

**UNIVERSIDAD DE COSTA RICA**  
ESCUELA DE MATEMÁTICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA Y CIENCIAS ACTUARIALES  
ANÁLISIS DE INSTRUMENTOS DE INVERSIÓN

---

**Segundo laboratorio**

---

**Modelo de Nelson y Siegel**

Realizado por

---

Cervantes Artavia Joshua

---

Sabater Guzmán Daniel

---



UNIVERSIDAD DE  
**COSTA RICA**

**EMat** Escuela de  
Matemática

---

# Índice general

---

<b>Índice general</b>	<b>I</b>
<b>1 Resumen Ejecutivo 1</b>	<b>1</b>
<b>2 Introducción 1</b>	<b>2</b>
<b>3 Objetivos 1</b>	<b>3</b>
1. Objetivo general . . . . .	3
2. Objetivos específicos . . . . .	3
<b>4 Marco teórico 3</b>	<b>4</b>
<b>5 Descripción de los datos 5</b>	<b>6</b>
1. Opción 1 . . . . .	7
2. Opción 2 . . . . .	8
<b>6 Metodología 1</b>	<b>12</b>
1. Opción 1 . . . . .	12
2. Opción 2 . . . . .	15
<b>7 Conclusiones y recomendaciones 1</b>	<b>17</b>
<b>8 Referencias bibliográficas</b>	<b>18</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>19</b>
<b>9 Anexos</b>	<b>20</b>

*Capítulo 1*

---

## **Resumen Ejecutivo 1**

---

Aquí debe dar resultados generales de lo que obtuvo del análisis.

*Capítulo 2*

---

## **Introducción 1**

---

## *Capítulo 3*

---

# **Objetivos 1**

---

## **1. Objetivo general**

Analizar la curva de rendimiento de los bonos del tesoro de Estados Unidos de Norte América por medio del modelo de Nelson y Siegel en el periodo de años comprendido entre el 1º de enero del 2010 y el 20 de mayo del 2021.

## **2. Objetivos específicos**

1. Explicar el modelo de Nelson y Siegel.
2. Describir las características de la base de datos de los bonos del tesoro de Estados Unidos de Norte América.
3. Implementar el modelo de Nelson y Siegel en lenguaje de programación R, para la base de datos de los bonos del tesoro de Estados Unidos de Norte América.
4. Evaluar los resultados obtenidos apartir del modelo de Nelson y Siegel.

## Capítulo 4

---

### Marco teórico 3

---

La curva de rendimiento es una herramienta útil a la hora de quererse invertir o negociar un instrumento financiero y al momento de aplicar políticas monetarias. Primero se presenta una tabla con fórmulas y qué representan cada una

Notación	Información
$y_T$	Tasa de rendimiento
$y_k$	Tasa Spot, es la tasa pagada. Ligada al tiempo de maduración.
$f_k$	La tasa forward es la tasa efectiva en un año o periodo dadas las spot $\frac{(1+y_k)^k}{(1+y_{k-1})^{k-1}} - 1$
$T$	Tiempo para la maduración.
$B_0$	Costo de la inversión o precio del bono.
$F$	Facial, también puede ser igual al valor de redención pero no siempre es así.
$R$	Valor de redención, es el monto pagado a parte de los cupones
$C$	Tasa de cupón que se paga de forma periodica que se hace sobre el valor del facial.

Se procede a explicar qué es la curva de rendimiento, según Boudreault y Reanud (2019) la curva de rendimiento también llamada curva de rendimientos spot, esta curva muestra la relación que hay entre las tasa de rendimiento spot y el tiempo de maduración. Así esta curva muestra los rendimientos que se obtienen de mantener una cierta cantidad de dinero durante un tiempo determinado. Para el caso de bonos cero cupón se puede calcular usando

$$y = \left( \frac{F}{B_0} \right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

Cabe destacar que si ya se tiene la tasa spot de los anterior se puede determinar el precio del bono. Para el caso de los bonos cuponados el precio se calcularía usando

$$B_0 = \sum_{i=1}^T \frac{CF}{(1+y_i)^i} + \frac{R}{(1+y_T)^T}$$

Sin embargo a pesar de que esta herramienta es ampliamente utilizada, tiene una limitante intertemporal. Como lo expone Camilo (2008) esta se construye a través de una serie de tasas (precios) de instrumentos financieros discontinuos en el tiempo. Esto implica que entonces lo se ubica a partir de las tasas de rendimiento es una serie de puntos que no reflejan de forma continua las tasas de rendimiento en el mercado financiero de acuerdo a su tiempo de maduración.

Sin embargo hay agentes los cuales no están dispuestos a invertir o prestar los montos al tiempo establecido por agentes como los gobiernos nacionales u otras empresas. Es por esta razón que sería de utilidad encontrar una curva suave la cual sea capaz de proyectar las tasas de rendimiento en distintos momentos del tiempo, pero basado en lo que anteriormente han establecido agentes como los gobiernos nacionales.

