## Solución de Ecuaciones Cúbicas Generales

## David G. Torres Flores

## Noviembre 2019

Considere una ecuación cúbica en forma general:

$$au^3 + bu^2 + cu + d = 0.$$

A lo largo de este breve texto, ilustraremos cómo encontrar una solución exacta y explícita para dicha expresión. Nuestra solución será siempre un número real, aunque en algunos casos deberemos usar los números complejos para calcularla. Procedemos como sigue: En primer lugar, dividiendo por el coeficiente principal si hace falta, es sencillo transformar la ecuación anterior en la ecuación

$$u^{3} + \left(\frac{b}{a}\right)u^{2} + \left(\frac{c}{a}\right)u + \left(\frac{d}{a}\right) = 0.$$

Renombrando  $b'=\frac{b}{a},\,c'=\frac{c}{a},$  y  $d'=\frac{d}{a},$  podemos escribir esta ecuación como

$$u^3 + b'u^2 + c'u + d' = 0.$$

La ecuación anterior tiene las mismas soluciones que la ecuación original. Procedemos ahora a realizar la sustitución  $u=x-\frac{b}{3}$ . Esta sustitución traslada las soluciones  $\frac{b}{3}$  unidades a la derecha (si b<0, la traslada a la izquierda  $\left|\frac{b}{3}\right|$  unidades ). Observamos que al desarrollar la ecuación anterior, obtendremos una ecuación de la forma

$$x^3 + px + q = 0.$$

Nótese que dicha ecuación carece de término cuadrático. Esta forma se llama la forma reducida de la ecuación cúbica original. Como acabamos de ver, cualquier ecuación puede transformarse en su forma reducida mediante una simple traslación. Hecho esto, consideraremos la ecuación cuadrática

$$z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

A esta ecuación le llamaremos la ecuación cuadrática asociada a la forma reducida. El cómo obtuvimos esta ecuación será discutido más adelante. Por lo pronto, es suficiente saber que si  $z_1$  y  $z_2$  son las soluciones de la ecuación cuadrática asociada, entonces  $x_1 = \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}$  es una solución de la ecuación original.

Además, el signo del discriminante, que en este caso es equivalente al signo de  $\Delta = \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$  de esta última ecuación nos dice cuántas soluciones reales tiene nuestra ecuación original. Si  $\Delta = 0$  nuestra ecuación tiene dos soluciones reales. Si  $\Delta > 0$  nuestra ecuación tiene una solución real, y si  $\Delta < 0$  nuestra ecuación tiene tres soluciones reales.

Matematicas (NAO). Consiste de un examen a dos dias. En esta competencia, cada

Veamos ahora la resolución de un problema completo, desde el inicio. Resolvamos la ecuación

$$2u^3 - 6u^2 + 18u - 18 = 0.$$

$$2u^{3} - 6u^{2} + 18u - 18 = 0$$

$$u^{3} - 3u^{2} + 9u - 9 = 0$$

$$Tomamos \ u = x - \frac{3}{3} = x - 1$$

$$(x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 9(x-1) - 9 = 0$$

$$x^3 + 6x - 2 = 0$$

Consideramos entonces la ecuación cuadrática asociada:

Por lo tanto,  $u_1 = 1 + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$  es una solución de la ecuación cúbica  $2u^3 - 6u^2 + 18u - 18 = 0$ . Para practicar, resuelva las siguientes ecuaciones:

1. 
$$x^3 - 3x + 3x + 7 = 0$$
.

$$5.5 \cdot x^3 - 9x + 6 = 0$$
. The problems is materialized. Cade concursante presenta por

Al Concurso Internacional pueden asistir un máximo de 6 alumnos y dos profesores por país. Uno de los profesores, flamado Jefe de la Delegación, se une a los demás Jefes de Delegación para constituir el Jurado. El Jurado se reune unos días antes de iniciar el Concurso para discutir la selección de los problemas que formarán el examen, la redacción de los enunciados y la traducción de los mismos al idioma natural de cada paí La selección se hace a partir de un banco de problemas que elabora cuidadosamente un grupo de profesores durante los meses previos al Concurso y que han sido extraídos de colaboraciones de todos los países participantes.

En 1959 Rumania organizó la Primera Olimpiada Internacional de Matemáticas con la participación de sólo 7 países: Hungria, la URSS, Bulgaria, Polonia, Checoslovaquia, la República Democrática Alemana y Rumania. A partir de entonces la Olimpiada Internacional se celebra año con año (casi siempre en julio) y desde 1981 cuenta con la participación de países de los cinco continentes, principalmente de Europa, Asia y América.