Solución del primer parcial de Análisis 2 turno tarde

Franco Golfieri

Octubre 2018

Problema 1:

Como $f(x) = x^4$ es continua en $[0, 25]$ entonces es integrable en dicho intervalo. Luego vale que para cualquier partición P del intervalo $[0, 25]$ $\quad s(f, P) \leq \int\limits_0^{25} f \leq S(f, P)$. Sea entonces la particion dada por $P = \{t_i\}_{i=0}^{25}$ donde $t_i = i$. Ver que $t_i - t_{i-1} = i - (i - 1) = 1$. Además como f es creciente tenemos que $M_i := \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = f(t_i) = f(i) = i^4$. Análogamente $m_i := \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = f(t_{i-1}) = f(i - 1) = (i - 1)^4$

Luego:

$$
\begin{aligned}
S(f, P) &= \sum_{i=1}^{25} M_i \ (t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{25} M_i \\
&= \sum_{i=1}^{25} i^4
\end{aligned}
$$

y ,

$$\begin{aligned} s(f,P) &= \sum_{i=1}^{25} m_i \ (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{25} m_i \\ &= \sum_{i=1}^{25} (i-1)^4 \\ &= \sum_{i=0}^{24} i^4 \\ &= \sum_{i=1}^{24} i^4 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\sum_{i=1}^{24} i^4 = s(f,P) \leq \int\limits_0^{25} x^4 \, dx \leq S(f,P) = \sum_{i=1}^{25} i^4$$

Problema 2:

Sea $x \geq 0$. Como g es positiva, sabemos que $\frac{1}{t}$ es continua en el intervalo $[g(x), 1]$ (y este intervalo esta bien definido ya que $g(x) \leq 1$. Por el teorema fundamental del cálculo la función integral $G(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t} dt$ es derivable con $G'(x) = -\frac{1}{x}$. Como g también es derivable entonces $F = G(g(x))$ es derivable por ser composición de derivables y

$$F'(x) = -\frac{1}{g(x)} g'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Sabemos además que $F'(x) = 2$ luego obtenemos

$$g'(x) = -2g(x) >$$

Por el resultado del ejercicio 9 del practico 3, sabemos que las únicas funciones que cumplen que su derivada es igual a un multiple de la función original son las funciones de tipo exponencial, y por lo tanto

$$g(x) = Ke^{-2x}, \qquad \text{para alguna constante } k.$$

Por otro lado, sabemos que $g(0) = 1$ y reemplazando $x = 0$ en la igualdad anterior obtenemos el valor para K, o sea, $1 = g(0) = K$, y entonces

$$g(x) = e^{-2x}.$$

Veamos otra forma de resolver el problema

Fijemos $x \geq 0$. Como $\frac{1}{t}$ es continua en $[g(x), 1]$ ya que $0 < g(x) \leq 1$ y $ln(t)$ es una función derivable en $[g(x), 1]$ y $(ln(t))' = \frac{1}{t}$ Tenemos que $F(x) = \int\limits_{g(x)}^{1} \frac{1}{t}\, dt = ln(1) - ln(g(x)) = -ln(g(x))$. Luego $e^{-F(x)} = g(x)$. Como F es derivable por el primer teorema fundamental del cálculo y e^x es derivable en $-F(x)$ (pues lo es en todo $\mathbb{R}$) tenemos por la regla de la cadena que g es derivable y $g'(x) = -F'(x)e^{-F(x)} = -2e^{-F(x)} = -2g(x)$. Luego por el ejercicio 9 del práctico 3 tenemos que $g(x) = ke^{-2x}$ para algún $k \in \mathbb{R}$. Pero ver que $k = ke^0 = g(0) = 1$. Finalmente $g(x) = e^{-2x}$.

Problema 3:

Sabemos que si una función $f \geq 0$ en un intervalo $[a,b]$ el área comprendida entre f y el eje x en dicho intervalo es $\int_a^b f$. Y si $f \leq 0$ en un intervalo $[a,b]$ el área comprendida entre f y el eje x en dicho intervalo es $-\int_a^b f$. Ahora analizando en el intervalo $[-\frac{1}{2}, 1]$ tenemos que $f(x) = x^4 - x^3 \geq 0 \iff x^4 \geq x^3 \iff x \in [-\frac{1}{2}, 0]$ y $f(x) = x^4 - x^3 \leq 0 \iff x^4 \leq x^3 \iff x \in [0,1]$. Definamos $A_{f|[a,b]}$ como el área de la función f en el intervalo $[a,b]$. Luego es claro que si $c \in (a,b)$ tenemos que $A_{f|[a,b]} = A_{f|[a,c]} + A_{f|[c,b]}$. Por lo tanto siendo $f(x) = x^4 - x^3$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
A_{f|[-\frac{1}{2},1]} &= A_{f|[-\frac{1}{2},0]} + A_{f|[0,1]} \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (x^4 - x^3)\, dx + \int_{0}^{1} -(x^4 - x^3)\, dx \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (x^4 - x^3)\, dx - \int_{0}^{1} (x^4 - x^3)\, dx \\
&> \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (x^4 - x^3)\, dx + \int_{0}^{1} (x^4 - x^3)\, dx \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (x^4 - x^3)\, dx
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $A_{f|[-\frac{1}{2},1]} \neq \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (x^4 - x^3)\ dx$ y Cleopatra tiene razón

