

Ensaio de Hipóteses

Estatística II - 2024/2025

ISCTE-IUL

Afonso Moniz Moreira¹²

¹ISCTE-IUL, Departamento de Métodos Quantitativos para a Economia e Gestão

²CMVM - Comissão do Mercado de Valores Mobiliários, Departamento de
Supervisão de Mercados

Aviso/Disclaimer

- Este conjunto de slides não são, nem pretendem ser uma substituição à bibliografia principal da cadeira de estatística II.
- Este conjunto de slides não são, nem pretendem ser uma fonte rigorosa de estudo dos tópicos da cadeira.
- O único propósito destes slides é ajudar o autor a guiar as aulas da forma mais coloquial possível sem ter de carregar formalismos desnecessários.
- Assim sendo, o formalismo estatístico é eliminado sempre que possível para agilizar uma primeira aprendizagem por parte dos estudantes.

Teoria dos Ensaio de Hipóteses

Qual é a utilidade ?

- Para que serve um ensaio de hipóteses ?

Teoria dos Ensaio de Hipóteses

Qual é a utilidade ?

- Para que serve um ensaio de hipóteses ?
 - Servem para credibilizar ou descredibilizar afirmações sobre os parâmetros (de uma população).

Teoria dos Ensaio de Hipóteses

Qual é a utilidade ?

- Para que serve um ensaio de hipóteses ?
 - Servem para credibilizar ou descredibilizar afirmações sobre os parâmetros (de uma população).
 - Então... mas nós conseguimos fazer isso com os intervalos de confiança...

Teoria dos Ensaio de Hipóteses

Qual é a utilidade ?

- Para que serve um ensaio de hipóteses ?
 - Servem para credibilizar ou descredibilizar afirmações sobre os parâmetros (de uma população).
 - Então... mas nós conseguimos fazer isso com os intervalos de confiança...
 - Verdade, mas não com o nível de granularidade (ou precisão) de um teste de hipóteses.

Teoria dos Ensaio de Hipóteses

Qual é a utilidade ?

- Para que serve um ensaio de hipóteses ?
 - Servem para credibilizar ou descredibilizar afirmações sobre os parâmetros (de uma população).
 - Então... mas nós conseguimos fazer isso com os intervalos de confiança...
 - Verdade, mas não com o nível de granularidade (ou precisão) de um teste de hipóteses.
- Que tipo de perguntas conseguimos responder?

Teoria dos Ensaio de Hipóteses

Qual é a utilidade ?

- Para que serve um ensaio de hipóteses ?
 - Servem para credibilizar ou descredibilizar afirmações sobre os parâmetros (de uma população).
 - Então... mas nós conseguimos fazer isso com os intervalos de confiança...
 - Verdade, mas não com o nível de granularidade (ou precisão) de um teste de hipóteses.
- Que tipo de perguntas conseguimos responder?

Teoria dos Ensaio de Hipóteses

Qual é a utilidade ?

- Para que serve um ensaio de hipóteses ?
 - Servem para credibilizar ou descredibilizar afirmações sobre os parâmetros (de uma população).
 - Então... mas nós conseguimos fazer isso com os intervalos de confiança...
 - Verdade, mas não com o nível de granularidade (ou precisão) de um teste de hipóteses.
- Que tipo de perguntas conseguimos responder?
 - "O Ministério da Saúde afirma que, com os meios agora postos à disposição dos hospitais civis, o número médio de dias de internamento é, no máximo, oito."

Teoria dos Ensaio de Hipóteses

Qual é a utilidade ?

- Para que serve um ensaio de hipóteses ?
 - Servem para credibilizar ou descredibilizar afirmações sobre os parâmetros (de uma população).
 - Então... mas nós conseguimos fazer isso com os intervalos de confiança...
 - Verdade, mas não com o nível de granularidade (ou precisão) de um teste de hipóteses.
- Que tipo de perguntas conseguimos responder?
 - "O Ministério da Saúde afirma que, com os meios agora postos à disposição dos hospitais civis, o número médio de dias de internamento é, no máximo, oito."
 - Seja X = Número de dias que um doente fica internado no hospital.

Teoria dos Ensaio de Hipóteses

Qual é a utilidade ?

- Para que serve um ensaio de hipóteses ?
 - Servem para credibilizar ou descredibilizar afirmações sobre os parâmetros (de uma população).
 - Então... mas nós conseguimos fazer isso com os intervalos de confiança...
 - Verdade, mas não com o nível de granularidade (ou precisão) de um teste de hipóteses.
- Que tipo de perguntas conseguimos responder?
 - "O Ministério da Saúde afirma que, com os meios agora postos à disposição dos hospitais civis, o número médio de dias de internamento é, no máximo, oito."
 - Seja X = Número de dias que um doente fica internado no hospital.
 - $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, assumindo uma população normal.

Teoria dos Ensaio de Hipóteses

Qual é a utilidade ?

- Para que serve um ensaio de hipóteses ?
 - Servem para credibilizar ou descredibilizar afirmações sobre os parâmetros (de uma população).
 - Então... mas nós conseguimos fazer isso com os intervalos de confiança...
 - Verdade, mas não com o nível de granularidade (ou precisão) de um teste de hipóteses.
- Que tipo de perguntas conseguimos responder?
 - "O Ministério da Saúde afirma que, com os meios agora postos à disposição dos hospitais civis, o número médio de dias de internamento é, no máximo, oito."
 - Seja X = Número de dias que um doente fica internado no hospital.
 - $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, assumindo uma população normal.
 - Portanto, matematicamente, será que $\mu = 8$?

