1 Álgebra

Matriz $A_{n\times n}$, a λ_{pp} distintos, b v_{pp} LI
Polinómio característico $\Delta(s) = |sI - A|$
$a \leq b \leq n$. n v_{pp} $\Rightarrow$ diagonalizável.
Diagonalização: $V = [v_{pp1}\ v_{pp2}\ \cdots] \Rightarrow \mathrm{diag}(\lambda_i) = V^{-1}AV$.
Um λ_{pp} defetivo tem multiplicidade geométrica (subespaço) < algébrica; a sua matriz pode ser diagonalizada para a forma de Jordan. Cada bloco tem o λ na diagonal, com uma diagonal de 1 acima. O número de blocos por λ é a sua multiplicidade geométrica.

1.1 Exponencial matricial, e^X

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(At)^k$$

$$e^{A0} = I \qquad \frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$

$$e^{A^T} = \left(e^A\right)^T \qquad e^{A^*} = \left(e^A\right)^*$$

At diagonal, $e^{At} = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_i t}\right)$.

Diagonalizável, $e^{At} = V\,\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_i t}\right)V^{-1}$.

Na forma de Jordan, fica com termos $\frac{e^{\lambda_i t}t^k}{k!}$ acima da diagonal.

2 Tranformada de Laplace

$$t^n \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{s-a} \qquad \delta(t-c) \leftrightarrow e^{-cs}$$

$$\sin(at) \leftrightarrow \frac{a}{s^2+a^2} \qquad \cos(at) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+a^2}$$

3 Representação espaço de estados

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$= C(sI - A)^{-1}B + D$$

3.1 Formas canónicas

Na controlável, a *última linha* de A é $[-a_0 \cdots -a_{n-1}]$ e a de B é 1. $C = [b_0 - a_0 b_n | b_1 - a_1 b_n | \cdots]$ e $D = [b_n]$.
A observável é (A^T, C^T, B^T, D).

3.2 Mudanças de base

$$x = Tz \rightarrow (T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$$

3.3 Evolução temporal

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

3.3.1 Análise modal (reposta livre)

$x(0)$ associado a $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x(t) = e^{\lambda t}x(0)$.

$v = u + jw$ associado a $\lambda = \alpha + j\omega$, os conjugados também o são. $x(0) = u \Rightarrow x(t) = e^{\alpha t}[\cos(\omega t)u - \sin(\omega t)w]$
$\alpha = 0 \rightarrow$ elípse, $\alpha > 0 \rightarrow$ espiral divergente, $\alpha < 0 \rightarrow$ convergente.

4 Estabilidade

4.1 Interna

Caracteriza a evolução do estado do sistema com $u(t) = 0$, definida por $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Ponto de equilíbrio: $x^* : Ax^* = 0$. Para estabilidade interna, $x^* = 0$. Um sistema é:
(Assintoticamente) Estável: Todas as trajetórias convergem para 0, $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$
Lyapunov Estável: Todas as trajetórias são limitadas, $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0 \vee (\mathrm{Re}\{\lambda_i\} = 0 \wedge \lambda_i$ não é defetivo$)$

4.2 Externa (BIBO)

Pólos da FT têm todos parte real negativa. Estabilidade interna $\Rightarrow$ externa.

5 Observabilidade

x_0 é não observável se $u(t) = 0, x(0) = x_0 \Rightarrow y(t) = 0$.

$\Gamma_o(A,C) = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$. Um sistema é observável se o estado nulo for o único não observável $\Leftrightarrow \mathrm{rank}\,\Gamma_o = n \Leftrightarrow \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{bmatrix} = n\,\forall \lambda_i$. O subespaço não observável é $\ker \Gamma_o$.

6 Controlabilidade

x^* é atingível a partir de x_0 se existir u que leve o sistema de x_0 a x^* em tempo finito. x^* é controlável se for atingível a partir de 0. x^* é zero-controlável se 0 for atingível a partir de x^*. $\Gamma_c(A,B) = \left[B\ AB \cdots A^{n-1}B\right]$.
Um sistema é controlável se é possível atingir qualquer $x^* \Leftrightarrow \mathrm{rank}\,\Gamma_c = n \Leftrightarrow \mathrm{rank}[\lambda_i I - A \quad B] = n\,\forall \lambda_i$. O subespaço controlável é o espaço das colunas (imagem) de Γ_c.

7 Cont./Obs. e forma de Jordan

É controlável se só houver um bloco por cada λ_{pp} distinto, e se as linhas de B associadas às últimas linhas de cada bloco sejam não nulas. Para observável é o mesmo, mas com C e primeiras.

