Teorema de Karhunen-Loève i Aplicacions

Autor: Abel Serrat Castella

Tutora: Maria Jolis

Universitat Autònoma de Barcelona

Any acadèmic 2021-2022

Agraïments

Vull agrair a la meva supervisora Maria Jolis la seva dedicació i disponibilitat al llarg del projecte. Aprecio especialment les extenses explicacions sobre el projecte que han resultat molt útils.
També vull agrair l'ajut rebut per part del professor Joan Orobitg en l'àmbit d'anàlisi real i funcional.
Finalment, agrair el suport que m'ha donat la família al llarg de la carrera.

Resum

L'expansió de Karhunen-Loève expressa un procés estocàstic de segon ordre com la suma de numerables variables aleatòries ponderades per funcions contínues. Si a més ens restringim a processos Gaussians, es compleixen una sèrie de resultats que donen lloc a múltiples aplicacions, com la simulació de trajectòries de processos estocàstics i el filtratge d'error Gaussià independent.

En aquest treball ens centrarem a desenvolupar en detall la construcció de l'expansió en el cas simple, on l'espai de paràmetres és $[a, b] \subset \mathbb{R}$ i amb valors a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Així, veurem resultats de la teoria espectral, els operadors de Hilbert-Schmidt, el Teorema de Mercer, la caracterització de funcions de covariància, la integració estocàstica de Riemann i finalment el Teorema de Karhunen-Loève. A més, en processos Gaussians veurem que l'expansió està formada per variables aleatòries independents i que la convergència de l'expansió és quasi segura. Finalment, farem l'estudi analític de l'expansió pel moviment Brownià, la construcció i implementació de mètodes numèrics per aproximar l'expansió i simular trajectòries.

Índex

1 Introducció

De la mateixa manera que les sèries de Fourier expressen funcions de $L^2[a,b]$ a partir d'una combinació lineal infinita d'una base ortonormal a $L^2[a,b]$, l'expansió de Karhunen-Loève expressa un procés estocàstic en funció de numerables variables aleatòries no correlacionades (ortonormals en L^2) i d'una base ortonormal de l'espai $L^2[a,b]$. En tractar amb espais de probabilitat qualssevol, sorgeixen inconvenients, com ara que la convergència de l'expansió al procés és només en norma de L^2, que la base ortonormal de $L^2[a,b]$ depèn del mateix procés estocàstic i que aquestes variables aleatòries no correlacionades no són tractables en general. A més, la versió més simple de l'expansió només és aplicable sobre processos estocàstics de segon ordre en un espai de paràmetres $[a,b] \subset \mathbb{R}$, amb valors a $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ i amb funció de covariància contínua. En principi sembla que no hi hagi utilitat pràctica però si ens restringim als processos Gaussians, aleshores, la convergència de l'expansió és quasi segura i les variables aleatòries no correlacionades de l'expansió esdevenen independents, i coneixent la distribució, són molt fàcilment tractables. Tot i així, si l'objectiu és estudiar un procés estocàstic en concret, determinar la base ortonormal de $L^2[a,b]$ analíticament pot resultar impossible i és necessari utilitzar mètodes numèrics que aproximaran la base. Sota aquestes condicions, després dels primers estudis de Kosambi, Karhunen i Loève, s'ha fet recerca en reconeixement de patrons i *clustering*, en finances, en filtratge de dades, etc.

Tal i com hem comentat en el resum, ens centrarem en la versió més simple de l'expansió de Karhunen-Loève i en detallarem la seva construcció. Més específicament, en el capítol 3, caracteritzem els espais de Hilbert en funció dels valors i vectors propis d'operadors lineals compactes i autoadjunts. En el capítol 4, estudiem els operadors integrals de Hilbert-Schmidt en l'espai $L^2[a,b]$, cas particular de l'estudi en el capítol 3, i provem el Teorema de Mercer, una representació d'una funció contínua, hermítica i definida no-negativa. En el capítol 5, introduïm i caracteritzem el concepte de funció de covariància d'un procés estocàstic, amb l'objectiu de comprovar que compleix les hipòtesis del Teorema de Mercer. En el capítol 6, definim i provem els resultats que posteriorment necessitarem de la integració estocàstica de Riemann, és a dir, integrar un procés estocàstic de segon ordre respecte l'espai de paràmetres del procés. En el capítol 7, enunciem i provem el Teorema de Karhunen-Loève, utilitzant els resultats dels anteriors capítols, donem un parell d'observacions i només enunciem el resultat principal referent a truncar l'expansió. Finalment, en el capítol 8, enunciem les propietats més essencials de l'expansió sobre processos Gaussians i presentem l'aplicació més directa, simular trajectòries. La primera part del capítol 8 es centra en provar la convergència quasi segura de l'expansió i la independència dels coeficients aleatoris de l'expansió, i en la segona part, més densa, es fa un estudi analític de l'expansió pel moviment Brownià, també presentem mètodes numèrics i la implementació per finalment fer estudis numèrics i simulacions de múltiples processos Gaussians.

