Notas Curso de Estadística II

Maikol Solís Chacón y Luis Barboza Chinchilla

Actualizado el 12 abril, 2022

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Estas son las notas de clase del curso CA0403: Estadística Actuarial II para el primer semestre del 2022.

Capítulo 2

Estimación no-paramétrica de densidades

2.1. Histograma

El histograma es una de las estructuras básicas en estadística y es una herramienta descriptiva que permite visualizar la distribución de los datos sin tener conocimiento previo de los mismos. En esta sección definiremos el histograma más como un estadístico que como una herramienta de visualización de datos.

2.1.1. Construcción Estadística

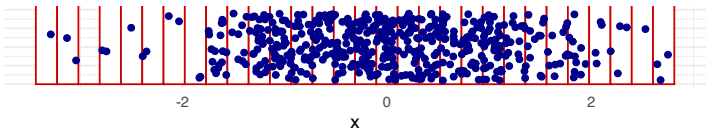
Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra independiente que proviene de una distribución desconocida f. En este caso no asumiremos que f tenga alguna forma particular, que permita definirla de manera paramétrica como en el curso anterior.

Construcción:

- Seleccione un origen x_0 y divida la linea real en *segmentos*.

$$B_j = [x_0 + (j-1)h, x_0 + jh), \quad j \in \mathbb{Z}$$

- Cuente cuántas observaciones caen en el segmento B_j. Denótelo como n_j.



- Divida el número de observaciones en B_j por el tamaño de muestra n y el ancho de banda h de cada caja.

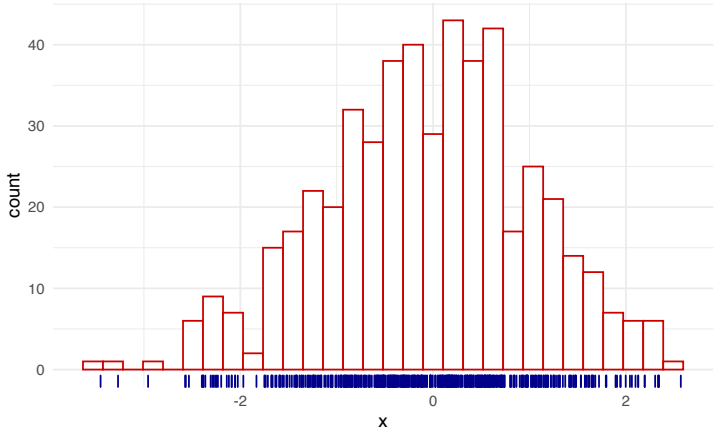
$$f_j = \frac{n_j}{nh}$$

  De esta forma si se suma las áreas definidas por el histograma da un total de 1.

- Cuente la frecuencia por el tamaño de muestra n y el ancho de banda h.

$$f_j = \frac{n_j}{nh}$$

- Dibuje el histograma.



Formalmente el histograma es el

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j} I(X_i \in B_j) I(x \in B_j),$$

donde I es la indicadora.

2.1.2. Construcción probabilística

Denote $m_j = jh - h/2$ el centro del segmento,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X \in \left[m_j - \frac{h}{2}, m_j + \frac{h}{2}\right)\right) &= \int_{m_j - \frac{h}{2}}^{m_j + \frac{h}{2}} f(u)du \\ &\approx f(m_j)h\end{aligned}$$

Otra forma de aproximarlo es:

$$\mathbb{P}\left(X \in \left[m_j - \frac{h}{2}, m_j + \frac{h}{2}\right)\right) \approx \frac{1}{n}\#\left\{X \in \left[m_j - \frac{h}{2}, m_j + \frac{h}{2}\right)\right\}$$

Acomodando un poco la expresión

$$\hat{f}_h(m_j) = \frac{1}{nh}\#\left\{X \in \left[m_j - \frac{h}{2}, m_j + \frac{h}{2}\right)\right\}$$

2.1.3. Propiedades estadísticas

Note que el estimador de histograma $\hat{f}_h$ tiende a ser más suave conforme aumenta el ancho de banda h.

2.1.4. Propiedades estadísticas

Suponga que $x_0 = 0$ y que $x \in B_j$ es un punto fijo, entonces el estimador evaluado en x es:

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \in B_j)$$

2.1.5. Sesgo

Para calcular el sesgo primero calculamos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\hat{f}_h(x)\right] &= \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[I(X_i \in B_j)\right] \\ &= \frac{1}{nh} n\mathbb{E}\left[I(X_i \in B_j)\right]\end{aligned}$$

donde $I(X_i \in B_j)$ es una variable Bernoulli con valor esperado:

$$\mathbb{E}\left[I(X_i \in B_j)\right] = \mathbb{P}\left(I(X_i \in B_j) = 1\right) = \int_{(j-1)h}^{jh} f(u)du.$$

Entonces,

$$\mathbb{E}\left[f_h(x)\right] = \frac{1}{h}\int_{(j-1)h}^{jh} f(u)du$$

y por lo tanto el sesgo de $\hat{f}_h(x)$ es:

$$Sesgo(\hat{f}_h(x)) = \frac{1}{h}\int_{(j-1)h}^{jh} f(u)du - f(x)$$

Esto se puede aproximar usando Taylor alrededor del centro $m_j = jh - h/2$ de B_j de modo que $f(u) - f(x) \approx f'(m_j)(u - x)$.

$$Sesgo(\hat{f}_h(x)) = \frac{1}{h}\int_{(j-1)h}^{jh} [f(u) - f(x)]du \approx f'(m_j)(m_j - x)$$

Entonces se puede concluir que:

- $\hat{f}_h(x)$ es un estimador sesgado de $f(x)$.
- El sesgo tiende a ser cero cerca del punto medio de B_j.
- El sesgo es creciente con respecto a la pendiente de la verdadera densidad evaluada en el punto medio m_j.

2.1.6. Varianza

Dado que todos los X_i son i.i.d., entonces

$$\begin{aligned}\text{Var}\left(\hat{f}_h(x)\right) &= \text{Var}\left(\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \in B_j)\right) \\ &= \frac{1}{n^2h^2} n\text{Var}\left(I(X_i \in B_j)\right)\end{aligned}$$

La variable I es una bernoulli con parametro $\int_{(j-1)h}^{h} f(u)du$ por lo tanto su varianza es el

$$\text{Var}\left(\hat{f}_h(x)\right) = \frac{1}{nh^2}\left(\int_{(j-1)h}^{h} f(u)du\right)\left(1 - \int_{(j-1)h}^{h} f(u)du\right)$$

Ejercicio 2.1. Usando un desarrollo de Taylor como en la parte anterior, pruebe que:

$$\text{Var}\left(\hat{f}_h(x)\right) \approx \frac{1}{nh} f(x)$$

Consecuencias:

- La varianza del estimador es proporcional a $f(x)$.
- La varianza decrece si el ancho de banda h crece.

2.1.7. Error cuadrático medio

El error cuadrático medio del histograma es el

$$\text{MSE}\left(\hat{f}_h(x)\right) = \text{E}\left[\left(\hat{f}_h(x) - f(x)\right)^2\right] = \text{Sesgo}^2\left(\hat{f}_h(x)\right) + \text{Var}\left(\hat{f}_h(x)\right).$$

Ejercicio 2.2. ¿Pueden probar la segunda igualdad de la expresión anterior?

Retomando los términos anteriores se puede comprobar que:

$$\text{MSE}\left(\hat{f}_h(x)\right) = \frac{1}{nh} f(x) + f' \left\{ \left(j - \frac{1}{2}\right) h \right\}^2 \left\{ \left(j - \frac{1}{2}\right) h - x \right\}^2 \tag{2.1}$$

$$+ o(h) + o\left(\frac{1}{nh}\right) \tag{2.2}$$

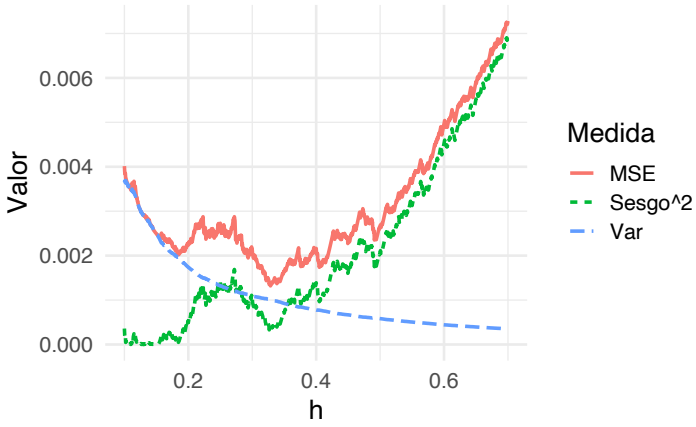
Nota: . Si $h \to 0$ y $nh \to \infty$ entonces $\text{MSE}\left(\hat{f}_h(x)\right) \to 0$. Es decir, conforme usamos más observaciones, pero el ancho de banda de banda no decrece tan rápido, entonces el error cuadrático medio converge a 0.

Como $\text{MSE}\left(\hat{f}_h(x)\right) \to 0$ (convergencia en $\mathbb{L}^2$) implica que $\hat{f}_h(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} f(x)$, entonces $\hat{f}_h$ es consistente. Además según la fórmula (2.2), concluimos lo siguiente:

- Si $h \to 0$, la varianza crece (converge a ∞) y el sesgo decrece (converge a $f'(0)x^2$).
- Si $h \to \infty$, la varianza decrece (hacia 0) y el sesgo crece (hacia ∞)

Ejercicio 2.3. Si $f \sim N(0, 1)$, aproxime los componentes de sesgo, varianza y MSE, y grafíquelos para distintos valores de h.

Solución:



2.1.8. Error cuadrático medio integrado

Uno de los problemas con el $\text{MSE}\left(\hat{f}_h(x)\right)$ es que depende de x y de la función de densidad f (desconocida). Integrando con respecto a x el MSE se logra

resolver el primer problema:

$$\begin{aligned}\text{MISE}\left(\hat{f}_h\right) &= \text{E}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\hat{f}_h(x) - f(x)\right\}^2 dx\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\text{E}\left[\left\{\hat{f}_h(x) - f(x)\right\}^2\right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\text{MSE}(\hat{f}_h(x))\, dx\end{aligned}$$

Al MISE se le llama error cuadrático medio integrado. Además,

$$\begin{aligned}\text{MISE}(\hat{f}_h) &\approx \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{nh}f(x)dx \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty}\sum_j I(x \in B_j)\left\{\left(j-\frac{1}{2}\right)h - x\right\}^2\left[f'\left(\left\{j-\frac{1}{2}\right\}h\right)\right]^2 dx \\ &= \frac{1}{nh} + \sum_j\left[f'\left(\left\{j-\frac{1}{2}\right\}h\right)\right]^2\int_{B_j}\left\{\left(j-\frac{1}{2}\right)h - x\right\}^2 dx \\ &= \frac{1}{nh} + \frac{h^2}{12}\sum_j\left[f'\left(\left\{j-\frac{1}{2}\right\}h\right)\right]^2 \\ &\approx \frac{1}{nh} + \frac{h^2}{12}\int\{f'(x)\}^2 dx \\ &= \frac{1}{nh} + \frac{h^2}{12}\|f'\|_2^2\end{aligned}$$

la cual es una buena aproximación si $h \to 0$. A este último término se le llama MISE asintótico.