8 Decomposições de Kalman

FT: $\tilde{C}_1(sI_r - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1 + D$.

8.1 De controlabilidade

$b_1, \ldots, b_r$ formam uma base do subespaço controlável. $b_{r+1}, \ldots, b_n$ completam a base para $\mathbb{R}^n$. Mudança de coordenadas $x = Tz$, $T = [b_1|\cdots|b_n]$. $A_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $\left(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1, D\right)$ são o subsistema controlável. $\tilde{A}_{21} = \tilde{B}_2 = 0$

8.2 De observabilidade

$b_{r+1}, \ldots, b_n$ formam uma base do subespaço não observável. $b_1, \ldots, b_r$ completam a base para $\mathbb{R}^n$. Mudança de coordenadas $x = Tz$, $T = [b_1|\cdots|b_n]$. $A_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $\left(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1, D\right)$ são o subsistema observável. $\tilde{A}_{12} = \tilde{C}_2 = 0$

9 Realimentação de estado

$$K = [k_0 \quad \ldots \quad k_{n-1}]$$

$$u = -Kx \Rightarrow \dot{x} = (A - BK)x$$

$$|sI - (A - BK)| = \alpha(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots$$

9.1 Forma canónica controlável

A última linha de $A - BK$ fica
$$-a_i - k_i = -d_i \Leftrightarrow k_i = d_i - a_i$$

9.2 Sistema controlável

Aplica-se a fórmula de Ackermann,
$$K = [0\ 0 \cdots 1][\Gamma_c(A,B)]^{-1}\alpha(A)$$

9.3 Sistema não controlável

Faz-se a decomposição de Kalman de controlabilidade, $x = T\tilde{x}$. Vamos ter $u = -\tilde{K}\tilde{x} = -\left[\tilde{K}_1 \quad \tilde{K}_2\right]\tilde{x}$, onde $\tilde{K}_1 = [0\ 0 \cdots 1]\left[\Gamma_c(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)\right]^{-1}\alpha(A)$ é a realimentação da parte controlável, $\tilde{K}_2$ qualquer. $u = -Kx = -\tilde{K}\tilde{x} \Rightarrow K = \tilde{K}T^{-1}$.
Um sistema é estabilizável se os modos não controláveis forem estáveis.

10 Observadores de estado

$$L = [l_0 \quad \ldots \quad l_{n-1}]^T$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L[y - (C\hat{x} + Du)]$$

$$= LCx + (A - LC)\hat{x} + Bu$$

$$e = x - \hat{x} \qquad \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A - LC)e$$

$$|sI - (A - LC)| = \beta(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots$$

Se os λ_{pp} de $A - LC$ forem todos negativos, $e \rightarrow 0$. Os λ_{pp} de uma matriz mantêm-se depois de uma transposição, logo são os mesmos λ_{pp} que os de $A^T - C^T L^T$. Se o par (A^T, C^T) for controlável ($\equiv$ par (A,C) ser observável), podemos colocar os seus valores próprios onde quisermos!

10.1 Forma canónica observável

A última coluna de $A - LC$ fica
$$-a_i - l_i = -d_i \Leftrightarrow l_i = d_i - a_i$$

10.2 Sistema observável

$$L = \beta(A)[\Gamma_o(A,C)]^{-1}[0\ 0 \cdots 1]^T$$

10.3 Sistema não observável

Faz-se a decomposição Kalman $x = T\tilde{x}$. Obtém-se $\tilde{L}_1$ com a fórmula de Ackermann. $L = T\left[\tilde{L}_1^T \tilde{L}_2^T\right]^T$. Um sistema é detetável se os modos não observáveis forem estáveis.
Com realimentação $u = -K\hat{x}$, ficamos com a seguinte dinâmica:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

11 Seguimento e rejeição

$G_c(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)}$ e $G_p(s) = \frac{n_p(s)}{d_p(s)}$ são o compensador e a planta, sem fatores comuns entre nada que possa cortar, e em MF estável $\Leftrightarrow 1 + G_c(s)G_p(s)$ tem todos os zeros no SPE.

11.1 Seguimento de referências

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G_p(s)}R(s)$$

$$= \frac{d_c(s)d_p(s)}{d_c(s)d_p(s) + n_c(s)n_p(s)}\frac{n_r(s)}{d_r(s)}$$

Se os pólos da fração da esquerda são estáveis, então é preciso anular os pólos instáveis de $R \Leftrightarrow$ zeros instáveis de d_r têm de estar em $d_c d_p$.

