Д/з N 1.

(5). $\forall\, I, I'$ т.ч. $\underbrace{positive(I,\varphi) \subseteq positive(I',\varphi)}_{(*)}$, если $I \vDash \varphi$, то $I' \vDash \varphi$.

Д-во: индукция по стр-ре формулы.

БАЗА: $\varphi = l$, l – литерал.

Поскольку $I \vDash \varphi$, $positive(I,\varphi) = l$. Поскольку выполнено $(*)$, $positive(I',\varphi) = l$, значит, $I' \vDash \varphi$. Получили $I \vDash \varphi \Rightarrow I' \vDash \varphi$.

ПЕРЕХОД: Пусть утв. теоремы верно для φ и ψ. Докажем для $\mu = \varphi \wedge \psi$ ($\mu = \varphi \vee \psi$).

Пусть I, I': $positive(I,\mu) \subseteq positive(I',\mu)$, $I \vDash \mu$.

$positive(I,\mu) = positive(I,\varphi) \cup positive(I,\psi)$

$positive(I',\mu) = positive(I',\varphi) \cup positive(I',\psi)$. (по опр. positive)

Тогда $positive(I,\varphi) = positive(I,\mu) \cap \{\text{литералы } \varphi\} \subseteq positive(I',\mu) \cap \{\text{литералы } \varphi\} = positive(I',\varphi)$.

Аналогично $positive(I,\psi) \subseteq positive(I',\psi)$.

Значит, по предположению индукции $(I \vDash \varphi \Rightarrow I' \vDash \varphi) \wedge (I \vDash \psi \Rightarrow I' \vDash \psi)$.

Поскольку $I \vDash \mu$:

1) $\mu = \varphi \wedge \psi$. $I \vDash \varphi \wedge \psi$, значит $I \vDash \varphi$ и $I \vDash \psi$, тогда по предположению индукции $I' \vDash \varphi$ и $I' \vDash \psi$, тогда $I' \vDash \varphi \wedge \psi$, т.е. $I' \vDash \mu$.

2). $\mu = \varphi \vee \psi$. $I \vDash \varphi \vee \psi$, значит, $I \vDash \varphi$ или $I \vDash \psi$ (не исключающее или), тогда по предположению $I' \vDash \varphi$ или $I' \vDash \psi$, значит, $I' \vDash \varphi \vee \psi$, т.е. $I' \vDash \mu$. ■

(6). Для $\forall\, f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ $\exists\, \varphi(p_1,\dots,p_n)$, т.ч. $\forall M$ $M[\![\varphi]\!] = f(M(p_1),\dots,M(p_n))$.

Д-во: для д-ва существования такой формулы предъявим её.

Возьмём произвольную ф-ю $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$. Для каждого $X \in \mathbb{B}^n$ построим дизъюнкт следующим образом: если $f(X) = 0$, $\bigvee_{i=1}^{n} l_i$, где $l_i = \begin{cases} p_i, & \text{если на } i\text{-ом месте вектора } X \text{ стоит } 0, \\ \neg p_i, & \text{если на } i\text{-ом месте вектора } X \text{ стоит } 1. \end{cases}$

Тогда в качестве φ возьмём конъюнкт полученных дизъюнктов.

Если же f такая, что $\forall X \in \mathbb{B}^n$ $f(X) = 1$, в качестве φ возьмём $\varphi \equiv \top$.

в таком случае мы не построим ни одного дизъюнкта. ■

(7).а) $\forall\, M, N.$ $M^{-1}(1) \subseteq N^{-1}(1)$ iff всякое позитивное высказывание, истинное в M, истинно в N.

