Construcciones con regla y compás

Entrenamiento #6 Rumbo al Nacional
22-25 de octubre de 2015
Por: Clemente

Resumen

Esta semana ocurre algo muy curioso: la lista se separa en dos partes y ésta es la número 1. La razón de ser de esto es que se les va a facilitar más aprender a gatear y luego a caminar. O sea, construir antes de investigar qué rollo con las construcciones geométricas. Así, por lo pronto saquen el juego geométrico.

1. Un poco de historia: Construcción con regla y compás

¿Alguna vez se han dado cuenta de que me gusta hablar de los hechos históricos alrededor de las matemáticas? Pues aquí les va un poco de cultura.

La construcción con regla y compás es una cura griega de la geometría clásica en la que a nuestros amigos filósofos les daba por querer hacer construcciones geométricas con sólo una regla y un compás ideales. Pero, ¿qué es ésto? Pues miren, la regla ideal es una regla infinitamente larga, no graduada y de un solo lado, de manera que no se puede trazar dos segmentos iguales a traves de mediciones y tampoco pueden trazar rectas paralelas. El compás ideal se puede abrir tanto como uno guste, pero en cuanto uno termina de trazar la circunferencia éste se cierra y "olvida" qué tanto se había abierto.

Como ven, la cura de los griegos no ha pasado tanto de moda y llega a ustedes en forma de una lista de problemas. Claro, bajo estas restricciones tiene un poquito más de chiste hacer las construcciones geométricas, pero nada con lo que ustedes no puedan. Además de que ustedes tienen la ventaja de que el conocimiento de la geometría ha avanzado bastante en los últimos 2000 años.

Ahora, para dejar en claro qué es lo que si pueden hacer, les enlisto los 5 trazos básicos que se pueden hacer:

1. Trazar un segmento que pasa por dos puntos (lo pueden extender a una recta infinita).
2. Trazar una circunferencia con centro en un punto y que pasé por otro punto.
3. Encontrar el punto de intersección entre dos rectas no paralelas.
4. Encontrar el o los puntos en los que intersectan una recta y una circunferencia.
5. Encontrar el o los puntos en los que intersectan dos circunferencias.

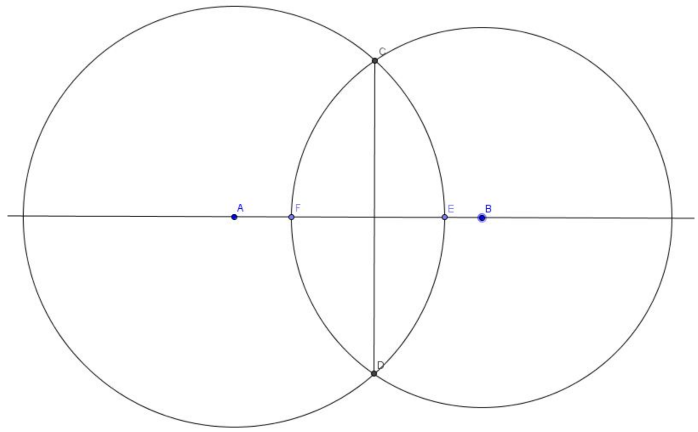
Cualquier otra cosa que quieran trazar, será una combinación de esos 5 trazos, una buena dosis de imaginación y la aplicación de algún teorema conocido.

Y bueno, ¿a quién se le antoja un ejemplo? Porque aquí va uno básico.

1.1. Ejemplo

Dada una recta ℓ en el plano, traza una perpendicular a ella con regla y compás.

Solución: Se toman dos puntos A y B en la recta. Se trazan dos circunferencias C_1 y C_2 con radios r_1 y r_2 y centros en A y B, respectivamente. Sean C y D las intersecciones entre C_1 y C_2, entonces CD es el eje radical de dichas circunferencias y es perpendicular a ℓ.



Fácil, ¿no? Además, desde aquí se puede ver cómo trazar la mediatriz de un segmento, ¿verdad? Igual dejaré eso como ejercicio.

2. Agregados culturales

1. Los problemas más famosos de regla y compás son: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la construcción del heptágono regular. Todos éstos son imposibles de dibujar.
2. Supongamos que alguien se alocara y en vez de usar regla y compás, sólo quisiera usar un compás. Curiosamente, podría obtener las mismas construcciones que antes, excepto por el hecho de trazar rectas. Ésto se conoce como teorema de Morh-Mascheroni.
3. Si alguien más se alocara, y en vez de usar sólo un compás se arma de sólo una regla, la única manera de que pueda conseguir los mismo trazos que conseguiría con ambos utensilios es si previamente tiene una circunferencia ya trazada con todo y centro. Ésto se conoce como el teorema de Poncelet-Steiner.

3. Ejercicios

1. Traza la mediatriz de un segmento con regla y compás.
2. Traza la bisectriz de un ángulo con regla y compás.
3. Dibuja un hexágono regular.
4. Dibuja un triángulo equilátero.
5. Dibuja un cuadrado.

4. Problemas

1. Dadas dos rectas paralelas ℓ y m y A un punto externo a éstas, trazar una recta paralela a ℓ y m por A.
2. Dadas dos rectas paralelas ℓ y m y el segmento AB sobre ℓ, aumenta el segmento AB n veces.
3. Dadas dos rectas paralelas ℓ y m, el segmento AB y el punto C ambos sobre ℓ, construye sobre ℓ el segmeno CD igual al segmento AB.

4. Trazar un triángulo por los puntos de intersección de las prolongaciones de la bisectriz, la mediana y la altura que parten de un mismo vértice, con el círculo de la circunferencia circunscrita al triángulo.
5. Inscribir el triángulo ABC en una circunferencia dada, si se conocen el vértice A, la dirección de la altura h_A y el punto de intersección de la altura h_B con la circunferencia.
6. Cortar un trapecio con una recta paralela a la base, de modo que el segmento de esta recta dentro del trapecio se divida por las diagonales en tres partes iguales.
7. Construir un cuadrado, si se conocen uno de sus vértices y dos puntos ubicados en los lados, o sus continuaciones, que no pasan por el vértice dado.
8. En un triángulo dado, inscribir haciendo uso de un compás y una regla, un rectángulo con una de sus diagonales dadas.
9. Dada una circunferencia y su centro, inscribir un cuadrado en dicha circunferencia con sólo regla.
10. Se tienen una recta CD y dos puntos A y B no pertenecientes a esta recta. Hallar en la recta dada un punto M de modo que $\angle AMC = 2\angle BMD$.
11. Dada una circunferencia, su centro y una recta ℓ, trazar una recta paralela a ℓ a través de un punto P con sólo regla.
12. Dada una circunferencia, su centro y una recta ℓ, trazar una recta perpendicular a ℓ a través de un punto P con sólo regla.
13. Se conocen las longitudes de los lados AB, BC, CD, DA de un cuadrolátero si se sabe que la diagonal AC divide al ángulo A por la mitad.
14. A través de un punto M que se encuentra en la base AC de un triángulo $\triangle ABC$, trazar una recta MN que separe del triángulo una parte, de manera que su área sea igual a $\frac{1}{k}$ del área de todo el triángulo. ¿Cuántas soluciones tiene el problema?
15. A una circunferencia dada circunscribir un triángulo, si se conocen uno de sus ángulos y el lado opuesto a éste. Hallar la condición de solubilidad de este problema.