Finalment, expresso el meu interès per aquest tema i les possibles aplicacions que se'n deriven. He escollit aquest tema pel fort vincle entre l'anàlisi real i funcional i els processos estocàstics i perquè permet expressar una gran família de processos estocàstics no només com a combinació lineal infinita de numerables variables aleatòries, sinó que aquestes variables aleatòries són les mateixes en cada valor de l'espai de paràmetres del procés, i així poder determinar el procés en cada instant. A més, hi ha aplicacions en diversos camps que enforteixen la seva utilitat i actualment se'n continua fent recerca.

2 Preliminars

2.1 Espais de Hilbert i separabilitat

Al llarg del treball, tractarem amb espais de Hilbert i el concepte de bases ortonormals. Diferents referències decideixen imposar o no la hipòtesi de separabilitat, i per evitar confusions, definirem les nocions i resultats més bàsics. Per l'estudi dels espais de Hilbert, hem seguit la referència [7].

Definició 1. *Un conjunt H és espai de Hilbert si:*

- *H és un $\mathbb{K}$-espai vectorial, $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$.*
- *H té producte escalar $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ o producte hermític $(\mathbb{K} = \mathbb{C})$ que denotem per $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ que compleix:*
  - *$\langle \cdot, g \rangle$ és lineal per qualsevol $g \in H$.*
  - *$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$ per qualssevol $f, g \in H$.*
  - *$\langle f, f \rangle =: ||f||^2 \geq 0$ per qualsevol $f \in H$.*
- *$||f|| = 0 \Longleftrightarrow f = 0$*
- *H és complet amb la mètrica $d(f, g) \coloneqq ||f - g||$.*
- *H és separable: existeix un conjunt finit o numerable $\{f_k\}_{k=0}^{\infty} \subset H$ tal que el conjunt de les combinacions lineals finites de $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$:*

$$Span(\{f_k\}_{k=0}^{\infty}) \coloneqq \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k : \ \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}, \forall \{g_k\}_{k=1}^{n} \subset \{f_k\}_{k=0}^{\infty}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

  és dens en H.

Notem de la definició que ens centrem en els conjunts separables i per tant, podrem enunciar el Teorema espectral i d'expansió sense haver d'afegir aquesta hipòtesi. A més, només ens centrarem amb els espais de Hilbert de dimensió infinita, ja que quan la dimensió de l'espai és finita, els resultats segueixen sent vàlids canviant la indexació quan cal.
A continuació, definim els conceptes de sistemes i bases ortonormals.

Definició 2. *Sigui H un espai de Hilbert. Diem que $\{e_k\}_{k=0}^{\infty} \subset H$ és sistema ortonormal si $\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{k,j}$.*

Definició 3. *Sigui H un espai de Hilbert. Diem que un sistema ortonormal $\{e_k\}_{k=0}^{\infty} \subset H$ és base ortonormal de H si $Span(\{e_k\}_{k=0}^{\infty})$ és dens en H.*

A continuació, enunciem dos resultats de la teoria d'anàlisi funcional que permeten caracteritzar un espai de Hilbert en funció d'una base ortonormal.

Teorema 1. *Sigui H un espai de Hilbert i $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ un sistema ortonormal. Llavors, són equivalents:*

- *$\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ base ortonormal de H.*
- *Si $f \in H$ amb $\langle f, e_k \rangle = 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N}$, llavors, $f = 0$.*
- *Si $f \in H$, llavors, $\sum_{k=0}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k = \lim\limits_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \langle f, e_k \rangle e_k = f$ en norma de H.*
- *Identitat de Parseval: $||f||^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \ \forall f \in H$.*

Teorema 2. *Qualsevol espai de Hilbert té almenys una base ortonormal.*

2.2 Processos estocàstics de segon ordre

Les nocions més bàsiques de la teoria de la probabilitat les podem trobar en [1] i per tant en aquesta secció ens limitarem a definir què és un procés estocàstic, què són els processos de segon ordre, i què és el conjunt L^2. A mesura que introduïm els conceptes, anirem concretant els processos estocàstics amb els que desenvoluparem els resultats del treball.

Un conjunt d'estats $\{S, \mathcal{F}\}$ és un conjunt S i $\mathcal{F}$ una σ-àlgebra sobre S.

Definició 4. *Un procés estocàstic sobre un espai de probabilitat $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ i un conjunt d'estats $\{S, \mathcal{F}\}$ és una família de variables aleatòries indexades $\big\{X(t) \colon t \in T\big\}$ amb T conjunt arbitrari, anomenat espai de paràmetres, de manera que per qualsevol $t \in T$ es compleix:*

$$\begin{aligned} X(t) \coloneqq X_t \colon \Omega &\longrightarrow S \qquad\qquad \textit{amb} \qquad X_t^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}\ ,\ \ \forall \mathcal{U} \in \mathcal{F} \\ \omega &\longmapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

