实验七：测量误差与数据处理

朱寅杰 1600017721

2017年10月20日

1 实验数据

1.1 钢杯体积的测量

实验时使用游标卡尺测量出钢杯的外径R、内径r、（外）高度H与（内）深度h，从而计算出钢杯的体积$V = \pi(R^2H - r^2h)/4$。

游标卡尺量程为12.5 cm，最小分度为0.05 mm，读数时估读到0.01 mm。仪器的零点没有偏差，其极限误差取$e = 0.005\,\mathrm{cm}$。各数据均在不同方向上测量六次，取平均值作为测量结果，并计算几次测量的样本准偏差$\sigma_N = \sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2/(N-1)}$。从样本标准差估计出平均值偏离真值的标准差$\sigma_{\bar{N}} = \sigma_N/\sqrt{N}$，作为平均值不确定度的估计，再将仪器允差按$\sigma = e/\sqrt{3}$合成入最终测量结果的不确定度中$\sigma = \sqrt{\sigma_{\bar{N}}^2 + e^2/3}$。

待测量	1	2	3	4	5	6	平均值$\bar{x}$	标准差$\sigma_{\bar{N}}$	不确定度σ
外径R/cm	2.800	2.803	2.805	2.803	2.804	2.805	2.803333333	0.000760117	0.002985148
内径r/cm	1.995	1.999	1.985	2.000	1.997	1.995	1.995166667	0.00219722	0.003627825
高H/cm	4.469	4.474	4.471	4.470	4.474	4.469	4.471166667	0.000945751	0.003037726
深h/cm	4.255	4.279	4.262	4.258	4.264	4.268	4.264333333	0.003470511	0.004514175

根据计算出的不确定度，确定各测量结果的有效数字位数。有

$$R = (2.803 \pm 0.003)\,\mathrm{cm} \tag{1}$$

$$r = (1.995 \pm 0.004)\,\mathrm{cm} \tag{2}$$

$$H = (4.471 \pm 0.003)\,\mathrm{cm} \tag{3}$$

$$h = (4.264 \pm 0.005)\,\mathrm{cm} \tag{4}$$

然后根据$V = \pi(R^2H - r^2h)/4$计算出钢杯的体积，并且估算其不确定度。按照复合函数不确定度合成的原则，有

$$\sigma_V = \sqrt{\sum(\frac{\partial V}{\partial x_i}\sigma_{x_i})^2} = \sqrt{(2RH\sigma_R)^2 + (2rh\sigma_r)^2 + (R^2\sigma_H)^2 + (r^2\sigma_h)^2} = 0.0797\,\mathrm{cm}^3$$

故而$V = \pi(R^2H - r^2h)/4 = (14.26 \pm 0.08)\,\mathrm{cm}^3$。

从数据表中可以看出，仪器允差对R、r、H的不确定度的贡献大于随机误差的贡献，而对h不确定度的贡献小于随机误差。

1.2 钢珠体积的测量

使用螺旋测微器测量小钢珠的直径d，并计算其体积$V = \pi d^3/6$。所使用的螺旋测微器量程为25 mm，零点位置在0.019 mm处，鼓轮上最小刻度为0.01 mm，读数时估读到0.001 mm。仪器的极限误差取为$e = 0.004\,\mathrm{mm}$。

和上一例一样测量六次，计算平均值与样本标准差，从而求出平均值的标准差，再与仪器的极限误差合成得到钢珠直径的不确定度。数据记录处理如下表。

	1	2	3	4	5	6	平均值	标准差$\sigma_{\bar{N}}$	不确定度σ
d/cm	12.728	12.729	12.73	12.729	12.727	12.728	12.7285	0.000428	0.002349

从计算出的不确定度确定d应取的有效位数，$d = (12.729 \pm 0.002)\,\mathrm{mm}$。考虑螺旋测微器零点的修正，有$d = (12.710 \pm 0.002)\,\mathrm{mm}$，从而计算出$V = \pi d^3/6$，并估计出$\sigma_V = (\partial V/\partial d)\sigma_d = \pi d^2\sigma_d/2 = 0.596\,\mathrm{mm}^3$。故而有$V = \pi d^3/6 = (1074.9 \pm 0.6)\,\mathrm{mm}^3$。

