Ensaios de Hipóteses

Estatística II - 2024/2025
ISCTE-IUL

Afonso Moniz Moreira[1,2]

[1]ISCTE-IUL, Departamento de Métodos Quantitativos para a Economia e Gestão
[2]CMVM - Comissão do Mercado de Valores Mobiliários, Departamento de Supervisão de Mercados

Aviso/Disclaimer

- Este conjunto de slides não são, nem pretendem ser uma substituição à bibliografia principal da cadeira de Estatística II.
- Este conjunto de slides não são, nem pretendem ser uma fonte rigorosa de estudo dos tópicos da cadeira.
- O único propósito destes slides é ajudar o autor a guiar as aulas da forma mais coloquial possível sem ter de carregar formalismos desnecessários.
- Assim sendo, o formalismo estatístico é eliminado sempre que possível para agilizar uma primeira aprendizagem por parte dos estudantes.

Teoria dos Ensaios de Hipóteses

Qual é a utilidade?

- Para que serve um ensaio de hipóteses?

Teoria dos Ensaios de Hipóteses

Qual é a utilidade?

- Para que serve um ensaio de hipóteses?
  - Servem para credibilizar ou descredibilizar afirmações sobre os parâmetros (de uma população).

Teoria dos Ensaios de Hipóteses

Qual é a utilidade?

- Para que serve um ensaio de hipóteses?
  - Servem para credibilizar ou descredibilizar afirmações sobre os parâmetros (de uma população).
  - Então... mas nós conseguimos fazer isso com os intervalos de confiança...

Teoria dos Ensaios de Hipóteses

Qual é a utilidade?

- Para que serve um ensaio de hipóteses?
  - Servem para credibilizar ou descredibilizar afirmações sobre os parâmetros (de uma população).
  - Então... mas nós conseguimos fazer isso com os intervalos de confiança...
  - Verdade, mas não com o nível de granularidade (ou precisão) de um teste de hipóteses.

Teoria dos Ensaios de Hipóteses

Qual é a utilidade?

- Para que serve um ensaio de hipóteses?
  - Servem para credibilizar ou descredibilizar afirmações sobre os parâmetros (de uma população).
  - Então... mas nós conseguimos fazer isso com os intervalos de confiança...
  - Verdade, mas não com o nível de granularidade (ou precisão) de um teste de hipóteses.
- Que tipo de perguntas conseguimos responder?

Teoria dos Ensaios de Hipóteses

Qual é a utilidade?

- Para que serve um ensaio de hipóteses?
  - Servem para credibilizar ou descredibilizar afirmações sobre os parâmetros (de uma população).
  - Então... mas nós conseguimos fazer isso com os intervalos de confiança...
  - Verdade, mas não com o nível de granularidade (ou precisão) de um teste de hipóteses.
- Que tipo de perguntas conseguimos responder?

Teoria dos Ensaios de Hipóteses

Qual é a utilidade?

- Para que serve um ensaio de hipóteses?
  - Servem para credibilizar ou descredibilizar afirmações sobre os parâmetros (de uma população).
  - Então... mas nós conseguimos fazer isso com os intervalos de confiança...
  - Verdade, mas não com o nível de granularidade (ou precisão) de um teste de hipóteses.
- Que tipo de perguntas conseguimos responder?
  - "O Ministério da Saúde afirma que, com os meios agora postos à disposição dos hospitais civis, o número médio de dias de internamento é, no máximo, oito."

Teoria dos Ensaios de Hipóteses

Qual é a utilidade?

- Para que serve um ensaio de hipóteses?
  - Servem para credibilizar ou descredibilizar afirmações sobre os parâmetros (de uma população).
  - Então... mas nós conseguimos fazer isso com os intervalos de confiança...
  - Verdade, mas não com o nível de granularidade (ou precisão) de um teste de hipóteses.
- Que tipo de perguntas conseguimos responder?
  - "O Ministério da Saúde afirma que, com os meios agora postos à disposição dos hospitais civis, o número médio de dias de internamento é, no máximo, oito."
  - Seja $X =$ Número de dias que um doente fica internado no hospital.

Teoria dos Ensaios de Hipóteses

Qual é a utilidade?

- Para que serve um ensaio de hipóteses?
  - Servem para credibilizar ou descredibilizar afirmações sobre os parâmetros (de uma população).
  - Então... mas nós conseguimos fazer isso com os intervalos de confiança...
  - Verdade, mas não com o nível de granularidade (ou precisão) de um teste de hipóteses.
- Que tipo de perguntas conseguimos responder?
  - "O Ministério da Saúde afirma que, com os meios agora postos à disposição dos hospitais civis, o número médio de dias de internamento é, no máximo, oito."
  - Seja $X =$ Número de dias que um doente fica internado no hospital.
  - $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, assumindo uma população normal.

Teoria dos Ensaios de Hipóteses

Qual é a utilidade?

- Para que serve um ensaio de hipóteses?
  - Servem para credibilizar ou descredibilizar afirmações sobre os parâmetros (de uma população).
  - Então... mas nós conseguimos fazer isso com os intervalos de confiança...
  - Verdade, mas não com o nível de granularidade (ou precisão) de um teste de hipóteses.
- Que tipo de perguntas conseguimos responder?
  - "O Ministério da Saúde afirma que, com os meios agora postos à disposição dos hospitais civis, o número médio de dias de internamento é, no máximo, oito."
  - Seja $X =$ Número de dias que um doente fica internado no hospital.
  - $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, assumindo uma população normal.
  - Portanto, matematicamente, será que $\mu \leq 8$?

Teoria dos Ensaios de Hipóteses

Qual é a utilidade?

- Uma outra situação:

Teoria dos Ensaios de Hipóteses

Qual é a utilidade?

- Uma outra situação:
  - "Pretendem comparar-se dois processos de fabrico do mesmo produto. Adopta-se a seguinte regra de decisão: com base numa amostra de 100 unidades para cada processo, eliminar-se-á aquele processo que conduza a uma proporção observada de produtos defeituosos superior à do outro, em pelo menos 2%"

Teoria dos Ensaios de Hipóteses

Qual é a utilidade?

- Uma outra situação:
  - "Pretendem comparar-se dois processos de fabrico do mesmo produto. Adopta-se a seguinte regra de decisão: com base numa amostra de 100 unidades para cada processo, eliminar-se-á aquele processo que conduza a uma proporção observada de produtos defeituosos superior à do outro, em pelo menos 2%"
  - $Y_i =$ Unidades defeituosas do processo de fabrico i, $i \in \{1, 2\}$

Teoria dos Ensaios de Hipóteses

Qual é a utilidade?

- Uma outra situação:
  - "Pretendem comparar-se dois processos de fabrico do mesmo produto. Adopta-se a seguinte regra de decisão: com base numa amostra de 100 unidades para cada processo, eliminar-se-á aquele processo que conduza a uma proporção observada de produtos defeituosos superior à do outro, em pelo menos 2%"
  - Y_i = Unidades defeituosas do processo de fabrico i, $i \in \{1, 2\}$
  - $Y_i \sim B(p_i)$, p_i é a proporção de produtos defeituosos.

Teoria dos Ensaios de Hipóteses

Qual é a utilidade?

- Uma outra situação:
  - "Pretendem comparar-se dois processos de fabrico do mesmo produto. Adopta-se a seguinte regra de decisão: com base numa amostra de 100 unidades para cada processo, eliminar-se-á aquele processo que conduza a uma proporção observada de produtos defeituosos superior à do outro, em pelo menos 2%"
  - $Y_i =$ Unidades defeituosas do processo de fabrico i, $i \in \{1, 2\}$
  - $Y_i \sim B(p_i)$, p_i é a proporção de produtos defeituosos.
  - Portanto, matematicamente, será que $p_1 - p_2 > 0.02$ ou $p_2 - p_1 > 0.02$?