2.1.9. Ancho de banda óptimo para el histograma

El MISE tiene un comportamiento asintótico similar al observado en el MSE. La figura siguiente presenta el comportamiento de la varianza, sesgo y MISE para nuestro ejemplo anterior:

Un problema frecuente en los histogramas es que la mala elección del parámetro h causa que estos no capturen toda la estructura de los datos. Por ejemplo, en

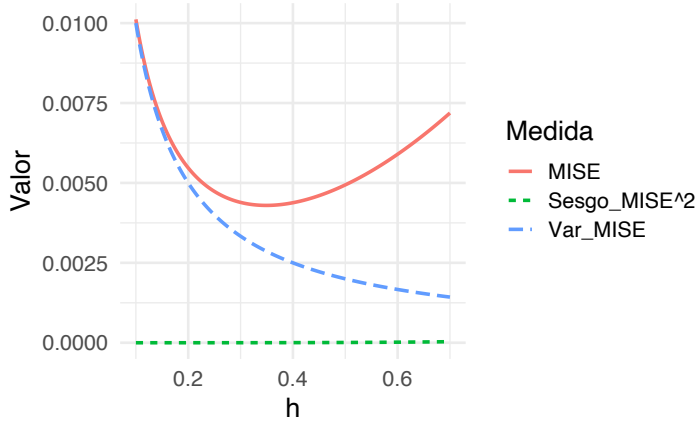
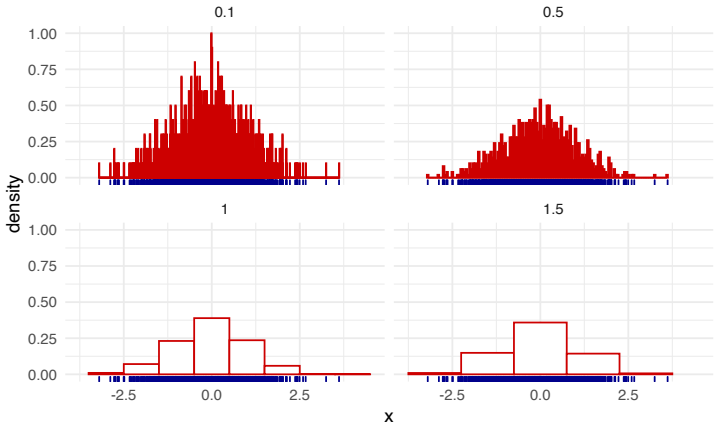


Figura 2.1:

el siguiente caso se muestra histogramas construídos a partir de 1000 números aleatorios según una $N(0,1)$, bajo 4 distintas escogencias de ancho de banda.



Un criterio más preciso para seleccionar el ancho de banda es a través de la minimización del MISE:

$$\frac{\partial \text{MISE}(f_h)}{\partial h} = -\frac{1}{nh^2} + \frac{1}{6}h\|f'\|_2^2 = 0$$

lo implica que

$$h_{opt} = \left(\frac{6}{n\|f'\|_2^2}\right)^{1/3} = O\left(n^{-1/3}\right).$$

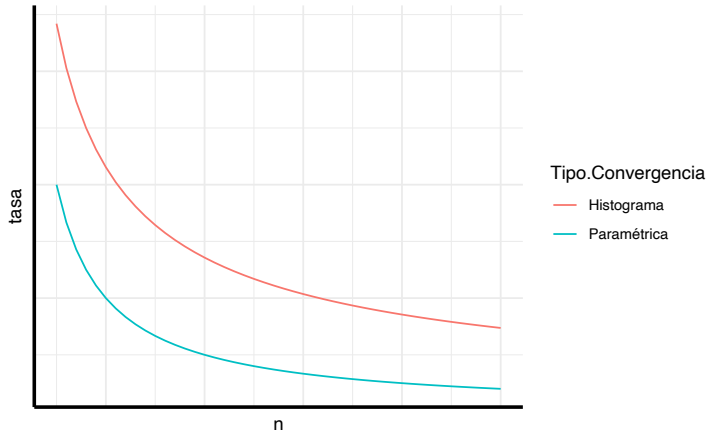
y por lo tanto

$$\text{MISE}(\hat{f}_h) = \frac{1}{n}\left(\frac{n\|f'\|_2^2}{6}\right)^{1/3}$$

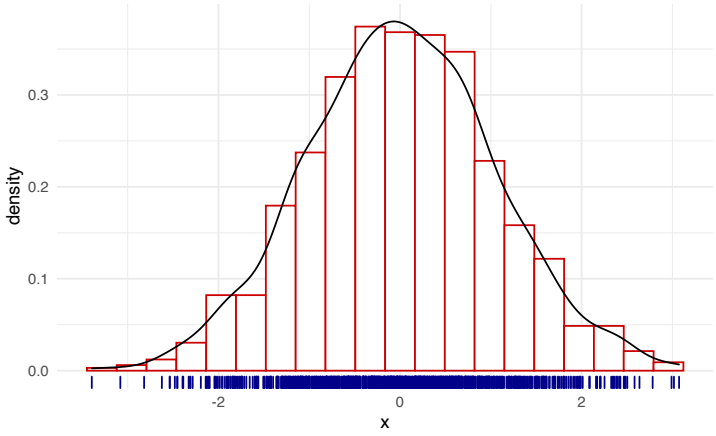
Nota: (Recuerde de Estadística I). Si $X_1, \ldots, X_n \sim f_\theta$ i.i.d, con $\text{Var}(X) = \sigma^2$ y media θ, recuerde que el estimador $\hat{\theta}$ de θ tiene la característica que

$$\text{MSE}(\theta) = \text{Var}(\hat{\theta}) + \text{Sesgo}^2(\hat{\theta}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Según la nota anterior la tasas de convergencia del histograma es más lenta que la de un estimador parámetrico considerando la misma cantidad de datos, tal y como se ilustra en el siguiente gráfico:



Finalmente, podemos encontrar el valor óptimo del ancho de banda ($h = 0.3285$) del conjunto de datos en el ejemplo anterior.



Ejercicio 2.4. Verifique que en el caso normal estándar: $h_{opt} \approx 3{,}5n^{-1/3}$.

2.2. Estimación de densidades basada en kernels.

2.2.1. Primera construcción

Sea $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. con distribución f en $\mathbb{R}$. La distribución de f es $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

La distribución empírica de F es:

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq x).$$

Por la ley de los grandes números tenemos que $F_n(x) \xrightarrow{c.s.} F(x)$ para todo x en $\mathbb{R}$, conforme $n \to \infty$. Entonces, $F_n(x)$ es un estimador consistente de $F(x)$ para todo x in $\mathbb{R}$.

Nota: . ¿Podríamos derivar F_n para encontrar el estimador $\hat{f}_n$?

La respuesta es si (más o menos).

Suponga que $h > 0$ tenemos la aproximación

$$f(x) \approx \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}.$$

Remplazando F por su estimador F_n, defina

$$\hat{f}_n^R(x) = \frac{F_n(x+h) - F_n(x-h)}{2h},$$

donde $\hat{f}_n^R(x)$ es el estimador de *Rosenblatt* .

Podemos rescribirlo de la forma,

$$\hat{f}_n^R(x) = \frac{1}{2nh}\sum_{i=1}^{n} I(x-h < X_i \leq x+h) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K_0\left(\frac{X_i - x}{h}\right)$$

con $K_0(u) = \frac{1}{2}I(-1 < u \leq 1)$, lo cual es equivalente al caso del histograma.

2.2.2. Otra construcción

Con el histograma construimos una serie de segmentos fijo B_j y contabamos el número de datos que estaban **contenidos en** B_j

Nota: . ¿Qué pasaría si cambiamos la palabra **contenidos** por **alrededor de "x"**?

Suponga que se tienen intervalos de longitud $2h$, es decir, intervalos de la forma $[x-h, x+h)$.

El estimador de histograma se escribe como

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{2hn}\#\{X_i \in [x-h, x+h)\}.$$

Note que si definimos

$$K(u) = \frac{1}{2}I\left(|u| \leq 1\right)$$

con $u = \frac{x-x_i}{h}$, entonces parte del estimador de histograma se puede escribir como:

$$\frac{1}{2}\#\{X_i \in [x-h, x+h)\} = \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} I\left(\left|\frac{x-x_i}{h}\right| \leq 1\right)$$

Finalmente se tendría que

$$\hat{f}_h\left(x\right) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$$

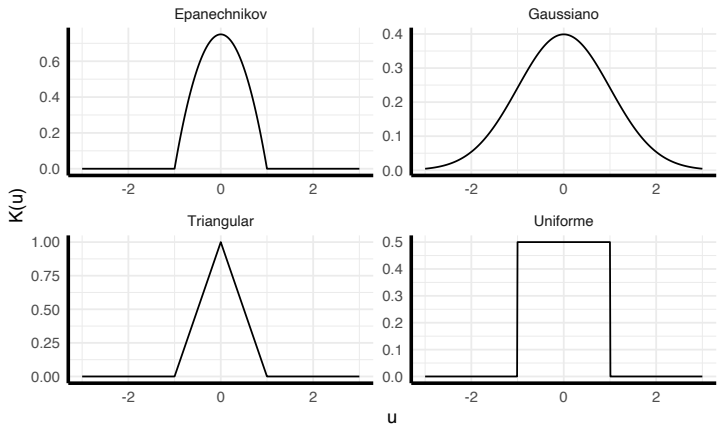
Nota: . ¿Qué pasaría si cambiaríamos la función K del histograma por una más general? Esto permitiría incluir la noción de "cercanía" de cada dato alrededor de x.

Esta función debería cumplir las siguientes características:

- $K(u) \geq 0$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} K(u)du = 1$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} uK(u)du = 0$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} u^2K(u)du < \infty$.

Por ejemplo:

- **Uniforme:** $\frac{1}{2}I\left(|u| \leq 1\right)$.
- **Triangular:** $(1 - |u|)I\left(|u| \leq 1\right)$.
- **Epanechnikov:** $\frac{3}{4}(1 - u^2)I\left(|u| \leq 1\right)$.
- **Gaussian:** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)$.



Entonces se tendría que la expresión general para un estimador por núcleos (kernel) de f:

$$\hat{f}_h\left(x\right) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_h(x - x_i)$$

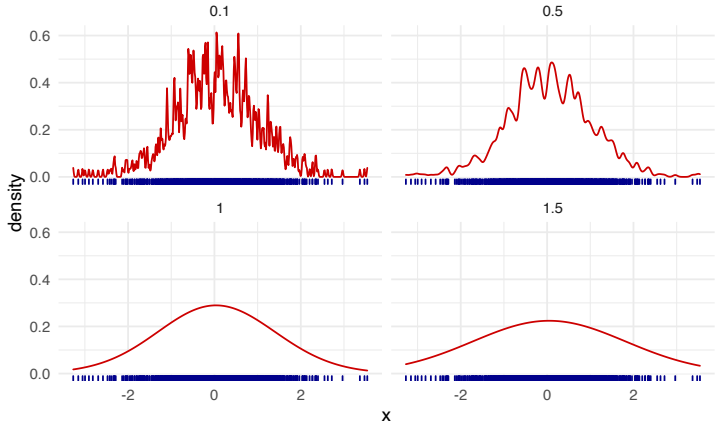
donde $x_1, \ldots, x_n$ es una muestra i.i.d. de f,

$$K_h(\cdot) = \frac{1}{h}K(\cdot/h).$$

y K es un kernel según las 4 propiedades anteriores.

Nota: . ¿Qué pasaría si modificamos el ancho de banda h para un mismo kernel?

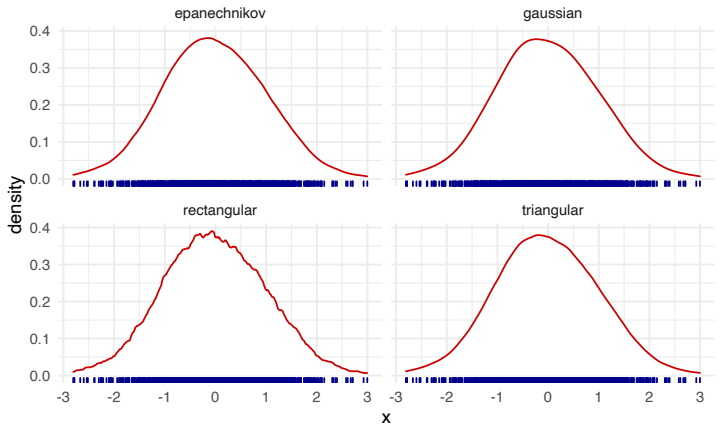
Nuevamente controlaríamos la suavidad del estimador a como se ilustra a continuación:



Inconveniente: no tenemos aún un criterio para un h óptimo.

Nota: . ¿Qué pasaría si modificamos el kernel para un mismo ancho de banda h?