Para lograr obtener una curva suave la cual se aproxime a las tasas de rendimiento de agentes como los gobiernos, se emplean distintos métodos entre ellos los métodos paramétricos que están basados en la construcción de curvas a partir de modelos paramétricos. (Choudhry, 2010)

Entre los modelos paramétricos se encuentra el de Nelson-Siegel. El cual según Matteson (2015) describe las tasas forward con la siguiente curva

$$f(t, \theta) = \theta_0 + (\theta_1 + \theta_2 t) \exp(-\theta_3 t)$$

A partir de esta se puede obtener que la curva de rendimiento continua se puede obtener haciendo

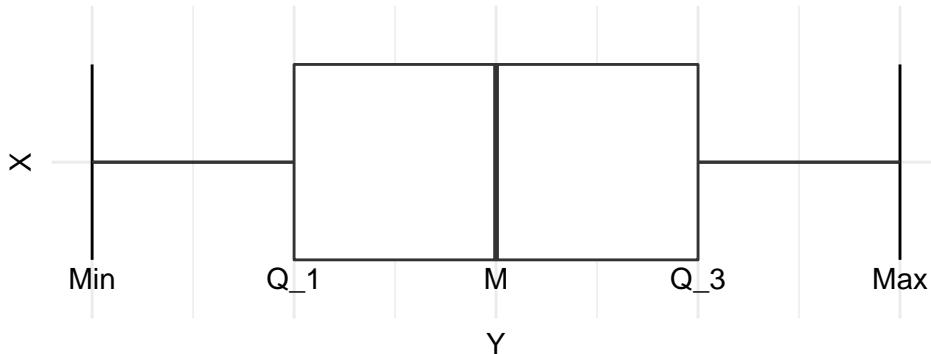
$$\begin{aligned} y(t, \theta) &= t^{-1} \int_0^t r(x, \theta) dx \\ &= \theta_0 + \left( \theta_1 + \frac{\theta_2}{\theta_3} \right) \frac{1 - \exp(-\theta_3 t)}{\theta_3 t} - \frac{\theta_2}{\theta_3} \exp(-\theta_3 t) \end{aligned}$$

Tal y como lo citan Hladíková y Radová (2012) este modelo tiene una interpretación económica interesante para los parámetros. Tomando la curva que describe las tasas forward Primero

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, \theta) = \theta_0 \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t, \theta) = \theta_0 + \theta_1$$

- Entonces  $\theta_0 > 0$  representa la asintota de la curva zero cupón
- La suma de los parámetros  $\theta_0 + \theta_1$  representa el valor inicial de la curva de tasas forward por lo que  $\theta_0 + \theta_1 > 0$
- También  $\theta_1$  puede ser explicada como la curvatura de la función o la diferencia entre las tasas de forward de termino largo y termino corto.

Se procede a explicar los gráficos de caja y bigotes. Estos gráficos muestran 5 datos relevantes de los datos, así como la dispersión. En estos se muestran el dato con el valor más bajo (mínimo), la mediana de la primera mitad de los datos (cuartil 1,  $Q_1$ ), la mediana de todos los datos (cuartil 2,  $Q_2$ ), la mediana de la segunda mitad de los datos (cuartil 3  $Q_3$ ) y la observación de mayor valor (máximo), así como los posibles outliers. De los gráficos de caja y bigotes existen variaciones. Al momento de hacerse un gráfico de este estilo hay que tener presente varias desventajas como lo es el visualizar como están distribuidos los datos, con respecto a los distintos cuartiles. (Marmolejo, 2011)



## *Capítulo 5*

---

# **Descripción de los datos 5**

---

Profesora, estuvimos investigado bases de datos donde nos dieran como insumo el precio de los bonos, nos encontramos con varios inconvenientes de las misma:

1. El registro de datos es muy corto, aproximadamente 1 mes como mucho, más que todo datos eran de un día específico y no guardan registro de los anteriores.
2. En Bonos cero cupones, para calcular las tasas, el plazo de maduración máximo fue a 10 años, posterior a 10 años tienen cupón y no se puede hacer bootstrapping.
3. No se tiene presente la tasa de descuento para estos bonos de más de 10 años, por lo que no se puede traer a valor presente, para calcular su respectiva tasa de pendiente
4. Estos inconvenientes se mantenían en todas las bases de datos que hemos encontrado, las cuales han sido muy pocas por el siguiente punto.
5. En sus mayorías las bases de datos con una cantidad aceptable de observaciones se encuentran las tasas de rendimiento (spot)

Tal vez nos podría dar alguna indicación con respecto a estas bases de datos o sugerir una en específico, para así poder avanzar en el desarrollo del proyecto o en su defecto trabajar solo con las bases de datos que contienen a las tasas de rendimientos, como la que se está trabajando en este momento.