Tractarem la versió més simple de l'expansió de Karhunen-Loève; ens centrarem només en aquells processos estocàstics amb espais de paràmetres un interval acotat $[a,b] \subset \mathbb{R}$ i un conjunt d'estats $\{\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})\}$, on $\mathcal{B}$ indica el conjunts de Borelians i $\mathbb{K}$ és $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
A més, considerarem només aquells processos estocàstics tals que els seus elements siguin de segon ordre, és a dir, que compleixin:

$$\mathbb{E}(|X(t)|^2) < \infty\ ,\ \forall t \in [a,b]$$

Havent fixat l'espai de probabilitat $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ i conjunt d'estats $\{\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})\}$, denotem per $\mathcal{L}^2$ el conjunt de variables aleatòries de segon ordre.
A $\mathcal{L}$ definim la relació $\sim$ per: $X \sim Y \iff \mathbb{E}\big(|X - Y|^2\big) = 0$. Llavors, podem comprovar que $\sim$ és relació d'equivalència i que ${}^{\mathcal{L}^2}\!/\!\sim$ és espai de Hilbert amb producte escalar ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) o hermític ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$):

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(X\overline{Y})\ ,\ \forall X, Y \in {}^{\mathcal{L}^2}\!/\!\sim$$

Així, denotem $L^2 = {}^{\mathcal{L}^2}\!/\!\sim$ i d'ara en endavant, prendrem els processos estocàstics tals que $\{X(t) \mid t \in T\} \subset L^2$.
A més, direm que una successió $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2$ convergeix a $X \in L^2$ en mitjana quadràtica, o equivalentment en norma de L^2, si $\mathbb{E}\big(|X_n - X|^2\big) \xrightarrow{n \to \infty} 0$.
El fet d'escollir $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$, no influeix en el fet que L^2 és espai de Hilbert i a mesura que presentem resultats, observarem que tot i que si prenem $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ les equacions són més sofisticades, segueixen sent vàlides quan restringim $\mathbb{K}$ a $\mathbb{R}$.

3 Teoria espectral i Teorema de l'expansió

En aquesta secció, presentarem els principals resultats de la teoria espectral que permeten expressar els elements d'un espai de Hilbert en funció d'una base ortonormal constituïda de vectors propis d'un operador lineal, compacte i autoadjunt. Hem desenvolupat els resultats fins al Teorema espectral a partir de la referència [7] i el Teorema d'expansió amb les referències [2], [4]. També hem necessitat completar el contingut del Teorema d'expansió.

Al llarg d'aquesta secció, prendrem H un $\mathbb{C}$-espai vectorial de Hilbert i T operador en H, és a dir, $T \colon H \to H$ aplicació.
Recordem que:

- T és lineal si $T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$ amb $\forall x,y\in H$ i $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$
- T és continu si $\forall x\in H$, es compleix que $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ tal que $||T(x)-T(y)||<\varepsilon$ si $||x-y||<\delta$ i $y\in H$
- T és fitat o acotat si $||T||\coloneqq \sup\limits_{\substack{x\in H\\ x\neq 0}}\dfrac{||T(x)||}{||x||}<\infty$
- Si T és lineal, T és continu $\iff$ T és acotat
- T és compacte si per qualsevol successió $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset H$ acotada en norma, $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ té una parcial convergent en H
- T compacte $\Longrightarrow$ T continu
- L'adjunt de T és un operador T^* en H tal que $\langle T(x),y\rangle=\langle x,T^*(y)\rangle$, $\forall x,y\in H$
- T és autoadjunt si $T^*=T$

Amb aquestes definicions i propietats, introduïm els valors i vectors propis de l'operador T en H.

Definició 5. *Definim valor propi i vector propi de l'operador T en H com $\lambda\in\mathbb{C}$ i $v\in H\setminus\{0\}$ respectivament tals que compleixen $T(v)=\lambda v$.*

Per unicitat d'imatge de T, un vector propi té un únic valor propi associat però un valor propi pot tenir múltiples vectors propis associats. Si prenem λ valor propi de T, definim el conjunt $E_\lambda\coloneqq\{x\in H\mid T(x)=\lambda x\}$.

Per tal de demostrar el Teorema espectral, necessitem els resultats (Teorema 3, Lemes 1, 2, 5), que en si són interessants en el sentit que aporten informació de com podem representar l'espai H a partir dels vectors propis de l'operador T quan compleix unes certes condicions.

Teorema 3. *Si λ és valor propi no nul de l'operador T lineal i compacte, aleshores, E_λ és espai vectorial tancat de dimensió finita.*

Demostració. Primer, comprovem que E_λ és espai vectorial. Si prenem $n\in\mathbb{N}$, per a qualsevol tria $v_1,\dots,v_n\in E_\lambda$ i $\forall\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{C}$, l'element $v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\in H$ compleix per la linealitat de T:

$$T(v)=T(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)=\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=\lambda v$$

i per tant, $v\in E_\lambda$. En conseqüència, E_λ és espai vectorial.
Ara, veiem que E_λ és tancat. Si $v\in H$ és límit de la successió $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E_\lambda$, llavors, tenim:

$$T(v)=T(\lim_{n\to\infty}v_n)\overset{T \text{ compacte } \Rightarrow T \text{ continu}}{=}\lim_{n\to\infty}T(v_n)=\lim_{n\to\infty}\lambda v_n=\lambda\lim_{n\to\infty}v_n=\lambda v$$

