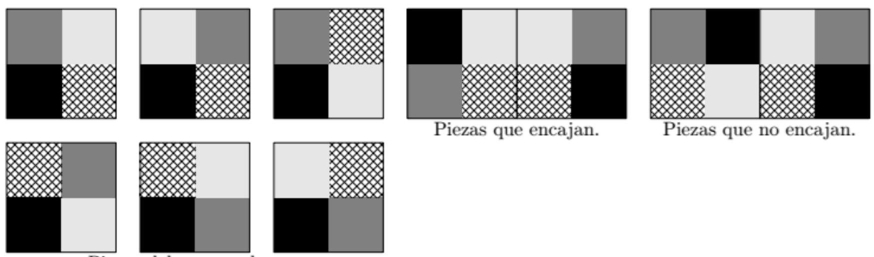
38^a **Olimpiada Mexicana de Matemáticas**
Concurso Nacional

Oaxtepec, Morelos 5 de noviembre de 2024
Primer día

Problema 1. En la figura, se muestran las 6 maneras distintas en que se puede colorear un cuadrado de 1×1 subdividido en 4 cuadritos de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ con cuatro colores distintos (dos coloreados se consideran iguales si es posible rotar uno para obtener el otro). Cada uno de estos cuadrados de 1×1 se usará como pieza de un rompecabezas. Las piezas se pueden rotar, pero no reflejar. Dos piezas *encajan* si al unirlas por un lado completo, los cuadritos de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ a ambos lados del lado por el que se unen son del mismo color (ver ejemplos). ¿Es posible armar un rompecabezas de 3×2 utilizando cada pieza exactamente una vez y de forma que todas las piezas adyacentes encajen?



Piezas que encajan. Piezas que no encajan.

Piezas del rompecabezas.

Problema 2. Determina todas las parejas (a, b) de enteros que satisfacen

- $5 \leq b < a$,
- Existe un número natural n tal que los números $\frac{a}{b}$ y $a - b$ son divisores consecutivos de n, en ese orden.

Nota. Dos enteros positivos x, y son divisores consecutivos de m, en ese orden, si no existe un divisor d de m tal que $x < d < y$.

Problema 3. Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo, y sean A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 y F_1 los puntos medios de AB, BC, CD, DE, EF y FA, respectivamente. Se construyen los puntos A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 y F_2 en el interior de $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ tales que:

- El dodecágono $A_2A_1B_2B_1C_2C_1D_2D_1E_2E_1F_2F_1$ tiene sus 12 lados iguales y
- $\angle A_1B_2B_1 + \angle C_1D_2D_1 + \angle E_1F_2F_1 = \angle B_1C_2C_1 + \angle D_1E_2E_1 + \angle F_1A_2A_1 = 360°$, donde todos los ángulos son menores a $180°$,

prueba que $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ es cíclico.

Nota: El dodecágono $A_2A_1B_2B_1C_2C_1D_2D_1E_2E_1F_2F_1$ tiene forma de estrella de seis picos, donde los picos son A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 y F_1.

Cada problema vale 7 puntos y tienes una hora para preguntas.
Tiempo máximo del examen: 4.5 horas.

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo con ortocentro H y sea M un punto del segmento BC. La recta por M y perpendicular a BC, corta a las rectas BH y CH en los puntos P y Q, respectivamente. Muestra que la recta AM pasa por el ortocentro del triángulo HPQ.

Problema 5. Sean A y B conjuntos infinitos de números reales positivos tales que:

- Para cualquier par de elementos $u \geq v$ de A, se cumple que $u + v$ es un elemento de B.
- Para cualquier par de elementos $s > t$ de B, se cumple que $s - t$ es un elemento de A.

Prueba que $A = B$ o existe un número real r tal que $B = \{2r, 3r, 4r, 5r, \dots\}$.
Nota: Un conjunto es una colección de objetos tal que cada objeto aparece a lo más una vez dentro del conjunto. A estos objetos se les denomina *elementos* del conjunto.

Problema 6. Ana y Beto juegan en un pizarrón donde se han colocado los números del 1 al 2024. En cada turno Ana escoge tres números a, b, c escritos en el pizarrón y en su turno Beto los borra y reescribe alguno de los números

$$a + b - c, a - b + c, \text{ ó } -a + b + c.$$

El juego termina cuando quedan solamente dos números y Ana no puede hacer su jugada. Si la suma de los números que quedan al final es múltiplo de 3, Beto gana. En caso contrario, gana Ana ¿Quién puede asegurar su victoria?

Cada problema vale 7 puntos y tienes una hora para preguntas.
Tiempo máximo del examen: 4.5 horas.