Usando 1000 números aleatorios según una normal estándar, con un ancho de banda fijo ($h = 0{,}3$) podemos ver que no hay diferencias muy marcadas entre los estimadores por kernel:



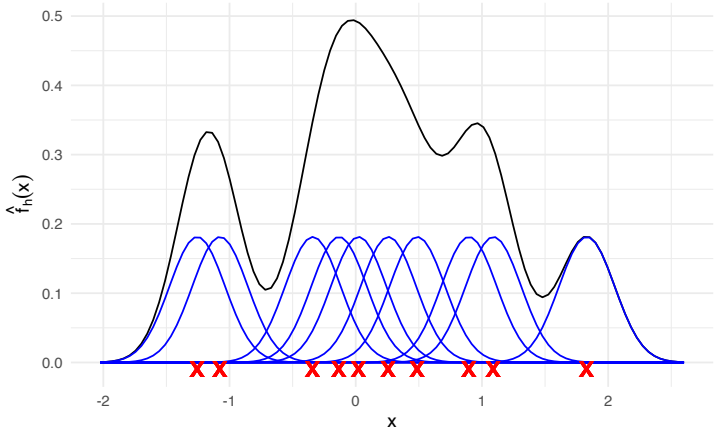
Recordemos nuevamente la fórmula

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

Cada sumando de esta expresión es una función de la variable x. Si la integramos se obtiene que

$$\frac{1}{nh}\int K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)dx = \frac{1}{nh}\int K(u)\,hdu = \frac{1}{n}\int K(u)du = \frac{1}{n}$$

En el siguiente gráfico se generan 10 puntos aleatorios según una normal estándar (rojo) y se grafica cada uno de los 10 componentes del estimador de la densidad usando kernels gaussianos (azul). El estimador resultante aparece en color negro. Note que cada uno de los 10 componentes tiene la misma área bajo la curva, la cual en este caso es 0.1.



2.2.3. Propiedades Estadísticas

Al igual que en el caso de histograma, también aplica lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{MSE}(\hat{f}_h(x)) &= \text{Var}(\hat{f}_h(x)) + \text{Sesgo}^2(\hat{f}_h(x)) \\
\text{MISE}(\hat{f}_h) &= \int \text{Var}(\hat{f}_h(x))dx + \int \text{Sesgo}^2(\hat{f}_h(x))dx
\end{aligned}$$

donde

$\text{Var}\left(\hat{f}_h(x)\right) = \mathbb{E}\left[\hat{f}_h(x) - \mathbb{E}\hat{f}_h(x)\right]^2$ and $\text{Sesgo}\left(\hat{f}_h(x)\right) = \mathbb{E}\left[\hat{f}_h(x)\right] - f(x)$.

En el caso de la varianza:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{f}_h(x)) &= \text{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n^2h^2}\sum_{i=1}^{n} \text{Var}\left(K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)\right) \\
&= \frac{1}{nh^2}\text{Var}\left(K\left(\frac{x - X}{h}\right)\right) \\
&= \frac{1}{nh^2}\left\{\mathbb{E}\left[K^2\left(\frac{x - X}{h}\right)\right] - \left\{\mathbb{E}\left[K\left(\frac{x - X}{h}\right)\right]\right\}^2\right\}.
\end{aligned}$$

Usando que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[K^2\left(\frac{x - X}{h}\right)\right] &= \int K^2\left(\frac{x - s}{h}\right) f(s)ds \\
&= h\int K^2(u)\, f(uh + x)du \\
&= h\int K^2(u)\left\{f(x) + o(1)\right\}du \\
&= h\left\{\|K\|_2^2 f(x) + o(1)\right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[K\left(\frac{x - X}{h}\right)\right] &= \int K\left(\frac{x - s}{h}\right) f(s)ds \\
&= h\int K(u)\, f(uh + x)du \\
&= h\int K(u)\left\{f(x) + o(1)\right\}du \\
&= h\left\{f(x) + o(1)\right\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto se obtiene que

$$\text{Var}\left(\hat{f}_h(x)\right) = \frac{1}{nh}\|K\|_2^2 f(x) + o\left(\frac{1}{nh}\right), \text{ si } nh \to \infty.$$

2.2.4. Sesgo

Para el sesgo tenemos

$$\begin{aligned}\text{Sesgo}\left(\hat{f}_h(x)\right) &= \mathbb{E}\left[\hat{f}_h(x)\right] - f(x) \\ &= \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left[K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)\right] - f(x) \\ &= \frac{1}{h}\mathrm{E}\left[K\left(\frac{x-X_1}{h}\right)\right] - f(x) \\ &= \int \frac{1}{h}K\left(\frac{x-u}{h}\right)f(u)du - f(x)\end{aligned}$$

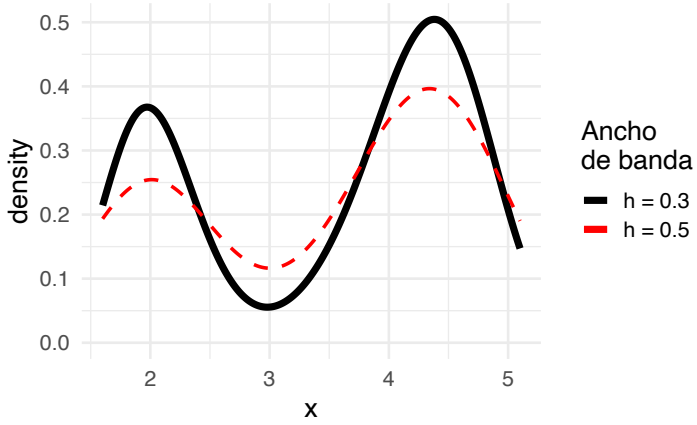
Ejercicio 2.5. Usando el cambio de variable $s = \frac{u-x}{h}$ y las propiedades del kernel pruebe que

$$\text{Sesgo}\left(\hat{f}_h(x)\right) = \frac{h^2}{2}f''\mu_2(K) + o(h^2), \text{ si } h \to 0$$

donde $\mu_2 = \int s^2K(s)ds$.

Nota: . En algunas pruebas más formales, se necesita además que f'' sea absolutamente continua y que $\int(f'''(x))dx < \infty$.}

En el siguiente gráfico se ilustra el estimador no paramétrico de la distribución de tiempos entre erupciones en la muy conocida tabla de datos *faithful*. El estimador se calcula bajo dos distintas escogencias de ancho de banda.



Nota: . Note como los cambios en el ancho de banda modifican la suavidad (sesgo) y el aplanamiento de la curva (varianza).

2.2.5. Error cuadrático medio y Error cuadrático medio integrado

El error cuadrático medio se escribe

$$\begin{aligned}\text{MSE}(\hat{f}_h(x)) &= \text{Sesgo}\left(\hat{f}_h(x)\right)^2 + \text{Var}\left(\hat{f}_h(x)\right) \\ &= \frac{h^4}{4}\left(\mu_2(K)f''(x)\right)^2 + \frac{1}{nh}\|K\|_2^2 f(x) + o(h^4) + o\left(\frac{1}{nh}\right).\end{aligned}$$

Y el error cuadrático medio integrado se escribe como,

$$\begin{aligned}\text{MISE}\left(\hat{f}_h\right) &= \int \text{MSE}\left(\hat{f}_h(x)\right) dx \\ &= \int \text{Sesgo}\left(\hat{f}_h(x)\right)^2 + \text{Var}\left(\hat{f}_h(x)\right) dx \\ &= \frac{h^4}{4}\mu_2^2(K)\left\|f''(x)\right\|_2^2 + \frac{1}{nh}\|K\|_2^2 + o(h^4) + o\left(\frac{1}{nh}\right).\end{aligned}$$

Al igual que en el caso del histograma, el estimador por kernels es un estimador consistente de f si $h \to 0$ y $nh \to \infty$. Además el MISE depende directamente de f''.

2.2.6. Ancho de banda óptimo

Minimizando el MISE con respecto a h obtenemos

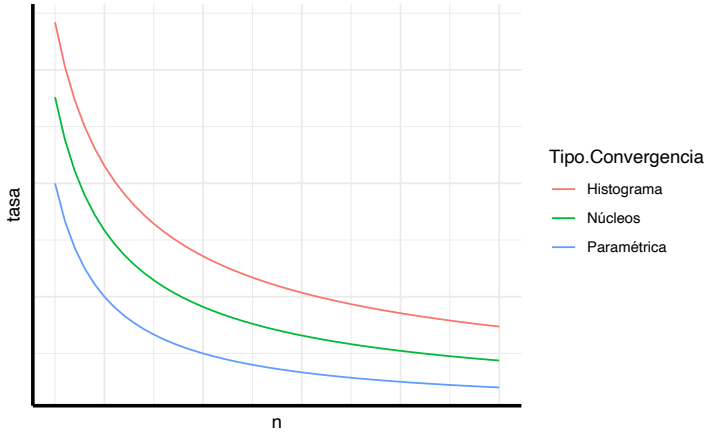
$$h_{opt} = \left(\frac{\|K\|_2^2}{\|f''\|_2^2 \left(\mu_2(K)\right)^2 n} \right)^{1/5} = O\left(n^{-1/5}\right).$$

Nota: . De forma práctica, h_{opt} no es un estimador útil de h porque depende de $\|f''\|_2^2$ que es desconocido. Más adelante veremos otra forma de encontrar este estimador.

Evaluando h_{opt} en el MISE tenemos que

$$\text{MISE}(\hat{f}_h) = \frac{5}{4} \left(\|K\|_2^2\right)^{4/5} \left(\|f''\|_2^2 \mu_2(K)\right)^{2/5} n^{-4/5} = O\left(n^{-4/5}\right).$$

y por lo tanto la tasa de convergencia del MISE a 0 es más rápida que para el caso del histograma:



Nota: . Como se comentó anteriormente, el principal inconveniente del ancho de banda:

$$h_{opt} = \left(\frac{\|K\|_2^2}{\|f''\|_2^2 \left(\mu_2(K)\right)^2 n} \right)^{1/5} = O\left(n^{-1/5}\right).$$

es que depende de f''.

A continuación se explica dos posibles métodos para determinar para aproximar el ancho de banda óptimo:

2.2.6.1. Referencia normal

Nota: . Este método es más efectivo si se conoce que la verdadera distribución es bastante suave, unimodal y simétrica. Más adelante veremos otro método para densidades más generales.

Asuma que f es normal distribuida y se utiliza un kernel K gausiano. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\hat{h}_{rn} &= \left(\frac{\|K\|_2^2}{\|f''\|_2^2 \left(\mu_2(K)\right)^2 n}\right)^{1/5} = O\left(n^{-1/5}\right) \\ &= 1{,}06\hat{\sigma}n^{-1/5}.\end{aligned}$$

donde

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}^2)}$$

Ejercicio 2.6. Pruebe que la ecuación anterior es verdadera. Utilice el hecho de que:

$$\|f''\|_2^2 = \sigma^{-5}\int \phi''(x)^2 dx$$

donde ϕ es la función de densidad de una $N(0,1)$.

Nota: . El principal inconveniente de $\hat{h}_{rn}$ es su sensibilidad a los valores extremos:

Ejemplo 2.1. La varianza empírica de 1, 2, 3, 4, 5, es 2.5.

La varianza empírica de 1, 2, 3, 4, 5, 99, es 1538.

Para solucionar el problema anterior, se puede considerar una medida más robusta de variación, por ejemplo el rango intercuantil IQR:

$$\mathrm{IQR}^X = Q_3^X - Q_1^X$$

donde Q_1^X y Q_3^X son el primer y tercer cuartil de un conjunto de datos $X_1, \ldots, X_n$.

Con el supuesto que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ y entonces:

$$\begin{aligned}
\text{IQR} &= Q_3^X - Q_1^X \\
&= \left(\mu + \sigma Q_3^Z\right) - \left(\mu + \sigma Q_1^Z\right) \\
&= \sigma\left(Q_3^Z - Q_1^Z\right) \\
&\approx \sigma\left(0{,}67 - (-0{,}67)\right) \\
&= 1{,}34\sigma.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\hat{\sigma} = \dfrac{\widehat{\text{IQR}}^X}{1{,}34}$

Podemos sustituir la varianza empírica de la fórmula inicial y tenemos

$$\hat{h}_{rn} = 1{,}06\frac{\widehat{\text{IQR}}^X}{1{,}34}n^{-\frac{1}{5}} \approx 0{,}79\ \widehat{\text{IQR}}^X\ n^{-\frac{1}{5}}$$

Combinando ambos estimadores, podemos obtener,

$$\hat{h}_{rn} = 1{,}06\,\text{mín}\left\{\frac{\widehat{\text{IQR}}^X}{1{,}34}, \hat{\sigma}\right\} n^{-\frac{1}{5}}$$

pero esta aproximación es conveniente bajo el escenario de que la densidad f sea similar a una densidad normal.