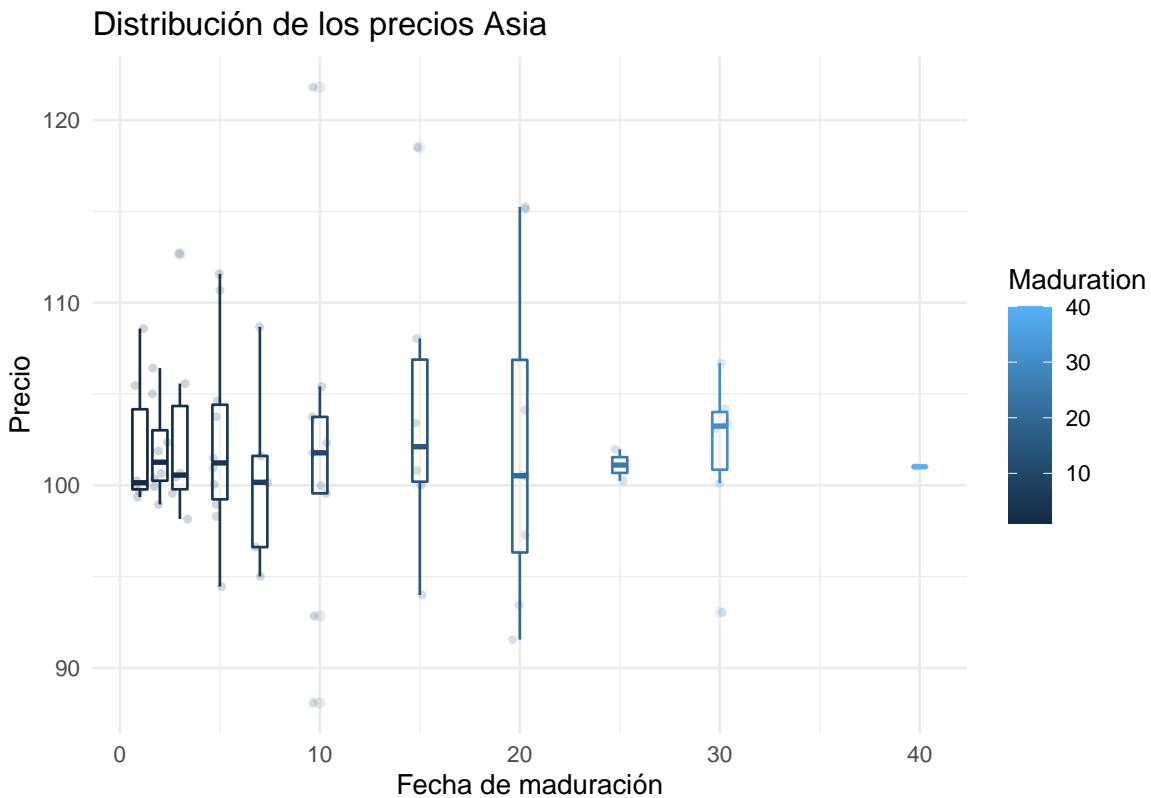
Por lo anterior le presentamos dos ideas para desarrollar el trabajo, la primera partiendo de los precios de los bonos con una base de datos que a nuestro parecer no es la mejor, pues no cuenta con amplitud de observaciones ni rendimientos a largo plazo y la segunda con una base de datos que cuenta con las tasas de rendimiento únicamente, pero con grandes cantidades de observaciones y amplitud de fechas de maduración.

## 1. Opción 1

Encontramos los datos de la región de Asia descargados el día 21 de mayo del 2021 de la página <https://es.tradingview.com/markets/bonds/prices-asia/>. Lo que sucede con estos datos es que algunos bonos cuentan con cupones y no se cuenta con las tasas para traer los flujos a valor presente.

Lo que pensamos es que se podría hacer es intentar calcular las tasas spot de una forma similar a la que se presenta en el código de la metodología el último gráfico donde basado en los cupones y precio del bono, así como su tiempo de maduración se usa el modelo de Nelson y Siegel. Se planteaba la idea de sacar las tasas para los países de la región y sacar un promedio de estas para visualizar cuáles podrían ser las tasas de los bonos en esta región (pues no se cuenta con el registro histórico). La idea de implementar lo que se hizo a la metodología surgió del hecho de no poder hacer bootstrapping cuando habían saltos de más de un año entre períodos y teniendo en cuenta que se tenían cupones.

Se muestra un análisis de los datos unificados por tiempo de maduración del bono ignorando el país.



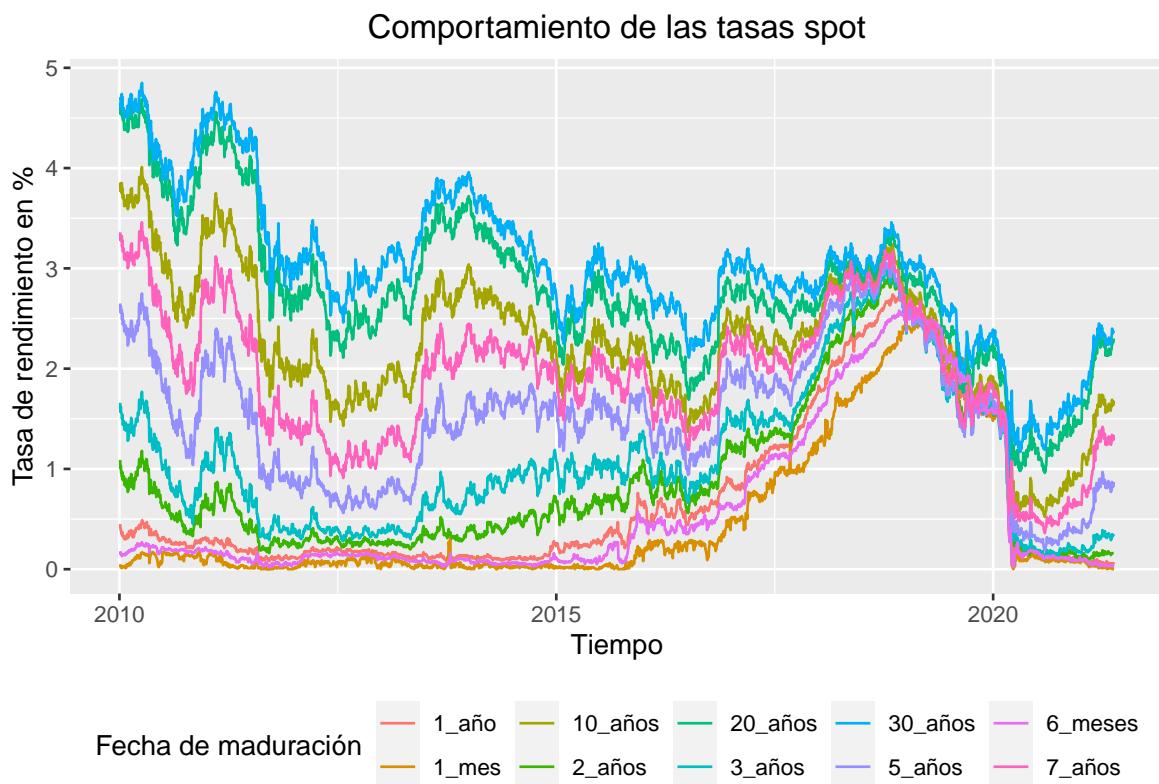
Al analizar estos datos cabe tener presente la siguiente tabla:

Cuadro 5.1: Datos estadísticos precios de Asia

Maduración	Promedio	Varianza
1	102.2318	3.854563
2	101.9446	2.585215
3	102.8478	5.429546
5	102.4880	5.372488
7	100.4166	5.325699
10	101.7249	9.311717
15	104.1277	8.407564
20	102.2278	8.949477
25	101.1110	1.217638
30	101.7605	4.765780
40	101.0180	NA
NA	103.2480	NA

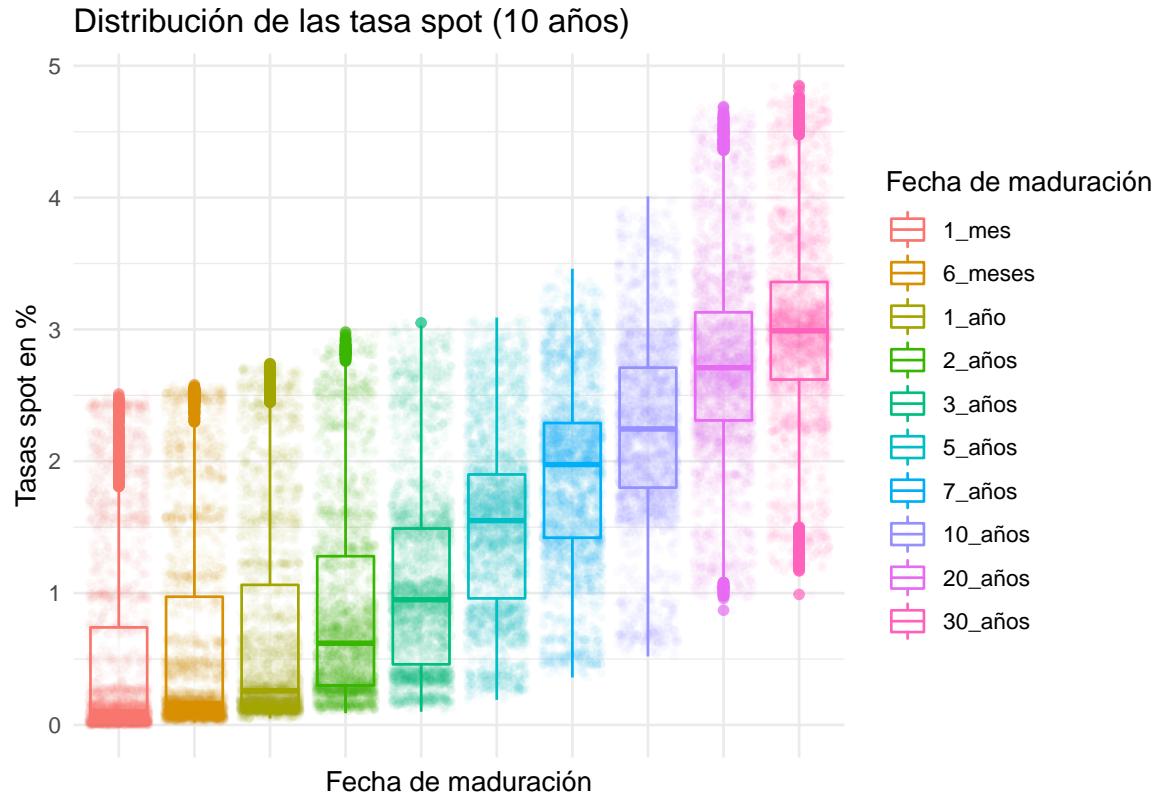
## 2. Opción 2

Se parte de la base de datos que contiene las tasas de rendimiento, seleccionan sus ultimos 10 años, que van desde 2010-01-04 hasta 2021-05-19 y cuenta con las tasas de rendimientos diarias de bonos con fecha de maduración a: 1 mes, 6 meses, 1 año, 2 años, 3 años, 5 años, 7 años, 10 años, 20 años y 30 años. En el siguiente grafico se aprecia como varia la tasa de rendimiento atreves del tiempo.



