Д/з № 7

1. a) Двое являются соавторами т. и т.т., когда они написали как минимум одну статью вместе.

$\forall x \forall y : (\text{соавторы}(x,y) \Leftrightarrow (\exists z : (\text{автор}(x,z) \land \text{автор}(y,z))))$

b) Некоторые исследователи пишут все свои статьи в соавторстве как минимум с одним другим исследователем

$\exists x : (\text{исследователь}(x) \land (\forall y : \text{автор}(x,y) \to \exists z : ((z \neq x) \land \text{исследователь}(z) \land$
$\land\, \text{автор}(z,y))))$

c) Человек никогда не может быть рецензентом своих соавторов.

$\forall x \forall y : (\text{соавторы}(x,y) \to \neg(\exists z : (\text{автор}(x,z) \land \text{рецензент}(y,z)) \lor$
$\lor\, (\text{автор}(y,z) \land \text{рецензент}(x,z)))))$

d) Каждый исследователь написал как минимум одну статью со своим научным руководителем.

$\forall x : (\text{исследователь}(x) \to \text{соавторы}(x, \text{руководитель}(x)))$

2. $\Sigma = \langle \{f\}, \{p,q\}, ar \rangle$
$ar = \{p \mapsto 2, q \mapsto 2, f \mapsto 1\}$; $|M| = \{0, \star\}$; $M(p) = \{\langle 0,\star\rangle, \langle \star,0\rangle\}$; $M(q) = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,\star\rangle\}$;
$M(f) = \{\star \mapsto 0, 0 \mapsto 0\}$; $v = [x \mapsto \star, y \mapsto 0, z \mapsto 0]$

a). $p(x,y) \to (\forall z \exists w : q(z, f(w)))$ — ложна

Запишем ф-лу без импликации: $\neg p(x,y) \lor (\forall z \exists w : q(z,f(w)))$

$M \models_v \neg(p(x,y)) \lor (\forall z \exists w : q(z,f(w)))$ iff $M \models_v \neg p(x,y)$ или $M \models_v (\forall z \exists w : q(z,f(w)))$.

Ясно, что $M \not\models_v \neg p(x,y)$, т.к. $\langle \star, 0 \rangle \in M(p)$

? $\forall z \exists w : q(z,f(w))$

$M \not\models_v (\forall z \exists w : q(z,f(w)))$,

так как $M \not\models_{v[z \mapsto \star]} q(z,f(w))$ независимо от w, т.к. $\langle \star, - \rangle \notin M(q)$

b) $p(x,y) \to (\exists z \exists w : q(z,w))$ — истинна

$\neg p(x,y) \lor (\exists z \exists w : q(z,w))$

Аналогично ? правда ли, что $M \models_v (\exists z \exists w : q(z,w))$

$M \models_{v[z \mapsto 0, w \mapsto 0]} q(z,w)$, т.к. $\langle 0,0 \rangle \in M(q)$.

c). $\forall x \exists y : ((p(x,y) \land q(y,x)) \to p(y,x))$ — истинна

$M \models_{v[x \mapsto m]} \exists y : \underbrace{((p(x,y) \land q(y,x)) \to p(y,x))}_{(*)}$ для всех $m \in |M|$? $M \models_{v[x \mapsto m, y \mapsto n]} (*)$ для всех $m \in |M|$ и некот. $n \in |M|$

$M \models_{v[x \mapsto 0, y \mapsto 0]} (p(x,y) \land q(y,x) \to p(y,x))$, т.к. $\langle 0,0 \rangle \notin M(p)$

$M \models_{v[x \mapsto \star, y \mapsto \star]} (p(x,y) \land q(y,x) \to p(y,x))$, т.к. $\langle \star,\star \rangle \notin M(p)$

⑤. Как записать ~~[illegible]~~ аксиомы теории групп, если в сигнатуре нет константы 1?

Аксиомы теории групп (с константой 1) ($\Sigma_f^{Gr} = \{1, \cdot, ^{-1}\}$):

$$\Gamma = \{ \forall x : (1 \cdot x = x \wedge x \cdot 1 = x) \quad (1)$$
$$\forall x : (x^{-1} \cdot x = 1 \wedge x \cdot x^{-1} = 1), \quad (2)$$
$$\forall x \forall y \forall z : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \} \quad (3)$$

Ясно, что (3) остаётся неизменной. А для аксиом (1) и (2) необходимо указать существование нейтрального элемента, т.е.:

$$\exists e \; \forall x : (\underbrace{(e \cdot x = x \wedge x \cdot e = x)}_{(1)} \wedge \underbrace{(x^{-1} \cdot x = e \wedge x \cdot x^{-1} = e)}_{(2)})$$

Т.е. аксиомы теории групп без 1 в сигнатуре записываются так:

$$\Gamma = \{ \exists e \forall x : ((e \cdot x = x \wedge x \cdot e = x) \wedge (x^{-1} \cdot x = e \wedge x \cdot x^{-1} = e)),$$
$$\forall x \forall y \forall z : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \}.$$