2.2.6.2. Validación Cruzada

Defina el *error cuadrático integrado* como

$$\begin{aligned}
\text{ISE}(\hat{f}_h) &= \int \left(\hat{f}_h(x) - f(x)\right)^2 dx \\
&= \int \hat{f}_h^2(x)dx - 2\int \hat{f}_h(x)f(x)dx + \int f^2(x)dx.
\end{aligned}$$

Nota: . El MISE es el valor esperado del ISE.

Nuestro objetivo es minimizar el ISE con respecto a h.

Primero note que $\int f^2(x)dx$ NO DEPENDE de h. Podemos minimizar la expresión

$$\text{ISE}(\hat{f}_h) - \int f^2(x)dx = \int \hat{f}_h^2(x)dx - 2\int \hat{f}_h(x)f(x)dx$$

Vamos a resolver esto en dos pasos partes

Integral $\int \hat{f}_h(x)f(x)dx$

Integral $\int \hat{f}_h(x)f(x)dx$

El término $\int \hat{f}_h(x)f(x)dx$ es el valor esperado de $\text{E}\left[\hat{f}_h(X)\right]$. Su estimador empírico sería:

$$\widehat{\text{E}\left[\hat{f}_h(X)\right]} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{f}_h(X_i) = \frac{1}{n^2h}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K\left(\frac{X_j - X_i}{h}\right).$$

Nota: . El problema con esta expresión es que las observaciones que se usan para estimar la esperanza son las mismas que se usan para estimar $\hat{f}_h(x)$ (Se utilizan doble).

La solución es remover la $i^{\text{ésima}}$ observación de $\hat{f}_h$ para cada i.

Redefiniendo el estimador anterior tenemos una estimación de $\int \hat{f}_h(x)f(x)dx$ a través de:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{f}_{h,-i}(X_i),$$

donde (estimador *leave-one-out*)

$$\hat{f}_{h,-i}(x) = \frac{1}{(n-1)h}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}K\left(\frac{x - X_j}{h}\right).$$

de esta forma nos aseguramos que las observaciones que se usan para calcular $\hat{f}_{h,-i}(x)$ son independientes de la observación que uno usa para definir el estimador de $E[\hat{f}_h(x)]$.

Siguiendo con el término $\int \hat{f}_h^2(x)dx$ note que este se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\int \hat{f}_h^2(x)dx &= \int \left(\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{n^2h^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)K\left(\frac{x-X_j}{h}\right)dx \\ &= \frac{1}{n^2h}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int K(u)\,K\left(\frac{X_i-X_j}{h}-u\right)du \\ &= \frac{1}{n^2h}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} K*K\left(\frac{X_i-X_j}{h}\right).\end{aligned}$$

donde $K * K$ es la convolución de K consigo misma.

Finalmente tenemos la función,

Finalmente definimos la función objetivo del criterio de validación cruzada como:

$$\mathrm{CV}(h) = \frac{1}{n^2h}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K*K\left(\frac{X_i-X_j}{h}\right) - \frac{2}{n(n-1)h}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} K\left(\frac{X_i-X_j}{h}\right).$$

Nota: . Note que $\mathrm{CV}(h)$ no depende de f o sus derivadas y además la función objetivo se adapta automáticamente a las características de la densidad f.

2.2.7. Intervalos de confianza para estimadores de densidad no paramétricos

Usando los resultados anteriores y asumiendo que $h = cn^{-\frac{1}{5}}$ entonces

$$n^{\frac{2}{5}}\left\{\hat{f}_h(x) - f(x)\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\underbrace{\frac{c^2}{2}f''\mu_2(K)}_{b_x}, \underbrace{\frac{1}{c}f(x)\,\|K\|_2^2}_{v_x}\right).$$

Si $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el cuantil $1-\frac{\alpha}{2}$ de una distribución normal estándar, entonces

$$\begin{aligned}1-\alpha &\approx \mathbb{P}\left(b_x - z_{1-\frac{\alpha}{2}} v_x \leq n^{2/5}\left\{\widehat{f}_h(x) - f(x)\right\} \leq b_x + z_{1-\frac{\alpha}{2}} v_x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\widehat{f}_h(x) - n^{-2/5}\left\{b_x + z_{1-\frac{\alpha}{2}} v_x\right\}\right. \\ &\qquad \left. \leq f(x) \leq \hat{f}_h(x) - n^{-2/5}\left\{b_x - z_{1-\frac{\alpha}{2}} v_x\right\}\right)\end{aligned}$$

Esta expresión nos dice que con una probabilidad de $1-\alpha$ se tiene que

$$\left[\hat{f}_h(x) - \frac{h^2}{2} f''(x)\mu_2(K) - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(x)\|K\|_2^2}{nh}}\right.$$
$$\left.\widehat{f}_h(x) - \frac{h^2}{2} f''(x)\mu_2(K) + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(x)\|K\|_2^2}{nh}}\right]$$

Al igual que en los casos anteriores, este invtervalo no es útil ya que depende de $f(x)$ y $f''(x)$.

Si h es pequeño relativamente a $n^{-\frac{1}{5}}$ entonces el segundo término $\frac{h^2}{2} f''(x)\mu_2(K)$ podría ser ignorado.

Si h es pequeño relativamente a $n^{-\frac{1}{5}}$ entonces el segundo término $\frac{h^2}{2} f''(x)\mu_2(K)$ podría ser ignorado.

Podemos reemplazar $f(x)$ por su estimador $\hat{f}_h(x)$. Entonces tendríamos una intervalo aplicable a nuestro caso:

$$\left[\hat{f}_h(x) - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{f}_h(x)\|K\|_2^2}{nh}}, \hat{f}_h(x) + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{f}_h(x)\|\mathrm{K}\|_2^2}{nh}}\right]$$

Nota: . Este intervalo de confianza está definido para x fijo y no permite hacer inferencia sobre toda la función f. Una forma de determinar la banda de confianza de toda la función f es a través de la fórmula 3.52 en la página 62 de (Härdle y col. 2004).

2.3. Laboratorio

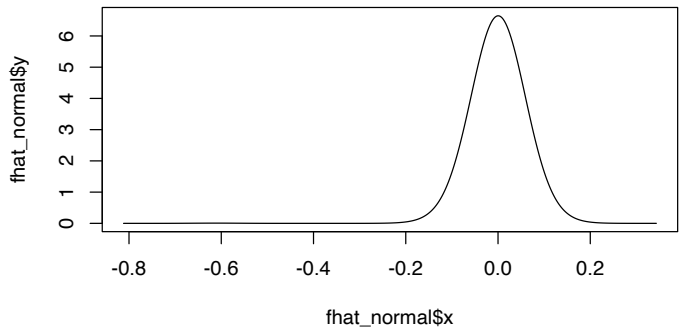
Comenzaremos con una librería bastante básica llamada `KernSmooth`.

```
x <- read.csv("data/stockres.txt")
x <- unlist(x)
```

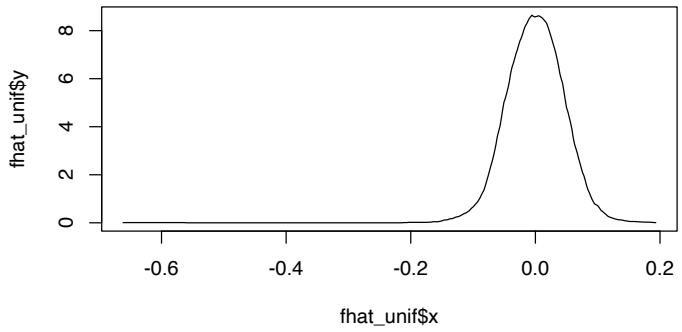
```
summary(x)
```

```
##       Min.    1st Qu.     Median       Mean    3rd Qu.       Max.
## -0.6118200 -0.0204085 -0.0010632 -0.0004988  0.0215999  0.1432286
```

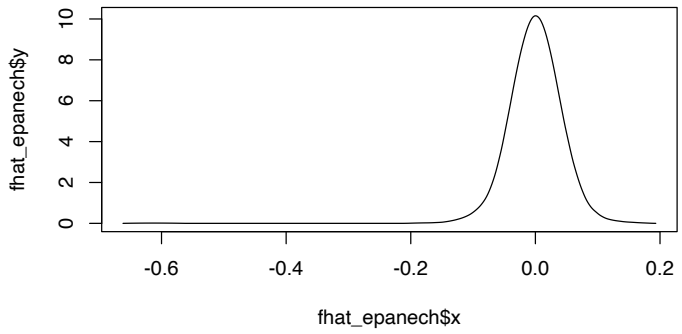
```
library(KernSmooth)

fhat_normal <- bkde(x, kernel = "normal", bandwidth = 0.05)
plot(fhat_normal, type = "l")
```



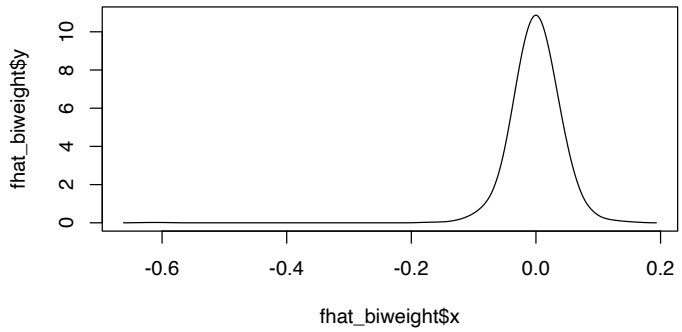

```
fhat_unif <- bkde(x, kernel = "box", bandwidth = 0.05)
plot(fhat_unif, type = "l")
```



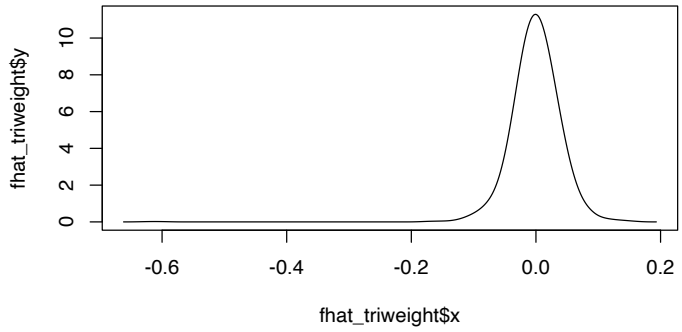

```
fhat_epanech <- bkde(x, kernel = "epanech", bandwidth = 0.05)
plot(fhat_epanech, type = "l")
```




```
fhat_biweight <- bkde(x, kernel = "biweight", bandwidth = 0.05)
plot(fhat_biweight, type = "l")
```



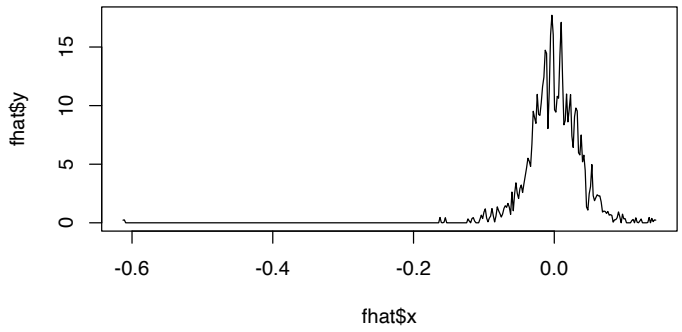

```
fhat_triweight <- bkde(x, kernel = "triweight", bandwidth = 0.05)
plot(fhat_triweight, type = "l")
```



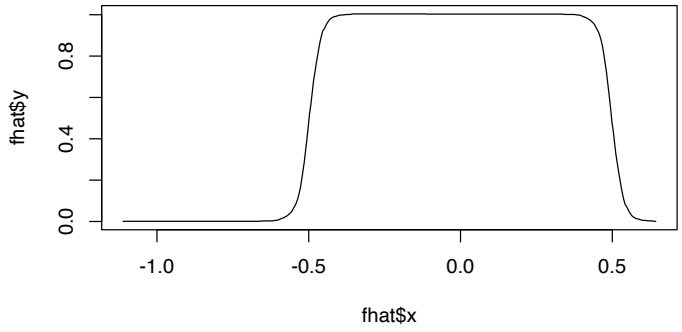
2.3.2. Efecto del ancho de banda en la estimación