11.2 Rejeição de perturbações

$$Y(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}D(s)$$

$$= \frac{d_c(s)n_p(s)}{d_c(s)d_p(s) + n_c(s)n_p(s)}\frac{n_d(s)}{d_d(s)}$$

Se os pólos da fração da esquerda são estáveis, então é preciso anular os pólos instáveis de $D \Leftrightarrow$ zeros instáveis de d_d têm de estar em $d_c n_p$.

11.3 Dinâmica acrescentada

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_a \\ B_a(DK - C) & A_a - B_a DK_a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_a \end{bmatrix}r$$

$$y = [C - DK \quad DK_a]\begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix}$$

11.4 Dinâmica acrescentada c/ obs.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_a \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_a \\ 0 \end{bmatrix}r + \begin{bmatrix} A & BK_a & -BK \\ -B_a C & A_a - B_a DK_a & B_a DK \\ LC & BK_a & A - LC - BK \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x_a \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

$$y = [C \quad DK_a \quad -DK]\begin{bmatrix} x \\ x_a \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

Também pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_a \\ \dot{\hat{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_a \\ 0 \end{bmatrix}r + \begin{bmatrix} A - BK & BK_a & BK \\ B_a(DK - C) & A_a - B_a DK_a & -B_a DK \\ 0 & 0 & A - LC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x_a \\ \hat{e} \end{bmatrix}$$

$$y = [C - DK \quad DK_a \quad DK]\begin{bmatrix} x \\ x_a \\ \hat{e} \end{bmatrix}$$

12 Sinais e Sistemas Discretos

12.1 Transformada Z unilateral

$$X(z) = \mathcal{Z}_u[x(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k}$$

RC é sempre o exterior de uma circunferência que inclui ∞.

$$\delta(k) \leftrightarrow 1 \qquad a^k u(k) \leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$x(k-1) \leftrightarrow z^{-1}X(z) + x(-1)$$

$$x(k+1) \leftrightarrow z(X(z) - x(0))$$

12.2 Espaço de estados

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$$y(k+n) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) =$$

$$b_n u(k+n) + \cdots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

$$= C(zI - A)^{-1}B + D$$

12.2.1 Evolução temporal

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{m=0}^{k-1} A^{k-1-m}Bu(m)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

12.2.2 Análise modal (reposta livre)

$x(0)$ associado a $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x(k) = \lambda^k x(0)$.

$v = u + jw$ associado a $\lambda = re^{j\theta}$, os conjugados também o são. $x(0) = u \Rightarrow x(t) = r^k[\cos(k\theta)u - \sin(k\theta)w]$. $r = 1 \rightarrow$ elípse, $r > 1 \rightarrow$ espiral divergente, $r < 1 \rightarrow$ convergente.

12.2.3 Estabilidade interna

Ponto de equilíbrio: $x^* : x^* = Ax^*$. Um sistema é estável quando todas as trajetórias convergem para 0, $|\lambda_i| < 1$; Lyapunov estável: Todas as trajetórias são limitadas, $|\lambda_i| < 1 \vee (|\lambda_i| = 1 \wedge \lambda_i$ não é defetivo$)$

12.2.4 Estabilidade externa (BIBO)

Pólos da FT têm todos módulo menor que 1. Estabilidade interna $\Rightarrow$ externa.

12.2.5 Observabilidade

Igual ao caso contínuo.

12.2.6 Controlabilidade

Os estados controláveis $= \mathrm{Im}\,\Gamma_c(A,B)$.
Se x^* for zero-controlável, $A^n x^* \in$

$\operatorname{Im}\Gamma_c(A,B) \Leftrightarrow A^n x^*$ é controlável. Finalmente, todos os estados controláveis são zero-controláveis, e se se A for invertível $\Rightarrow$ os estados controláveis são os mesmos que os zero-controláveis.

13 Sistemas amostrados

Um sistema discreto com comportamento semelhante ao contínuo ($H(s)$) é um $H_d(z)$ composto por um interpolador de ordem 0 (ZOH), seguido de $H(s)$ e um amostrador no final.

13.1 Amostragem ideal

Com um sinal $x(t)$ e um $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$, temos um sinal amostrado com período de amostragem T, $x_s(t) = x(t)p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\delta(t-kT)$; o sinal em tempo discreto x_d é formado pelas amostras.