Se realiza una descripción de los datos observando los efectos de la pandemia. Como se puede

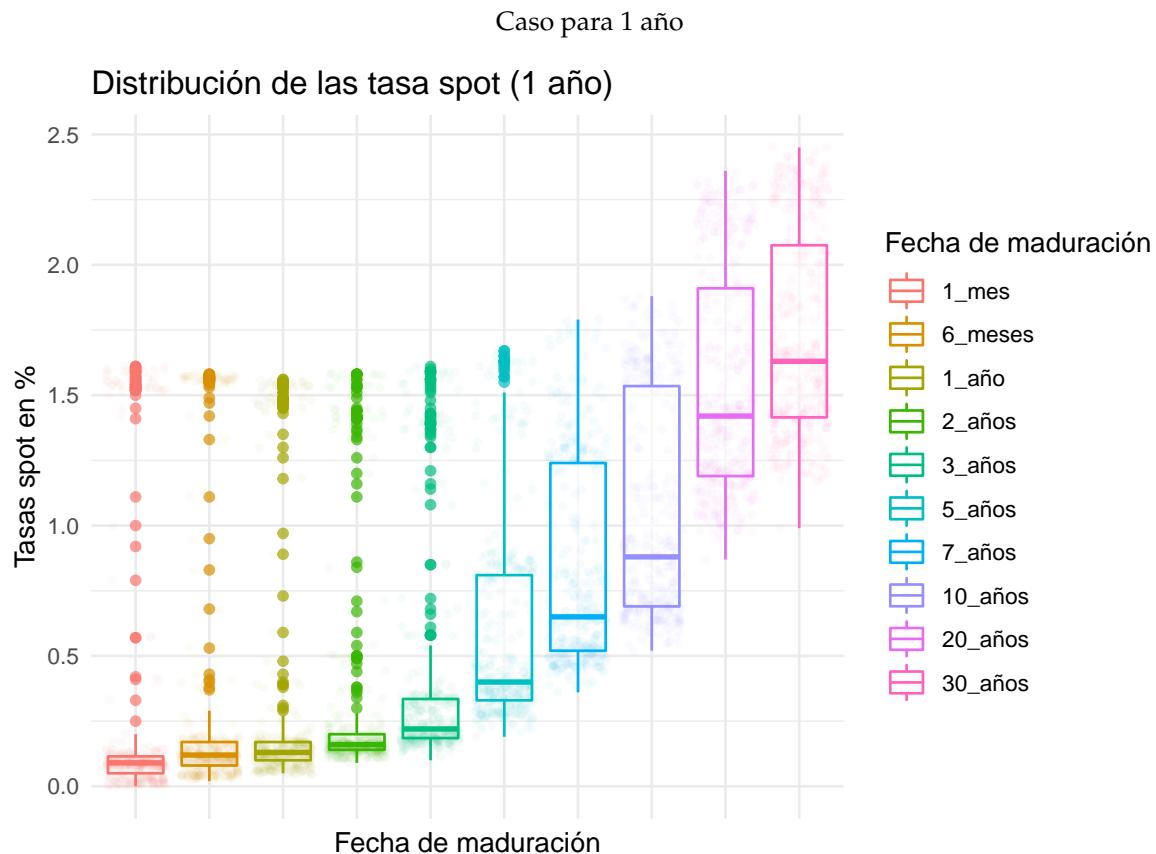
observar de un periodo de tiempo tan amplio y contando con 2848 observaciones por cada fecha de maduración, la tasa de rendimiento ha variado considerablemente, así que para realizar un análisis de sus datos se cuenta con el siguiente grafico de cajas y dispersión de puntos.



Al analizar estos datos cabe tener presente la siguiente tabla:

Cuadro 5.2: Datos estadísticos (10 años)

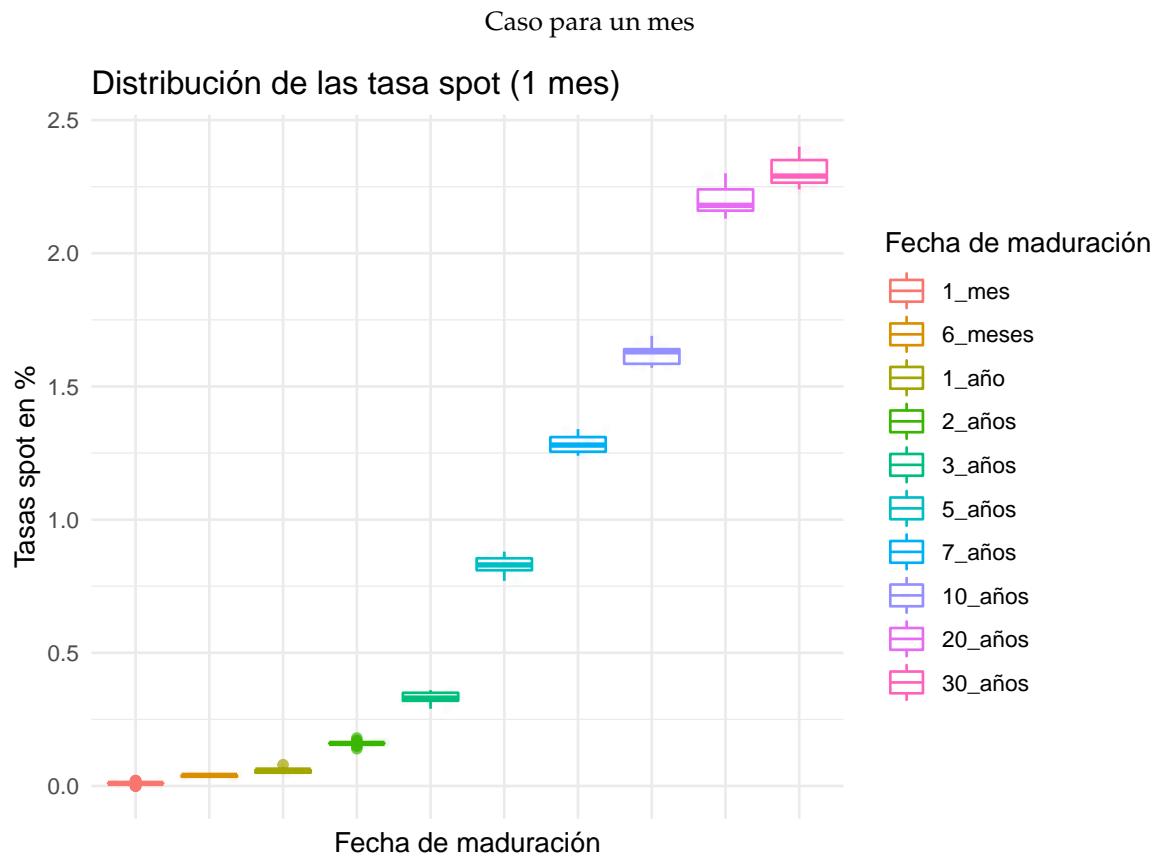
	Maduración en meses	Promedio	Varianza
1_mes	1	0.5057303	0.7528086
6_meses	6	0.6073841	0.7838633
1_año	12	0.6883497	0.7873594
2_años	24	0.8825983	0.7466919
3_años	36	1.0863518	0.7110652
5_años	60	1.5193750	0.6700200
7_años	84	1.8975702	0.6708403
10_años	120	2.2388483	0.6993465
20_años	240	2.7533989	0.7658947
30_años	360	3.0108919	0.7622345