** Kernel uniforme **

```
fhat <- bkde(x, kernel = "box", bandwidth = 0.001)
plot(fhat, type = "l")
```

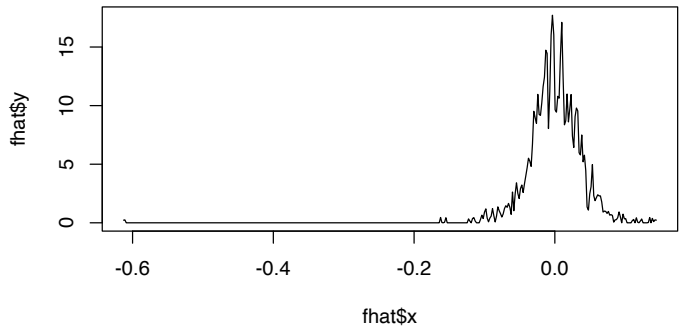



```
fhat <- bkde(x, kernel = "box", bandwidth = 0.5)
plot(fhat, type = "l")
```

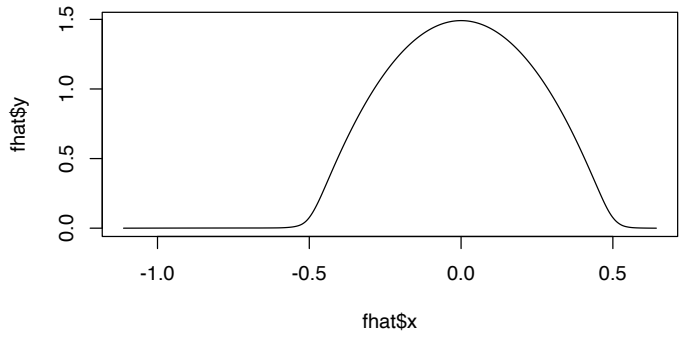


** Kernel Epanechnikov **

```
fhat <- bkde(x, kernel = "epa", bandwidth = 0.001)
plot(fhat, type = "l")
```




```
fhat <- bkde(x, kernel = "epa", bandwidth = 0.5)
plot(fhat, type = "l")
```




```
suppressMessages(library(tidyverse))
library(gganimate)

fani <- tibble()

for (b in seq(0.001, 0.02, length.out = 40)) {
    f <- bkde(x, kernel = "epa", bandwidth = b, gridsize = length(x))
    fani <- fani %>%
        bind_rows(tibble(xreal = sort(x), x = f$x,
            y = f$y, bw = b))
```

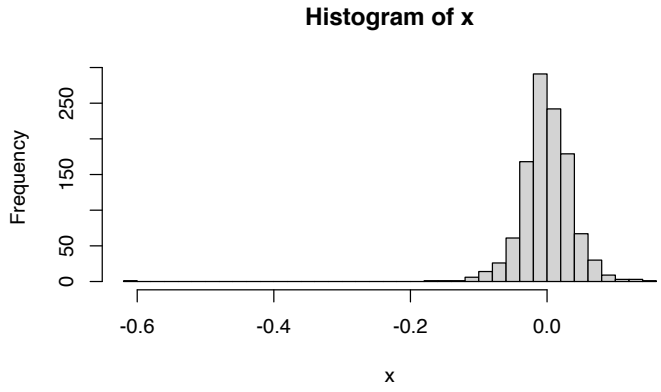
```
}

ggplot(data = fani) + geom_line(aes(x, y), color = "blue") +
    labs(title = paste0("Ancho de banda = {closest_state}")) +
    transition_states(bw) + view_follow() + theme_minimal(base_size = 20)

# anim_save('manual_figure/bandwidth-animation.gif')
```

Nota: .

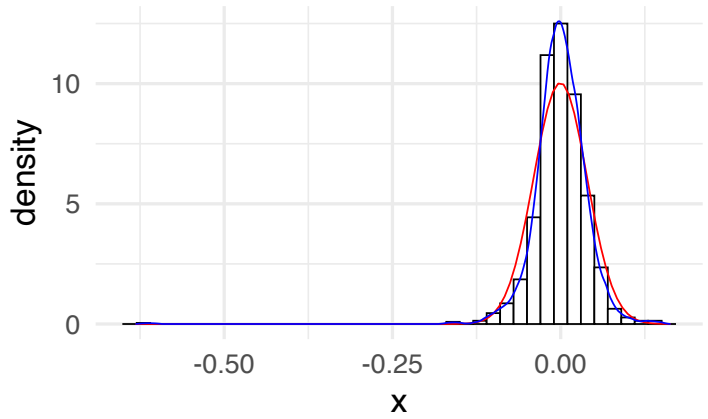
- Construya una variable llamada `u` que sea una secuencia de -0.15 a 0.15 con un paso de 0.01
- Asigne `x` a los datos `stockrel` y calcule su media y varianza.
- Usando la función `dnorm` construya los valores de la distribución de los datos usando la media y varianza calculada anteriormente. Asigne a esta variable `f\_param`.
- Defina un ancho de banda `h` en 0.02
- Construya un histograma para estos datos con ancho de banda `h`. Llame a esta variable `f\_hist`
- Usando el paquete `KernSmooth` y la función `bkde`, construya una función que calcule el estimador no paramétrico con un núcleo Epanechivok para un ancho de banda h. Llame a esta variable `f\_epa`.
- Dibuje en el mismo gráfico la estimación paramétrica y no paramétrica.

```
x <- read.csv("data/stockres.txt")
x <- unlist(x)
# Eliminar nombres de las columnas
names(x) <- NULL

u <- seq(-0.15, 0.15, by = 0.01)

mu <- mean(x)
sigma <- sd(x)

f_param <- dnorm(u, mean = mu, sd = sigma)

h <- 0.02

n_bins <- floor(diff(range(x))/h)
```

```
f_hist <- hist(x, breaks = n_bins)
```




```
f_epa <- as.data.frame(bkde(x, kernel = "epa", bandwidth = h))

x_df <- data.frame(x)

library(ggplot2)

ggplot(x_df, aes(x)) + geom_histogram(aes(y = ..density..),
    binwidth = 0.02, col = "black", fill = "white") +
    stat_function(fun = dnorm, args = list(mean = mu,
        sd = sigma), color = "red") + geom_line(data = f_epa,
    aes(x, y), color = "blue") + theme_minimal(base_size = 20)
```



2.3.3. Ancho de banda óptimo

Usemos la regla de la normal o también conocida como Silverman. **Primero recuerde que en este caso se asume que** $f(x)$ sigue una distribución normal. En este caso, lo que se obtiene es que

$$\begin{aligned}\|f''\|_2^2 &= \sigma^{-5}\int\{\phi''\}^2 dx \\ &= \sigma^{-5}\frac{3}{8\sqrt{\pi}} \approx 0{,}212\sigma^{-5}\end{aligned}$$

donde ϕ es la densidad de una normal estándar.

El estimador para σ es

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

Y usando el cálculo realizado anteriormente, se obtiene que

$$h_{normal} = \left(\frac{4s^5}{3n}\right)^{1/5} \approx 1{,}06sn^{-1/5}.$$

Un estimador más robusto es

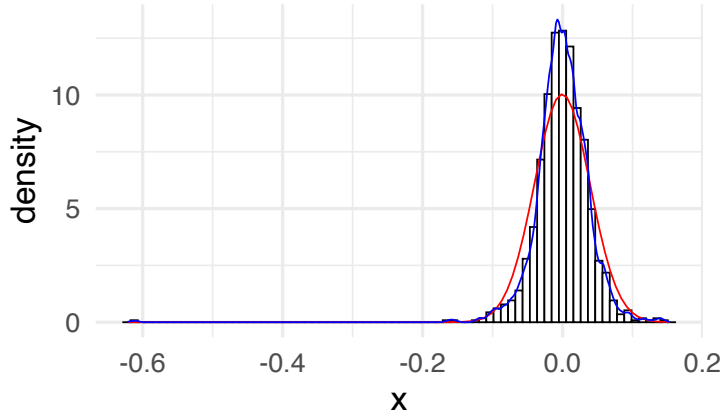
$$h_{normal} = 1{,}06\,\text{mín}\left\{s, \frac{IQR}{1{,}34}\right\}n^{-1/5}.$$

¿Por qué es $IQR/1{,}34$?

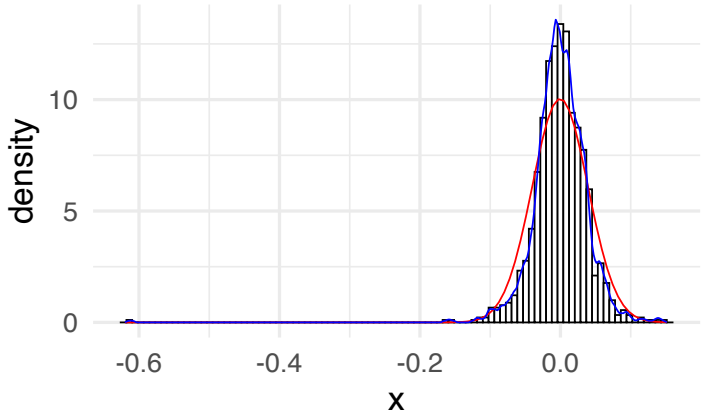
```
s <- sd(x)
n <- length(x)
```

```
h_normal <- 1.06 * s * n^(-1/5)

h <- h_normal
```

```
n_bins <- floor(diff(range(x))/h)
f_hist <- hist(x, breaks = n_bins, plot = FALSE)
f_epa <- as.data.frame(bkde(x, kernel = "epa", bandwidth = h))

ggplot(x_df, aes(x)) + geom_histogram(aes(y = ..density..),
    binwidth = h, col = "black", fill = "white") +
    stat_function(fun = dnorm, args = list(mean = mu,
        sd = sigma), color = "red") + geom_line(data = f_epa,
    aes(x, y), color = "blue") + theme_minimal(base_size = 20)
```

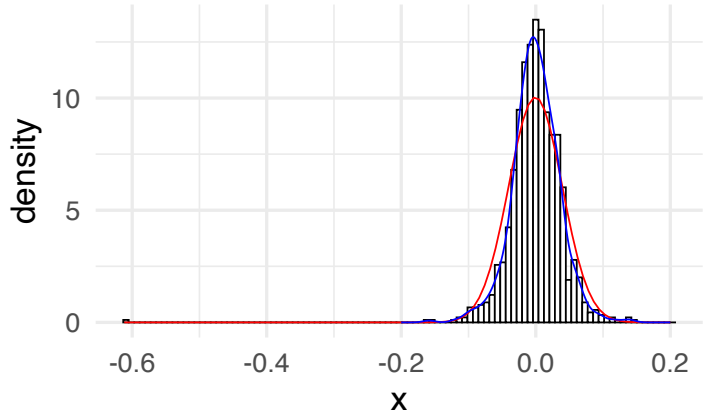



```
h_iqr <- 1.06 * min(s, IQR(x)/1.34) * n^(-1/5)

h <- h_iqr

n_bins <- floor(diff(range(x))/h)
f_hist <- hist(x, breaks = n_bins, plot = FALSE)
f_epa <- as.data.frame(bkde(x, kernel = "epa", bandwidth = h))

ggplot(x_df, aes(x)) + geom_histogram(aes(y = ..density..),
    binwidth = h, col = "black", fill = "white") +
    stat_function(fun = dnorm, args = list(mean = mu,
        sd = sigma), color = "red") + geom_line(data = f_epa,
    aes(x, y), color = "blue") + theme_minimal(base_size = 20)
```



Una librería más especializada es `np` (non-parametric).

```
library(np)

x.eval <- seq(-0.2, 0.2, length.out = 200)

h_normal_np <- npudensbw(dat = x, bwmethod = "normal-reference")

dens.ksum <- npksum(txdat = x, exdat = x.eval, bws = h_normal_np$bw)$ksum/(n *
    h_normal_np$bw[1])

dens.ksum.df <- data.frame(x = x.eval, y = dens.ksum)

ggplot(x_df, aes(x)) + geom_histogram(aes(y = ..density..),
    binwidth = h_normal_np$bw, col = "black", fill = "white") +
    stat_function(fun = dnorm, args = list(mean = mu,
        sd = sigma), color = "red") + geom_line(data = dens.ksum.df,
    aes(x, y), color = "blue") + theme_minimal(base_size = 20)
```



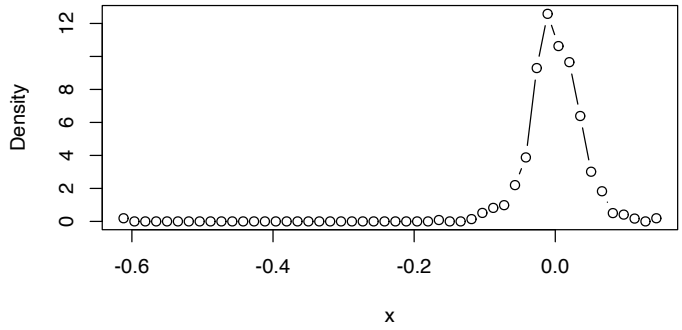
2.3.4. Validación cruzada

La forma que vimos en clase es la de validación cruzada por mínimos cuadrados"least-square cross validation'' la cual se puede ejecutar con este comando.

