
Fundamentos de Telecomunicações 1 – MIEEC / FEUP

Trabalho sobre

QUANTIZAÇÃO

Conteúdo

1	Objectivo	1
2	Preliminares teóricos	1
3	Experiências.....	3
3.1	Quantização uniforme.....	4
3.2	Distorção introduzida pela quantização	5
3.3	Influência do número de níveis na quantização	7
3.4	Quantização não-uniforme.....	8

1 OBJECTIVO

O objectivo deste trabalho é analisar as operações de quantização uniforme e não-uniforme de um sinal analógico amostrado. Serão abordadas questões como a relação sinal-ruído de quantização e a influência nesta relação do número de níveis de quantização.

2 PRELIMINARES TEÓRICOS

Para se obter um sinal digital PCM a partir de um sinal analógico, este é submetido a três fases de processamento: *amostragem*, *quantização* e *codificação*.

Na primeira fase e de acordo com o teorema da amostragem, a frequência de amostragem deve ser superior ao dobro da frequência máxima presente no sinal analógico. O resultado da operação é um conjunto de amostras de valores iguais às amplitudes do sinal analógico nos instantes em que é amostrado.

A segunda fase de processamento transforma a sequência de amostras numa outra sequência cujas amplitudes fazem parte de um conjunto finito de valores – os chamados *níveis de quantização*, separados uns dos outros por *degraus de quantização*. A operação de quantização substitui, portanto, cada amostra pelo valor do nível de quantização que lhe estiver mais próximo. Se estes níveis estiverem uniformemente distribuídos pela gama dinâmica do quantizador (isto é, se estiverem igualmente espaçados) diz-se que a quantização é *uniforme*. Se, pelo contrário, os níveis não estiverem igualmente espaçados diz-se que a quantização é *não-uniforme*. Neste caso, os degraus de quantização não são todos iguais.

Na terceira fase de processamento – codificação – os valores quantizados do sinal analógico são convertidos (codificados) em números binários de acordo com uma determinada correspondência. Se cada nível de quantização for representado por N bits e houver L níveis no quantizador então $L = 2^N$ ou $N = \log_2 L$.

A quantização introduz um erro na representação do sinal analógico. Esse erro de quantização, ou ruído de quantização, depende do degrau de quantização usado, Δ . Admitindo que os níveis são equiprováveis e igualmente espaçados, a potência média do ruído de quantização vale

$$N_Q = \frac{\Delta^2}{12}.$$

Sendo a gama dinâmica do quantizador $[-m_{max}; m_{max}]$ e sendo P a potência média do sinal, a relação sinal-ruído de quantização vale

$$\left(\frac{S}{N}\right)_Q = \frac{3P}{m_{max}^2} L^2.$$

Expressa em dB e em função do número de bits N a fórmula anterior escreve-se

$$\left(\frac{S}{N}\right)_Q (dB) \approx 4,77 + 6N + 10\log_{10} \frac{P}{m_{max}^2}.$$

Tratando-se de um sinal sinusoidal com amplitude A_m será

$$\left(\frac{S}{N}\right)_Q = \frac{3}{2} \left(\frac{A_m}{m_{max}}\right)^2 L^2$$

ou, em dB e em função de N ,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_Q (dB) \approx 1,8 + 6N + 20\log_{10} \left(\frac{A_m}{m_{max}}\right).$$

A quantização não-uniforme equivale a três operações sucessivas: compressão do sinal amostrado, quantização uniforme e expansão do sinal quantizado. Ao conjunto das operações de compressão e expansão chama-se, em inglês, *companding* (**compressing** + **expanding**). De acordo com as normas internacionais, habitualmente as operações de compressão e expansão realizam-se recorrendo a uma de duas leis: lei A ou lei μ . A primeira é usada nos sistemas PCM europeus e a última é usada nos Estados Unidos, por exemplo.