Teoria dos Ensaio de Hipóteses

Qual é a utilidade ?

- Uma outra situação:

Teoria dos Ensaio de Hipóteses

Qual é a utilidade ?

- Uma outra situação:
 - " Pretendem comparar-se dois processos de fabrico do mesmo produto. Adopta-se a seguinte regra de decisão: com base numa amostra de 100 unidades para cada processo, eliminar-se-á aquele processo que conduza a uma proporção observada de produtos defeituosos superior à do outro, em pelo menos 2%"

Teoria dos Ensaio de Hipóteses

Qual é a utilidade ?

- Uma outra situação:
 - " Pretendem comparar-se dois processos de fabrico do mesmo produto. Adopta-se a seguinte regra de decisão: com base numa amostra de 100 unidades para cada processo, eliminar-se-á aquele processo que conduza a uma proporção observada de produtos defeituosos superior à do outro, em pelo menos 2% "
 - $Y_i =$ Unidades defeituosas do processo de fabrico i , $i = \{1, 2\}$

Teoria dos Ensaio de Hipóteses

Qual é a utilidade ?

- Uma outra situação:
 - " Pretendem comparar-se dois processos de fabrico do mesmo produto. Adopta-se a seguinte regra de decisão: com base numa amostra de 100 unidades para cada processo, eliminar-se-á aquele processo que conduza a uma proporção observada de produtos defeituosos superior à do outro, em pelo menos 2%"
 - Y_i = Unidades defeituosas do processo de fabrico i , $i = \{1, 2\}$
 - $Y_i \sim B(p_i)$, p_i é a proporção de produto defeituosos.

Teoria dos Ensaio de Hipóteses

Qual é a utilidade ?

- Uma outra situação:
 - " Pretendem comparar-se dois processos de fabrico do mesmo produto. Adopta-se a seguinte regra de decisão: com base numa amostra de 100 unidades para cada processo, eliminar-se-á aquele processo que conduza a uma proporção observada de produtos defeituosos superior à do outro, em pelo menos 2%"
 - Y_i = Unidades defeituosas do processo de fabrico i , $i = \{1, 2\}$
 - $Y_i \sim B(p_i)$, p_i é a proporção de produto defeituosos.
 - Portanto, matematicamente, será que $p_1 - p_2 > 0.02$ ou $p_2 - p_1 < 0.02$?

Teoria dos Ensaio de Hipóteses

Qual é a utilidade ?

- Uma outra situação:
 - " Pretendem comparar-se dois processos de fabrico do mesmo produto. Adopta-se a seguinte regra de decisão: com base numa amostra de 100 unidades para cada processo, eliminar-se-á aquele processo que conduza a uma proporção observada de produtos defeituosos superior à do outro, em pelo menos 2%"
 - Y_i = Unidades defeituosas do processo de fabrico i , $i = \{1, 2\}$
 - $Y_i \sim B(p_i)$, p_i é a proporção de produto defeituosos.
 - Portanto, matematicamente, será que $p_1 - p_2 > 0.02$ ou $p_2 - p_1 < 0.02$?
- São apenas dois exemplos onde os intervalos de confiança não conseguem responder com a mesma eficácia. Consegue dar uma ideia mas não permitem fazer a pergunta desta forma tão direta.

As Hipóteses e os Erros

Quais são as hipóteses ?

- Considerem um tribunal em que uma dada acusação contra um réu é credibilizada ou descredibilizada mediante a apresentação de provas de por parte da defesa e da acusação.

As Hipóteses e os Erros

Quais são as hipóteses ?

- Considerem um tribunal em que uma dada acusação contra um réu é credibilizada ou descredibilizada mediante a apresentação de provas de por parte da defesa e da acusação.
- No final, juiz decide com base na evidência.

As Hipóteses e os Erros

Quais são as hipóteses ?

- Considerem um tribunal em que uma dada acusação contra um réu é credibilizada ou descredibilizada mediante a apresentação de provas de por parte da defesa e da acusação.
- No final, juiz decide com base na evidência.
- Um ensaio de hipóteses inspira-se na mesma envolvimento com umas diferenças:

As Hipóteses e os Erros

Quais são as hipóteses ?

- Considerem um tribunal em que uma dada acusação contra um réu é credibilizada ou descredibilizada mediante a apresentação de provas de por parte da defesa e da acusação.
- No final, juiz decide com base na evidência.
- Um ensaio de hipóteses inspira-se na mesma envolvimento com umas diferenças:
 - A prova é a amostra aleatória.

As Hipóteses e os Erros

Quais são as hipóteses ?

- Considerem um tribunal em que uma dada acusação contra um réu é credibilizada ou descredibilizada mediante a apresentação de provas de por parte da defesa e da acusação.
- No final, juiz decide com base na evidência.
- Um ensaio de hipóteses inspira-se na mesma envolvimento com umas diferenças:
 - A prova é a amostra aleatória.
 - O juiz é o teste estatístico que foi escolhido (i.e. a estatística de teste do formulário).