Al analizar estos datos cabe tener presente la siguiente tabla:

Cuadro 5.3: Datos estadísticos (1 año)

	Maduración en meses	Promedio	Varianza
1_mes	1	0.2642363	0.4846943
6_meses	6	0.2838329	0.4630990
1_año	12	0.2881268	0.4374918
2_años	24	0.3206340	0.4130566
3_años	36	0.3823055	0.3903458
5_años	60	0.5797406	0.3748945
7_años	84	0.8292795	0.3905174
10_años	120	1.0428530	0.4103723
20_años	240	1.5382421	0.4238573
30_años	360	1.7254179	0.3827510



Al analizar estos datos cabe tener presente la siguiente tabla:

Cuadro 5.4: Datos estadísticos (1 mes)

	Maduración en meses	Promedio	Varianza
1_mes	1	0.0095652	0.0063806
6_meses	6	0.0373913	0.0044898
1_año	12	0.0578261	0.0085048
2_años	24	0.1600000	0.0073855
3_años	36	0.3326087	0.0171139
5_años	60	0.8317391	0.0282283
7_años	84	1.2843478	0.0317413
10_años	120	1.6204348	0.0347037
20_años	240	2.1973913	0.0544574
30_años	360	2.3043478	0.0513301

## *Capítulo 6*

---

# **Metodología 1**

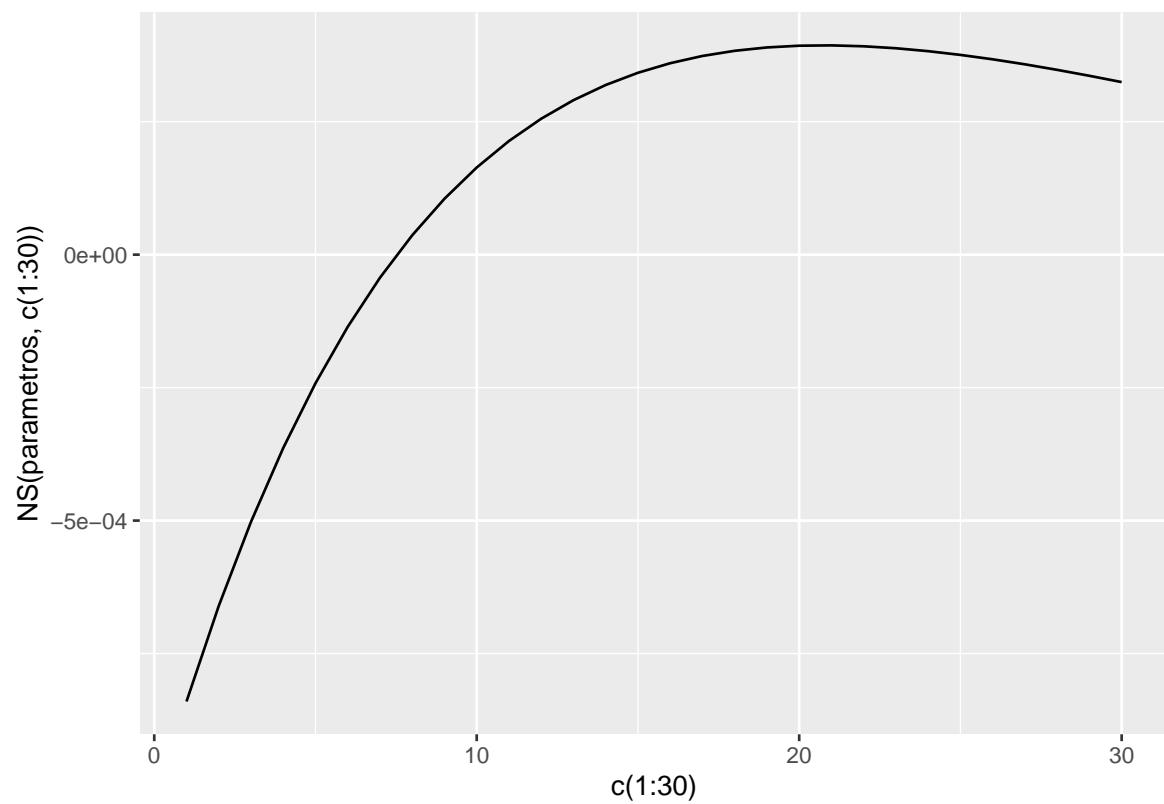
---

Cómo implementa la teoría expuesta en el marco teórico con sus datos, colocaremos aquí los resultados que se vayan obteniendo, incluir al menos un gráfico.