i per tant v és vector propi de T de valor propi λ. D'aquesta manera, $v\in E_\lambda$ i per tant, E_λ és tancat.
Finalment comprovem que E_λ és de dimensió finita. Suposem per reducció al absurd que té dimensió infinita. Aleshores, podem escollir una successió $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset E_\lambda$ d'elements ortonormals respecte la norma de l'espai H. Com que T és compacte, $\exists I\subset\mathbb{N}$ tal que $\{T(\varphi_k)\}_{k\in I}$ convergeix a H. Sabent que per qualsevol $k\in I$, $T(\varphi_k)=\lambda\varphi_k$, pel Teorema de Pitàgores, $\forall k,k'\in I$ amb $k\neq k'$, $||T(\varphi_k)-T(\varphi_{k'})||^2=||\lambda\varphi_k-\lambda\varphi_{k'}||^2=|\lambda|^2\big(||\varphi_k||^2+||\varphi_{k'}||^2\big)=2|\lambda|^2$. Com que una successió convergent és de Cauchy, no hi ha convergència si $\lambda\neq 0$ i arribem a contradicció amb el fet que podem escollir una successió ortonormal de E_λ, i per tant, la dimensió de E_λ és finita. $\square$

Lema 1. *Si T és acotat i autoadjunt, aleshores:*

(a) Si λ és valor propi de T, llavors, $\lambda \in \mathbb{R}$

(b) Si u, v són vectors propis de T de valors propis μ, λ respectivament amb $\mu \neq \lambda$, llavors, u, v són ortogonals en H.

Demostració.

(a) Si λ és valor propi de T, per definició li podem associar un element $v \in H$ vector propi de T de valor propi λ. Pel fet que T és autoadjunt tenim:

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle T(v), v\rangle = \langle v, T(v)\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$$

Com que $v \neq 0$ per definició, es compleix que $\lambda = \overline{\lambda}$ i en conseqüència, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Pel fet que T és autoadjunt, tenim:

$$\mu\langle u, v\rangle = \langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle$$

Com que $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ pel primer apartat del lema, i com que $\mu \neq \lambda$, tenim que $\langle u, v\rangle = 0$.

□

Lema 2. *Si T és compacte i autoadjunt, aleshores, el conjunt de valors propis de T és finit o numerable. A més, si hi ha numerables valors propis i $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ és successió de valors propis de T diferents, aleshores, $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.*

Demostració. Prenem $\varepsilon > 0$ i el conjunt $\{(\lambda_k, \varphi_k)\}_{k\in I}$ amb I conjunt arbitrari tal que $\lambda_k > \varepsilon$ i φ_k vector propi de T de valor propi λ_k, i amb $\lambda_k \neq \lambda_j$ si $k \neq j$. Això és possible gràcies al Lema 1 (a). Pel Lema 1 (b), el sistema $\{\varphi_k\}_{k\in I}$ és ortogonal, i l'ortonormalitzem dividint cada element per la seva norma a H. Aleshores, per la compactesa de T, existeix un subconjunt $J \subset I$ numerable tal que $\{T(\varphi_j)\}_{j\in J}$ és convergent en H. Com que una successió convergent és de Cauchy, $\lim\limits_{j,k\to\infty} ||T(\varphi_k) - T(\varphi_j)||^2 = 0$. No obstant, tenim:

$$||T(\varphi_k) - T(\varphi_j)||^2 = ||\lambda_k\varphi_k - \lambda_j\varphi_j||^2 \overset{\substack{\text{Teorema de Pitàgores} \\ \downarrow}}{=} |\lambda_k|^2 + |\lambda_j|^2 \geq 2\varepsilon^2 > 0$$

i per tant, arribem a contradicció amb el fet que hi ha un nombre infinit de valors propis amb mòdul major a ε. Podem pensar el conjunt de valors propis com a unió numerable de conjunts finits disjunts de valors propis diferents, i per tant, aquest conjunt unió és finit o numerable.
Si hi ha numerables valors propis diferents, podem prendre una ordenació $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ dels valors propis i havent vist que per a qualsevol $\varepsilon > 0$, només hi ha un nombre finit de valors propis amb mòdul major a ε implica que $\forall\varepsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_n| < \varepsilon$ per qualsevol $n \geq n_0$, i per definició de límit, $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. □

Lema 3. *Si l'operador T és lineal, aleshores,*

$$||T|| = \sup\{|\langle T(f), g\rangle| : \ ||f|| \leq 1, ||g|| \leq 1, f, g \in H\}$$

Demostració. Dividim la demostració en dos casos generals.
Primer, si prenem $T = 0$, directament observem que la imatge de qualsevol element de H és 0 i per tant, la igualtat a demostrar es compleix sempre.

Segon, si $T \neq 0$, per la desigualtat de Cauchy-Schwarz, tant si f és 0 o no,

$$|\langle T(f), g\rangle| \leq ||T(f)|| \cdot ||g|| \leq ||T|| \cdot ||f|| \cdot ||g|| \leq ||T||$$

Per tant, $\sup\{|\langle T(f), g\rangle| \colon\ ||f|| \leq 1, ||g|| \leq 1, f, g \in H\} \leq ||T||$.
Com que $T \neq 0$, existeix $f \neq 0$ en H tal que $T(f) \neq 0$. Aleshores, escollim $f' = f/||f||$ i $g' = T(f)/||T(f)||$ i observem que:

$$|\langle T(f'), g'\rangle| = |\langle \frac{T(f)}{||f||}, \frac{T(f)}{||T(f)||}\rangle| = \frac{||T(f)||}{||f||}$$