As Hipóteses e os Erros

Quais são as hipóteses ?

- Considerem um tribunal em que uma dada acusação contra um réu é credibilizada ou descredibilizada mediante a apresentação de provas de por parte da defesa e da acusação.
- No final, juiz decide com base na evidência.
- Um ensaio de hipóteses inspira-se na mesma envolvência com umas diferenças:
 - A prova é a amostra aleatória.
 - O juiz é o teste estatístico que foi escolhido (i.e. a estatística de teste do formulário).
- Assim sendo iremos ter duas hipóteses:

As Hipóteses e os Erros

Quais são as hipóteses ?

- Considerem um tribunal em que uma dada acusação contra um réu é credibilizada ou descredibilizada mediante a apresentação de provas de por parte da defesa e da acusação.
- No final, juiz decide com base na evidência.
- Um ensaio de hipóteses inspira-se na mesma envolvência com umas diferenças:
 - A prova é a amostra aleatória.
 - O juiz é o teste estatístico que foi escolhido (i.e. a estatística de teste do formulário).
- Assim sendo iremos ter duas hipóteses:
 - H_0 - A hipótese nula é a presunção de inocência de um réu.

As Hipóteses e os Erros

Quais são as hipóteses ?

- Considerem um tribunal em que uma dada acusação contra um réu é credibilizada ou descredibilizada mediante a apresentação de provas de por parte da defesa e da acusação.
- No final, juiz decide com base na evidência.
- Um ensaio de hipóteses inspira-se na mesma envolvimento com umas diferenças:
 - A prova é a amostra aleatória.
 - O juiz é o teste estatístico que foi escolhido (i.e. a estatística de teste do formulário).
- Assim sendo iremos ter duas hipóteses:
 - H_0 - A hipótese nula é a presunção de inocência de um réu.
 - H_1, H_a - A hipótese alternativa é o contraditório da anterior.

As Hipóteses e os Erros

Quais são as hipóteses ?

- Considerem um tribunal em que uma dada acusação contra um réu é credibilizada ou descredibilizada mediante a apresentação de provas de por parte da defesa e da acusação.
- No final, juiz decide com base na evidência.
- Um ensaio de hipóteses inspira-se na mesma envolvimento com umas diferenças:
 - A prova é a amostra aleatória.
 - O juiz é o teste estatístico que foi escolhido (i.e. a estatística de teste do formulário).
- Assim sendo iremos ter duas hipóteses:
 - H_0 - A hipótese nula é a presunção de inocência de um réu.
 - H_1, H_a - A hipótese alternativa é o contraditório da anterior.
- Quando os dados concretos da amostra (i.e as provas) são usadas numa determinada formulação de teste (i.e o juiz) podemos ter os seguintes resultados:

As Hipóteses e os Erros

Os Erros Possíveis

- Os dados concretos fornecidos (i.e., as provas) à estatística de teste (i.e., o juiz) **não levam** a uma **rejeição** da hipótese nula (i.e., do status quo).

As Hipóteses e os Erros

Os Erros Possíveis

- Os dados concretos fornecidos (i.e., as provas) à estatística de teste (i.e., o juiz) **não levam** a uma **rejeição** da hipótese nula (i.e., do status quo).
- Os dados fornecidos (i.e., as provas) à estatística de teste (i.e., o juiz) **levam** a uma **rejeição** da hipótese nula (i.e., do status quo).

As Hipóteses e os Erros

Os Erros Possíveis

- Os dados concretos fornecidos (i.e., as provas) à estatística de teste (i.e., o juiz) **não levam** a uma **rejeição** da hipótese nula (i.e., do status quo).
- Os dados fornecidos (i.e., as provas) à estatística de teste (i.e., o juiz) **levam** a uma **rejeição** da hipótese nula (i.e., do status quo).
- Qual é a diferença entre o não rejeitar e o aceitar ?

As Hipóteses e os Erros

Os Erros Possíveis

- Os dados concretos fornecidos (i.e., as provas) à estatística de teste (i.e., o juiz) **não levam** a uma **rejeição** da hipótese nula (i.e., do status quo).
- Os dados fornecidos (i.e., as provas) à estatística de teste (i.e., o juiz) **levam** a uma **rejeição** da hipótese nula (i.e., do status quo).
- Qual é a diferença entre o não rejeitar e o aceitar ?
- Tal e qual como num julgamento podem existir erros...

As Hipóteses e os Erros

Os Erros Possíveis

- Os dados concretos fornecidos (i.e., as provas) à estatística de teste (i.e., o juiz) **não levam** a uma **rejeição** da hipótese nula (i.e., do status quo).
- Os dados fornecidos (i.e., as provas) à estatística de teste (i.e., o juiz) **levam** a uma **rejeição** da hipótese nula (i.e., do status quo).
- Qual é a diferença entre o não rejeitar e o aceitar ?
- Tal e qual como num julgamento podem existir erros...
- Um instrumento de avaliação comum em vários domínios da estatística é a matriz de confusão.