### **1. Opción 1**

En vista de que no podíamos hacer bootstrapping hasta los 30 años, lo que hicimos es tratar de generar los parámetros trayendo a valor presente los flujos y restar los al precio presente. Eso es lo que se muestra a continuación. Solo se está aplicando para el caso de Japón a 30 años sin embargo se pensó en hacerse para todos los demás países y así sacar un promedio de lo podrían ser las tasas de rendimiento en el área de Asia. Comprendiendo Japón, India, Corea, China, Hong Kong, Taiwan, Indonesia, Malasia y Tailandia. Estos datos corresponden al día 21 de mayo del 2021.

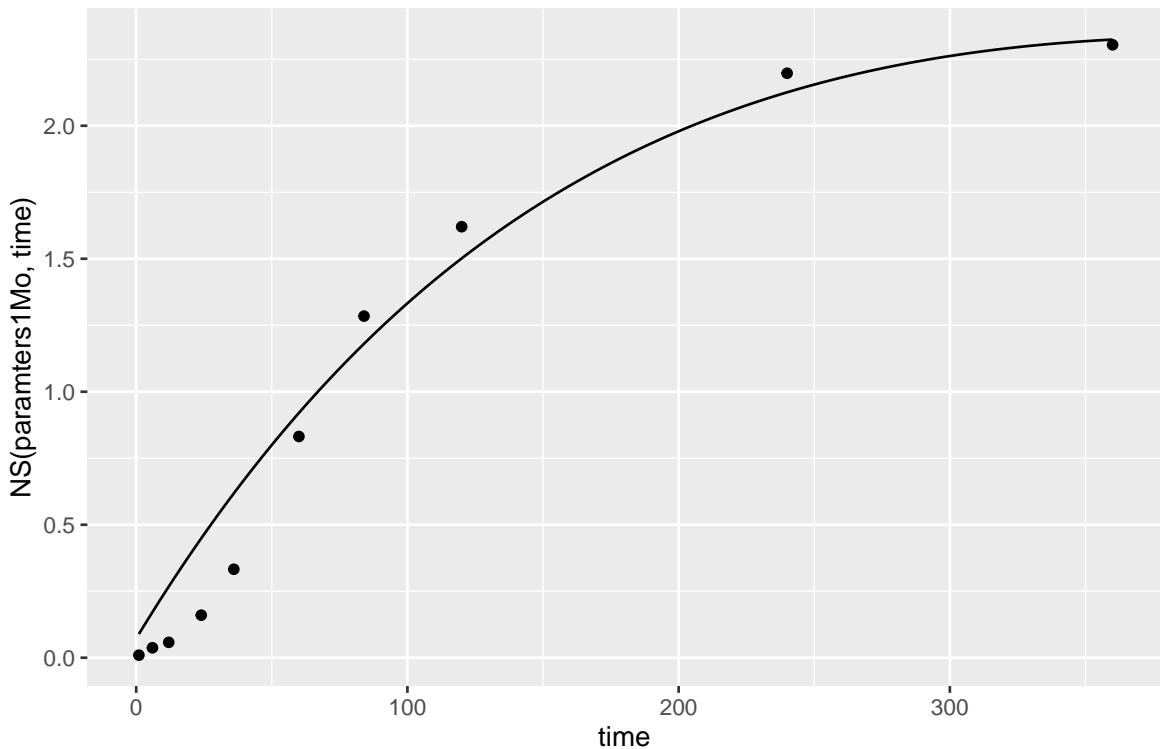
También se pensó en calcular las tasas de forma directa a partir de los precios sin embargo los únicos períodos para los que se encontraron cero cupón eran de 1 mes a 10 años y de ahí en adelante todos los demás tenían cupones