Com que $||f'||, ||g'|| \leq 1$, hem escollit un cas particular de tots els possibles. Prenent suprem a banda i banda de la igualtat, tenim que:

$$\begin{aligned} ||T|| = \sup_{f \in H\setminus\{0\}} \frac{||T(f)||}{||f||} &\leq \sup\{|\langle \frac{T(f)}{||f||}, \frac{T(f)}{||T(f)||}\rangle| \colon ||T(f)|| \neq 0, f \in H\} \leq \\ &\leq \sup\{|\langle T(f), g\rangle| \colon\ ||f|| \leq 1, ||g|| \leq 1, f, g \in H\} \end{aligned}$$

Així, havent provat que $||T|| \leq \sup\{|\langle T(f), g\rangle| \colon\ ||f|| \leq 1, ||g|| \leq 1, f, g \in H\} \leq ||T||$, tenim la igualtat que volíem trobar. $\square$

Lema 4. *Si T és lineal i autoadjunt, llavors,* $||T|| = \sup\{|\langle T(f), f\rangle| \colon ||f|| = 1, f \in H\}$

Demostració. Observem que

$$\{|\langle T(f), f\rangle| \colon ||f|| = 1, f \in H\} \subset \{|\langle T(f), g\rangle| \colon ||f||, ||g|| \leq 1, f, g \in H\}$$

i que pel Lema 3, si denotem $M = \sup\{|\langle T(f), f\rangle| \colon ||f|| = 1, f \in H\}$, tenim $M \leq ||T||$.
Així, si provem que $||T|| \leq M$, ja haurem vist la igualtat.
Per qualsevol $h \in H$, com que T és autoadjunt, $\langle T(h), h\rangle = \langle h, T(h)\rangle = \overline{\langle T(h), h\rangle}$, i per tant, és valor real. Aplicat a la identitat de polarització:

$$\langle T(f), g\rangle = \langle T(f+g), f+g\rangle - \langle T(f-g), f-g\rangle + i\langle T(f+ig), f+ig\rangle - i\langle T(f-ig), f-ig\rangle$$

tenim:

$$Re(\langle T(f), g\rangle) = \frac{1}{4}\big(\langle T(f+g), f+g\rangle - \langle T(f-g), f-g\rangle\big)$$

Per definició de M, es compleix que $M \geq |\langle T(\frac{h}{||h||}), \frac{h}{||h||}\rangle|$ per a qualsevol $h \in H\setminus\{0\}$. Aleshores, per la linealitat de T i per les propietats del producte hermític, obtenim la desigualtat $|\langle T(h), h\rangle| \leq M||h||^2$ per qualsevol $h \in H$, i així, obtenim les desigualtats:

$$|Re(\langle T(f), g\rangle)| \overset{\substack{\text{Desigualtat triangular}\\ \downarrow}}{\leq} \frac{M}{4}\big(||f+g||^2 + ||f-g||^2\big) \overset{\substack{\text{Identitat de polarització:}\\ ||f+g||^2+||f-g||^2=2||f||^2+2||g||^2\\ \downarrow}}{=} \frac{M}{2}\big(||f||^2 + ||g||^2\big) \overset{\substack{||f||, ||g|| \leq 1\\ \downarrow}}{\leq} M$$

De manera general, si prenem $|Re(\langle T(f), e^{i\theta}g\rangle)|$ amb $||f||, ||g|| \leq 1$, podem comprovar que aquest valor està fitat per M per tot $\theta \in [0, 2\pi)$, i per tant, $|\langle T(f), g\rangle| \leq M$. Així, $||T|| \leq M$ i finalment obtenim que $||T|| = M$. $\square$

Lema 5. *Si T és lineal, compacte i autoadjunt, llavors, $||T||$ o $-||T||$ és valor propi de T. A més, si λ és valor propi de T, $|\lambda| \leq ||T||$.*

Demostració. Si $T = 0$, si $f \in H \setminus \{0\}$, donat que $T(f) = 0$, f és vector propi de valor propi 0, complint que $||T|| = 0$ és valor propi.

Ara suposem que $||T|| \neq 0$. Pel Lema 4, tenim $||T|| = \sup\{|\langle T(f), f\rangle| \colon ||f|| = 1\}$. Per definició de suprem, existeix una successió $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ tal que $||f_n|| = 1$ i $|\langle T(f_n), f_n\rangle| \xrightarrow{n\to\infty} ||T||$. Tal com hem vist a la demostració del Lema 4, com que l'operador T és autoadjunt, $\langle T(h), h\rangle$ és valor real per qualsevol $h \in H$. Aleshores, els dos possibles punts d'acumulació de la successió $\{\langle T(f_n), f_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ són $\pm||T||$, i sabent que existeix almenys una parcial amb límit $\lambda \in \pm||T||$ (a priori no és valor propi de T), redefinirem la successió $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ prenent només els termes de la parcial i així tindrem que $\langle T(f_n), f_n\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$.
Com que T és compacte, i com que la successió $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ està acotada en norma per 1, existeix una parcial de la successió tal que $\{T(f_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergeix a $g \in H$. Altre cop, per tal de simplificar la notació, escriurem $\{f_n\}_n$ fent referència a la parcial $\{f_{n_k}\}_k$.
Utilitzant les propietats del producte hermític i que $\langle T(f_n), f_n\rangle$ és real, tenim:

$$\begin{aligned} ||T(f_n) - \lambda f_n||^2 =& ||T(f_n)||^2 + \lambda^2||f_n||^2 - 2\lambda\langle T(f_n), f_n\rangle \leq \\ \leq& \big(||T||^2 + \lambda^2\big)||f_n||^2 - 2\lambda\langle T(f_n), f_n\rangle \underset{\downarrow}{\overset{||T||^2=\lambda^2,\, ||f_n||=1}{\leq}} 2\lambda^2 - 2\lambda\langle T(f_n), f_n\rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