A lei A é dada pela seguinte expressão de entrada-saída do compressor,

$$y(m) = \begin{cases} \frac{Am}{1 + \ln A} & |m|/m_{\max} \leq \frac{1}{A} \\ m_{\max} \frac{1 + \ln(A|m|/m_{\max})}{1 + \ln A} \text{sign}(m) & \frac{1}{A} \leq |m|/m_{\max} \leq 1 \end{cases}$$

onde m representa a entrada e y representa a saída do compressor. As amostras comprimidas atravessam em seguida um quantizador uniforme e as amostras quantizadas são expandidas de acordo com

$$\hat{m} = y^{-1}(m_Q) = \begin{cases} \frac{(1 + \ln A)m_Q}{A} & |m_Q|/m_{\max} \leq \frac{1}{1 + \ln A} \\ \frac{m_{\max}}{A} \exp \left[(1 + \ln A) \frac{|m_Q|}{m_{\max}} - 1 \right] \text{sign}(m_Q) & \frac{1}{1 + \ln A} \leq |m_Q|/m_{\max} \leq 1 \end{cases}$$

em que m_Q é a entrada do expensor. O parâmetro A toma vulgarmente o valor 87,6. O valor $A = 1$ corresponde à quantização uniforme.

As expressões da lei μ são as seguintes:

$$y(m) = m_{\max} \frac{\ln(1 + \mu|m|/m_{\max})}{\ln(1 + \mu)} \text{sign}(m) \quad |m|/m_{\max} \leq 1$$

$$\hat{m} = y^{-1}(m_Q) = \frac{m_{\max}}{\mu} \left[(1 + \mu)^{|m_Q|/m_{\max}} - 1 \right] \text{sign}(m_Q)$$

Normalmente usa-se $\mu = 255$. O valor $\mu = 0$ corresponde à quantização uniforme.

3 EXPERIÊNCIAS

Vão ser realizadas experiências em ambiente Matlab tendo por base o ambiente de trabalho “Cody Coursework” da Mathworks. Será também explorado o uso de Simulink, com modelos fornecidos, os quais foram testados com a versão Matlab 7.11/Simulink 7.6 (R2010b). Para a realização do trabalho, receberá um convite para se inscrever no curso online, disponível no *Cody Coursework*, designado por “Quantização”. Este ambiente de trabalho permite a criação de tarefas de programação MATLAB para os estudantes e classificação automática do seu trabalho. Mais informação disponível em <https://www.mathworks.com/academia/cody-coursework.html>.

Para referência, indicam-se em seguida os nomes de algumas funções Matlab e de alguns blocos Simulink referentes a operações de quantização:

Matlab:

- compand

- quantiz

Simulink:

- | | |
|----------------------------|--------------------------|
| ▪ Quantizing Encoder | Quantizing Decoder |
| ▪ Scalar Quantizer Encoder | Scalar Quantizer Decoder |
| ▪ A-Law Compressor | A-Law Expander |
| ▪ Mu-Law Compressor | Mu-Law Expander |

Inicialmente vai ser usada quantização uniforme. Verificar-se-á depois porque é que é conveniente proceder-se a uma prévia compressão do sinal e uma posterior descompressão (ou expansão).

Atenção: os valores de certos dados e parâmetros são meramente ilustrativos e podem não ser os que constam das tarefas a executar.

3.1 QUANTIZAÇÃO UNIFORME

1. Obtenha a característica de entrada-saída de um quantizador uniforme de 2 bits/amostra com uma gama dinâmica de entrada de $[-1, 1]$. O quantizador deve ser do tipo *midriser*, ou par (ou seja, o valor zero não é um nível de quantização). Determine quer os níveis de decisão (*boundary points*) quer os níveis de quantização (*quantization codebook*).

