Д/з №8

① Рассмотрим две теории $T_1 = SC(A_1)$ и $T_2 = SC(A_2)$ над общей сигнатурой Σ, т.ч. $A_1 \subseteq A_2$. Пусть F — формула в сигнатуре Σ.

а) Если F выполнима по модулю T_2, выполнима ли она по модулю T_1?

$A_1 \subseteq A_2$, значит, $T_1 \subseteq T_2$. Тогда модель $M \models_{T_2} F$ также $M \models_{T_1} F$,

т.е. F выполнима по модулю T_1.

③ Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $\{\le\}$ на мн-ве целых чисел. Как выразить предикат $y = x+1$?

Ясно, что $y = x+1$, если y больше x и нет z, отличных от x и y, стоящих между ними. Запишем это условие, используя $\{\le\}$:

$$\underbrace{\neg(y \le x)}_{y>x} \wedge \neg(\exists z: (\underbrace{\neg(y \le z)}_{y>z} \wedge \underbrace{\neg(z \le x)}_{z>x}))$$

⑥ Докажите, что полная теория с конечным мн-ом аксиом разрешима.

Д-во Рассмотрим полную теорию с конечным мн-ом аксиом в некотором языке.

1) теория противоречива.
В этом случае теория разрешима, для любого входа возвращаем 1
(т.е. любое предложение следует из аксиом теории)

2) теория непротиворечива.
Нам нужен алгоритм, завершающийся для любого предложения.
Одновременно будем строить резолютивное опровержение для мн-ва аксиом, объединённых с предложением, и мн-ва аксиом, объединённых с его отрицанием.
Если построим опровержение с предложением, вернём 0, если с его отрицанием — 1.
Т.е. получим алгоритм, который всегда останавливается (т.к. теория полная (т.е. либо предложение, либо его отрицание ей принадлежит)) и возвращает значение характер. ф-ции для любого предложения языка

∎