从数据表中可以看出，仪器允差对d的不确定度的贡献远大于随机误差的贡献，证明多次测量已经有效地减小了随机误差的影响。

2 作业题

2.1

$0.0001\,\mathrm{cm}$是一位有效数字，$1.000\,\mathrm{s}$是四位有效数字，$2.7\times10^{25}\,\mathrm{J}$是两位有效数字，$980.120\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$是六位有效数字。

2.2

今已知$a = 9.9\,\mathrm{cm}$，$b = 999.9\,\mathrm{cm}$，$c = ab/(b-a)$。取a与b的极限误差$e_a = e_b = 0.05\,\mathrm{cm}$，有$(\partial c/\partial a) = \frac{b^2}{(a-b)^2} = 1.0201$，$(\partial c/\partial b) = -\frac{a^2}{(a-b)^2} = -1\times10^{-4}$，故而$e_c = |e_a\partial c/\partial a| + |e_b\partial c/\partial b| = 0.051\,01\,\mathrm{cm}$。因此$c$的有效位数留到$0.1\,\mathrm{cm}$位，$c = 10.0\,\mathrm{cm}$。

今已知$x = 9.24, y = \exp(-x^2)$，故取$e_x = 0.005$，有 $e_y = |y'(x)e_x| = 2xye_x = 7.7\times10^{-39}$。故$y = \exp(-x^2) = 8.3\times10^{-38}$。

今已知$x = 56.7, y = \ln x$，故取$e_x = 0.05$，有 $e_y = |y'(x)e_x| = e_x/x = 8.8\times10^{-4}$。故$y = \ln x = 4.037$。

今已知$x = 9°24', y = \cos x$，故取$e_x = 0°0'30''$，有 $e_y = |y'(x)e_x| = \sin x e_x = 2.4\times10^{-5}$。故$y = \cos x = 0.986\,57$。

2.3

已知$\rho = \rho_0 m_1/(m_1-m_2)$，则$\sigma_\rho = \sqrt{(\sigma_{m_1}\partial\rho/\partial m_1)^2 + (\sigma_{m_2}\partial\rho/\partial m_2)^2} = \rho_0\sqrt{(\sigma_{m_1}m_2)^2 + (\sigma_{m_2}m_1)^2}/(m_1 - m_2)^2$。

已知$y = \ln ab/(a+b)$，则$\sigma_y = \sqrt{(\sigma_a\partial y/\partial a)^2 + (\sigma_b\partial y/\partial b)^2} = \sqrt{(\sigma_a\ln a)^2 + (\sigma_b\ln b)^2}/y$。

2.4

为测出L有两种方案，一种是$L = L_1 + d_1/2 + d_2/2$，另一种是$L = L_2 - d_1/2 - d_2/2$。前一种$\sigma_L^2 = \sigma_{L_1}^2 + (\sigma_{d_1}^2 + \sigma_{d_2}^2)/4$，后一种$\sigma_L^2 = \sigma_{L_2}^2 + (\sigma_{d_1}^2 + \sigma_{d_2}^2)/4$。由于$\sigma_{L_1} < \sigma_{L_2}$，故前一种测法更优。

2.5

对平板表面面积先作一估算，$A = L_1L_2 - \pi(d_1^2 + d_2^2)/4 \doteq 62.84\,\mathrm{cm}^2$，不确定度不超过0.5%即要求$e_A \le 0.314\,\mathrm{cm}^2$。估算$e_L = L_2e_{L_1} + L_1 + e_{L_2} + \pi d_1e_{d_1}/2 + \pi d_2e_{d_2}/2 = 0.200\,\mathrm{cm}^2 + \pi d_2e_{d_2}/2$，故这要求$e_{d_2} \le 0.91\,\mathrm{cm}$，因此不必再对小孔再做测量，粗测已经足够满足精度的要求。