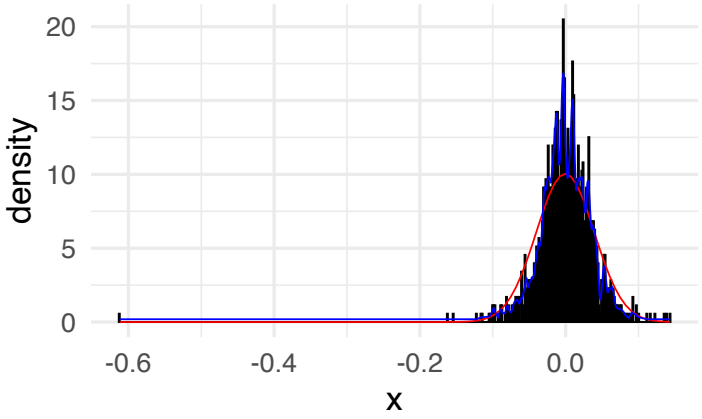
```
h_cv_np_ls <- npudensbw(dat = x, bwmethod = "cv.ls",
    ckertype = "epa", ckerorder = 2)
```

```
## Multistart 1 of 1 |Multistart 1 of 1 |Multistart 1 of 1 |Multistart 1 of 1
```

```
dens.np <- npudens(h_cv_np_ls)

plot(dens.np, type = "b")
```



```
dens.np.df <- data.frame(x = dens.np$eval[, 1], y = dens.np$dens)

ggplot(x_df, aes(x)) + geom_histogram(aes(y = ..density..),
    binwidth = h_cv_np_ls$bw, col = "black", fill = "white") +
    stat_function(fun = dnorm, args = list(mean = mu,
        sd = sigma), color = "red") + geom_line(data = dens.np.df,
    aes(x, y), color = "blue") + theme_minimal(base_size = 20)
```



2.3.5. Temas adicionales

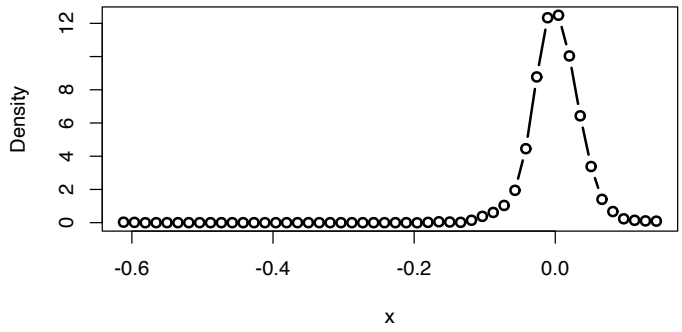
** Reducción del sesgo ** Como lo mencionamos en el texto, una forma de mejorar el sesgo en la estimación es suponer que la función de densidad es más veces diferenciable.

Esto se logra asumiendo que el Kernel es más veces diferenciable.

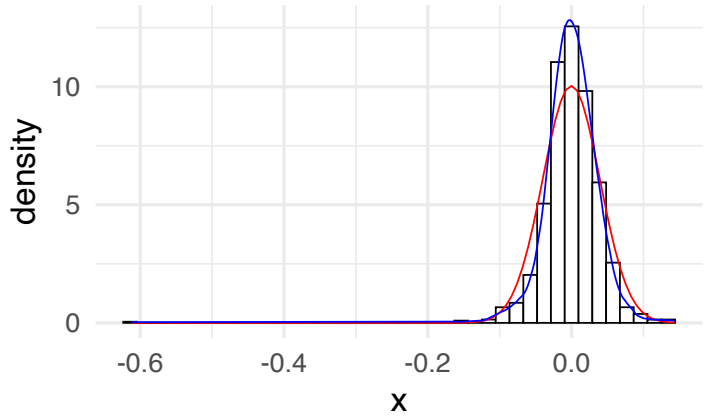
```
h_cv_np_ls <- npudensbw(dat = x, bwmethod = "cv.ls",
    ckertype = "epa", ckerorder = 4)
```

```
## Multistart 1 of 1 |Multistart 1 of 1 |Multistart 1 of 1 |Multistart 1 of 1 /Multis
```

```
dens.np <- npudens(h_cv_np_ls)

plot(dens.np, type = "b", lwd = 2)
```




```
dens.np.df <- data.frame(x = dens.np$eval[, 1], y = dens.np$dens)

ggplot(x_df, aes(x)) + geom_histogram(aes(y = ..density..),
    binwidth = h_cv_np_ls$bw, col = "black", fill = "white") +
    stat_function(fun = dnorm, args = list(mean = mu,
        sd = sigma), color = "red") + geom_line(data = dens.np.df,
    aes(x, y), color = "blue") + theme_minimal(base_size = 20)
```

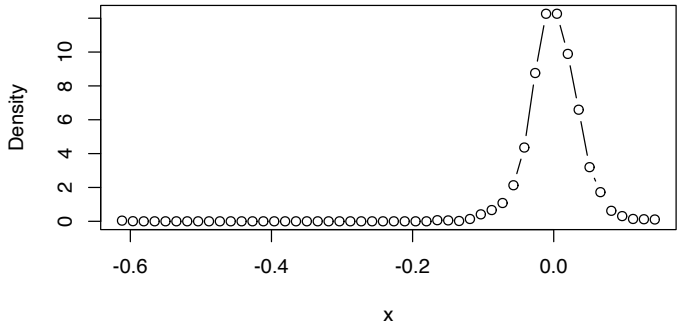


Otra forma de estimar el ancho de banda Otra forma de estimar ancho de bandas óptimos es usando máxima verosimilitud. Les dejo de tarea revisar la sección 1.1 del artículo de (Hall 1987) para entender su estructura.

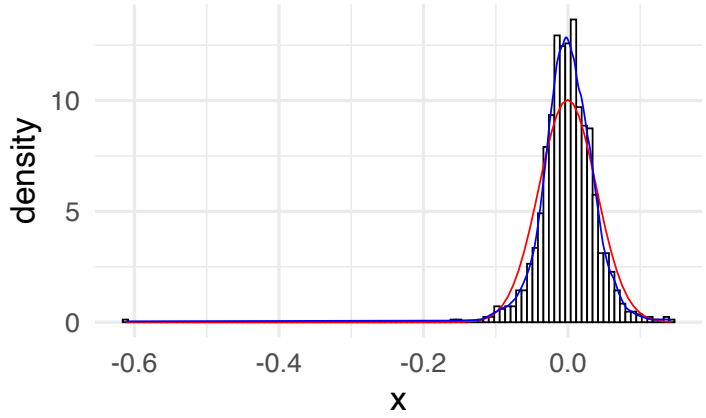
```
h_cv_np_ml <- npudensbw(dat = x, bwmethod = "cv.ml",
    ckertype = "epanechnikov")
```

```
## Multistart 1 of 1 |Multistart 1 of 1 |Multistart 1 of 1 |Multistart 1 of 1 /Multis
```

```
dens.np <- npudens(h_cv_np_ml)

plot(dens.np, type = "b")
```



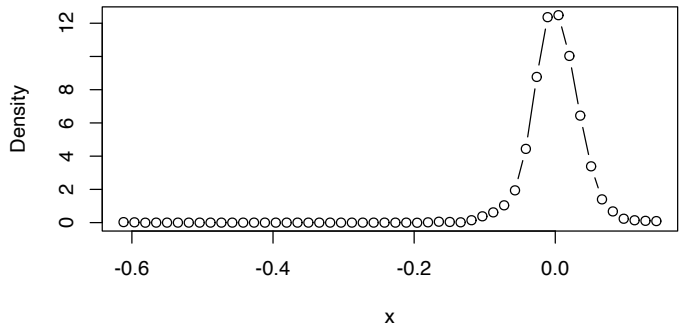

```
dens.np.df <- data.frame(x = dens.np$eval[, 1], y = dens.np$dens)

ggplot(x_df, aes(x)) + geom_histogram(aes(y = ..density..),
    binwidth = h_cv_np_ml$bw, col = "black", fill = "white") +
    stat_function(fun = dnorm, args = list(mean = mu,
        sd = sigma), color = "red") + geom_line(data = dens.np.df,
    aes(x, y), color = "blue") + theme_minimal(base_size = 20)
```



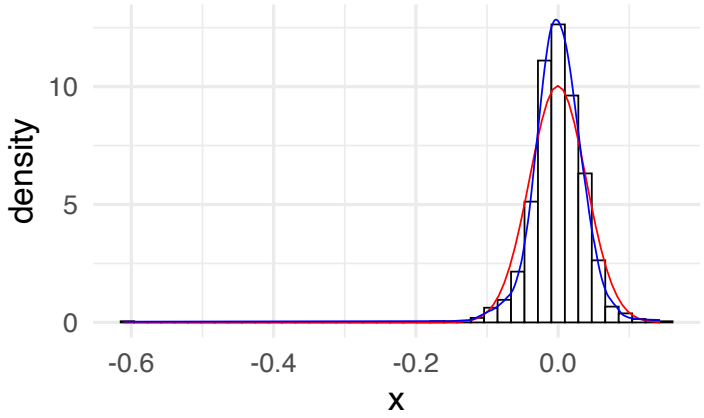
```
h_cv_np_ml <- npudensbw(dat = x, bwmethod = "cv.ml",
    ckertype = "epanechnikov", ckerorder = 4)
```

```
## Multistart 1 of 1 |Multistart 1 of 1 |Multistart 1 of 1 |Multistart 1 of 1
```

```
dens.np <- npudens(h_cv_np_ml)

plot(dens.np, type = "b")
```




```
dens.np.df <- data.frame(x = dens.np$eval[, 1], y = dens.np$dens)

ggplot(x_df, aes(x)) + geom_histogram(aes(y = ..density..),
    binwidth = h_cv_np_ml$bw, col = "black", fill = "white") +
    stat_function(fun = dnorm, args = list(mean = mu,
        sd = sigma), color = "red") + geom_line(data = dens.np.df,
    aes(x, y), color = "blue") + theme_minimal(base_size = 20)
```




```
fani <- tibble()

for (b in seq(0.001, 0.05, length.out = 40)) {
    f <- npudens(tdat = x, ckertype = "epanechnikov",
        bandwidth.compute = FALSE, bws = b)
    fani <- fani %>%
        bind_rows(tibble(xreal = sort(x), x = f$eval$x,
            y = f$dens, bw = b))
}

ggplot(data = fani) + geom_line(aes(x, y), color = "blue") +
    labs(title = paste0("Ancho de banda = {closest_state}")) +
    theme_minimal(base_size = 20) + transition_states(bw) +
    view_follow()

# anim_save('manual_figure/bandwidth-animation-np.gif')
```

Ejercicio 2.7. Implementar el intervalo confianza visto en clase para estimadores de densidades por núcleos y visualizarlo de en ggplot.

Si se atreven: ¿Se podría hacer una versión animada de ese gráfico para visualizar el significado real de este el intervalo de confianza?

2.4. Ejercicios

Del libro de (Härdle y col. 2004) hagan los siguientes ejercicios

1. **Sección 2:** 1, 2, 3, 5, 7, 14
2. **Sección 3:** 4, 8, 10, 11, 16,

Capítulo 3

Jackknife y Bootstrap

Suponga que se quiere estimar un intervalo de confianza para la media μ desconocida de un conjunto de datos $X_1, \ldots, X_n$ que tiene distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Primero se conoce que

$$\sqrt{n}\,(\hat{\mu} - \mu) \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right),$$

y esto nos permite escribir el intervalo de confianza como

$$\left[\hat{\mu} - \hat{\sigma} z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \hat{\mu} + \hat{\sigma} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

donde $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el cuantil $1 - \frac{\alpha}{2}$ de una normal estándar.

La expresión anterior es posible dado que la distribución de $\hat{\mu}$ es normal.