Teoria dos Ensaios de Hipóteses

Qual é a utilidade?

- Uma outra situação:
  - "Pretendem comparar-se dois processos de fabrico do mesmo produto. Adopta-se a seguinte regra de decisão: com base numa amostra de 100 unidades para cada processo, eliminar-se-á aquele processo que conduza a uma proporção observada de produtos defeituosos superior à do outro, em pelo menos 2%"
  - $Y_i =$ Unidades defeituosas do processo de fabrico i, $i \in \{1, 2\}$
  - $Y_i \sim B(p_i)$, p_i é a proporção de produtos defeituosos.
  - Portanto, matematicamente, será que $p_1 - p_2 > 0.02$ ou $p_2 - p_1 > 0.02$?
- São apenas dois exemplos onde os intervalos de confiança não conseguem responder com a mesma eficácia. Conseguem dar uma ideia mas não permitem fazer a pergunta desta forma tão direta.

As Hipóteses e os Erros

Quais são as hipóteses?

- Considerem um tribunal em que uma dada acusação contra um réu é credibilizada ou descredibilizada mediante a apresentação de provas por parte da defesa e da acusação.

As Hipóteses e os Erros

Quais são as hipóteses?

- Considerem um tribunal em que uma dada acusação contra um réu é credibilizada ou descredibilizada mediante a apresentação de provas por parte da defesa e da acusação.
- No final, o juiz decide com base na evidência.

As Hipóteses e os Erros

Quais são as hipóteses?

- Considerem um tribunal em que uma dada acusação contra um réu é credibilizada ou descredibilizada mediante a apresentação de provas por parte da defesa e da acusação.
- No final, o juiz decide com base na evidência.
- Um ensaio de hipóteses inspira-se na mesma envolvência com umas diferenças:

As Hipóteses e os Erros

Quais são as hipóteses?

- Considerem um tribunal em que uma dada acusação contra um réu é credibilizada ou descredibilizada mediante a apresentação de provas por parte da defesa e da acusação.
- No final, o juiz decide com base na evidência.
- Um ensaio de hipóteses inspira-se na mesma envolvência com umas diferenças:
  - A prova é a amostra aleatória.

As Hipóteses e os Erros

Quais são as hipóteses?

- Considerem um tribunal em que uma dada acusação contra um réu é credibilizada ou descredibilizada mediante a apresentação de provas por parte da defesa e da acusação.
- No final, o juiz decide com base na evidência.
- Um ensaio de hipóteses inspira-se na mesma envolvência com umas diferenças:
  - A prova é a amostra aleatória.
  - O juiz é o teste estatístico que foi escolhido (i.e. a estatística de teste do formulário).

As Hipóteses e os Erros

Quais são as hipóteses?

- Considerem um tribunal em que uma dada acusação contra um réu é credibilizada ou descredibilizada mediante a apresentação de provas por parte da defesa e da acusação.
- No final, o juiz decide com base na evidência.
- Um ensaio de hipóteses inspira-se na mesma envolvência com umas diferenças:
  - A prova é a amostra aleatória.
  - O juiz é o teste estatístico que foi escolhido (i.e. a estatística de teste do formulário).
- Assim sendo iremos ter duas hipóteses:

As Hipóteses e os Erros

Quais são as hipóteses?

- Considerem um tribunal em que uma dada acusação contra um réu é credibilizada ou descredibilizada mediante a apresentação de provas por parte da defesa e da acusação.
- No final, o juiz decide com base na evidência.
- Um ensaio de hipóteses inspira-se na mesma envolvência com umas diferenças:
  - A prova é a amostra aleatória.
  - O juiz é o teste estatístico que foi escolhido (i.e. a estatística de teste do formulário).
- Assim sendo iremos ter duas hipóteses:
  - H_0 - A hipótese nula é a presunção de inocência de um réu.

As Hipóteses e os Erros

Quais são as hipóteses?

- Considerem um tribunal em que uma dada acusação contra um réu é credibilizada ou descredibilizada mediante a apresentação de provas por parte da defesa e da acusação.
- No final, o juiz decide com base na evidência.
- Um ensaio de hipóteses inspira-se na mesma envolvência com umas diferenças:
  - A prova é a amostra aleatória.
  - O juiz é o teste estatístico que foi escolhido (i.e. a estatística de teste do formulário).
- Assim sendo iremos ter duas hipóteses:
  - H_0 - A hipótese nula é a presunção de inocência de um réu.
  - H_1 ou H_a - A hipótese alternativa é o contraditório da anterior.

As Hipóteses e os Erros

Quais são as hipóteses?

- Considerem um tribunal em que uma dada acusação contra um réu é credibilizada ou descredibilizada mediante a apresentação de provas por parte da defesa e da acusação.
- No final, o juiz decide com base na evidência.
- Um ensaio de hipóteses inspira-se na mesma envolvência com umas diferenças:
  - A prova é a amostra aleatória.
  - O juiz é o teste estatístico que foi escolhido (i.e. a estatística de teste do formulário).
- Assim sendo iremos ter duas hipóteses:
  - H_0 - A hipótese nula é a presunção de inocência de um réu.
  - H_1 ou H_a - A hipótese alternativa é o contraditório da anterior.
- Quando a realização da amostra (i.e. as provas) é usada numa determinada formulação de teste (i.e. o juiz) podemos ter os seguintes resultados:

As Hipóteses e os Erros

Os Erros Possíveis

- Os dados concretos fornecidos (i.e., as provas) à estatística de teste (i.e., o juiz) **não levam** a uma **rejeição** da hipótese nula (i.e., do status quo).

As Hipóteses e os Erros

Os Erros Possíveis

- Os dados concretos fornecidos (i.e., as provas) à estatística de teste (i.e., o juiz) **não levam** a uma **rejeição** da hipótese nula (i.e., do status quo).
- Os dados fornecidos (i.e., as provas) à estatística de teste (i.e., o juiz) **levam** a uma **rejeição** da hipótese nula (i.e., do status quo).

As Hipóteses e os Erros

Os Erros Possíveis

- Os dados concretos fornecidos (i.e., as provas) à estatística de teste (i.e., o juiz) **não levam** a uma **rejeição** da hipótese nula (i.e., do status quo).
- Os dados fornecidos (i.e., as provas) à estatística de teste (i.e., o juiz) **levam** a uma **rejeição** da hipótese nula (i.e., do status quo).
- Qual é a diferença entre o não rejeitar e o aceitar?

As Hipóteses e os Erros

Os Erros Possíveis

- Os dados concretos fornecidos (i.e., as provas) à estatística de teste (i.e., o juiz) **não levam** a uma **rejeição** da hipótese nula (i.e., do status quo).
- Os dados fornecidos (i.e., as provas) à estatística de teste (i.e., o juiz) **levam** a uma **rejeição** da hipótese nula (i.e., do status quo).
- Qual é a diferença entre o não rejeitar e o aceitar?
- Tal e qual como num julgamento podem existir erros...

As Hipóteses e os Erros

Os Erros Possíveis

- Os dados concretos fornecidos (i.e., as provas) à estatística de teste (i.e., o juiz) **não levam** a uma **rejeição** da hipótese nula (i.e., do status quo).
- Os dados fornecidos (i.e., as provas) à estatística de teste (i.e., o juiz) **levam** a uma **rejeição** da hipótese nula (i.e., do status quo).
- Qual é a diferença entre o não rejeitar e o aceitar?
- Tal e qual como num julgamento podem existir erros...
- Um instrumento de avaliação comum em vários domínios da estatística é a matriz de confusão.