As Hipóteses e os Erros

Erro tipo I e tipo II

Decisão Baseada Nas Provas	Situação Real (i.e. Observada)	
	H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não Rejeita H_0	Decisão Correcta	Erro do Tipo II
Rejeita H_0	Erro do Tipo I	Decisão Correcta

As Hipóteses e os Erros

Erro tipo I e tipo II

Decisão Baseada Nas Provas	Situação Real (i.e. Observada)	
	H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não Rejeita H_0	Decisão Correcta	Erro do Tipo II
Rejeita H_0	Erro do Tipo I	Decisão Correcta

- Erro Tipo I - A Hipótese nula **é rejeitada** quando, de facto, é verdadeira. - O réu é injustamente condenado.

As Hipóteses e os Erros

Erro tipo I e tipo II

Decisão Baseada Nas Provas	Situação Real (i.e. Observada)	
	H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não Rejeita H_0	Decisão Correcta	Erro do Tipo II
Rejeita H_0	Erro do Tipo I	Decisão Correcta

- Erro Tipo I - A Hipótese nula **é rejeitada** quando, de facto, é verdadeira. - O réu é injustamente condenado.
- Erro Tipo II - A Hipótese nula **não é rejeitada** quando, de facto, é falsa. - o réu é injustamente ilibado.

As Hipóteses e os Erros

Erro tipo I e tipo II

Decisão Baseada Nas Provas	Situação Real (i.e. Observada)	
	H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não Rejeita H_0	Decisão Correcta	Erro do Tipo II
Rejeita H_0	Erro do Tipo I	Decisão Correcta

- Erro Tipo I - A Hipótese nula **é rejeitada** quando, de facto, é verdadeira. - O réu é injustamente condenado.
- Erro Tipo II - A Hipótese nula **não é rejeitada** quando, de facto, é falsa. - o réu é injustamente ilibado.
- Cada vez que um ensaio de hipóteses é executado os dois erros estão presentes e devem ser controlados.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passos Necessários - Problema Exemplo

- Vamos considerar um exemplo para delinear os passos necessários.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passos Necessários - Problema Exemplo

- Vamos considerar um exemplo para delinear os passos necessários.
- "Uma pizzeria recebe diariamente encomendas por telefone, que se têm comportado segundo uma lei normal. A empresa está dimensionada para uma procura média diária que não ultrapasse as 200 pizzas, admitindo um desvio-padrão de 15. Uma campanha promocional realizada nos últimos 9 dias levou a uma procura média de 210 pizzas. O problema consiste em avaliar a necessidade de reforçar a capacidade média de venda, estudando se houve de facto uma alteração significativa na procura média diária de pizzas"

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo I - Definir as Hipóteses

- Existiu uma quebra de estrutura na procura ? Ou seja tenho de redimensionar a minha loja ?

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo I - Definir as Hipóteses

- Existiu uma quebra de estrutura na procura ? Ou seja tenho de redimensionar a minha loja ?
 - Considere-se X = Procura diária de pizzas no estabelecimento após a campanha promocional.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo I - Definir as Hipóteses

- Existiu uma quebra de estrutura na procura ? Ou seja tenho de redimensionar a minha loja ?
 - Considere-se $X =$ Procura diária de pizzas no estabelecimento após a campanha promocional.
 - Sabe-se que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma = 15)$. Queremos perceber se μ se alterou.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo I - Definir as Hipóteses

- Existiu uma quebra de estrutura na procura ? Ou seja tenho de redimensionar a minha loja ?
 - Considere-se $X =$ Procura diária de pizzas no estabelecimento após a campanha promocional.
 - Sabe-se que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma = 15)$. Queremos perceber se μ se alterou.
- Deste modo queremos que os dados respondam a isto:

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo I - Definir as Hipóteses

- Existiu uma quebra de estrutura na procura ? Ou seja tenho de redimensionar a minha loja ?
 - Considere-se X = Procura diária de pizzas no estabelecimento após a campanha promocional.
 - Sabe-se que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma = 15)$. Queremos perceber se μ se alterou.
- Deste modo queremos que os dados respondam a isto:
 - $H_0 : \mu \leq 200$ V.S $H_1 : \mu > 200$ - Teste Unilateral Direito

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo I - Definir as Hipóteses

- Existiu uma quebra de estrutura na procura ? Ou seja tenho de redimensionar a minha loja ?
 - Considere-se X = Procura diária de pizzas no estabelecimento após a campanha promocional.
 - Sabe-se que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma = 15)$. Queremos perceber se μ se alterou.
- Deste modo queremos que os dados respondam a isto:
 - $H_0 : \mu \leq 200$ V.S $H_1 : \mu > 200$ - Teste Unilateral Direito
 - Portanto queremos saber se a procura média se estabeleceu num novo patamar pelo que o COO tem de propor ao board um aumento da capacidade da pizzaria.
- Como vamos ver existem várias formulações de hipóteses.(i.e Testes)