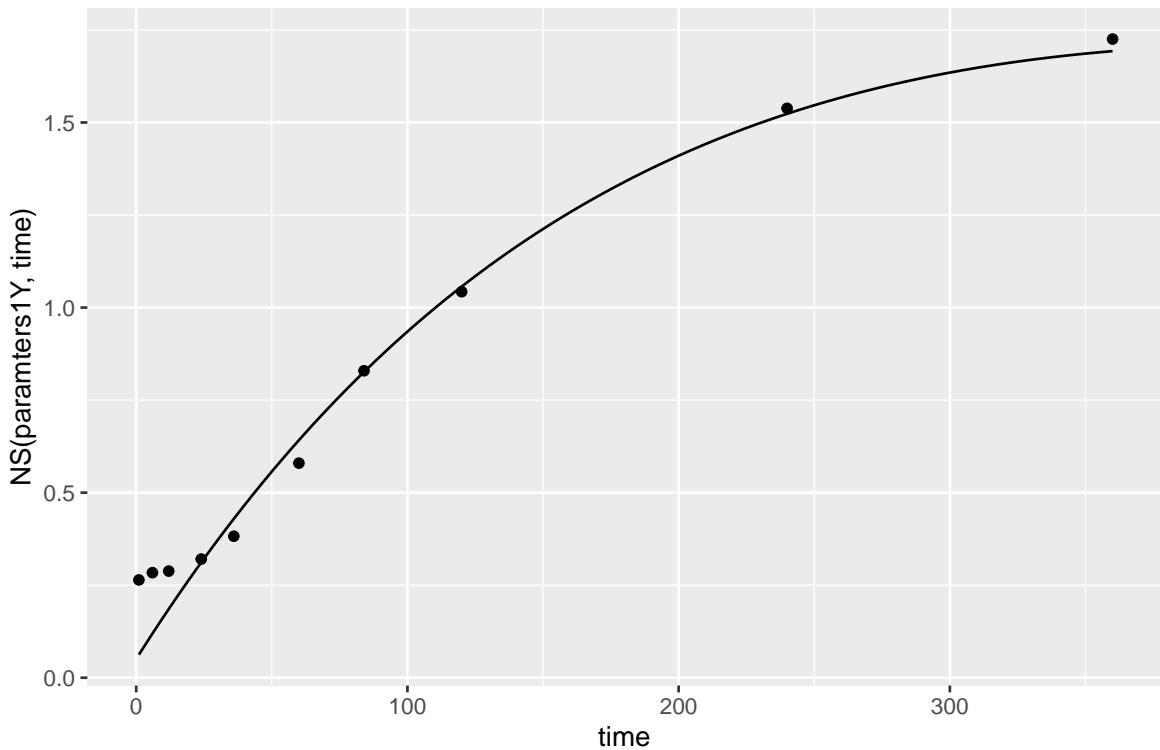


## 2. Opción 2

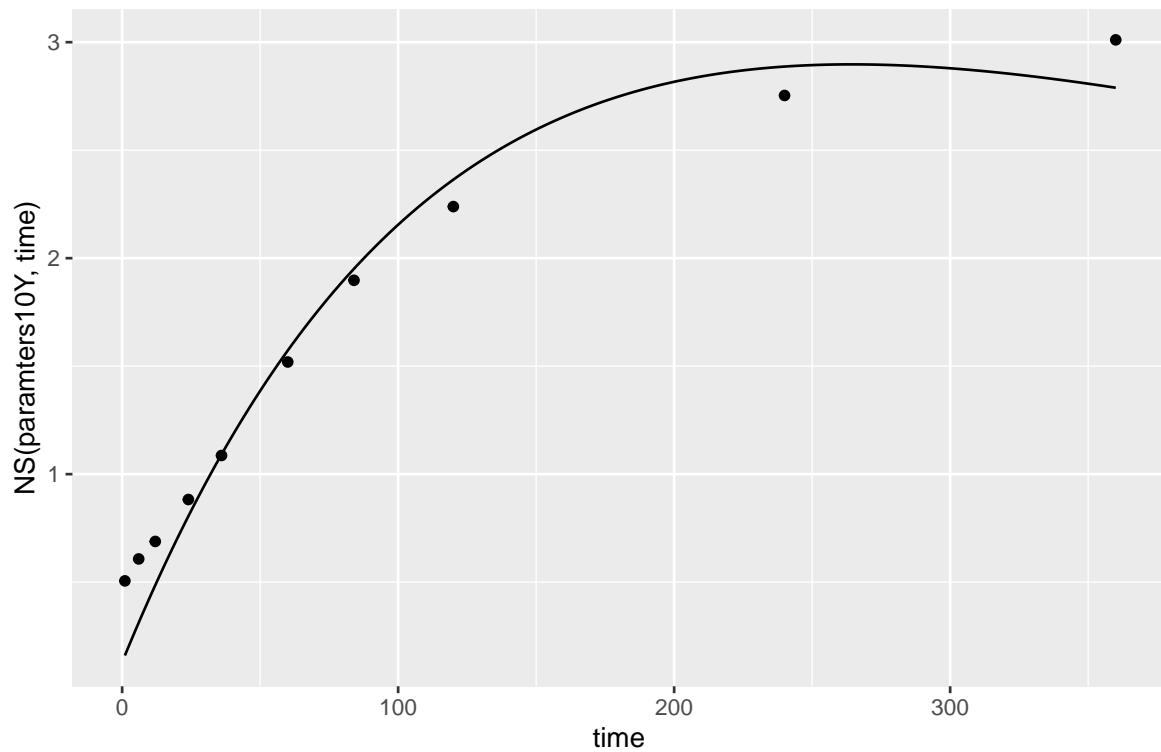
Modelo de Nelsol y Siegel, el promedio del ultimo mes



Modelo de Nelsol y Siegel, el promedio del ultimo año



Modelo de Nelsol y Siegel, el promedio de los ultimos 10 años



*Capítulo 7*

---

## **Conclusiones y recomendaciones 1**

---

*Capítulo 8*

---

## **Referencias bibliográficas**

---

---

## Bibliografía

---

- Boudreault, M. y J.-F. Renaud (2019). *Actuarial Finance: Derivatives, Quantitative Models and Risk Management*. John Wiley & Sons.
- Hladíková, H. y J. Radová (2012). "Term structure modelling by using Nelson-Siegel model". En: *European Financial and Accounting Journal* 7.2, págs. 36-55.
- Ruppert, D. y D. S. Matteson (2015). *Statistics and data analysis for financial engineering*. Vol. 13. Springer.
- Santana, J. C. (2008). "La curva de rendimientos: una revisión metodológica y nuevas aproximaciones de estimación". En: *Cuadernos de economía* 27.48, págs. 71-113.

*Capítulo 9*

---

**Anexos**

---