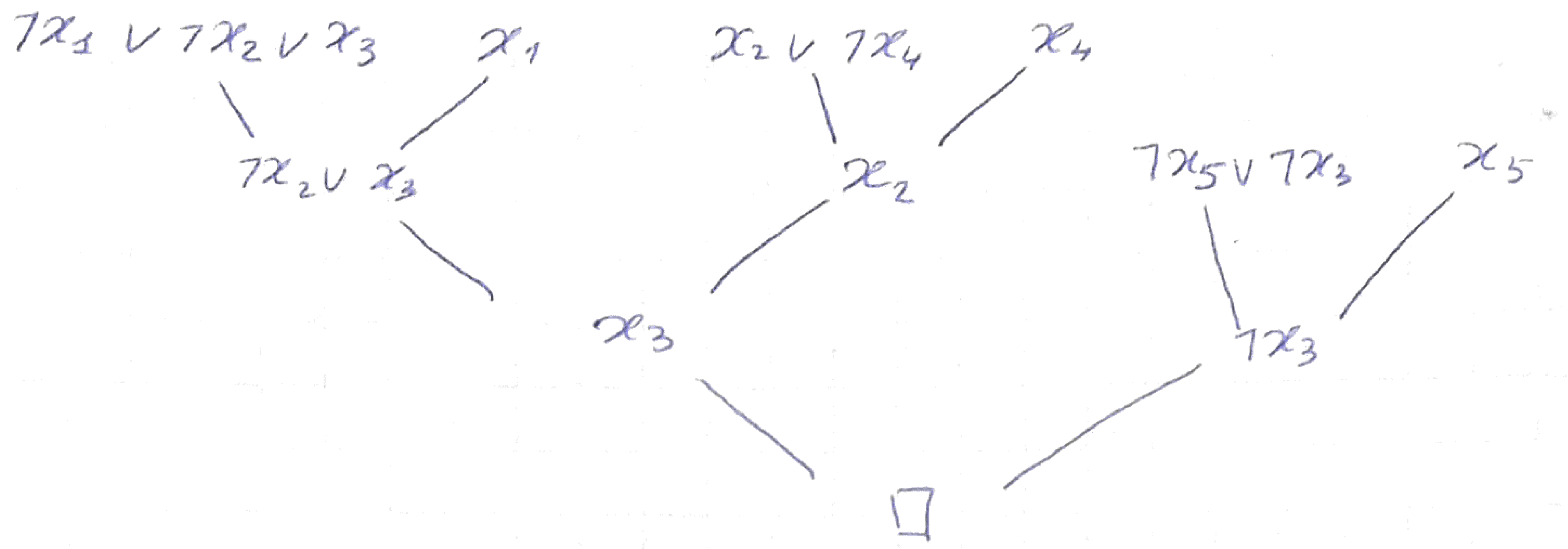
Д-во: „$\Rightarrow$" $M^{-1}(1) \subseteq N^{-1}(1)$. Пусть позитивное высказывание φ, т.ч. $M[\![\varphi]\!] = 1$.

Поскольку φ состоит только из проп. переменных и связок $\wedge$ и $\vee$, $positive(M,\varphi) \subseteq M^{-1}(1) \subseteq N^{-1}(1)$. Тогда $positive(M,\varphi) \subseteq positive(N,\varphi)$, $M \vDash \varphi$, тогда по т. из задачи (5) получаем $N \vDash \varphi$.

„$\Leftarrow$": всякое позитивное высказывание, истинное в M, истинно в N.

Поскольку $M^{-1}(1)$ и $N^{-1}(1)$ – мн-ва проп. переменных, истинных в данных интерпретациях и они являются позитивными высказываниями, получаем $M^{-1}(1) \subseteq N^{-1}(1)$, т.к. $\forall p \in M^{-1}(1)$ $N[\![p]\!] = 1$, т.е. $p \in N^{-1}(1)$. ■

⑩. Резолютивное опровержение мн-ва дизъюнктов $\{x_1, \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3, x_2 \vee \neg x_4, x_4, \neg x_5 \vee \neg x_3, x_5\}$.



⑨. Опишите исчисление, в котором выводимы в точности все ф-лы логики высказываний.

Решение: чтобы задать исчисление необходимо задать язык, аксиомы и правила вывода.

L - формальный язык, его слова - формулы

V - мн-во проп. переменных

$\top, \bot$ - ф-лы

$p \in V$ - ф-лы

φ - ф-ла, тогда $\neg\varphi$ - ф-ла

φ, ψ - ф-лы, то $\varphi \wedge \psi$ и $\varphi \wedge \psi$ - ф-лы

Тогда в качестве аксиом зададим все формулы (слова этого языка) а мн-во правил вывода оставим пустым. Тогда для любой ф-лы логики высказываний $\exists$ вывод длины один (сама эта ф-ла, т.к. это аксиома), и больше ничего не выводится, т.к. мн-во правил вывода пусто.

⑧. Показать, что мн-во всех моделей выполнимой ф-лы языка над счётным мн-ом имеет мощность континуума.

Д-во: $\forall$ произвольную выполнимую формулу φ над счётным мн-ом пропозициональных переменных V.

Поскольку конечна (по определению), мн-во проп. переменных (V_1) в неё входящих, конечно, значит, мно-во проп. переменных ($V \setminus V_1$) не входящих в формулу, счётно.

Заметим, что значение интерпретации проп. переменных из $V \setminus V_1$ не влияют на выполнимость φ. А поскольку ~~мощ~~ мн-во этих переменных счётно, то мощность мн-ва интерпретаций равна $|2^{\mathbb{N}}|$, т.к.

$M(p) = 0$ - соответ. включ. p в подмн-во

$M(p) = 1$ - соответ. исключ. p из подмн-ва

т.е. каждую интерпретацию можно взаимно однозначно сопоставить с подмн-вом $V \setminus V_1$.

Т.о. получаем, что мно-во всех моделей φ имеет мощность континуума.

∎