Níveis de decisão	Níveis de quantização

Tabela 1 - Níveis de decisão e quantização de um quantizador com 2 bits/amostra

2. Considere a sequência x de oito amostras, em que cada elemento de x representa a amplitude analógica de um impulso no instante de amostragem:

$$x = [0.8, 0.6, 0.2, -0.4, 0.1, -0.9, -0.3, 0.7]$$

Aplique à sequência x a regra de quantização adequada e codifique cada nível de quantização em binário, preenchendo a Tabela 2.

x	x_q	Código binário

Tabela 2- Sequência de entrada e quantizada; código binário

Escreva um script em MATLAB para calcular os níveis de decisão (boundary), os níveis de quantização (codebook) e dada a sequência de entrada, calcule a sequência à saída do quantizador. Faça uso da função do MATLAB, “mquantiz”:

mquantiz:
`[INDX, QUANTV] = QUANTIZ(SIG, BOUNDARY, CODEBOOK)` produces the output value of the quantizer in QUANTV. CODEBOOK is a length N vector that contains the output set.

Compare os resultados da tabela anterior com os que obtém nas variáveis x , x_q do Matlab após a simulação com a sequência de entrada x aplicada ao bloco de quantização.

- Para um quantizador de L níveis e gama dinâmica $[m_{\min}, m_{\max}]$, determine as expressões Matlab que permitam formar os vectores cujos elementos correspondam aos níveis de decisão (boundary) e de quantização (codebook):

```
>> boundary =
>> codebook =
```

Escreva um scrip MATLAB “qnoisepower” que dado o número de bits/amostra e a potência de sinal, calcule a potência do ruído e SNR.

```
[ qnoise, SNR] = qnoisepower ( N, signal_power)
```

3.2 DISTORÇÃO INTRODUZIDA PELA QUANTIZAÇÃO

- Neste problema consideraremos a quantização uniforme de um sinal constituído pela soma de duas sinusóides, cuja amplitude está limitada ao intervalo $[-1,1]$:

$$x_{\text{in}} = (3 \cos(40 \pi t) + 2 \sin(240 \pi t)) * (1/4.902);$$

definido no intervalo de 0 a 100 ms e amostrado à frequência de 10 kHz. Considere uma amostragem com 32 níveis de quantização uniforme. Sugere-se a definição dos vectores `boundary` e `codebook`, através da função:

```
function [boundary, codebook, delta] =
scalar_quantizer_encoder(N,m_min,m_max)
% Uniform Quantizer Encoder
%
%
% Esta função aceita como argumento o número de bits de quantização,
```

% o intervalo de quantização (m_{\min} , m_{\max}) e devolve os níveis de decisão
 % (boundary), os níveis de quantificação (codebook) e o degrau de quantização
 % Δ para um quantificador uniforme

Nota: como o quantizador espera receber sinais de amplitudes não superiores a 1 V o sinal de entrada deste, x , deverá ser normalizado em conformidade.

- Visualize o sinal x_{in} , fazendo um gráfico da sua evolução temporal.
- Obtenha o sinal x_q , quantizado através da função *mquantiz*, usada anteriormente.
- Visualize os sinais x , e x_q e calcule o erro de quantização.

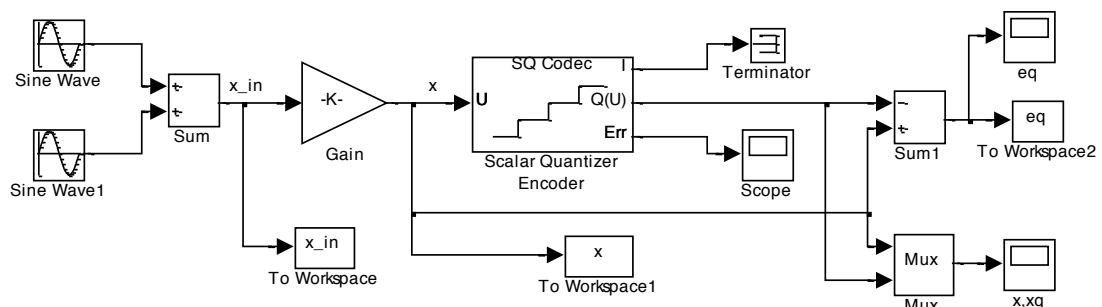
Responda às seguintes questões:

- Qual o valor máximo teórico do erro de quantização, $max_eq_teorico$?
- Qual o valor máximo do erro de quantização estimado na simulação, max_eq_est ?
- Qual a potência média teórica do ruído de quantização, $NQ_teorico$?
- Qual a potência média teórica do ruído estimada a partir da simulação, NQ_est ?
- Calcule o valor da relação sinal-ruído de quantização na simulação, em dB, SNR_dB ?

5. Neste problema irá usar um modelo do Simulink para quantizar e codificar um sinal com amplitude reduzida. Atenue o sinal normalizado x para um décimo do seu valor (chame x_a ao sinal atenuado). e volte a simular o sistema. O sinal a codificar será o mesmo que anteriormente, correspondente à soma de duas sinusóides, mas com uma amplitude 10x menor.

$$x_a = (3 \cdot \cos(40 \cdot \pi \cdot t) + 2 \cdot \sin(240 \cdot \pi \cdot t)) \cdot (1/4.902) \cdot (1/10);$$

Para o efeito use o modelo do Simulink fornecido, *quantiz_model2.mdl*, com um tempo de simulação de 100 ms e uma frequência de amostragem de 1 kHz. Deve também alterar os parâmetros do bloco quantizador de modo a que este tenha 32 níveis de quantização uniforme. Sugere-se a definição prévia no Workspace do Matlab, dos vectores *boundary* e *codebook* (use o código escrito no problema 3, secção 3.1, para gerar estes vectores).



- Ajuste o ganho do bloco *Gain*
- Defina os vectores *boundary* e *codebook* (no workspace do Matlab)
- Corra a simulação durante um tempo de 100ms
- Calcule a potência do sinal atenuado, P_a
- Calcule a potência do ruído
- Calcule a razão sinal-ruído, SNR_dB_a

- Compare este valor com o obtido no problema 4
- Calcule a nova relação sinal-ruído de quantização:

$$\left(\frac{S}{N_q} \right)_a = _ \text{ dB}$$

- Porque é que este valor é mais baixo que o anterior?

Nota: as respostas serão dadas no Cody Coursework, sob a forma de variáveis que deverá calcular com base nos valores obtidos por simulação no Simulink.

3.3 INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE NÍVEIS NA QUANTIZAÇÃO

6. Agora vamos analisar a influência do número de níveis na quantização. Para isso, considere quantizadores com $N = 2, 3, 4, 5$ e 6 bits/amostra e use como sinal de entrada o anterior sinal analógico normalizado x . Corra simulações de 1 segundo de duração (equivalente a 10 000 amostras):

- Observe o espectro de potência do sinal x e compare-o com os espectros dos sinais quantizados, x_q . Nota: o espectro de um sinal x pode ser obtido com o comando seguinte, onde fs é a frequência de amostragem:

`pwelch(x,[],[],[],fs)`

- Efectue o gráfico dos espectros de x e x_q para $N = 2$ e $N = 6$.
- Compare o espectro do sinal original e o sinal quantizado, para diferentes níveis de quantização ($N=2$ e $N=6$) e tire algumas conclusões.
- Continuando com simulações de 1 s preencha a tabela seguinte, onde P representa a potência média estimada do sinal normalizado.