As Hipóteses e os Erros

Erro tipo I e tipo II

Decisão Baseada Nas Provas	Situação Real (i.e. Observada) H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não Rejeita H_0	Decisão Correta	Erro do Tipo II
Rejeita H_0	Erro do Tipo I	Decisão Correta

As Hipóteses e os Erros

Erro tipo I e tipo II

Decisão Baseada Nas Provas	Situação Real (i.e. Observada) H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não Rejeita H_0	Decisão Correta	Erro do Tipo II
Rejeita H_0	Erro do Tipo I	Decisão Correta

- Erro Tipo I - A Hipótese nula **é rejeitada** quando, de facto, é verdadeira. - O réu é injustamente condenado.

As Hipóteses e os Erros

Erro tipo I e tipo II

Decisão Baseada Nas Provas	Situação Real (i.e. Observada) H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não Rejeita H_0	Decisão Correta	Erro do Tipo II
Rejeita H_0	Erro do Tipo I	Decisão Correta

- Erro Tipo I - A Hipótese nula **é rejeitada** quando, de facto, é verdadeira. - O réu é injustamente condenado.
- Erro Tipo II - A Hipótese nula **não é rejeitada** quando, de facto, é falsa. - O réu é injustamente ilibado.

As Hipóteses e os Erros

Erro tipo I e tipo II

Decisão Baseada Nas Provas	Situação Real (i.e. Observada) H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não Rejeita H_0	Decisão Correta	Erro do Tipo II
Rejeita H_0	Erro do Tipo I	Decisão Correta

- Erro Tipo I - A Hipótese nula **é rejeitada** quando, de facto, é verdadeira. - O réu é injustamente condenado.
- Erro Tipo II - A Hipótese nula **não é rejeitada** quando, de facto, é falsa. - O réu é injustamente ilibado.
- Cada vez que um ensaio de hipóteses é executado os dois erros estão presentes e devem ser controlados.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passos Necessários - Problema Exemplo

- Vamos considerar um exemplo para delinear os passos necessários.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passos Necessários - Problema Exemplo

- Vamos considerar um exemplo para delinear os passos necessários.
- "Uma pizzaria recebe diariamente encomendas por telefone, que se têm comportado segundo uma lei normal. A empresa está dimensionada para uma procura média diária que não ultrapasse as 200 pizzas, admitindo um desvio-padrão de 15. Uma campanha promocional realizada nos últimos 9 dias levou a uma procura média de 210 pizzas. O problema consiste em avaliar a necessidade de reforçar a capacidade média de venda, estudando se houve de facto uma alteração significativa na procura média diária de pizzas"

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo I - Definir as Hipóteses

- Existiu uma quebra de estrutura na procura? Ou seja, tenho de redimensionar a minha loja?

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo I - Definir as Hipóteses

- Existiu uma quebra de estrutura na procura? Ou seja, tenho de redimensionar a minha loja?
  - Considere-se $X =$ Procura diária de pizzas no estabelecimento após a campanha promocional.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo I - Definir as Hipóteses

- Existiu uma quebra de estrutura na procura? Ou seja, tenho de redimensionar a minha loja?
  - Considere-se $X =$ Procura diária de pizzas no estabelecimento após a campanha promocional.
  - Sabe-se que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma = 15)$. Queremos perceber se μ se alterou.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo I - Definir as Hipóteses

- Existiu uma quebra de estrutura na procura? Ou seja, tenho de redimensionar a minha loja?
  - Considere-se $X =$ Procura diária de pizzas no estabelecimento após a campanha promocional.
  - Sabe-se que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma = 15)$. Queremos perceber se μ se alterou.
- Deste modo queremos que os dados respondam a isto:

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo I - Definir as Hipóteses

- Existiu uma quebra de estrutura na procura? Ou seja, tenho de redimensionar a minha loja?
  - Considere-se X = Procura diária de pizzas no estabelecimento após a campanha promocional.
  - Sabe-se que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma = 15)$. Queremos perceber se μ se alterou.
- Deste modo queremos que os dados respondam a isto:
  - $H_0 : \mu \leq 200$ vs. $H_1 : \mu > 200$ - Teste Unilateral Direito

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo I - Definir as Hipóteses

- Existiu uma quebra de estrutura na procura? Ou seja, tenho de redimensionar a minha loja?
    - Considere-se X = Procura diária de pizzas no estabelecimento após a campanha promocional.
    - Sabe-se que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma = 15)$. Queremos perceber se μ se alterou.
- Deste modo queremos que os dados respondam a isto:
    - $H_0 : \mu \leq 200$ vs. $H_1 : \mu > 200$ - Teste Unilateral Direito
    - Portanto queremos saber se a procura média se estabeleceu num novo patamar pelo que o COO tem de propor ao board um aumento da capacidade da pizzaria.
- Como vamos ver existem várias formulações de hipóteses (i.e. Testes)

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo I - Definir as Hipóteses

- Existiu uma quebra de estrutura na procura? Ou seja, tenho de redimensionar a minha loja?
  - Considere-se $X =$ Procura diária de pizzas no estabelecimento após a campanha promocional.
  - Sabe-se que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma = 15)$. Queremos perceber se μ se alterou.
- Deste modo queremos que os dados respondam a isto:
  - $H_0 : \mu \leq 200$ vs. $H_1 : \mu > 200$ - Teste Unilateral Direito
  - Portanto queremos saber se a procura média se estabeleceu num novo patamar pelo que o COO tem de propor ao board um aumento da capacidade da pizzaria.
- Como vamos ver existem várias formulações de hipóteses (i.e. Testes)
- Unilateral $\Rightarrow$ Sinal da alteração $\Rightarrow$ $H_a(< \text{ ou } >)$, $H_0(=, \leq \text{ ou } \geq)$.
- Bilateral $\Rightarrow$ contra um valor concreto K $\Rightarrow$ $H_0(=)$, $H_a(\neq)$.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo II - Definir o nível de significância $\alpha = 1 - \lambda$

- Temos de definir um nível de significância do teste α que se liga diretamente com o nível de confiança que já foi mencionado nos ICs.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo II - Definir o nível de significância $\alpha = 1 - \lambda$

- Temos de definir um nível de significância do teste α que se liga diretamente com o nível de confiança que já foi mencionado nos ICs.
- Este valor estabelece o limite para a região de aceitação (RA) e para a região crítica ou de rejeição (RC).

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo II - Definir o nível de significância $\alpha = 1 - \lambda$

- Temos de definir um nível de significância do teste α que se liga diretamente com o nível de confiança que já foi mencionado nos ICs.
- Este valor estabelece o limite para a região de aceitação (RA) e para a região crítica ou de rejeição (RC).
- O nível de significância impõe um trade-off à decisão? Sim.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo II - Definir o nível de significância $\alpha = 1 - \lambda$

- Temos de definir um nível de significância do teste α que se liga diretamente com o nível de confiança que já foi mencionado nos ICs.
- Este valor estabelece o limite para a região de aceitação (RA) e para a região crítica ou de rejeição (RC).
- O nível de significância impõe um trade-off à decisão? Sim.
- O mais standard será $\alpha = 0.05$. Normalmente os papers que fazem uso de um teste de hipóteses mostram a decisão com 3 níveis de significância: 1% (***), 5%(**), 10%(*) e $> 10\%$ ().

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo III - Escolha da Estatística Adequada ao Ensaio

- Como é que se escolhe a estatística de teste adequada?