Com que $T(f_n) \xrightarrow{n\to\infty} g$, tenim:

$$||\lambda f_n - g|| \leq ||\lambda f_n - T(f_n)|| + ||T(f_n) - g|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

i com que T és lineal i compacte (i per tant continu), tenim:

$$T(g) = T(\lim_{n\to\infty} \lambda f_n) = \lambda T(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} T(f_n) = \lambda g$$

Finalment, observem que si $g = 0$, $||T(f_n)|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ i per la desigualtat de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle T(f_n), f_n\rangle| \leq ||T(f_n)|| \cdot ||f_n|| = ||T(f_n)|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

és a dir, $||T|| = 0$ i per tant, $T = 0$, que no és possible per hipòtesi. Així arribem a contradicció amb el fet que $g = 0$, i concloem que existeix $g \in H$ vector propi de T de valor propi $\lambda \in \pm||T||$.
Per altra banda, si $f \in H \setminus \{0\}$ és vector propi de T de valor propi λ, aleshores tenim:

$$||T(f)|| = ||\lambda f|| = |\lambda| \cdot ||f|| \Rightarrow |\lambda| = \frac{||T(f)||}{||f||} \leq ||T||$$

□

Havent enunciat i demostrat els anteriors resultats, passem a enunciar el Teorema espectral.

Teorema 4. *Teorema espectral*
Considerem H un espai de Hilbert i $T \colon H \to H$ operador lineal compacte i autoadjunt. Llavors, existeix una base ortonormal $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ de vectors propis de l'operador T. A més, si $T(\varphi_n) = \lambda_n\varphi_n$, llavors, $\lambda_n \in \mathbb{R}$ i $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Demostració. Considerem $S = \overline{Span(\{f \in H : \exists\lambda \in \mathbb{R} \,|\, T(f) = \lambda f\})} \subset H$. Pel Lema 1 (a), S conté tots els vectors propis de T. A més, pel Lema 5, existeix un vector propi de valor propi $\pm||T||$ i per tant, $S \notin \big\{\{0\}, \emptyset\big\}$. Pel Teorema de la projecció, com que S és subespai vectorial tancat de H, llavors $H = S \oplus S^\perp$.
Suposem que $S^\perp \notin \big\{\{0\}, \emptyset\big\}$ i arribem a contradicció. Per construcció de S, S és espai vectorial tancat i de Hilbert (hereta el producte hermític de H) i per a cada $f \in S$ existeixen les successions $\{k_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $\{(\alpha_1^n f_1^n, \ldots, \alpha_{k_n}^n f_{k_n}^n)\}_{n=1}^{\infty}$ amb $\alpha_i^n \in \mathbb{C}$ i f_i^n vector propi de T tal que $f = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{k_n} \alpha_i^n f_i^n$.

Aleshores,

$$T(f) = T\big(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{k_n}\alpha_i^n f_i^n\big) \overset{\substack{T \text{ compacte } \Rightarrow T \text{ continu}\\ \downarrow}}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{k_n}\alpha_i^n T(f_i^n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{k_n}\alpha_i^n\lambda_i f_i^n$$

que pertany a S pel fet que $T(f)$ és també límit de combinacions lineals finites de vectors propis de T.
Havent suposat que $S^\perp \notin \big\{\{0\},\emptyset\big\}$, podem escollir $g \in S^\perp$ i $f \in S$ i pel fet que T és autoadjunt, tenim:

$$\langle T(g), f\rangle = \langle g, T(f)\rangle = 0$$

i per tant que $T(g)$ i f són ortogonals. Com que això es compleix per qualsevol $f \in S$, $T(g) \in S^\perp$.
Ara considerem l'operador $T_1 = T|_{S^\perp}$. $S^\perp \subset H$ és espai vectorial tancat i per tant, espai de Hilbert. Aleshores, T_1 és també lineal, compacte i autoadjunt sobre $S^\perp$. Podem aplicar el Lema 5 i obtenim que existeix v vector propi de T_1. No obstant, això implica que v és també vector propi de T, que és contradictori amb el fet que v ha de ser de S però $S \cap S^\perp = \{0\}$. Per tant, veiem que sota les hipòtesis del teorema, $S = H$.
Finalment, aplicant el Lema 2, independentment de l'ordre amb que escollim els valors propis, $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

