circulaire fixe d'axe Ox, de rayon a et de résistance r. On place à une distance d de son centre et sur Ox, un dipôle magnétique m de moment d'inertie J, pouvant uniquement tourner autour d'un axe Oz. À $t = 0$, le dipôle aligné suivant l'axe ($\theta = 0$), est lancé à une vitesse angulaire ω, et le courant dans la spire est nul.

1. Quelle est l'équation différentielle du mouvement du dipôle ?
2. Pour quelles valeurs de θ le dipôle s'arrête-t-il ? Expliciter l'angle d'arrêt θ_a pour un freinage plutôt faible. Dans ce cas, quelle est approximativement la valeur de $\theta(t)$?

Exercice 7: Couplage (II) $\Diamond$ $\heartsuit$ $\clubsuit$ Δ ●●○

On considère une spire circulaire, de rayon a, de résistance R, de coefficient d'auto-induction L. Sur son axe se trouve un moment magnétique parallèle à l'axe. On le retourne brusquement en une temps τ très faible.

1. Calculer $i(t)$ dans la spire.
2. De quelle manière peut-on préciser ce qui se passe entre les instants 0 et τ ?