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo III - Escolha da Estatística Adequada ao Ensaio

- Como é que se escolhe a estatística de teste adequada?
  - Tal como nos intervalos de confiança, vai depender do que sabemos (i.e. do setup estatístico) - tipo de população, parâmetros conhecidos, dimensão da amostra, etc.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo III - Escolha da Estatística Adequada ao Ensaio

- Como é que se escolhe a estatística de teste adequada?
  - Tal como nos intervalos de confiança, vai depender do que sabemos (i.e. do setup estatístico) - tipo de população, parâmetros conhecidos, dimensão da amostra, etc.
  - Com base no ponto anterior e na definição das hipóteses escolhe-se uma estatística de teste que terá uma distribuição amostral conhecida (Está no formulário).

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo III - Escolha da Estatística Adequada ao Ensaio

- Como é que se escolhe a estatística de teste adequada?
  - Tal como nos intervalos de confiança, vai depender do que sabemos (i.e. do setup estatístico) - tipo de população, parâmetros conhecidos, dimensão da amostra, etc.
  - Com base no ponto anterior e na definição das hipóteses escolhe-se uma estatística de teste que terá uma distribuição amostral conhecida (Está no formulário).
  - No nosso caso concreto trata-se de um ensaio unilateral à média da população com variância conhecida pelo que a estatística adequada a todo este setup é:

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo III - Escolha da Estatística Adequada ao Ensaio

- Como é que se escolhe a estatística de teste adequada?
  - Tal como nos intervalos de confiança, vai depender do que sabemos (i.e. do setup estatístico) - tipo de população, parâmetros conhecidos, dimensão da amostra, etc.
  - Com base no ponto anterior e na definição das hipóteses escolhe-se uma estatística de teste que terá uma distribuição amostral conhecida (Está no formulário).
  - No nosso caso concreto trata-se de um ensaio unilateral à média da população com variância conhecida pelo que a estatística adequada a todo este setup é:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \tag{1}$$

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão

- Então e agora como é que se decide para uma realização da amostra aleatória (i.e., uma amostra observada)?

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão

- Então e agora como é que se decide para uma realização da amostra aleatória (i.e., uma amostra observada)?
- Para o nível de significância do Passo II (i.e $\alpha = 0.05$) calcula-se/calculam-se o/os valor/valores crítico/críticos da distribuição amostral:

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão

- Então e agora como é que se decide para uma realização da amostra aleatória (i.e., uma amostra observada)?
- Para o nível de significância do Passo II (i.e $\alpha = 0.05$) calcula-se/calculam-se o/os valor/valores crítico/críticos da distribuição amostral:
- O valor crítico em causa é $Z_{95\%} = 1.645$ - **Ensaio à direita**.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão

- Então e agora como é que se decide para uma realização da amostra aleatória (i.e., uma amostra observada)?
- Para o nível de significância do Passo II (i.e $\alpha = 0.05$) calcula-se/calculam-se o/os valor/valores crítico/críticos da distribuição amostral:
- O valor crítico em causa é $Z_{95\%} = 1.645$ - **Ensaio à direita**.
- Substitui-se os valores do nosso setup estatístico na estatística de teste:

$$T^* = \frac{210 - 200}{\frac{15}{\sqrt{9}}} = \frac{10}{5} = 2. \tag{2}$$

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão

- Então e agora como é que se decide para uma realização da amostra aleatória (i.e., uma amostra observada)?
- Para o nível de significância do Passo II (i.e $\alpha = 0.05$) calcula-se/calculam-se o/os valor/valores crítico/críticos da distribuição amostral:
- O valor crítico em causa é $Z_{95\%} = 1.645$ - **Ensaio à direita**.
- Substitui-se os valores do nosso setup estatístico na estatística de teste:

$$T^* = \frac{210 - 200}{\frac{15}{\sqrt{9}}} = \frac{10}{5} = 2. \tag{2}$$

- O valor da estatística para a realização da amostra pertence à região crítica (RC): $\underbrace{2}_{T^*} \in \underbrace{[1.645, +\infty[}_{RC}$.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão

- Então e agora como é que se decide para uma realização da amostra aleatória (i.e., uma amostra observada)?
- Para o nível de significância do Passo II (i.e $\alpha = 0.05$) calcula-se/calculam-se o/os valor/valores crítico/críticos da distribuição amostral:
- O valor crítico em causa é $Z_{95\%} = 1.645$ - **Ensaio à direita**.
- Substitui-se os valores do nosso setup estatístico na estatística de teste:

$$T^* = \frac{210 - 200}{\frac{15}{\sqrt{9}}} = \frac{10}{5} = 2. \qquad (2)$$

- O valor da estatística para a realização da amostra pertence à região crítica (RC): $\underbrace{2}_{T^*} \in \underbrace{[1.645, +\infty[}_{RC}$.
- A pizzaria deverá de facto aumentar a sua capacidade.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão

- Um outra maneira de avaliar o teste é calcular o valor crítico (i.e. o valor limite) para a estimativa associada ao parâmetro de interesse.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão

- Um outra maneira de avaliar o teste é calcular o valor crítico (i.e. o valor limite) para a estimativa associada ao parâmetro de interesse.
- No nosso caso é μ e portanto trata-se de um valor limite à estimativa da média amostral $\bar{X}$.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão

- Um outra maneira de avaliar o teste é calcular o valor crítico (i.e. o valor limite) para a estimativa associada ao parâmetro de interesse.
- No nosso caso é μ e portanto trata-se de um valor limite à estimativa da média amostral $\bar{X}$.

$$\frac{\bar{X}_C - 200}{\frac{15}{\sqrt{9}}} = 1.645 \Longrightarrow \bar{X}_C = 208.225 \qquad (3)$$

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão

- Um outra maneira de avaliar o teste é calcular o valor crítico (i.e. o valor limite) para a estimativa associada ao parâmetro de interesse.
- No nosso caso é μ e portanto trata-se de um valor limite à estimativa da média amostral $\bar{X}$.

$$\frac{\bar{X}_{\mathrm{C}} - 200}{\frac{15}{\sqrt{9}}} = 1.645 \Longrightarrow \bar{X}_{\mathrm{C}} = 208.225 \tag{3}$$

- Para não rejeitar a hipótese nula (H_0) a estimativa da média amostral teria de ter sido no máximo $\bar{X}_{\mathrm{C}} = 208.225$.

Execução de Um Ensaio de Hipóteses

Passo IV - Tomada de Decisão

- Um outra maneira de avaliar o teste é calcular o valor crítico (i.e. o valor limite) para a estimativa associada ao parâmetro de interesse.
- No nosso caso é μ e portanto trata-se de um valor limite à estimativa da média amostral $\bar{X}$.

$$\frac{\bar{X}_C - 200}{\frac{15}{\sqrt{9}}} = 1.645 \Longrightarrow \bar{X}_C = 208.225 \qquad (3)$$

- Para não rejeitar a hipótese nula (H_0) a estimativa da média amostral teria de ter sido no máximo $\bar{X}_C = 208.225$.
- Contudo a amostra observada (i.e., realização da amostra) deu origem a uma estimativa $\bar{X} = 210$, pelo que a evidência estatística leva à rejeição do status quo (i.e. H_0).

Exercício Nº3 - (a)

O Ministério da Saúde afirma que, com os meios agora postos à disposição dos Hospitais Civis, o número médio de dias de internamento é no máximo 15.
Estas declarações foram postas em causa por alguns gestores hospitalares que decidiram proceder à recolha de uma amostra de 225 doentes onde se observou que o número médio de dias de internamento foi de 18.