13.1.1 Caracterização espectral

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \qquad e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \leftrightarrow \sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$$

$$P(\omega) = \mathcal{F}\{p(t)\} = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - k\omega_s)$$

$$X_s(\omega) = \mathcal{F}\{x_s(t)\} = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * P(\omega)$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega - k\omega_s)$$

$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$; o espetro do sinal amostrado a soma de infinitas cópias do sinal original, deslocadas de um múltiplo de ω_s.

O teorema da amostragem diz-nos que um sinal de largura de banda B ($-B$ a B) é univocamente determinado pelas amostras se $\omega_s > 2B$ ($2B$ é frequência de Nyquist), pois X_s não tem sobreposições. Para isso, usa-se um filtro passa baixo com $B < \omega_c < \omega_s - B$. Caso contrário, dá-se o aliasing.

13.2 ZOH

Sistema com resposta impulsional:

$$h(t) = u(t) - u(t-T)$$

$$\rightarrow H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

Serve para reconstruir um sinal contínuo a partir do discreto, $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)h(t-kT)$.

13.3 Resposta invariante ao degrau

A resposta ao degrau do sistema discreto corresponde à amostragem da resposta ao degrau do sistema contínuo.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\}\Bigg|_{t=kT} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{H_d(z)}{1-z^{-1}}\right\}\Bigg|_k$$

13.4 Equivalente discreto do EE

$$A_d = e^{AT} \qquad B_d = \int_0^T e^{A\tau}\,d\tau B$$

Se A for invertível, $B_d = A^{-1}(e^{AT} - I)B$

Com $\Phi = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow e^{\Phi T} = \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Um sistema amostrado nunca será cont./obs. se o contínuo não o for. Se λ_{pp} distintos no contínuo passarem a ser o mesmo no discreto, então o sistema perde a cont. e obs..

13.5 Relação entre plano s e z

$$z = e^{sT}$$

13.6 Projeto em tempo discreto

Obter equivalente discreto da planta

Projetar ganho em tempo discreto (mapear λ_{pp} e pólos de s em z)

Se precisar de observador e/ou dinâmica adicional, considerar o equivalente discreto (e mapeamentos)

14 Processos estocásticos

Um processo X é estocástico se não for previsível para alguns instantes de tempo. Pode ser caracterizado pela correspondência entre o resultado de uma experiência aleatória e uma função do tempo, onde cada $X_{A,B,\ldots}$ é uma realização do processo. $X(t)$ é uma variável aleatória que se obtém amostrando as diferentes realizações em t. $f_{X(t)}$ é a sua densidade de probabilidade.

14.1 Propriedades

Se X e Y são processos estatisticamente independentes, $f_{X(t_1)X(t_2)\ldots Y(t_1')Y(t_2')\ldots} = f_{X(t_1)X(t_2)\ldots}\cdot f_{Y(t_1')Y(t_2')\ldots}$. X é gaussiano se **todas** as suas densidades (ordem 1, 2, ...) forem gaussianas. X é estacionário se as suas densidades forem invariantes no tempo $f_{X(t_1)X(t_2)\ldots} = f_{X(t_1+\tau)X(t_2+\tau)\ldots}, \forall\tau$. X é estacionário no sentido lato (ESL) se $\mathrm{E}[X(t)]$ não depende de t e $\mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)]$ só depende de $t_2 - t_1$. X é ergódico se as médias temporais $= \mathrm{E}[X(t)]$ ($\equiv$ uma realização tem todas as variações estatísticas de X).

14.2 Ferramentas

Valor médio: $\mathrm{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x)\,dx$

Covariância:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])^T\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[XY^T\right] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]^T$$

M matriz constante

$$\operatorname{cov}(MX) = M\operatorname{cov}(X)M^T$$

X e Y independentes

$$\operatorname{cov}(X,Y) = 0$$

$$\operatorname{cov}(X+Y) = \operatorname{cov}(X) + \operatorname{cov}(Y)$$

Variância: $\operatorname{Var}[X] = \sigma^2 = \operatorname{cov}(X,X)$

Traço $\operatorname{tr}(M)$: Soma dos elementos da diagonal

Autocorrelação:

$$R_X(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

X estacionário

$$R_X(t_1,t_2) = R_X(t_1+\Delta t, t_2+\Delta t)$$

$$\tau = t_2 - t_1 \Rightarrow R_X(\tau) = R_X(t, t+\tau)$$

X não estacionário, Autocorrelação temporal de X_A:

$$R_{X_A}(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X_A(t)X_A(t+\tau)\,dt$$