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo I - Definir as Hipóteses

- Existiu uma quebra de estrutura na procura ? Ou seja tenho de redimensionar a minha loja ?
 - Considere-se X = Procura diária de pizzas no estabelecimento após a campanha promocional.
 - Sabe-se que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma = 15)$. Queremos perceber se μ se alterou.
- Deste modo queremos que os dados respondam a isto:
 - $H_0 : \mu \leq 200$ V.S $H_1 : \mu > 200$ - Teste Unilateral Direito
 - Portanto queremos saber se a procura média se estabeleceu num novo patamar pelo que o COO tem de propor ao board um aumento da capacidade da pizzeria.
- Como vamos ver existem várias formulações de hipóteses.(i.e Testes)
- Unilateral \Rightarrow Sinal da alteração $\Rightarrow H_a(< ou >)$
 $H_0(=, \leq ou \geq)$.
- Bilateral \Rightarrow contra um valor concreto $K \Rightarrow H_0(=), H_a(\neq)$.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo II - Definir o nível de significância $\alpha = 1 - \lambda$

- Temos de definir um nível de significância do teste α que se liga diretamente com o nível de confiança que já mencionado nos ICs.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo II - Definir o nível de significância $\alpha = 1 - \lambda$

- Temos de definir um nível de significância do teste α que se liga diretamente com o nível de confiança que já mencionado nos ICs.
- Este valor estabelece o limite para a região de aceitação (RA) e para a região crítica ou de rejeição (RC)

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo II - Definir o nível de significância $\alpha = 1 - \lambda$

- Temos de definir um nível de significância do teste α que se liga diretamente com o nível de confiança que já mencionado nos ICs.
- Este valor estabelece o limite para a região de aceitação (RA) e para a região crítica ou de rejeição (RC)
- O nível de significância impõe um trade-off à decisão ? Sim

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo II - Definir o nível de significância $\alpha = 1 - \lambda$

- Temos de definir um nível de significância do teste α que se liga diretamente com o nível de confiança que já mencionado nos ICs.
- Este valor estabelece o limite para a região de aceitação (RA) e para a região crítica ou de rejeição (RC)
- O nível de significância impõe um trade-off à decisão ? Sim
- O mais standard será $\alpha = 0.05$, normalmente os papers que fazem uso de um teste de hipóteses mostram a decisão com 3 níveis de significância: 1% (**), 5%(**), 10%(*) e $> 10\%$ ().

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo III - Escolha da Estatística Adequada ao Ensaio.

- Como é que se escolhe a estatística de teste adequada ?

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo III - Escolha da Estatística Adequada ao Ensaio.

- Como é que se escolhe a estatística de teste adequada ?
 - Tal como nos intervalos de confiança, vai depender do que sabemos (i.e. do setup estatístico) - tipo de população, parâmetros conhecidos, dimensão da amostra, etc.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo III - Escolha da Estatística Adequada ao Ensaio.

- Como é que se escolhe a estatística de teste adequada ?
 - Tal como nos intervalos de confiança, vai depender do que sabemos (i.e. do setup estatístico) - tipo de população, parâmetros conhecidos, dimensão da amostra, etc.
 - Com base no ponto anterior e na definição das hipóteses escolhe-se uma estatística de teste que terá uma distribuição amostral conhecida (Está no formulário).

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo III - Escolha da Estatística Adequada ao Ensaio.

- Como é que se escolhe a estatística de teste adequada ?
 - Tal como nos intervalos de confiança, vai depender do que sabemos (i.e. do setup estatístico) - tipo de população, parâmetros conhecidos, dimensão da amostra, etc.
 - Com base no ponto anterior e na definição das hipóteses escolhe-se uma estatística de teste que terá uma distribuição amostral conhecida (Está no formulário).
 - No nosso caso concreto trata-se de um ensaio unilateral à média da população com variância conhecida pelo que a estatística adequada a todo este setup é:

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo III - Escolha da Estatística Adequada ao Ensaio.

- Como é que se escolhe a estatística de teste adequada ?
 - Tal como nos intervalos de confiança, vai depender do que sabemos (i.e. do setup estatístico) - tipo de população, parâmetros conhecidos, dimensão da amostra, etc.
 - Com base no ponto anterior e na definição das hipóteses escolhe-se uma estatística de teste que terá uma distribuição amostral conhecida (Está no formulário).
 - No nosso caso concreto trata-se de um ensaio unilateral à média da população com variância conhecida pelo que a estatística adequada a todo este setup é:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (1)$$

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão com uma Amostra Concreta

- Então e agora como é que se decide para uma amostra concreta ?

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão com uma Amostra Concreta

- Então e agora como é que se decide para uma amostra concreta ?
- Para o nível de significância do Passo II (i.e $\alpha = 0.05$) calcula-se/calculam-se o/os valor/valores crítico/críticos da distribuição amostral:

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão com uma Amostra Concreta

- Então e agora como é que se decide para uma amostra concreta ?
- Para o nível de significância do Passo II (i.e $\alpha = 0.05$) calcula-se/calculam-se o/os valor/valores crítico/críticos da distribuição amostral:
- O valor crítico em causa é $Z_{95\%} = 1.645$ - **Ensaio à direita.**