□

Ara, com a objectiu final dins la teoria espectral, enunciem i demostrem un Teorema d'expansió que ens serà útil per a la demostració del Teorema de Mercer.
Abans però, necessitem fer una construcció utilitzant els lemes i teoremes prèviament enunciats. I per això, suposarem que disposem d'un espai de Hilbert H i T operador lineal, compacte i autoadjunt en H.
Pel Teorema 3, si $\lambda \neq 0$ és valor propi de l'operador T, ja hem vist que l'espai vectorial E_λ té dimensió finita. Si prenem $n_\lambda = dim(E_\lambda) < \infty$, podem escollir-ne una base ortonormal $\mathcal{B}_\lambda = \{\varphi_1^\lambda, \dots, \varphi_{n_\lambda}^\lambda\}$ mitjançant l'ortogonalització de Gram-Schmidt. Així, tenim que $\langle\mathcal{B}_\lambda\rangle = E_\lambda$ i $\langle\varphi_i^\lambda, \varphi_j^\lambda\rangle = \delta_{i,j}$.
Pel Lema 2, tenim com a molt numerables conjunts E_λ cadascun associat a un λ valor propi de T no nul. Així, podem definir:

$$Q' = \bigoplus_{\substack{\lambda\, vap\, de\, T\\ \lambda\neq 0}} E_\lambda = \langle\mathcal{B}\rangle \quad \text{on} \quad \mathcal{B} = \biguplus_{\substack{\lambda\, vap\, de\, T\\ \lambda\neq 0}} \mathcal{B}_\lambda$$

i per tant, la successió numerable $\mathcal{B}$ genera Q'. Utilitzant el Lema 1 (b), observem que els elements de $\mathcal{B}$ són tots ortogonals dos a dos i per tant, $\mathcal{B}$ és base ortonormal de Q'. Reescrivim $\mathcal{B} = \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i definim $Q = \overline{Q'}$ i observem que Q és el mínim espai vectorial tancat que conté tots els vectors propis de T de valor propi no nul.
A continuació, introduïm el Teorema d'expansió, amb el qual finalitzem l'apartat.

Teorema 5. ***Teorema d'expansió***
Sigui H espai de Hilbert i T operador lineal compacte i autoadjunt en H. Considerem $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ base ortonormal de Q (definit prèviament).
Llavors, si $x \in H$, i $h = P_{E_0}(x)$, és a dir, la projecció ortogonal de x en E_0, es compleix que:

$$x = h + \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, \varphi_k\rangle\varphi_k$$

on la sèrie és convergent en H.

Demostració. Per simplificar la notació, denotem:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$$
$$S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2$$

Per hipòtesis, $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ és base ortonormal de Q i per tant, sistema ortonormal de H. Aleshores, aplicant la desigualtat de Bessel, tenim:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \leq ||x||^2 < \infty$$

i com que S_2 és acotada i els termes són positius, és convergent. Així, veurem que la sèrie S_1 defineix un element de H. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ amb $m > n$ es compleix:

$$\Big\| \sum_{k=1}^{m} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k - \sum_{k=1}^{n} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k \Big\|^2 = \Big\| \sum_{k=n+1}^{m} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k \Big\|^2 \overset{\text{Teorema de Pitàgores}}{=} \sum_{k=n+1}^{m} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2$$

Com que la sèrie S_2 és convergent, en particular és de Cauchy i prenent límits $n, m \to \infty$, veiem que la sèrie S_1 és de Cauchy. Com que les sumes parcials de S_1 estan a H, S_1 és convergent en H.
Ara, prenem $x = \left[h + \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k\right] + \left[x - h - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k\right]$ i definim $y = x - h - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$.
Comprovem que $y \perp \varphi_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\langle y, \varphi_n \rangle = \langle x, \varphi_n \rangle - \langle h, \varphi_n \rangle - \langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k, \varphi_n \rangle$$

En la demostració del Teorema 3, per veure que E_λ és subespai tancat no utilitzem el fet que $\lambda \neq 0$ i per tant, E_0 és subespai vectorial tancat. Així, $h = P_{E_0}(x) \in E_0$ és vector propi de valor propi 0 i pel Lema 1 (b), obtenim $\langle h, \varphi_n \rangle = 0$. A més, per la continuïtat del producte hermític tenim:

$$\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k, \varphi_n \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \varphi_k \rangle \langle \varphi_k, \varphi_n \rangle \overset{\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ base ortonormal}}{=} \langle x, \varphi_n \rangle$$

i així tenim que $\langle y, \varphi_n \rangle = 0$ i per tant, $y \perp \varphi_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Com que $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ és base numerable ortonormal de Q, per la continuïtat del producte hermític, $y \perp Q$.
Ara comprovem que $y \perp E_0$. Si $z \in E_0$:

$$\langle y, z \rangle = \langle x - h, z \rangle - \langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k, z \rangle \overset{\text{Producte hermític continu}}{=} \langle x - h, z \rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \varphi_k \rangle \langle \varphi_k, z \rangle \overset{\text{Lema 1 (b)}}{=} \langle x - h, z \rangle$$