Nota: . ¿Qué pasaría si no conocemos la distribución de $\hat{\mu}$?

¿Cómo podemos encontrar ese intervalo de confianza?

3.1. Caso concreto

Suponga que tenemos la siguiente tabla de datos, que representa una muestra de tiempos y distancias de viajes en Atlanta.

Cargamos la base de la siguiente forma:

```
CommuteAtlanta <- read.csv2("data/CommuteAtlanta.csv")
```

City	Age	Distance	Time	Sex
Atlanta	19	10	15	M
Atlanta	55	45	60	M
Atlanta	48	12	45	M
Atlanta	45	4	10	F
Atlanta	48	15	30	F
Atlanta	43	33	60	M

Para este ejemplo tomaremos la variable `Time` que la llamaremos `x` para ser más breves. En este caso note que

```
x <- CommuteAtlanta$Time
```

La media es 29.11 y su varianza 429.2483968. Para efectos de lo que sigue, asignaremos la varianza a la variable T_n

```
Tn <- var(x)
```

A partir de estos dos valores, ¿Cuál sería un intervalo de confianza para la varianza?

Note que esta pregunta es difícil ya que no tenemos ningún tipo de información adicional para inferir la variación de la varianza T_n.

Las dos técnicas que veremos a continuación nos permitirán extraer *información adicional* de la muestra para inferir propiedades distribucionales de T_n.

Nota: . Para efectos de este capítulo, llamaremos $T_n = T(X_1, \ldots, X_n)$ al estadístico T formado por la muestra de los X_i's.

3.2. Jackknife

Esta técnica fue propuesta por (Quenouille 1949). Primero que todo se puede probar que existen estimadores que cumplen la siguiente propiedad:

$$\text{Sesgo}(T_n) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{3.1}$$

para algún a and b.

Por ejemplo sea $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$ y sea $\widehat{\sigma}_n^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Entonces,

$$\mathbb{E}\left(\widehat{\sigma}_n^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

por lo tanto

$$\text{Sesgo} = -\frac{\sigma^2}{n}$$

Por lo tanto en este caso $a = -\sigma^2$ y $b = 0$.

Defina $T_{(-i)}$ como el estimador T_n pero eliminando el i-ésimo elemento de la muestra.

Es claro que en este contexto, se tiene que

$$\text{Sesgo}\left(T_{(-i)}\right) = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{(n-1)^2} + O\left(\frac{1}{(n-1)^3}\right) \tag{3.2}$$

Ejercicio 3.1. Una forma fácil de construir los $T_{(-i)}$ es primero replicando la matriz de datos múltiple veces usando el producto de kronecker

```
n <- length(x)
jackdf <- kronecker(matrix(1, 1, n), x)
```

15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
60	60	60	60	60	60	60	60	60	60
45	45	45	45	45	45	45	45	45	45
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
60	60	60	60	60	60	60	60	60	60
45	45	45	45	45	45	45	45	45	45
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
15	15	15	15	15	15	15	15	15	15

Y luego se elimina la diagonal

```
diag(jackdf) <- NA
```

NA	15	15	15	15	15	15	15	15	15
60	NA	60	60	60	60	60	60	60	60
45	45	NA	45	45	45	45	45	45	45
10	10	10	NA	10	10	10	10	10	10
30	30	30	30	NA	30	30	30	30	30
60	60	60	60	60	NA	60	60	60	60
45	45	45	45	45	45	NA	45	45	45
10	10	10	10	10	10	10	NA	10	10
25	25	25	25	25	25	25	25	NA	25
15	15	15	15	15	15	15	15	15	NA

Cada columna contiene toda la muestra excepto el i-ésimo elemento. Solo basta estimar la media de cada columna:

```
T_i <- apply(jackdf, 2, var, na.rm = TRUE)
```

x
429.7098
428.1905
429.6023
429.3756
430.1087
428.1905
429.6023
429.3756
430.0764
429.7098

Definimos el estimador de sesgo *jackknife* de T_n como

$$b_{jack} = (n-1)(\overline{T}_n - T_n)$$

donde

$$\overline{T}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_{(-i)}$$

y el estimador corregido por sesgo es: $T_{jack} = T_n - b_{jack}$. ::: {.exercise

#unnamed-chunk-74} En nuestro caso tendríamos lo siguiente: :::

```
(bjack <- (n - 1) * (mean(T_i) - Tn))
```

```
## [1] 0
```

Es decir, el sesgo aproximado (jackknife) del estimador T_n es 0.

Si se asume que T_n es un estimador del parámetro θ entonce se puede comprobar que b_{jack} cumple:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(b_{\text{jack}}\right) &= (n-1)\left(\mathbb{E}\left[\overline{T}_n\right] - \mathbb{E}\left[T_n\right]\right) \\
&= (n-1)\left(\mathbb{E}\left[\overline{T}_n\right] - \theta + \theta - \mathbb{E}\left[T_n\right]\right) \\
&= (n-1)\left(\text{Sesgo}\left(\overline{T}_n\right) - \text{Sesgo}\left(T_n\right)\right) \\
&= (n-1)\left[\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)a + \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right)b + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] \\
&= \frac{a}{n} + \frac{(2n-1)b}{n^2(n-1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \text{Sesgo}\left(T_n\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Nota: . Es decir, en general, el estimador b_{jack} aproxima correctamente $\text{Sesgo}\left(T_n\right)$ hasta con un error del n^{-2}.

Podemos usar los T_i para generar muestras adicionales para estimar el parámetro θ a través del siguiente estimador:

$$\widetilde{T}_i = nT_n - (n-1)T_{(-i)}.$$

Nota: . A $\widetilde{T}_i$ se le llaman **pseudo-valor** y representa el aporte o peso que tiene la variable X_i para estimar T_n.

Ejercicio 3.2. Usado un cálculo similar para el b_{jack} pruebe que

$$\text{Sesgo}\left(T_{\text{jack}}\right) = -\frac{b}{n(n-1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

¿Qué conclusión se obtiene de este cálculo?

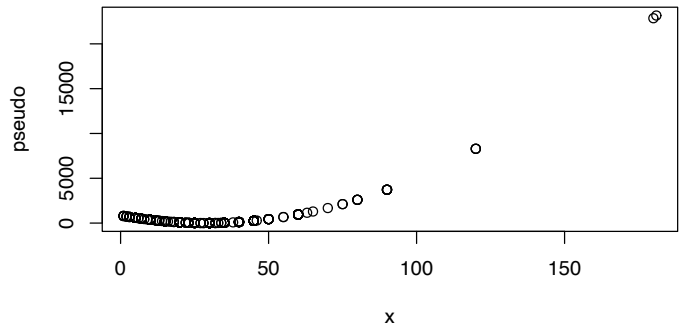
Ejercicio 3.3. Los pseudo-valores se estiman de forma directa como,

```
pseudo <- n * Tn - (n - 1) * T_i

pseudo[1:10]
```

```
##  [1] 199.02972209 957.16225222 252.64417993 365.79679037  -0.06666345
##  [6] 957.16225222 252.64417993 365.79679037  16.09799519 199.02972209
```

Lo importante acá es notar la asociación o correspondencia que tiene con los datos reales,

```
plot(x = x, y = pseudo)
```



Con estos pseudo-valores, es posible estimar la media y la varianza de T_n con los siguientes estimadores respectivos:

$$T_{\text{jack}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{T}_i$$

y

$$v_{jack} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\widetilde{T}_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{T}_i\right)^2}{n-1}.$$

Nota: . Sin embargo, se puede demostrar fácilmente que se pueden usar pseudovalores para construir una prueba normal de hipótesis.

Como los pseudovalores son idénticamente distribuidos entonces su promedio se ajusta de forma aproximada a una distribución normal a medida que el tamaño de la muestra aumenta. Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{\sqrt{n}\left(T_{jack}-\theta\right)}{\sqrt{v_{jack}}} \to N(0,1).$$

```
(Tjack <- mean(pseudo))
```

```
## [1] 429.2484
```

```
(Vjack <- var(pseudo, na.rm = TRUE))
```

```
## [1] 2701991
```

```
(sdjack <- sqrt(Vjack))
```

```
## [1] 1643.774
```

```
(z <- qnorm(1 - 0.05/2))
```

```
## [1] 1.959964
```

```
c(Tjack - z * sdjack/sqrt(n), Tjack + z * sdjack/sqrt(n))
```

```
## [1] 285.1679 573.3289
```

3.3. Bootstrap

Este método es un poco más sencillo de implementar que Jackknife y es igualmente de eficaz. Este fue propuesto por Bradley Efron en (Efron 1979).

Primero recordemos que estamos estimando la variabilidad propia de un estadístico a partir de una muestra. Asuma que este estadístico tiene la forma $T_n = g\left(X_1, \ldots, X_n\right)$ donde g es cualquier función (media, varianza, quantiles, etc).

Supongamos que conocemos la distribución real de los X's, llamada $F(x)$ y asumamos que $T_n = \bar{X}_n$. Si uno quisiera estimar la varianza de T_n basta con hacer

$$\mathbb{V}_F\left(T_n\right) := \mathrm{Var}_F\left(T_n\right) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\int x^2 dF(x) - \left(\int x dF(x)\right)^2}{n}$$

donde $\sigma^2 = \mathrm{Var}\left(X\right)$ y el subindice F es solo para indicar la dependencia con la distribución real.

Ahora dado que no tenemos la distribución real $F(x)$, una opción es utilizar el estimador empírico $\hat{F}_n$ como estimador plug-in en la formulación de la varianza de T_n.

De manera sencilla se puede resumir la técnica de bootstrap como una simulación iid de la distribución $\hat{F}_n$ de modo que se pueda conocer la varianza del estadístico T_n.

En simples pasos la técnica es

1. Seleccione $X_1^*, \ldots, X_n^* \sim \widehat{F}_n$
2. Estime $T_n^* = g\left(X_1^*, \ldots, X_n^*\right)$
3. Repita los Pasos 1 y 2, B veces para obtener $T_{n,1}^*, \ldots, T_{n,B}^*$
4. Estime
$$v_{\mathrm{boot}} = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}\left(T_{n,b}^* - \frac{1}{B}\sum_{r=1}^{B} T_{n,r}^*\right)^2$$

Por la ley de los grandes números tenemos que

$$v_{\mathrm{boot}} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{V}_{\widehat{F}_n}\left(T_n\right), \quad \text{si} \quad B \to \infty. \tag{3.3}$$

además llamaremos,

$$\widehat{\mathrm{se}}_{\mathrm{boot}} = \sqrt{v_{\mathrm{boot}}}$$

En pocas palabras lo que tenemos es que

$$\begin{aligned} \text{Mundo Real: } F \quad &\Longrightarrow X_1, \ldots, X_n \Longrightarrow \quad T_n = g\left(X_1, \ldots, X_n\right) \\ \text{Mundo Bootstrap: } \widehat{F}_n \quad &\Longrightarrow X_1^*, \ldots, X_n^* \Longrightarrow \quad T_n^* = g\left(X_1^*, \ldots, X_n^*\right) \end{aligned}$$

En términos de convergencia lo que se tiene es que

$$\mathrm{Var}_F\left(T_n\right) \overbrace{\approx}^{O(1/\sqrt{n})} \mathrm{Var}_{\widehat{F}_n}\left(T_n\right) \overbrace{\approx}^{O(1/\sqrt{B})} v_{boot}$$

producto de la ley de grandes números en ambos casos.

Nota: . ¿Cómo extraemos una muestra de $\hat{F}_n$?

Recuerden que $\hat{F}_n$ asigna la probabilidad de $\frac{1}{n}$ a cada valor usado para construirla.

Por lo tanto, todos los puntos originales $X_1, \ldots, X_n$ tienen probabilidad $\frac{1}{n}$ de ser escogidos, que resulta ser equivalente a un muestreo con remplazo n-veces.

Así que basta cambiar el punto 1. del algoritmo mencionando anteriormente con

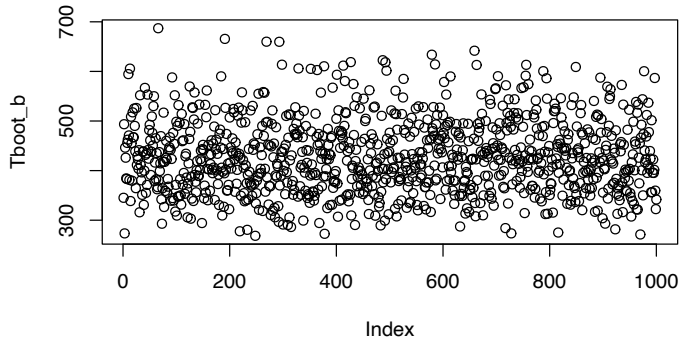
1. Seleccione una muestra con remplazo $X_1^*, \ldots, X_n^*$ de $X_1, \ldots, X_n$.