(a) Terão os gestores hospitalares razão ? Justifique a sua resposta, utilizando um teste adequado a 1% de significância.

Exercício Nº4

Um fabricante de fitas magnéticas para computadores sabe que a resistência à ruptura destas fitas é uma variável aleatória normalmente distribuída com média 300kg e desvio-padrão de 20Kg. Para ajuizar se uma nova técnica/processo de fabrico produz fitas em média mais fracas que as do processo antigo, foi usado o seguinte teste estatístico com um nível de significância de 5% e um tamanho de amostra de $n = 100$:

- $H_0 : \mu_0 = 300kg$ vs $H_a : \mu_a = 295kg$, em que::
- Se $\bar{X} \leq \bar{X}_c \Longrightarrow$ rejeita-se H_0
- Se $\bar{X} > \bar{X}_c \Longrightarrow$ não se rejeita H_0

(a) Calcule $\bar{X}_c$

(b) Use este teste, para com base numa amostra de tamanho 100, onde se obteve uma média igual a 290kg, tomar a respectiva decisão.

Exercício Nº8 - (a)

No exame de Estatística efectuado na 2ª época no ano lectivo de 2000/2001, foram avaliados 31 alunos. Considerando este alunos como uma amostra representativa da população dos alunos matriculados na cadeira de Estatística e tendo em conta que, para essa amostra, se obtiveram os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{n=31} X_i = 299 \text{ e } \sum_{i=1}^{n=31} (X_i - \bar{X})^2 = 120 \tag{4}$$

Comente a afirmação: A média dos resultados não difere significativamente de 10. Utilize $\alpha = 0.05$

Exercício Nº11

A BUESPEED opera no mercado da União Europeia na área da distribuição de encomendas. A empresa garante que todas as encomendas chegam ao seu destinatário, em média, em menos de 48 horas com uma variabilidade máxima de 8 horas. Para avaliar este desempenho, foram recolhidos os tempos (em horas) relativos a uma amostra de 65 encomendas tendo-se obtido os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{65} X_i = 3250 \text{ e } \sum_{i=1}^{65} X_i^2 = 578500 \tag{5}$$

O que se deve concluir sobre o desempenho da BUESPEED ?

Exercício Nº12 - (a)

Um empresa farmacêutica está disposta a lançar no mercado um medicamento, se 90% dos pacientes tratados com esse novo medicamento ficarem curados. Caso verifique que apenas 70% dos pacientes ficam curados, então não lança o novo medicamento. Para tomar uma decisão, a empresa procedeu ao tratamento com o novo medicamente de 50 docentes, tendo-se registado que 45 deles ficaram curados.

(a) Qual deverá ser a decisão tomada pela farmacêutica? Utilize $\alpha = 0.05$.

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses I

- Retomamos a nossa matriz de confusão, agora com as probabilidades associadas a cada uma das situações:

Decisão Baseada Nas Provas	Situação Real (i.e. Observada) H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não Rejeita H_0	Decisão Correcta: $\mathbb{P} \geq 1 - \alpha$	Erro do Tipo II: $\mathbb{P} = \beta$
Rejeita H_0	Erro do Tipo I: $\mathbb{P} \leq \alpha$	Decisão Correcta: $\mathbb{P} = 1 - \beta$

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses I

- Retomamos a nossa matriz de confusão, agora com as probabilidades associadas a cada uma das situações:

Decisão Baseada Nas Provas	Situação Real (i.e. Observada) H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não Rejeita H_0	Decisão Correcta: $\mathbb{P} \geq 1 - \alpha$	Erro do Tipo II: $\mathbb{P} = \beta$
Rejeita H_0	Erro do Tipo I: $\mathbb{P} \leq \alpha$	Decisão Correcta: $\mathbb{P} = 1 - \beta$

- Erro Tipo I - A Hipótese nula **é rejeitada** quando, de facto, é verdadeira. - O réu é injustamente condenado.

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses I

- Retomamos a nossa matriz de confusão, agora com as probabilidades associadas a cada uma das situações:

Decisão Baseada Nas Provas	Situação Real (i.e. Observada) H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não Rejeita H_0	Decisão Correcta: $\mathbb{P} \geq 1 - \alpha$	Erro do Tipo II: $\mathbb{P} = \beta$
Rejeita H_0	Erro do Tipo I: $\mathbb{P} \leq \alpha$	Decisão Correcta: $\mathbb{P} = 1 - \beta$

- Erro Tipo I - A Hipótese nula **é rejeitada** quando, de facto, é verdadeira. - O réu é injustamente condenado.
- $\mathbb{P}[\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}] \leq \alpha$.
- Erro Tipo II - A Hipótese nula **não é rejeitada** quando, de facto, é falsa. - O réu é injustamente ilibado.

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses I

- Retomamos a nossa matriz de confusão, agora com as probabilidades associadas a cada uma das situações:

Decisão Baseada Nas Provas	Situação Real (i.e. Observada) H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não Rejeita H_0	Decisão Correcta: $\mathbb{P} \geq 1 - \alpha$	Erro do Tipo II: $\mathbb{P} = \beta$
Rejeita H_0	Erro do Tipo I: $\mathbb{P} \leq \alpha$	Decisão Correcta: $\mathbb{P} = 1 - \beta$

- Erro Tipo I - A Hipótese nula **é rejeitada** quando, de facto, é verdadeira. - O réu é injustamente condenado.
- $\mathbb{P}[\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}] \leq \alpha$.
- Erro Tipo II - A Hipótese nula **não é rejeitada** quando, de facto, é falsa. - O réu é injustamente ilibado.
- $\mathbb{P}[\text{Não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é Falsa}] = \beta$.

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses II

- Cada vez que fazemos um teste destes estamos perante um destes erros, dependendo se rejeitamos ou não H_0.

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses II

- Cada vez que fazemos um teste destes estamos perante um destes erros, dependendo se rejeitamos ou não H_0.
- Vamos calcular cada um deles usando o exemplo da pizzaria.

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses II

- Cada vez que fazemos um teste destes estamos perante um destes erros, dependendo se rejeitamos ou não H_0.
- Vamos calcular cada um deles usando o exemplo da pizzaria.
- Testámos se o efeito da promoção levava a uma alteração da procura média de pizzas: $\mu \leq 200$ vs $\mu > 200$.

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses II

- Cada vez que fazemos um teste destes estamos perante um destes erros, dependendo se rejeitamos ou não H_0.
- Vamos calcular cada um deles usando o exemplo da pizzaria.
- Testámos se o efeito da promoção levava a uma alteração da procura média de pizzas: $\mu \leq 200$ vs $\mu > 200$.
- Como formulámos o teste a $\alpha = 0.05$ e rejeitámos H_0 ficamos sujeitos à probabilidade (i.e. medida) do erro *tipo I*:

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses II

- Cada vez que fazemos um teste destes estamos perante um destes erros, dependendo se rejeitamos ou não H_0.
- Vamos calcular cada um deles usando o exemplo da pizzaria.
- Testámos se o efeito da promoção levava a uma alteração da procura média de pizzas: $\mu \leq 200$ vs $\mu > 200$.
- Como formulámos o teste a $\alpha = 0.05$ e rejeitámos H_0 ficamos sujeitos à probabilidade (i.e. medida) do erro *tipo I*:

$$\mathbb{P}[\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é Verdadeira}] \leq \alpha \tag{6}$$