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão com uma Amostra Concreta

- Então e agora como é que se decide para uma amostra concreta ?
- Para o nível de significância do Passo II (i.e $\alpha = 0.05$) calcula-se/calculam-se o/os valor/valores crítico/críticos da distribuição amostral:
- O valor crítico em causa é $Z_{95\%} = 1.645$ - **Ensaio à direita**.
- Substitui-se os valores do nosso setup estatístico na estatística de teste:

$$T^* = \frac{210 - 200}{\frac{15}{\sqrt{9}}} = \frac{10}{5} = 2. \quad (2)$$

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão com uma Amostra Concreta

- Então e agora como é que se decide para uma amostra concreta ?
- Para o nível de significância do Passo II (i.e $\alpha = 0.05$) calcula-se/calculam-se o/os valor/valores crítico/críticos da distribuição amostral:
- O valor crítico em causa é $Z_{95\%} = 1.645$ - **Ensaio à direita**.
- Substitui-se os valores do nosso setup estatístico na estatística de teste:

$$T^* = \frac{210 - 200}{\frac{15}{\sqrt{9}}} = \frac{10}{5} = 2. \quad (2)$$

- O valor da estatística para a amostra concreta pertence à região crítica (RC): $\underbrace{2}_{T^*} \in \underbrace{[1.645, +\infty[}_{RC}.$

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão com uma Amostra Concreta

- Então e agora como é que se decide para uma amostra concreta ?
- Para o nível de significância do Passo II (i.e $\alpha = 0.05$) calcula-se/calculam-se o/os valor/valores crítico/críticos da distribuição amostral:
- O valor crítico em causa é $Z_{95\%} = 1.645$ - **Ensaio à direita**.
- Substitui-se os valores do nosso setup estatístico na estatística de teste:

$$T^* = \frac{210 - 200}{\frac{15}{\sqrt{9}}} = \frac{10}{5} = 2. \quad (2)$$

- O valor da estatística para a amostra concreta pertence à região crítica (RC): $\underbrace{2}_{T^*} \in \underbrace{[1.645, +\infty[}_{RC}$.
- A pizzeria deverá de facto aumentar a sua capacidade

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão com uma Amostra Concreta

- Um outra maneira de avaliar o teste é calcular o valor crítico (i.e. o valor limite) para a estimativa associada ao parâmetro de interesse.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão com uma Amostra Concreta

- Um outra maneira de avaliar o teste é calcular o valor crítico (i.e. o valor limite) para a estimativa associada ao parâmetro de interesse.
- No nosso caso é μ e portanto trata-se de um valor limite à estimativa da média amostral \bar{X} .

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão com uma Amostra Concreta

- Um outra maneira de avaliar o teste é calcular o valor crítico (i.e. o valor limite) para a estimativa associada ao parâmetro de interesse.
- No nosso caso é μ e portanto trata-se de um valor limite à estimativa da média amostral \bar{X} .

$$\frac{\bar{X}_C - 200}{\frac{15}{\sqrt{9}}} = 1.645 \implies \bar{X}_C = 208.225 \quad (3)$$

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão com uma Amostra Concreta

- Um outra maneira de avaliar o teste é calcular o valor crítico (i.e. o valor limite) para a estimativa associada ao parâmetro de interesse.
- No nosso caso é μ e portanto trata-se de um valor limite à estimativa da média amostral \bar{X} .

$$\frac{\bar{X}_C - 200}{\frac{15}{\sqrt{9}}} = 1.645 \implies \bar{X}_C = 208.225 \quad (3)$$

- Para não rejeitar a hipótese nula (H_0) a estimativa da média amostral teria de ter sido no máximo $\bar{X}_C = 208.225$.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão com uma Amostra Concreta

- Um outra maneira de avaliar o teste é calcular o valor crítico (i.e. o valor limite) para a estimativa associada ao parâmetro de interesse.
- No nosso caso é μ e portanto trata-se de um valor limite à estimativa da média amostral \bar{X} .

$$\frac{\bar{X}_C - 200}{\frac{15}{\sqrt{9}}} = 1.645 \implies \bar{X}_C = 208.225 \quad (3)$$

- Para não rejeitar a hipótese nula (H_0) a estimativa da média amostral teria de ter sido no máximo $\bar{X}_C = 208.225$.
- Contudo a amostra concreta deu origem a uma estimativa $\bar{X} = 210$, pelo que a evidência estatística leva à rejeição do status quo (i.e. H_0).

Exercício N°3 - (a)

O Ministério da Saúde afirma que, com os meios agora postos à disposição dos Hospitais Cíveis, o número médio de dias de internamento é no máximo 15.

Estas declarações foram postas em causa por alguns gestores hospitalares que decidiram proceder à recolha de uma amostra de 225 doentes onde se observou que o número médio de dias de internamento foi de 18.

- (a) Terão os gestores hospitalares razão ? Justifique a sua resposta, utilizando um teste adequado a 1% de significância.

Exercício N°4

Um fabricante de fitas magnéticas para computadores sabe que a resistência à ruptura destas fitas é uma variável aleatória normalmente distribuída com média 300kg e desvio-padrão de 20Kg. Para ajuizar se uma nova técnica/processo de fabrico produz fitas em média mais fracas que as do processo antigo, foi usado o seguinte teste estatístico com um nível de significância de 5% e um tamanho de amostra de $n = 100$:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_0 = 300kg \\ H_a : \mu_a = 295kg \end{cases}, \text{ e em que:}$$

- Se $\bar{X} \leq \bar{X}_c \implies$ rejeita-se H_0
- Se $\bar{X} > \bar{X}_c \implies$ não se rejeita H_0

- Calcule \bar{X}_c
- Use este teste, para com base numa amostra de tamanho 100, onde se obteve uma média igual a 290kg, tomar a respectiva decisão.