Propriedades

$$R_X(t_1,t_2) = R_X(t_2,t_1) \Leftrightarrow R_X(\tau) = R_X(-\tau)$$

$$|R_X(\tau)| \le R_X(0) = \mathrm{E}\left[X^2(t)\right]$$

Correlação cruzada:

$$R_{XY}(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)Y(t_2)]$$

X e Y conjuntamente estacionários

$$R_{XY}(\tau) = \mathrm{E}[X(t)Y(t+\tau)]$$

$$= \mathrm{E}[X(t-\tau)Y(t)] = R_{YX}(-\tau)$$

Processo $Z(t) = X(t) + Y(t)$, Z também é estacionário

$$R_Z(\tau) = \mathrm{E}[Z(t)Z(t+\tau)]$$

$$= \mathrm{E}[(X(t)+Y(t))(X(t+\tau)Y(t+\tau))]$$

$$= R_X(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau) + R_Y(\tau)$$

X e Y, $\mathrm{E}[\cdot] = 0$ e não correlacionados

$$\Rightarrow R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau)$$

Densidade espetral de potência: Se $R_X(\tau)$ decai rapidamente com $\tau \Leftrightarrow$ de X variam rapidamente (e o mesmo para lentamente).

$$S_X(j\omega) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

$$R_X(\tau) = \cdots = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(j\omega)e^{j\omega\tau}\,d\omega$$

$$R_X(0) = \mathrm{E}\left[X^2(t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(j\omega)\,d\omega$$

$S_X(j\omega)$ é real, não negativa e simétrica.

Densidade espetral cruzada: X e Y conjuntamente estacionários

$$S_{XY}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \Rightarrow S_{XY} = S_{YX}^*$$

X e Y, $\mathrm{E}[\cdot] = 0$ e não correlacionados

$$\Rightarrow S_{X+Y}(j\omega) = S_X(j\omega) + S_Y(j\omega)$$

14.3 Processos gaussianos

Caracterizado por $\mathrm{E}[\cdot]$ e $R_X(t_1,t_2)$. Se $R_X(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)]\mathrm{E}[X(t_2)] \Rightarrow X(t_1)$ e $X(t_2)$ são independentes e não correlacionados. Se X é ESL $\Rightarrow X$ é estacionário e ergódico. Qualquer operação linear sobre X produz outro processo gaussiano.

14.4 Ruído branco

$$S_X(j\omega) = A \Leftrightarrow R_X(\tau) = A\delta(\tau) \Rightarrow R_X(0) = \infty$$

14.5 Processo de Wiener

$X(t) = \int_0^t F(u)\,du$, F é ruído branco gaussiano unitário, $\mathrm{E}[F(u)] = 0$.

$$\mathrm{E}[X(t)] = \int_0^t \mathrm{E}[F(u)]\,du = 0$$

$$\mathrm{E}\left[X^2(t)\right] = \int_0^t\int_0^t \mathrm{E}[F(u)F(v)]\,du\,dv$$

$$= \int_0^t\int_0^t \delta(u-v)\,du\,dv = t$$

$$\mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \int_0^{t_2}\int_0^{t_1}\delta(u-v)\,du\,dv$$

$$= \min(t_2,t_1)$$

14.6 Resposta de um LTI, $h(t)$

X processo estacionário

$$Y(t) = h(t) * X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)X(t-\lambda)\,d\lambda$$

$$R_{XY}(\tau) = \mathrm{E}\left[X(t)\int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)X(t+\tau-\lambda)\,d\lambda\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)R_X(\tau-\lambda)\,d\lambda = h(\tau) * R_X(\tau)$$

$$R_Y(\tau) = \mathrm{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)X(t-\lambda)\,d\lambda\,Y(t+\tau)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)R_{XY}(\tau+\lambda)\,d\lambda$$

$$= h(-\tau) * R_{XY}(\tau) = h(-\tau) * h(\tau) * R_X(\tau)$$

$$\Rightarrow S_Y(j\omega) = H(-j\omega)H(j\omega)S_X(j\omega)$$

$$= |H(j\omega)|^2 S_X(j\omega)$$

$$\mathrm{E}[Y(t)] = \mu_Y = \mu_X H(0)$$

$$\mathrm{E}\left[Y^2(t)\right] = R_Y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(j\omega)\,d\omega$$

14.7 Processos em tempo discreto

14.7.1 Sequência branca

$f_{Y_k}(y) = f_{Y_l}(y)$, Y_k independentes, $\mathrm{E}[Y_k] = 0$, $\mathrm{E}\left[Y_k^2\right] = 1$ (unitária), Y_k normal (gaussiana).

