

D/3 N2

①. $\exists T \text{ и } U$ - м-ва формул некого языка высказываний, $T \cup U \models \perp$.

Д-во, что $\exists \theta$:

$$T \models \theta$$

$$U \models \neg \theta$$

$$\text{atoms}(\theta) \subseteq \text{atoms}(T) \cap \text{atoms}(U).$$

Д-во: а) $\exists T \models \perp$, тогда, пусть $\theta \equiv \perp$, получим:

$$T \models \perp \equiv \theta$$

$$U \models \neg \perp \equiv \neg \theta$$

$$\text{atoms}(\theta) = \emptyset \subseteq \text{atoms}(T) \cap \text{atoms}(U). \text{ Это и требовалось.}$$

б) $\exists U \models \perp$, тогда, пусть $\theta \equiv \top$ (true), получим:

$$T \models \top \equiv \theta$$

$$U \models \perp \equiv \neg \theta$$

$$\text{atoms}(\theta) = \emptyset \subseteq \text{atoms}(T) \cap \text{atoms}(U), \text{ что и требовалось.}$$

в) T и U не являются противоречивыми.

По т. о компактности (поскольку $T \cup U \models \perp$) \exists конечное подм-во $S \subseteq T \cup U$:

$$S \models \perp.$$

~~Рассмотрим конечное подм-во $S = \{t_i \mid t_i \in T, i \in \overline{1:k}\} \cup \{u_j \mid u_j \in U, j \in \overline{1:l}\}$~~

Поскольку $S \models \perp$, $t_1 \wedge \dots \wedge t_k \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_l \models \perp$, что выполняется

iff $t_1 \wedge \dots \wedge t_k \models \neg(u_1 \wedge \dots \wedge u_l)$.

Тогда по интерполяционной теореме $\exists \theta$: $t_1 \wedge \dots \wedge t_k \models \theta$, $\theta \models \neg(u_1 \wedge \dots \wedge u_l)$,
 $\text{atoms}(\theta) \subseteq \text{atoms}(t_1 \wedge \dots \wedge t_k) \cap \text{atoms}(u_1 \wedge \dots \wedge u_l)$.

$t_1 \wedge \dots \wedge t_k \models \theta$, тогда $T \models \theta$ (т.к. $t_i \in T, i \in \overline{1:k}$)

$\theta \models \neg(u_1 \wedge \dots \wedge u_l)$, iff $u_1 \wedge \dots \wedge u_l \models \neg \theta$, тогда $U \models \neg \theta$ (т.к. $u_j \in U, j \in \overline{1:l}$)

$$\text{atoms}(\theta) \subseteq \text{atoms}(t_1 \wedge \dots \wedge t_k) \cap \text{atoms}(u_1 \wedge \dots \wedge u_l) \subseteq \text{atoms}(T) \cap \text{atoms}(U).$$

Т.е. θ — искомого ф-ла.

