Д/з N 1.

⑤. $\forall I, I'$ т.ч. positive$(I,\varphi) \subseteq$ positive(I',φ) $(*)$, если $I \models \varphi$, то $I' \models \varphi$.

Д-во: индукция по стр-ре формулы.

БАЗА: $\varphi = l$, l — литерал.
Поскольку $I \models \varphi$, positive$(I,\varphi) = l$. Поскольку выполнено $(*)$, positive$(I',\varphi) = l$, значит, $I' \models \varphi$. Получили $I \models \varphi \Rightarrow I' \models \varphi$.

ПЕРЕХОД: Пусть утв. теоремы верно для φ и ψ. Докажем для $\mu = \varphi \wedge \psi$ ($\mu = \varphi \vee \psi$).

$\forall I, I'$: positive$(I,\mu) \subseteq$ positive(I',μ), $I \models \mu$.
positive(I,μ) = positive$(I,\varphi) \cup$ positive(I,ψ)
positive(I',μ) = positive$(I',\varphi) \cup$ positive(I',ψ). (по опр. positive)
Тогда positive(I,φ) = positive$(I,\mu) \cap \{$литералы $\varphi\} \subseteq$ positive$(I',\mu) \cap \{$литералы $\varphi\}$ = positive(I',φ).
Аналогично positive$(I,\psi) \subseteq$ positive(I',ψ).
Значит, по предположению индукции $(I \models \psi \Rightarrow I' \models \psi) \wedge (I \models \psi \Rightarrow I' \models \psi)$.

Поскольку $I \models \mu$:

1) $\mu = \varphi \wedge \psi$. $I \models \varphi \wedge \psi$, значит $I \models \varphi$ и $I \models \psi$, тогда по предположению индукции $I' \models \varphi$ и $I' \models \psi$, тогда $I' \models \varphi \wedge \psi$, т.е. $I' \models \mu$.

2) $\mu = \varphi \vee \psi$. $I \models \varphi \vee \psi$, значит, $I \models \varphi$ или $I \models \psi$ (не исключающее или), тогда по предположению $I' \models \varphi$ или $I' \models \psi$, значит, $I' \models \varphi \vee \psi$, т.е. $I' \models \mu$.

■

⑥. Для $\forall f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ $\exists \varphi(p_1, \dots, p_n)$, т.ч. $\forall M$ $M[\![\varphi]\!] = f(M(p_1), \dots, M(p_n))$.

Д-во: для д-ва существования такой формулы предъявим её.
Возьмём произвольную ф-ю $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$. Для каждого $X \in \mathbb{B}^n$ построим дизъюнкт следующим образом: если $f(X) = 0$, $\bigvee_{i=1} l_i$, где $l_i = \begin{cases} p_i, & \text{если на } i\text{-ом месте вектора } X \text{ стоит } 0, \\ \neg p_i, & \text{если на } i\text{-ом месте вектора } X \text{ стоит } 1. \end{cases}$

Тогда в качестве φ возьмём конъюнкт полученных дизъюнктов.
Если же f такая, что $\forall X \in \mathbb{B}^n$: $f(X) = 1$, в качестве φ возьмём $p_1 \vee \neg p_1$.
в таком случае мы не построим ни одного дизъюнкта.

■

⑦ а) $\forall M, N$. $M^{-1}(1) \subseteq N^{-1}(1)$ iff всякое позитивное высказывание, истинное в M, истинно в N.

Д-во: „$\Rightarrow$" $M^{-1}(1) \subseteq N^{-1}(1)$. $\forall$ позитивное высказывание φ, т.ч. $M[\![\varphi]\!] = 1$.

Поскольку φ состоит только из проп. переменных и связок $\wedge$ и $\vee$, positive$(M,\varphi) \subseteq M^{-1}(1) \subseteq N^{-1}(1)$. Тогда positive$(M,\varphi) \subseteq$ positive(N,φ), $M \models \varphi$, тогда по т. из задачи ⑤ получаем $N \models \varphi$.

„$\Leftarrow$": всякое позитивное высказывание, истинное в M, истинно в N.
Поскольку $M^{-1}(1)$ и $N^{-1}(1)$ — мн-ва проп. переменных, истинных в данных интерпретациях и они являются позитивными высказываниями, получаем $M^{-1}(1) \subseteq N^{-1}(1)$, т.к. $\forall p \in M^{-1}(1)$ $N[\![p]\!] = 1$, т.е. $p \in N^{-1}(1)$.

■

⑩. Резолютивное опровержение мн-ва дизъюнктов $\{x_1, \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3, x_2 \vee \neg x_4, x_4, \neg x_5 \vee \neg x_3, x_5\}$.

$\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$, x_1 — $\neg x_2 \vee x_3$

$x_2 \vee \neg x_4$, x_4 — x_2

$\neg x_2 \vee x_3$, x_2 — x_3

$\neg x_5 \vee \neg x_3$, x_5 — $\neg x_3$

x_3, $\neg x_3$ — $\square$

⑨. Опишите исчисление, в котором выводимы в точности все ф-лы логики высказываний.

Решение: чтобы задать исчисление необходимо задать язык, аксиомы и правила вывода.

~~Язык слова формулы~~ L - формальный язык, его слова - формулы

P - мн-во проп. переменных

$\top$, $\bot$ - ф-лы

$p \in P$ - ф-лы

φ - ф-ла, тогда $\neg\varphi$ - ф-ла

φ, ψ - ф-лы, то $\varphi \wedge \psi$ и $\varphi \wedge \psi$ - ф-лы

Тогда в качестве аксиом зададим все формулы (слова этого языка), а мн-во правил вывода оставим пустым. Тогда для любой ф-лы логики высказываний $\exists$ вывод длины один (сама эта ф-ла, т.к. это аксиома) и больше ничего не выводится, т.к. мн-во правил вывода пусто.