14.7.2 Marcha aleatória

$Y_k = \sum_{i=1}^k S_i$, S_k independentes

$$P(S_k = 1) = P(S_k = -1) = \frac{1}{2} \qquad \mathrm{E}[S_k] = 0$$

$$\mathrm{E}\left[S_k^2\right] = 1 \qquad \mathrm{E}[S_k S_l] = \delta(k-l)$$

$$\mathrm{E}[Y_k] = 0$$

$$\mathrm{E}\left[Y_k^2\right] = \sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k \mathrm{E}\left[S_i S_j\right] = k$$

$$\mathrm{E}[Y_k Y_l] = \sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^l \mathrm{E}\left[S_i S_j\right] = \min(k,l)$$

Com $t = kT$ e $T \to 0$, o processo de Wiener é o limite da marcha aleatória de amplitude $\sqrt{T}$.

15 Sistemas lineares estocásticos

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Fw_k$$

$$y_k = Cx_k + Gv_k$$

u_k determinístico, $w_k, v_k \to N(0,I)$, x_0 VA gaussiana independente de w_k, v_k.

$$\hat{x}_k = \mathrm{E}[x_k] \Rightarrow \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k$$

$$P_k = \operatorname{cov}(x_k) \Rightarrow P_{k+1} = AP_kA^T + Q$$

$$Q = FF^T \qquad R = GG^T$$

15.1 Filtro de Kalman

$\hat{x}_{k|k-1}$ estimativa a priori (com base até em obs. $k-1$). $\hat{x}_{k|k}$ estimativa a posteriori (com base até em obs. k).

$$\hat{e}_{k|k-1} = x_k - \hat{x}_{k|k-1}$$

$$\hat{e}_{k|k} = x_k - \hat{x}_{k|k}$$

15.1.1 Obtenção de estimativas

$$\hat{x}_{0|0} = \mathrm{E}[x_0]$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = \mathrm{E}[x_{k+1}|Y_k]$$

$$= \mathrm{E}[Ax_k + Bu_k + Fw_k \mid Y_k]$$

$$= A\,\mathrm{E}[x_k|Y_k] + Bu_k = A\hat{x}_{k|k} + Bu_k$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - C\hat{x}_{k|k-1})$$

Determina-se K_k de maneira a minimizar $\mathrm{E}[\cdot]$ do erro quadrático médio,

$$\left\|e_{k|k}\right\|^2 = e_{k|k}^T e_{k|k} = \operatorname{tr}\left(e_{k|k}e_{k|k}^T\right)$$

15.1.2 Evolução das $\operatorname{cov}(\cdot)$ dos erros

$$P_{k|k} = \mathrm{E}\left[e_{k|k}e_{k|k}^T\right] = \operatorname{cov}\left(e_{k|k}\right)$$

$$P_{k|k-1} = \mathrm{E}\left[e_{k|k-1}e_{k|k-1}^T\right] = \operatorname{cov}\left(e_{k|k-1}\right)$$

Como $e_{k+1|k} = x_k - \hat{x}_{k+1|k} = Ae_{k|k} + Fw_k$ e $e_{k|k} = x_k - \hat{x}_{k|k} = (I - K_kC)e_{k|k-1} - K_kGv_k$

$$P_{k+1|k} = AP_{k|k}A^T + Q$$

$$P_{k|k} = (I - K_kC)P_{k|k-1}(I - K_kC)^T + K_kRK_k^T$$

Com ganho ideal, simplificação para

$$P_{k|k} = (I - K_kC)P_{k|k-1}$$

Minimização de $\operatorname{tr}\left(P_{k|k}\right) \rightarrow \frac{\partial\operatorname{tr}(P_{k|k})}{\partial K_k} = 0 = -2(CP_{k|k-1})^T + 2K_k(CP_{k|k-1}C^T + R)$

$$K_k = P_{k|k-1}C^T(CP_{k|k-1}C^T + R)^{-1}$$

15.1.3 Filtro de Kalman em tempo discreto

- Processo e observações y_k
- Atualização da estimativa com base na observação $\hat{x}_{k|k}$
- Atualização da covariância $P_{k|k}$
- Extrapolação $\hat{x}_{k+1|k}$, $P_{k+1|k}$
- Avanço de tempo $k \to k+1$
- Cálculo do ganho de Kalman K_k

16 Extra

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = \frac{r^m - r^{n+1}}{1-r}$$

Feito por Gonçalo Santos