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses II

- Cada vez que fazemos um teste destes estamos perante um destes erros, dependendo se rejeitamos ou não H_0.
- Vamos calcular cada um deles usando o exemplo da pizzaria.
- Testámos se o efeito da promoção levava a uma alteração da procura média de pizzas: $\mu \leq 200$ vs $\mu > 200$.
- Como formulámos o teste a $\alpha = 0.05$ e rejeitámos H_0 ficamos sujeitos à probabilidade (i.e. medida) do erro *tipo I*:

$$\mathbb{P}[\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é Verdadeira}] \leq \alpha \tag{6}$$

- Para o exemplo em causa, esta probabilidade para diferentes valores de μ, para o quais H_0 é verdadeira, é dada por:

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses II

- Cada vez que fazemos um teste destes estamos perante um destes erros, dependendo se rejeitamos ou não H_0.
- Vamos calcular cada um deles usando o exemplo da pizzaria.
- Testámos se o efeito da promoção levava a uma alteração da procura média de pizzas: $\mu \leq 200$ vs $\mu > 200$.
- Como formulámos o teste a $\alpha = 0.05$ e rejeitámos H_0 ficamos sujeitos à probabilidade (i.e. medida) do erro *tipo I*:

$$\mathbb{P}[\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é Verdadeira}] \leq \alpha \tag{6}$$

- Para o exemplo em causa, esta probabilidade para diferentes valores de μ, para o quais H_0 é verdadeira, é dada por:
- $\mathbb{P}[\bar{X} > 208.225|\mu = 200] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-200}{\frac{15}{\sqrt{9}}} > \frac{208.225-200}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z > 1.645] = 0.05$

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses III

- $\mathbb{P}[\bar{X} > 208.225|\mu = 199] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-199}{\frac{15}{\sqrt{9}}} > \frac{208.225-199}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z > 1.845] = 0.03255$

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses III

- $\mathbb{P}[\bar{X} > 208.225|\mu = 199] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-199}{\frac{15}{\sqrt{9}}} > \frac{208.225-199}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z > 1.845] = 0.03255$
- $\mathbb{P}[\bar{X} > 208.225|\mu = 195] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-195}{\frac{15}{\sqrt{9}}} > \frac{208.225-195}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z > 1.845] = 0.00405$
- Quanto maior a diferença face ao valor da hipótese nula (i.e., 200) , menor probabilidade de erro. Porquê ?

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses III

- $\mathbb{P}[\bar{X} > 208.225|\mu = 199] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-199}{\frac{15}{\sqrt{9}}} > \frac{208.225-199}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z > 1.845] = 0.03255$
- $\mathbb{P}[\bar{X} > 208.225|\mu = 195] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-195}{\frac{15}{\sqrt{9}}} > \frac{208.225-195}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z > 1.845] = 0.00405$
- Quanto maior a diferença face ao valor da hipótese nula (i.e., 200) , menor probabilidade de erro. Porquê ?
- É mais difícil de errar quando o verdaedIro valor de μ é tão díspar da hipótese considerada.

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses III

- $\mathbb{P}[\bar{X} > 208.225|\mu = 199] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-199}{\frac{15}{\sqrt{9}}} > \frac{208.225-199}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z > 1.845] = 0.03255$
- $\mathbb{P}[\bar{X} > 208.225|\mu = 195] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-195}{\frac{15}{\sqrt{9}}} > \frac{208.225-195}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z > 1.845] = 0.00405$
- Quanto maior a diferença face ao valor da hipótese nula (i.e., 200) , menor probabilidade de erro. Porquê ?
- É mais difícil de errar quando o verdaediro valor de μ é tão díspar da hipótese considerada.
- Então a probabilidade do Erro Tipo I é dada por:

$$\mathbb{P}\left[\text{Erro Tipo I}\right] = \alpha(\mu), \forall\mu \in \Theta_0 \tag{7}$$

- Onde Θ_0 é o conjunto de valores que torna H_0 verdadeira.

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses IV

- Vamos agora supor que $\alpha = 0.01$, pelo que H_0 não é rejeitada, dado que a amostra $\bar{X} = 210$ e $\bar{X}_c = 211.63$.
- Ao contrário da situação anterior ficamos sujeitos ao erro tipo II, cuja probabilidade é dada por:

$$\mathbb{P}\left[\text{Não Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}\right] = \beta \tag{8}$$

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses IV

- Vamos agora supor que $\alpha = 0.01$, pelo que H_0 não é rejeitada, dado que a amostra $\bar{X} = 210$ e $\bar{X}_c = 211.63$.
- Ao contrário da situação anterior ficamos sujeitos ao erro tipo II, cuja probabilidade é dada por:

$$\mathbb{P}\left[\text{Não Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}\right] = \beta \tag{8}$$

- Para este exemplo concreto, esta probabilidade para vários valores de μ, para os quais H_1 é verdadeira, é dada por:
- $\mathbb{P}[\bar{X} < 211.63|\mu = 200] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-200}{\frac{15}{\sqrt{9}}} < \frac{211.63-200}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z < 2.233] = 0.99$

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses V

- $\mathbb{P}[\bar{X} < 211.63 | \mu = 205] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-205}{\frac{15}{\sqrt{9}}} < \frac{211.63-205}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z < 1.326] = 0.90756$

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses V

- $\mathbb{P}[\bar{X} < 211.63 | \mu = 205] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-205}{\frac{15}{\sqrt{9}}} < \frac{211.63-205}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z < 1.326] = 0.90756$
- $\mathbb{P}[\bar{X} < 211.63 | \mu = 210] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-210}{\frac{15}{\sqrt{9}}} < \frac{211.63-210}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z < 0.326] = 0.62778$

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses V

- $\mathbb{P}[\bar{X} < 211.63 | \mu = 205] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-205}{\frac{15}{\sqrt{9}}} < \frac{211.63-205}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z < 1.326] = 0.90756$
- $\mathbb{P}[\bar{X} < 211.63 | \mu = 210] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-210}{\frac{15}{\sqrt{9}}} < \frac{211.63-210}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z < 0.326] = 0.62778$
- $\mathbb{P}[\bar{X} < 211.63 | \mu = 215] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-215}{\frac{15}{\sqrt{9}}} < \frac{211.63-215}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z < -0.674] = 0.250216$

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses V

- $\mathbb{P}[\bar{X} < 211.63|\mu = 205] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-205}{\frac{15}{\sqrt{9}}} < \frac{211.63-205}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z < 1.326] = 0.90756$
- $\mathbb{P}[\bar{X} < 211.63|\mu = 210] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-210}{\frac{15}{\sqrt{9}}} < \frac{211.63-210}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z < 0.326] = 0.62778$
- $\mathbb{P}[\bar{X} < 211.63|\mu = 215] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-215}{\frac{15}{\sqrt{9}}} < \frac{211.63-215}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z < -0.674] = 0.250216$
- $\mathbb{P}[\bar{X} < 211.63|\mu = 220] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-220}{\frac{15}{\sqrt{9}}} < \frac{211.63-220}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z < -1.674] = 0.0471$
- Quanto maior a diferença face ao valor da hipótese nula (i.e., 200) , menor probabilidade de erro. Porquê ?

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses V

- $\mathbb{P}[\bar{X} < 211.63|\mu = 205] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-205}{\frac{15}{\sqrt{9}}} < \frac{211.63-205}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z < 1.326] = 0.90756$
- $\mathbb{P}[\bar{X} < 211.63|\mu = 210] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-210}{\frac{15}{\sqrt{9}}} < \frac{211.63-210}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z < 0.326] = 0.62778$
- $\mathbb{P}[\bar{X} < 211.63|\mu = 215] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-215}{\frac{15}{\sqrt{9}}} < \frac{211.63-215}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z < -0.674] = 0.250216$
- $\mathbb{P}[\bar{X} < 211.63|\mu = 220] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}-220}{\frac{15}{\sqrt{9}}} < \frac{211.63-220}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right] = \mathbb{P}[Z < -1.674] = 0.0471$
- Quanto maior a diferença face ao valor da hipótese nula (i.e., 200) , menor probabilidade de erro. Porquê ?
- É mais difícil de errar quando o verdadeiro valor de μ é tão díspar da hipótese considerada.