2.6

使用$g = 2h/t^2$测重力加速度，其中h由于钢尺的热胀会偏小$1 \times 10^{-5}\,\mathrm{K} \times 10\,\mathrm{K} = 1 \times 10^{-4}$，而$t$由于停表慢了万分之一会偏小$1 \times 10^{-4}$。将二者的影响叠加，最终测出的$g$会比真值偏大$1 \times 10^{-4}$，即从$980.00\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$变为$980.01\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$。

对于单摆的周期，如果考虑摆幅较大时的非线性项，那么为了使周期的准确度好于0.5%，摆角不应超过5°；为了使周期的准确度好于0.05%，摆角不应超过1.6°。

2.7 测量空气中声速

测出相位相差2π的点的位置y_i，有$y_i = b_0 + i\lambda, i = 1, 2, 3...$。$y_i$的值如下表：

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i/mm	27.257	36.012	44.973	54.115	62.630	71.310	80.068	88.878	97.200	106.128

对y_i作最小二乘法拟合，根据书上公式(7.14)、(7.16)、(7.19)有

$$\lambda = \frac{6}{n^2-1}(2\sum_{j=1}^{n} jy_j/n - (n+1)\bar{y}) = 6(2 \times 439.925 - 11 \times 66.8571)/99 = 8.7528\,\mathrm{mm} \tag{5}$$

$$r = \frac{2\sum_{j=1}^{n} jy_j/n - (n+1)\bar{y}}{\sqrt{(\bar{y^2} - \bar{y}^2)(n^2-1)/3}} = 0.99997 \tag{6}$$

$$\sigma_{\lambda,statistical} = \lambda\sqrt{\frac{1/r^2 - 1}{n-2}} = 0.024\,\mathrm{mm} \tag{7}$$

以上这个标准差计算的是由回归分析得到的λ的不确定度的估计，还需合成入尺子的允差$e = 0.005\,\mathrm{mm}$与用示波器等判断同相位时读数的允差$e = 0.01\,\mathrm{mm}$，得

$$\sigma_\lambda = \sqrt{(0.024\,\mathrm{mm})^2 + (0.01\,\mathrm{mm})^2/3 + (0.01\,\mathrm{mm})^2/3} = 0.025\,\mathrm{mm} \tag{8}$$

即$\lambda = (8.75 \pm 0.03)\,\mathrm{mm}$。而信号发生器的允差$e_f = 0.05\,\mathrm{kHz}$，故$\sigma_c = \sqrt{(f\sigma_\lambda)^2 + (\lambda e_f)^2/3} = 1.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，$c = f\lambda = (346.4 \pm 1.1)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$。

2.8

m/g	10.00	15.00	20.00	25.00	30.00	35.00	40.00
$t^{-2}/10^{-2}\,\mathrm{s^{-2}}$	0.535	0.988	1.424	1.787	2.169	2.552	2.932

对上表中的数据作线性回归分析。以m为自变量x，$1/t^2$为因变量y作最小二乘法，得到

$$k_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x^2} - \bar{x}^2} = (52.14214 - 1.76957 \times 25)/(725 - 25^2) = 0.0790 \times 10^{-2}\,\mathrm{s^{-2}g^{-1}} \tag{9}$$

$$b_1 = \bar{y} - k_1\bar{x} = 1.76957 - 0.07903 \times 25 = -0.206\,\mathrm{s^{-2}} \tag{10}$$

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\bar{x^2} - \bar{x}^2)(\bar{y^2} - \bar{y}^2)}} = \frac{52.142 - 1.76957 \times 25}{\sqrt{3.7568 - 1.7695^2}\sqrt{725 - 25^2}} = 0.99933 \tag{11}$$