Ejercicio 3.4. En este ejemplo podemos tomar $B = 1000$ y construir esa cantidad de veces nuestro estimador de varianza:

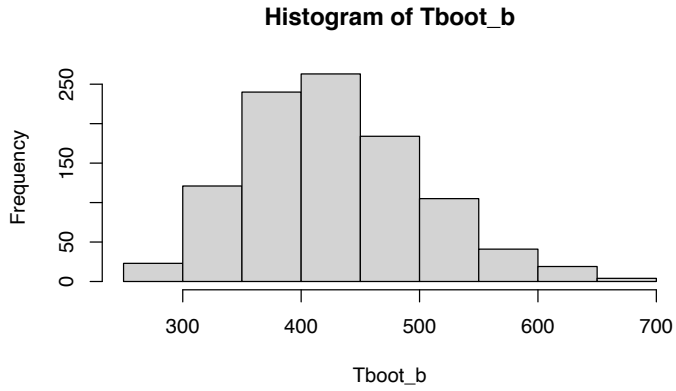
```
B <- 1000
Tboot_b <- NULL

for (b in 1:B) {
    xb <- sample(x, size = n, replace = TRUE)
    Tboot_b[b] <- var(xb)
}

Tboot_b[1:10]
```

```
##  [1] 345.1819 493.5279 273.3998 446.3071 426.0340 384.2662 383.2132 455.8139
##  [9] 462.3363 594.5774
```

```
plot(Tboot_b)
```




```
hist(Tboot_b)
```



Por supuesto podemos encontrar los estadísticos usuales para esta nueva muestra

```
(Tboot <- mean(Tboot_b))
```

```
## [1] 428.066
```

```
(Vboot <- var(Tboot_b))
```

```
## [1] 5504.701
```

```
(sdboot <- sqrt(Vboot))
```

```
## [1] 74.19367
```

Nota: . Si $\hat{\theta}$ es un estimador de θ (bajo cualquier método) entonces podemos sustituir el paso 1 en el algoritmo de Bootstrap por lo siguiente:

1. Seleccione $X_1^*, \ldots, X_n^* \sim F_{\hat{\theta}}$

A este algoritmo modificado le llamamos Bootstrap paramétrico.

3.3.1. Intervalos de confianza

3.3.1.1. Intervalo Normal

Este es el más sencillo y se escribe como

$$T_n \pm z_{\alpha/2}\widehat{\mathrm{Se}}_{\mathrm{boot}} \tag{3.4}$$

Nota: . Este intervalo solo funciona si la distribución de T_n es normal.

El cálculo de este intervalo es

```
c(Tn - z * sdboot, Tn + z * sdboot)
```

```
## [1] 283.8315 574.6653
```

3.3.1.2. Intervalo pivotal

Sea $\theta = T(F)$ y $\widehat{\theta}_n = T\left(\widehat{F}_n\right)$ y defina la cantidad pivotal $R_n = \widehat{\theta}_n - \theta$.

Sea $H(r)$ la función de distribución del pivote:

$$H(r) = \mathbb{P}_F\left(R_n \leq r\right).$$

Además considere $C_n^\star = (a, b)$ donde

$$a = \widehat{\theta}_n - H^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{y} \quad b = \widehat{\theta}_n - H^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a \leq \theta \leq b) &= \mathbb{P}\left(\widehat{\theta}_n - b \leq R_n \leq \widehat{\theta}_n - a\right) \\ &= H\left(\widehat{\theta}_n - a\right) - H\left(\widehat{\theta}_n - b\right) \\ &= H\left(H^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) - H\left(H^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha\end{aligned}$$

Nota: . $C_n^\star = (a, b)$ es un intervalo de confianza al $(1-\alpha)\,\%$.

El problema es que este intervalo depende de H desconocido.

Para resolver este problema, se puede construir una versión *bootstrap* de H usando lo que sabemos hasta ahora:

$$\widehat{H}(r) = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} I\left(R_{n,b}^* \leq r\right)$$

donde $R_{n,b}^* = \widehat{\theta}_{n,b}^* - \widehat{\theta}_n$.

Sea r_β^* el cuantil muestral de tamaño β de $\left(R_{n,1}^*, \ldots, R_{n,B}^*\right)$ y sea θ_β^* el cuantil muestral de tamaño β de $\left(\theta_{n,1}^*, \ldots, \theta_{n,B}^*\right)$.

Nota: . Según la notación anterior se cumple que:

$$r_\beta^* = \theta_\beta^* - \widehat{\theta}_n$$

A partir de loa estadísticos anteriores se puede construir un intervalo de confianza aproximado $C_n = (\widehat{a}, \widehat{b})$ al $(1-\alpha)\,\%$ donde:

$$\begin{aligned}\widehat{a} &= \widehat{\theta}_n - \widehat{H}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \widehat{\theta}_n - r_{1-\alpha/2}^* = \widehat{\theta}_n - \theta_{1-\alpha/2}^* + \widehat{\theta}_n = 2\widehat{\theta}_n - \theta_{1-\alpha/2}^* \\ \widehat{b} &= \widehat{\theta}_n - \widehat{H}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \widehat{\theta}_n - r_{\alpha/2}^* = \widehat{\theta}_n - \theta_{\alpha/2}^* + \widehat{\theta}_n = 2\widehat{\theta}_n - \theta_{\alpha/2}^*\end{aligned}$$

Nota: . El intervalo de confianza pivotal de tamaño $1-\alpha$ es

$$C_n = \left(2\widehat{\theta}_n - \widehat{\theta}_{((1-\alpha/2)B)}^*, 2\widehat{\theta}_n - \widehat{\theta}_{((\alpha/2)B)}^*\right)$$

El intervalo anterior para un nivel de 95 % se estima de la siguiente forma

```
c(2 * Tn - quantile(Tboot_b, 1 - 0.05/2), 2 * Tn -
    quantile(Tboot_b, 0.05/2))
```

```
##    97.5%     2.5%
## 267.1250 552.9294
```

3.3.1.3. Intervalo pivotal studentizado

Una versión mejorada del intervalo pivotal sería a través de la normalización de los estimadores de T_n:

$$Z_n = \frac{T_n - \theta}{\widehat{\text{se}}_{\text{boot}}}.$$

Como θ es desconocido, entonces la versión a estimar es

$$Z_{n,b}^* = \frac{T_{n,b}^* - T_n}{\widehat{\text{se}}_b^*}$$

donde $\widehat{\text{se}}_b^*$ es un estimador del error estándar de $T_{n,b}^*$ no de T_n.

Nota: . Para calcular $Z_{n,b}^*$ requerimos estimar la varianza de $T_{n,b}^*$ para cada b.

Con esto se puede obtener cantidades $Z_{n,1}^*, \ldots, Z_{n,B}^*$ que debería ser próximos a Z_n. (Bootstrap de los estadísticos normalizados)

Sea z_α^* el α-cuantil de $Z_{n,1}^*, \ldots, Z_{n,B}^*$, entonces $\mathbb{P}\left(Z_n \leq z_\alpha^*\right) \approx \alpha$.

Define el intervalo

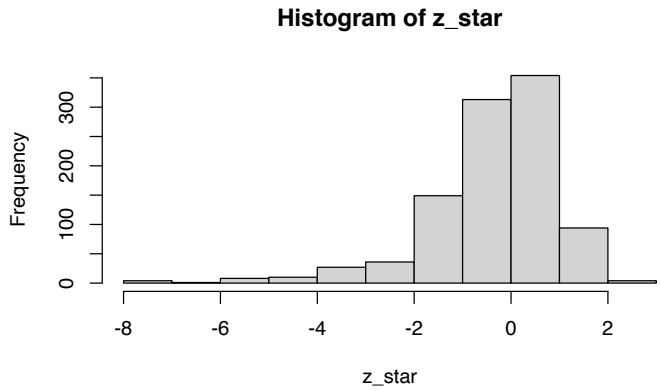
$$C_n = \left(T_n - z_{1-\alpha/2}^* \widehat{\text{se}}_{\text{boot}}, T_n - z_{\alpha/2}^* \widehat{\text{se}}_{\text{boot}}\right)$$

Justificado por el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\theta \in C_n\right) &= \mathbb{P}\left(T_n - z_{1-\alpha/2}^* \widehat{\text{Se}}_{\text{boot}} \leq \theta \leq T_n - z_{\alpha/2}^* \widehat{\text{Se}}_{\text{boot}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(z_{\alpha/2}^* \leq \frac{T_n - \theta}{\text{se}_{\text{boot}}} \leq z_{1-\alpha/2}^*\right) \\
&= \mathbb{P}\left(z_{\alpha/2}^* \leq Z_n \leq z_{1-\alpha/2}^*\right) \\
&\approx 1 - \alpha
\end{aligned}$$

Note que para este caso tenemos que hacer bootstrap para cada estimador bootstrap calculado.

```
B <- 1000
Tboot_b <- NULL
Tboot_bm <- NULL
sdboot_b <- NULL

for (b in 1:B) {
    xb <- sample(x, size = n, replace = TRUE)
    Tboot_b[b] <- var(xb)
    for (m in 1:B) {
        xbm <- sample(xb, size = n, replace = TRUE)
        Tboot_bm[m] <- var(xbm)
    }
    sdboot_b[b] <- sd(Tboot_bm)
}

z_star <- (Tboot_b - Tn)/sdboot_b

hist(z_star)
```




```
c(Tn - quantile(z_star, 1 - 0.05/2) * sdboot, Tn -
    quantile(z_star, 0.05/2) * sdboot)
```

```
##     97.5%      2.5%
```

```
## 317.7259 707.0044
```

3.3.2. Resumiendo

Resumiendo todos lo métodos de cálculo de intervalos obtenemos

```
knitr::kable(data.frame(Metodo = c("Jackknife", "Bootstrap Normal",
    "Bootstrap Pivotal", "Bootstrap Pivotal Estudentizado"),
    Inferior = c(Tjack - z * sdjack/sqrt(n), Tn - z *
        sdboot, 2 * Tn - quantile(Tboot_b, 1 - 0.05/2),
        Tn - quantile(z_star, 1 - 0.05/2) * sdboot),
    Superior = c(Tjack + z * sdjack/sqrt(n), Tn + z *
        sdboot, 2 * Tn - quantile(Tboot_b, 0.05/2),
        Tn - quantile(z_star, 0.05/2) * sdboot)))
```

Metodo	Inferior	Superior
Jackknife	285.1679	573.3289
Bootstrap Normal	283.8315	574.6653
Bootstrap Pivotal	271.2827	551.4989
Bootstrap Pivotal Estudentizado	317.7259	707.0044

3.4. Ejercicios

1. Repita los ejercicios anteriores para calcular intervalos de confianza para la distancia promedio y la varianza del desplazamiento de las personas. Use los métodos de Jackknife y Bootstrap (con todos sus intervalos de confianza). Dada que la distancia es una medida que puede ser influenciada por distancias muy cortas o muy largas, se puede calcular el logaritmo de esta variable para eliminar la escala de la distancias.
2. Verifique que esta última variable se podría estimar paramétricamente con una distribución normal. Repita los cálculos anteriores tomando como cuantiles los de una normal con media 0 y varianza 1.
3. Compare los intervalos calculados y comente los resultados.
4. Del libro (Wasserman 2006) **Sección 3:** 2, 3, 7, 9, 11.

Bibliografía

Efron, B. (ene. de 1979). «Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife». En: *The Annals of Statistics* 7.1, págs. 1-26.

Hall, Peter (dic. de 1987). «On Kullback-Leibler Loss and Density Estimation». En: *The Annals of Statistics* 15.4, págs. 1491-1519.

Härdle, Wolfgang y col. (2004). *Nonparametric and Semiparametric Models*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Quenouille, M. H. (ene. de 1949). «Approximate Tests of Correlation in Time-Series». En: *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)* 11.1, págs. 68-84.

Wasserman, Larry (2006). *All of Nonparametric Statistics*. New York, NY: Springer New York.