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses VI

- Então a probabilidade do erro tipo II é dada por:

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses VI

- Então a probabilidade do erro tipo II é dada por:

$$\mathbb{P}\left[\text{Não Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}\right] = \beta(\mu_1), \forall \mu_1 \in \Theta_1, \tag{9}$$

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses VI

- Então a probabilidade do erro tipo II é dada por:

$$\mathbb{P}\left[\text{Não Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}\right] = \beta(\mu_1), \forall \mu_1 \in \Theta_1, \qquad (9)$$

- Onde Θ_1 é o conjunto de valores que torna H_1 verdadeira.

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses VI

- Então a probabilidade do erro tipo II é dada por:

$$\mathbb{P}\left[\text{Não Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}\right] = \beta(\mu_1), \forall \mu_1 \in \Theta_1, \qquad (9)$$

- Onde Θ_1 é o conjunto de valores que torna H_1 verdadeira.
- Existe alguma maneira de reduzir estes erros?

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses VI

- Então a probabilidade do erro tipo II é dada por:

$$\mathbb{P}\left[\text{Não Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}\right] = \beta(\mu_1), \forall \mu_1 \in \Theta_1, \quad (9)$$

- Onde Θ_1 é o conjunto de valores que torna H_1 verdadeira.
- Existe alguma maneira de reduzir estes erros?
- Só é possível diminuir os dois erros simultaneamente se pudermos aumentar a dimensão da amostra que implica mais custos.

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses VI

- Então a probabilidade do erro tipo II é dada por:

$$\mathbb{P}\left[\text{Não Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}\right] = \beta(\mu_1), \forall \mu_1 \in \Theta_1, \qquad (9)$$

- Onde Θ_1 é o conjunto de valores que torna H_1 verdadeira.
- Existe alguma maneira de reduzir estes erros?
- Só é possível diminuir os dois erros simultaneamente se pudermos aumentar a dimensão da amostra que implica mais custos.
- Diminuir a probabilidade de um tipo de erro, implica aumentar do outro.

Medidas dos Erros Num Ensaio de Hipóteses VI

- Então a probabilidade do erro tipo II é dada por:

$$\mathbb{P}\left[\text{Não Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}\right] = \beta(\mu_1), \forall \mu_1 \in \Theta_1, \qquad (9)$$

- Onde Θ_1 é o conjunto de valores que torna H_1 verdadeira.
- Existe alguma maneira de reduzir estes erros?
- Só é possível diminuir os dois erros simultaneamente se pudermos aumentar a dimensão da amostra que implica mais custos.
- Diminuir a probabilidade de um tipo de erro, implica aumentar do outro.
- Se α diminui/aumenta $\Longrightarrow$ região crítica diminui/aumenta $\Longrightarrow$ região de aceitação aumenta/diminui $\Longrightarrow$ β aumenta/diminui.

Função Potência do Ensaio

- Precisamos então de uma medida que nos indique que o nosso teste tem qualidade, isto é, se tem capacidade de avaliar quais das hipóteses está certa através de uma amostra.
- Para isto calcula-se o que se chama da função potência do ensaio $\pi(\mu)$.
- É a probabilidade complementar do erro tipo II e como tal é obtida da seguinte forma:

$$\pi(\mu) = \mathbb{P}\left[\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\text{Não Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}\right] = 1 - \beta(\mu_1) \tag{10}$$

- Com $\mu_1 \in \Theta_1$, tal como anteriormente Θ_1 é o conjunto de todos os valores que tornam H_0 falsa.

Exercício Nº3 - (b), (c) e (d)

O Ministério da Saúde afirma que, com os meios agora postos à disposição dos Hospitais Civis, o número médio de dias de internamento é no máximo 15.
Estas declarações foram postas em causa por alguns gestores hospitalares que decidiram proceder à recolha de uma amostra de 225 doentes onde se observou que o número médio de dias de internamento foi de 18.

(b) Na decisão que tomou, qual a probabilidade de estar a cometer um erro ?

(c) Com que probabilidade é dada razão aos gestores hospitalares, se o verdadeiro valor médio de dias de internamento for 117 ?

(d) Como variaria aquela probabilidade se a hipótese alternativa fosse superior ao valor especificado na alínea (3) ? E se o tamanho da amostra aumentasse ?

Exercício Nº9

A **Frigo** é uma conceituada marca de camarão congelado. Quando a linha de empacotamento está bem ajustada, as embalagens pesam 250 gramas com uma variabilidade de 15 gramas. Periodicamente, o técnico responsável pela linha de empacotamento recolhe amostras de 20 embalagens e, caso o peso médio encontrado não se situe entre os 243 e 257 gramas, decide que a máquina terá de ser ajustada. Admita que o peso das embalagens é normalmente distribuído.

(a) Se pretender fazer um ensaio de hipóteses sobre o peso médio das embalagens, que hipóteses irá testar?

(b) Qual o nível de significância que está implícito neste problema?

(c) Esboce o gráfico da função potência deste ensaio, calculando $\Pi(260)$.

Exercício Nº14

Uma agência de publicidade desenvolveu determinado tema para um anúncio baseado no pressuposto de que 50% dos espectadores que o vissem tinham mais de 30 anos. A Agência está interessada em saber se, naquele grupo etário, houve alteração do índice de audiência. Para testar essa possibilidade, a agência efectuou uma sondagem sobre 400 espectadores, escolhidos aleatoriamente, dos quais 210 tinham idade superior a 30 anos. O teste foi efectuado ao nível da significância de 50%.

(a) A que conclusão chegou a agência de publicidade? Justifique.

(b) Represente Graficamente a função potência do ensaio para os telespectadores do referido anúncio, sabendo que: para $p = 0.2$ vem $\beta = 0$; para $p = 0.3$ vem $\beta = 0$; para $p = 0.55$ vem $\beta = 0.48$ e para $p = 0.425$ vem $\beta =?$. Determine β.

(c) A agência de publicidade considerou que se a verdadeira proporção de telespectadores que vêem o referido anúncio fosse de 42.5%, o risco associado à não rejeição da hipótese nula ainda seria elevado. A agência pretende diminuir esse risco. Indique, justificando, que tomadas de decisão são possíveis para atingir esse objectivo.

Exercícios de Outputs de SPSS

- Exercícios com outputs sobre ensaios de hipóteses - Parte A.

Exercício Nº17

Exercícios de Outputs de SPSS

- Exercícios com outputs sobre ensaios de hipóteses - Parte B.

Exercício Nº19

Um nutricionista está convencido que a nova dieta que prescreve aos seus doentes é eficaz no tratamento da obsidade provocando perda de peso ao fim de 4 semanas e, contrariamente a outras dietas reduz o estado de ansiedade dos doentes.

Doente obeso	Peso inicial (Kg)	Peso após 4 semanas (Kg)
1	90	86
2	85	85
3	95	92
4	95	90
5	105	100
6	102	95
7	83	80
8	85	81
9	93	90
10	94	88

Com base na amostra recolhida e cosntante no quadro anterior, considera que o nutricionista tem razão ? Utilize 0.05 como nível de significância.