Exercício N°8 - (a)

No exame de Estatística efectuado na 2ª época no ano lectivo de 2000/2001, foram avaliados 31 alunos. Considerando este alunos como uma amostra representativa da população dos alunos matriculados na cadeira de Estatística e tendo em conta que, para essa amostra, se obtiveram os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{n=31} X_i = 299 \text{ e } \sum_{i=1}^{n=31} (X_i - \bar{X})^2 = 120 \quad (4)$$

Comente a afirmação: A média dos resultados não difere significativamente de 10. Utilize $\alpha = 0.05$

Exercícios de Outputs do SPSS

Exercício N°11

A BUESPEED opera no mercado da União Europeia na área da distribuição de encomendas. A empresa garante que todas as encomendas chegam ao seu destinatário, em média, em menos de 48 horas com uma variabilidade máxima de 8 horas. Para avaliar este desempenho, foram recolhidos os tempos (em horas) relativos a uma amostra de 65 encomendas tendo-se obtido os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{65} X_i = 3250 \text{ e } \sum_{i=1}^{65} X_i^2 = 578500 \quad (5)$$

O que se deve concluir sobre o desempenho da BUESPEED ?

Exercício N°12 - (a)

Um empresa farmacêutica está disposta a lançar no mercado um medicamento, se 90% dos pacientes tratados com esse novo medicamento ficarem curados. Caso verifique que apenas 70% dos pacientes ficam curados, então não lança o novo medicamento. Para tomar uma decisão, a empresa procedeu ao tratamento com o novo medicamento de 50 doentes, tendo-se registado que 45 deles ficaram curados.

- (a) Qual deverá ser a decisão tomada pela farmacêutica? Utilize $\alpha = 0.05$.

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses I

- Retomamos a nossa matriz de confusão, agora com as probabilidades associadas a cada uma das situações:

Decisão Baseada Nas Provas	Situação Real (i.e. Observada)	
	H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não Rejeita H_0	Decisão Correcta: $\mathbb{P} \geq 1 - \alpha$	Erro do Tipo II: $\mathbb{P} = \beta$
Rejeita H_0	Erro do Tipo I: $\mathbb{P} \leq \alpha$	Decisão Correcta: $\mathbb{P} = 1 - \beta$

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses I

- Retomamos a nossa matriz de confusão, agora com as probabilidades associadas a cada uma das situações:

Decisão Baseada Nas Provas	Situação Real (i.e. Observada)	
	H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não Rejeita H_0	Decisão Correcta: $\mathbb{P} \geq 1 - \alpha$	Erro do Tipo II: $\mathbb{P} = \beta$
Rejeita H_0	Erro do Tipo I: $\mathbb{P} \leq \alpha$	Decisão Correcta: $\mathbb{P} = 1 - \beta$

- Erro Tipo I - A Hipótese nula **é rejeitada** quando, de facto, é verdadeira. - O réu é injustamente condenado.

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses I

- Retomamos a nossa matriz de confusão, agora com as probabilidades associadas a cada uma das situações:

Decisão Baseada Nas Provas	Situação Real (i.e. Observada)	
	H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não Rejeita H_0	Decisão Correcta: $\mathbb{P} \geq 1 - \alpha$	Erro do Tipo II: $\mathbb{P} = \beta$
Rejeita H_0	Erro do Tipo I: $\mathbb{P} \leq \alpha$	Decisão Correcta: $\mathbb{P} = 1 - \beta$

- Erro Tipo I - A Hipótese nula **é rejeitada** quando, de facto, é verdadeira. - O réu é injustamente condenado.
- $\mathbb{P}[\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}] \leq \alpha$.
- Erro Tipo II - A Hipótese nula **não é rejeitada** quando, de facto, é falsa. - O réu é injustamente ilibado.

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses I

- Retomamos a nossa matriz de confusão, agora com as probabilidades associadas a cada uma das situações:

Decisão Baseada Nas Provas	Situação Real (i.e. Observada)	
	H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não Rejeita H_0	Decisão Correcta: $\mathbb{P} \geq 1 - \alpha$	Erro do Tipo II: $\mathbb{P} = \beta$
Rejeita H_0	Erro do Tipo I: $\mathbb{P} \leq \alpha$	Decisão Correcta: $\mathbb{P} = 1 - \beta$

- Erro Tipo I - A Hipótese nula **é rejeitada** quando, de facto, é verdadeira. - O réu é injustamente condenado.
- $\mathbb{P}[\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}] \leq \alpha$.
- Erro Tipo II - A Hipótese nula **não é rejeitada** quando, de facto, é falsa. - O réu é injustamente ilibado.
- $\mathbb{P}[\text{Não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é Falsa}] = \beta$.

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses II

- Cada vez que fazemos um teste destes estamos perante um destes erros, dependendo se rejeitamos ou não H_0 .

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses II

- Cada vez que fazemos um teste destes estamos perante um destes erros, dependendo se rejeitamos ou não H_0 .
- Vamos calcular cada um deles usando o exemplo anterior.