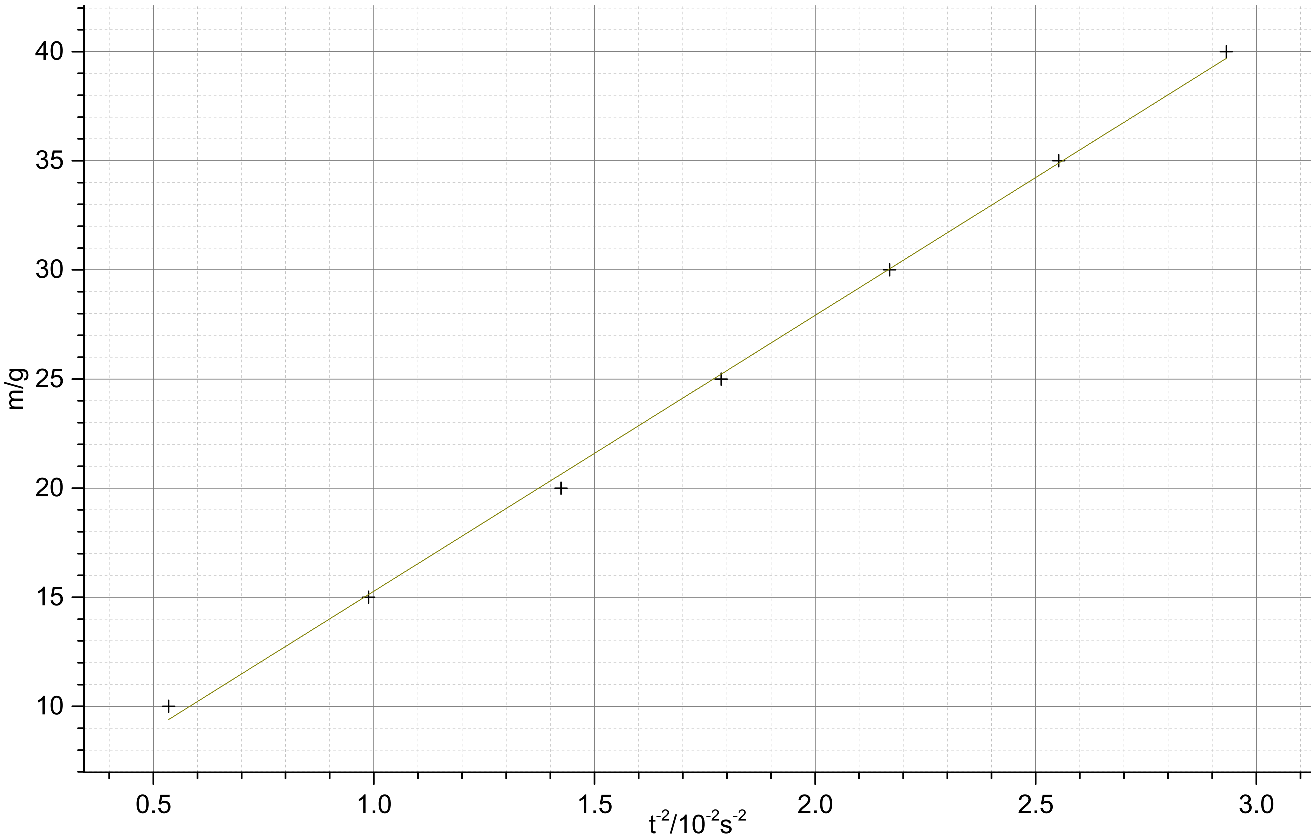

图 1: $m - t^{-2}$关系图。从图中可见二者确实成线性关系。

以$1/t^2$为自变量y，m为因变量x作最小二乘法，得到

$$k_2 = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{y^2} - \bar{y}^2} = (52.14214 - 1.76957 \times 25)/(725 - 25^2) = 12.64 \times 10^2\,\mathrm{g\,s^2} \tag{12}$$

$$b_2 = \bar{x} - k_2\bar{y} = 25 - 12.62669 \times 1.76957 = 2.64\,\mathrm{g} \tag{13}$$

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\bar{x^2} - \bar{x}^2)(\bar{y^2} - \bar{y}^2)}} = 0.99933 \tag{14}$$

显然两种算法得到的相关系数r是一样的，因为r的表达式中自变量与因变量的地位完全对等。而从k_1与k_2的定义式中容易得出它们满足关系

$$k_1k_2 = \frac{(\overline{xy} - \bar{x}\bar{y})^2}{(\bar{x^2} - \bar{x}^2)(\bar{y^2} - \bar{y}^2)} = r^2 \tag{15}$$