Exercício Nº19 - Resolução I

- Neste caso temos uma amostra antes da dieta e outra depois da dieta

Exercício Nº19 - Resolução I

- Neste caso temos uma amostra antes da dieta e outra depois da dieta
- X_1 - Peso, em kg, dos doentes antes da dieta.

Exercício Nº19 - Resolução I

- Neste caso temos uma amostra antes da dieta e outra depois da dieta
- X_1 - Peso, em kg, dos doentes antes da dieta.
- X_2 - Peso, em kg, dos doentes após 4 semanas de dieta.

Exercício Nº19 - Resolução I

- Neste caso temos uma amostra antes da dieta e outra depois da dieta
- X_1 - Peso, em kg, dos doentes antes da dieta.
- X_2 - Peso, em kg, dos doentes após 4 semanas de dieta.
- Obviamente que nesta situação não podemos considerar que amostras provenientes da popuação X_1 e amostras provenientes da população X_2 sejam independentes porque X_1 e X_2 não são populações independentes...são o mesmo doente!

Exercício Nº19 - Resolução I

- Neste caso temos uma amostra antes da dieta e outra depois da dieta
- X_1 - Peso, em kg, dos doentes antes da dieta.
- X_2 - Peso, em kg, dos doentes após 4 semanas de dieta.
- Obviamente que nesta situação não podemos considerar que amostras provenientes da popuação X_1 e amostras provenientes da população X_2 sejam independentes porque X_1 e X_2 não são populações independentes...são o mesmo doente!
- Como nada nos é dito relativamente à distribuição da população e o tamanho de cada amostra não permite o uso do teorema do limite central $n \geq 30$, então temos se assumir-mos que:
- $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$

Exercício Nº19 - Resolução II

- Podemos executar um teste de diferença de médias para amostras emparelhadas:

Exercício Nº19 - Resolução II

- Podemos executar um teste de diferença de médias para amostras emparelhadas:

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{S'_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}, \qquad D = X_1 - X_2 \tag{11}$$

Exercício Nº19 - Resolução II

- Podemos executar um teste de diferença de médias para amostras emparelhadas:

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{S'_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}, \qquad D = X_1 - X_2 \tag{11}$$

- Como assumimos anteriormente que X_1 e X_2 são variáveis normais então $D \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2COV(X_1, X_2))$ também segue uma normal e podemos executar o teste.

Exercício Nº19 - Resolução II

- Podemos executar um teste de diferença de médias para amostras emparelhadas:

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{S'_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}, \qquad D = X_1 - X_2 \tag{11}$$

- Como assumimos anteriormente que X_1 e X_2 são variáveis normais então $D \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2COV(X_1, X_2))$ também segue uma normal e podemos executar o teste.
- Então o nosso teste de hipóteses vai ser formalizado da seguinte forma:

Exercício Nº19 - Resolução II

- Podemos executar um teste de diferença de médias para amostras emparelhadas:

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{S'_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}, \qquad D = X_1 - X_2 \tag{11}$$

- Como assumimos anteriormente que X_1 e X_2 são variáveis normais então $D \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2COV(X_1, X_2))$ também segue uma normal e podemos executar o teste.
- Então o nosso teste de hipóteses vai ser formalizado da seguinte forma:
- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$ vs $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$, ou seja:

Exercício Nº19 - Resolução II

- Podemos executar um teste de diferença de médias para amostras emparelhadas:

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{S'_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}, \qquad D = X_1 - X_2 \tag{11}$$

- Como assumimos anteriormente que X_1 e X_2 são variáveis normais então $D \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2COV(X_1, X_2))$ também segue uma normal e podemos executar o teste.
- Então o nosso teste de hipóteses vai ser formalizado da seguinte forma:
- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$ vs $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$, ou seja:
- $H_0 : \mu_D \leq 0$ vs $H_1 : \mu_D > 0$

Exercício Nº19 - Resolução III

- Para um probabildiade do erro tipo I fixa em 5%, $\alpha = 0.05$, temos que $t(95\%; 10-1) = t(95\%, 9) = 1.833$.

Exercício Nº19 - Resolução III

- Para um probabildiade do erro tipo I fixa em 5%, $\alpha = 0.05$, temos que $t(95\%; 10-1) = t(95\%, 9) = 1.833$.
- Trata-se de um teste unilateral à direita: $R.C = [1.833, +\infty]$ e $R.C =]-\infty, 1.833[$

Exercício Nº19 - Resolução III

- Para um probabildiade do erro tipo I fixa em 5%, $\alpha = 0.05$, temos que $t(95\%; 10-1) = t(95\%, 9) = 1.833$.
- Trata-se de um teste unilateral à direita: $R.C = [1.833, +\infty]$ e $R.C =]-\infty, 1.833[$

Doentes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
$D_i = X_1 - X_2$	4	0	3	5	5	7	3	4	3	6	40
$(D_i - \bar{D})$	0	-4	-1	1	1	3	-1	0	-1	2	0
$(D_i - \bar{D})^2$	0	16	1	1	1	9	1	0	1	4	34

- $\bar{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n=10} D_i = \frac{40}{10} = 4$

Exercício Nº19 - Resolução III

- Para um probabildiade do erro tipo I fixa em 5%, $\alpha = 0.05$, temos que $t(95\%; 10-1) = t(95\%, 9) = 1.833$.
- Trata-se de um teste unilateral à direita: $R.C = [1.833, +\infty]$ e $R.C =]-\infty, 1.833[$

Doentes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
$D_i = X_1 - X_2$	4	0	3	5	5	7	3	4	3	6	40
$(D_i - \bar{D})$	0	-4	-1	1	1	3	-1	0	-1	2	0
$(D_i - \bar{D})^2$	0	16	1	1	1	9	1	0	1	4	34

- $\bar{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n=10} D_i = \frac{40}{10} = 4$
- $(S_D')^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n=10}(D_i - \bar{D})^2 = \frac{34}{9} \approx 3,78$

Exercício Nº19 - Resolução III

- Para um probabildiade do erro tipo I fixa em 5%, $\alpha = 0.05$, temos que $t(95\%; 10-1) = t(95\%, 9) = 1.833$.
- Trata-se de um teste unilateral à direita: $R.C = [1.833, +\infty]$ e $R.C =]-\infty, 1.833[$

Doentes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
$D_i = X_1 - X_2$	4	0	3	5	5	7	3	4	3	6	40
$(D_i - \bar{D})$	0	-4	-1	1	1	3	-1	0	-1	2	0
$(D_i - \bar{D})^2$	0	16	1	1	1	9	1	0	1	4	34

- $\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n=10} D_i = \frac{40}{10} = 4$
- $(S'_D)^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n=10} (D_i - \bar{D})^2 = \frac{34}{9} \approx 3,78$
- $S'_D = \sqrt{(S'_D)^2} = \sqrt{3,78} \approx 1,94$

Exercício Nº19 - Resolução IV

- Então a estatística de teste realizada, ou a estatística de teste observada é dada por:

$$T^* = \frac{4-0}{\frac{1,94}{\sqrt{10}}} = 6.52 \tag{12}$$

Exercício Nº19 - Resolução IV

- Então a estatística de teste realizada, ou a estatística de teste observada é dada por:

$$T^* = \frac{4-0}{\frac{1{,}94}{\sqrt{10}}} = 6.52 \qquad (12)$$

- Como $T^* \in$ R.C então rejeito H_0 para este nível de significância e para esta realização da amostra aleatória ou para esta amostra observada. Logo o nutricionista deve ter razão!

Exercícios de Outputs de SPSS

- Exercícios com outputs sobre ensaios de hipóteses - Parte B.