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses II

- Cada vez que fazemos um teste destes estamos perante um destes erros, dependendo se rejeitamos ou não H_0 .
- Vamos calcular cada um deles usando o exemplo anterior.
- Como formulámos o teste a $\alpha = 0.05$ e rejeitámos H_0 começamos a probabilidade (i.e. medida) do erro *tipo I*:

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses II

- Cada vez que fazemos um teste destes estamos perante um destes erros, dependendo se rejeitamos ou não H_0 .
- Vamos calcular cada um deles usando o exemplo anterior.
- Como formulámos o teste a $\alpha = 0.05$ e rejeitámos H_0 começamos a probabilidade (i.e. medida) do erro *tipo I*:
- $\mathbb{P}[\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}] \leq \alpha$, pelo que para o exemplo concreto esta probabilidade é dada por:

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses II

- Cada vez que fazemos um teste destes estamos perante um destes erros, dependendo se rejeitamos ou não H_0 .
- Vamos calcular cada um deles usando o exemplo anterior.
- Como formulámos o teste a $\alpha = 0.05$ e rejeitámos H_0 começamos a probabilidade (i.e. medida) do erro *tipo I*:
- $\mathbb{P}[\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}] \leq \alpha$, pelo que para o exemplo concreto esta probabilidade é dada por:

$$\bullet \mathbb{P}[\bar{X} > 208.225 | \mu \leq 200] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-200}{\frac{15}{\sqrt{9}}} > \frac{208.225-200}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z > 1.645] = 0.05$$

$$\bullet \mathbb{P}[\bar{X} > 208.225 | \mu \leq 199] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-199}{\frac{15}{\sqrt{9}}} > \frac{208.225-199}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z > 1.845] = 0.03255$$

Exercício N°3 - (b), (c) e (d)

O Ministério da Saúde afirma que, com os meios agora postos à disposição dos Hospitais Cívicos, o número médio de dias de internamento é no máximo 15.

Estas declarações foram postas em causa por alguns gestores hospitalares que decidiram proceder à recolha de uma amostra de 225 doentes onde se observou que o número médio de dias de internamento foi de 18.

- (b) Na decisão que tomou, qual a probabilidade de estar a cometer um erro ?
- (c) Com que probabilidade é dada razão aos gestores hospitalares, se o verdadeiro valor médio de dias de internamento for 117 ?
- (d) Como variaria aquela probabilidade se a hipótese alternativa fosse superior ao valor especificado na alínea (3) ? E se o tamanho da amostra aumentasse ?

Exercício N°9

A **Frigo** é uma conceituada marca de camarão congelado. Quando a linha de empacotamento está bem ajustada, as embalagens pesam 250 gramas com uma variabilidade de 15 gramas.

Periodicamente, o técnico responsável pela linha de empacotamento recolhe amostras de 20 embalagens e, caso o peso médio encontrado não se situe entre os 243 e 257 gramas, decide que a máquina terá de ser ajustada. Admita que o peso das embalagens é normalmente distribuído.

- (a) Se pretender fazer um ensaio de hipóteses sobre o peso médio das embalagens, que hipóteses irá testar?
- (b) Qual o nível de significância que está implícito neste problema?
- (c) Esboce o gráfico da função potência deste ensaio, calculando $\Pi(260)$.

Exercício N°14

Uma agência de publicidade desenvolveu determinado tema para um anúncio baseado no pressuposto de que 50% dos espectadores que o vissem tinham mais de 30 anos. A Agência está interessada em saber se, naquele grupo etário, houve alteração do índice de audiência. Para testar essa possibilidade, a agência efectuou uma sondagem sobre 400 espectadores, escolhidos aleatoriamente, dos quais 210 tinham idade superior a 30 anos. O teste foi efectuado ao nível da significância de 50%.

- (a) A que conclusão chegou a agência de publicidade? Justifique.
- (b) Represente Gráficamente a função potência do ensaio para os telespectadores do referido anúncio, sabendo que: para $p = 0.2$ vem $\beta = 0$; para $p = 0.3$ vem $\beta = 0$; para $p = 0.55$ vem $\beta = 0.48$ e para $p = 0.425$ vem $\beta = ?$. Determine β .
- (c) A agência de publicidade considerou que se a verdadeira proporção de telespectadores que vêem o referido anúncio fosse de 42.5%, o risco associado à não rejeição da hipótese nula ainda seria elevado. A agência pretende diminuir esse risco. Indique, justificando, que tomadas de decisão são possíveis para atingir esse objectivo.

Exercícios de Outputs de SPSS

Exercício N°17

O Pedro e o João discutem sobre a rapidez de atendimento de um mesmo serviço em duas lojas distintas. O primeiro afirma que na loja 1, as pessoas se despacham em média mais depressa do que na loja 2, mas o segundo duvida. Para esclarecerem esta situação, resolveram acompanhar o atendimento daquele serviço num mesmo dia, numa mesma janela horária, tendo selecionado aleatoriamente 10 clientes na loja 1 e 15 clientes na loja 2, registando o tempo (em minutos) decorrido entre a sua chegada e o momento em que foram atendidos. Chegaram aos seguintes resultados:

Loja 1	15	20	15	10	5	20	30	10	15	40	-	-	-	-
Loja 2	10	15	15	15	20	20	25	20	30	20	25	35	30	35
	30													

Será que o Pedro tem razão ? Utilize $\alpha = 0,025$.

Exercícios de Outputs de SPSS