Nº de bits	P	N_q	$(S/N)_q$ dB estimada	$(S/N)_q$ dB teórica
2				
3				
4				
5				
6				

INSTRUÇÕES: Escreva um script MATLAB, para efectuar os seguintes cálculos:

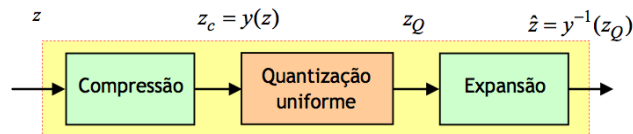
- Instantes de amostragem do sinal a partir do conhecimento da frequência de amostragem, $fs=10$ kHz, e tempo total de simulação.
- Definição da função *signal_quantizer*, para o cálculo do sinal quantizado, x_q .

```
function [P, NQ_teorico, NQ_est, SNR_dB_teorico, SNR_dB_est] =
signal_quantizer(x, Nbits, m_min, m_max, fs)
%
% Dados o sinal x a quantizar, o nº de bits e o intervalo onde o sinal está
definido [m_min, m_max], esta função calcula
% os níveis de decisão e de quantização, boundary e codebook, respectivamente,
em seguida chama a função mquantiz.m para
% o cálculo do sinal quantizado xq.
```

3.4 QUANTIZAÇÃO NÃO-UNIFORME

Nesta secção vamos usar quantização não-uniforme, primeiro com a lei μ e depois com a lei A.

1. A sequência de valores $[1.2, -0.4, 0.1]$ é aplicada a um compressor que segue a lei μ . Admitindo que $m_{\max} = 1,3 \text{ V}$ e que $\mu=10$, determine os valores comprimidos z_c . Aplique-os em seguida a um quantizador uniforme de 16 níveis em $[m_{\min}, m_{\max}]$. Depois, forneça os valores quantizados z_Q ao expansor correspondente e determine os valores descomprimidos, \hat{z} .
 - Escreva um código MATLAB para simular a compressão, quantização e expansão do sinal, considerando um quantizador de 16 níveis.
2. Considere agora o compressor que segue a lei A. Simule o sistema representado na figura seguinte, constituído por um compressor (lei A), quantizador uniforme e expansor.



Configure o quantizador uniforme para $L = 32$ níveis, tome $A = 87,6$ e $m_{\max} = 1 \text{ V}$ e aplique ao compressor o sinal x usado nas secções anteriores, constituído pela soma de duas sinusóides.

Para o efeito use a função do MATLAB *compand*

`compand` Source code [mu-law or A-law compressor or expander](#).

```

% OUT = compand(IN, PARAM, V) computes mu-law compressor with mu
% given in PARAM and the peak magnitude given in V.

% OUT = compand(IN, PARAM, V, METHOD) computes mu-law or A-law
% compressor or expander computation with the computation method given
% in METHOD. PARAM provides the mu or A value. V provides the input
% signal peak magnitude. METHOD can be chosen as one of the following:
% METHOD = 'A/compressor' A-law compressor.
% METHOD = 'A/expander' A-law expander.

```

Efectue os cálculos pedidos usando os resultados obtidos numa simulação de 1 s.

- Calcule a potência média do novo ruído de quantização:

$$N_{Q_c} = \text{_____} V^2$$

- Calcule a relação sinal-ruído de quantização:

$$\frac{S}{N_{Q_c}} = \text{_____} \text{ dB}$$

- Compare este valor com o que antes calculou com quantização uniforme e comente.

Repita o passo anterior com o sinal atenuado x_a .

- Calcule a potência média do ruído de quantização associado:

$$N_{Q_{ac}} = \text{_____} V^2$$

Calcule a relação entre a potência do sinal atenuado e a potência do ruído de quantização:

$$\frac{S}{N_{q_{ac}}} = \text{_____ dB}$$

Contava que esta relação fosse maior ou menor que a situação anterior (descrita no ponto 5, secção 3.2)? Justifique.

- Para terminar, preencha a tabela seguinte:

Nº de níveis do quantizador	Relação $(S/N)_{q_{ac}}$ dB			
	Sinal x		Sinal atenuado x_a	
	Quantização uniforme	$A = 87,6$	Quantização uniforme	$A = 87,6$
8				
32				
128				

O que conclui dos valores da tabela?