b) Como $f(x) = x^4 - x^3$ es una función continua en $[-\frac{1}{2}, 1]$ y $g(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4$ es una función derivable tal que $g'(x) = f(x)\, \forall x \in [-\frac{1}{2}, 1]$ podemos usar borrow y tenemos:

$$
\begin{aligned}
A_{f|[-\frac{1}{2},1]} &= \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} (x^4 - x^3)\, dx - \int\limits_{0}^{1} (x^4 - x^3)\, dx \\
&= \left(\left(\frac{1}{5}0^5 - \frac{1}{4}0^4 \right) - \left(\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \right) \right) - \left(\left(\frac{1}{5}1^5 - \frac{1}{4}1^4 \right) - \left(\frac{1}{5}0^5 - \frac{1}{4}0^4 \right) \right) \\
&= \left(0 - \left(-\frac{1}{2^5 5} - \frac{1}{2^6} \right) \right) - \left(\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4} \right) - 0 \right) \\
&= \frac{23}{320}
\end{aligned}
$$

Problema 4:

$$
i) \int \frac{1}{\mathrm{senh}(x)}\, dx = \int \frac{1}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}\, dx = 2\int \frac{1}{e^x - e^{-x}}\, dx = 2\int \frac{e^x}{e^x}\frac{1}{e^x - e^{-x}}\, dx = 2\int \frac{e^x}{(e^x)^2 - 1}\, dx
$$

Ahora usamos sustitución tomando $u = e^x$ y luego $du = e^x dx$. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\mathrm{senh}(x)}\, dx &= 2\int \frac{e^x}{(e^x)^2 - 1}\, dx \\
&= 2\int \frac{du}{u^2 - 1} \\
&= 2arctanh(u) + C \\
&= 2arctanh(e^x) + C
\end{aligned}
$$

ii) Antes que nada veamos que $\cos(2x) = \cos^2(x) - \mathrm{sen}^2(x) =$
$= \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1 \Longrightarrow \cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow cos^2(x) + 1 = \frac{\cos(2x)+3}{2}$.

$$\begin{aligned}\int e^x\left(\cos^2(x)+1\right)\,dx &= e^x\left(\frac{\cos(2x)+3}{2}\right)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int e^x\cos(2x)\,dx+\frac{3}{2}\int e^x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int e^x\cos(2x)\,dx+\frac{3}{2}e^x\end{aligned}$$

Solo resta hallar $\int e^x\cos(2x)\,dx$. Usemos el método de integración por partes tomando $f(x)=\cos(2x)$ y $g'(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=-2\operatorname{sen}(x)$ y $g(x)=e^x$.

Luego:

$$\int e^x\cos(2x)\,dx = e^x\cos(2x)-\int e^x(-2)\operatorname{sen}(2x)\,dx = e^x\cos(2x)+2\int e^x\operatorname{sen}(2x)\,dx$$

Ahora para resolver $\int e^x\operatorname{sen}(2x)\,dx$ utilizamos el método de integración por partes tomando $f(x)=\operatorname{sen}(2x)$ y $g'(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=2\cos(x)$ y $g(x)=e^x$.

Luego:

$$\int e^x\operatorname{sen}(2x)\,dx = e^x\operatorname{sen}(2x)-\int e^x(2)\operatorname{sen}(2x)\,dx = e^x\operatorname{sen}(2x)-2\int e^x\cos(2x)\,dx$$

.

Ahora reemplazando tenemos:

$$\begin{aligned}\int e^x\cos(2x)\,dx &= e^x\cos(2x)+2\int e^x\operatorname{sen}(2x)\,dx\\ &= e^x\cos(2x)+2\left(e^x\operatorname{sen}(2x)-2\int e^x\cos(2x)\,dx\right)\\ &= e^x\cos(2x)+2e^x\operatorname{sen}(2x)-4\int e^x\cos(2x)\,dx\end{aligned}$$

Por lo tanto :

$$5\int e^x\cos(2x)\;dx = e^x\cos(2x)+2e^x\operatorname{sen}(2x$$

$$\Longrightarrow \int e^x\cos(2x)\;dx = \frac{1}{5}e^x\cos(2x)+\frac{2}{5}e^x\operatorname{sen}(2x)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int e^x\left(\cos^2(x)+1\right)\;dx &= e^x\left(\frac{\cos(2x)+3}{2}\right)\;dx\\ &= \frac{1}{2}\int e^x\cos(2x)\;dx+\frac{3}{2}\int e^x\;dx\\ &= \frac{1}{2}\int e^x\cos(2x)\;dx+\frac{3}{2}e^x\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}e^x\cos(2x)+\frac{2}{5}e^x\operatorname{sen}(2x)\right)+\frac{3}{2}e^x\\ &= \frac{1}{10}e^x\cos(2x)+\frac{1}{5}e^x\operatorname{sen}(2x)+\frac{3}{2}e^x\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}}\;dt &= \int \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}}\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}}\;dt\\ &= \int \frac{1+t}{\sqrt{(1-t)(1+t)}}\;dt\\ &= \int \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\;dt\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\;dt+\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\;dt\\ &= \operatorname{arc\,sen}(t)+\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\;dt\end{aligned}$$

Ahora para resolver $\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ utilicemos sustitución tomando $u = 1 - t^2$, luego $du = -2t\, dt$. Y por lo tanto:

$$\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int \frac{-\frac{1}{2}du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}u^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}}\, dt &= \int \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}}\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}}\, dt \\ &= \operatorname{arc\,sen}(t) + \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \\ &= \operatorname{arc\,sen}(t) - \frac{1}{3}(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$