Pel Teorema de la projecció, $x = P_{E_0}(x) + P_{E_0^\perp}(x) = h + P_{E_0^\perp}(x)$ i com que $z \in E_0$, tenim que $\langle y, z \rangle = \langle x - h, z \rangle = \langle P_{E_0^\perp}(x), z \rangle = 0$. Així, $y \perp E_0$.
Finalment, per construcció de Q i E_0, $Q \cup E_0$ conté tots els vectors propis de T, i tal i com acabem de veure, $y \perp Q$ i $y \perp E_0$. Per tant, si apliquem el Teorema espectral obtenim una base ortonormal de H $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ formada de vectors propis de T que compleix $\phi_n \perp y$ $\forall n \in \mathbb{N}$ pel fet que $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Q \cup E_0$. Així, pel Teorema 1 directament obtenim que $y = 0$ i per tant, $x = h + \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$, el resultat que volíem obtenir. $\square$

4 Operadors integrals de Hilbert-Schmidt i Teorema de Mercer

Hem seguit les referències [7] i [4] per l'estudi dels operadors integrals de Hilbert-Schmidt i les referències [4] i [6] pel Teorema de Mercer, del que hem necessitat completar-ne el pas 2 de la demostració.

Considerem l'espai $\mathcal{L}^2[a,b]$, el conjunt de funcions mesurables Lebesgue definides a $[a,b] \subset \mathbb{R}$ amb imatge a $\mathbb{C}$ i de quadrat del mòdul integrable. Si denotem $\sim$ la relació d'equivalència a $\mathcal{L}^2[a,b]$:

$$f \sim g \iff \mu(\{x \in [a,b] \,|\, f(x) = g(x)\}) = b - a$$

on μ és la mesura de Lebesgue, llavors, $L^2[a,b] = {}^{\mathcal{L}^2[a,b]}/_{\sim}$ és espai de Hilbert amb el producte hermític:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f \cdot \overline{g} \, d\mu = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx \;\; \forall f, g \in L^2[a,b]$$

Definició 6. *A $L^2[a,b]$ definim l'operador integral de Hilbert-Schmidt com:*

$$\begin{aligned} T_C \colon L^2[a,b] &\longrightarrow L^2[a,b] \\ f &\longmapsto \int_a^b C(\cdot, t) f(t) dt \end{aligned}$$

on $C \colon [a,b]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ és funció contínua.

A continuació, enunciem diverses propietats de l'operador integral de Hilbert-Schmidt.

Proposició 1. *L'operador integral de Hilbert-Schmidt T_C:*

(a) és lineal.

(b) és acotat.

(c) té conjunt imatge format per funcions contínues en $[a,b]$.

(d) és compacte.

(e) és autoadjunt si C és funció hermítica.

Demostració.

(a) Si $f, g \in L^2[a,b]$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, tenim per tot $s \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} T_C(\alpha f + \beta g)(s) = \int_a^b C(s,t)\big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big) dt &\overset{\substack{\text{linealitat de l'integral} \\ \downarrow}}{=} \\ = \alpha \int_a^b C(s,t) f(t) dt + \beta \int_a^b C(s,t) g(t) dt &= \alpha T_C(f)(s) + \beta T_C(g)(s) \end{aligned}$$

(b) Com que $C(s,t)$ és contínua, pertany a $L^2[a,b]^2$ i pel Teorema de Fubini-Tonelli, pertany a $L^2[a,b]$ respecte cada variable per separat. Llavors, $\forall f \in L^2[a,b] \setminus \{0\}$, tenim:

$$|T_C(f)(s)| = \Big|\int_a^b C(s,t)f(t)dt\Big| \le \int_a^b |C(s,t)|\cdot|f(t)|dt \overset{\text{Desigualtat de Cauchy-Schwarz}}{\le} ||f||\cdot\Big(\int_a^b |C(s,t)|^2dt\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

$$\Longrightarrow ||T_C(f)||^2 = \int_a^b \Big|\int_a^b C(s,t)f(t)dt\Big|^2 ds \overset{\text{Equació (1)}}{\le} ||f||^2\cdot\int_a^b ds\int_a^b |C(s,t)|^2dt \overset{\text{Teorema de Fubini-Tonelli}}{=} ||f||^2||C||^2_{L^2[a,b]^2}$$

D'aquesta manera, $||C||_{L^2[a,b]^2} \ge \frac{||T_C(f)||}{||f||}$ i per definició de la norma de l'operador T_C, tenim que $||T_C|| \le ||C||_{L^2[a,b]^2} < \infty$ i per tant, l'operador T_C és fitat.

(c) Veiem la continuïtat de l'imatge prenent el límit per a qualsevol $s_0 \in [a,b]$ i $f \in L^2[a,b]$. Suposant que podem intercanviar el límit i la integral a l'equació (2), per la continuïtat de C, tenim:

$$\begin{aligned}\lim_{s\to s_0} T_C(f)(s) - T_C(f)(s_0) &= \lim_{s\to s_0}\int_a^b C(s,t)f(t)dt - \int_a^b C(s_0,t)dt = \\ &= \lim_{s\to s_0}\int_a^b \big(C(s,t)-C(s_0,t)\big)f(t)dt = \int_a^b \lim_{s\to s_0}\big(C(s,t)-C(s_0,t)\big)f(t)dt = 0\end{aligned} \tag{2}$$

Com que la funció $|C(s,t)|$ és contínua i definida en el compacte $[a,b]^2$, aplicant el Teorema de Weierstrass, $|C(s,t)|$ assoleix màxim en $M \in \mathbb{R}$. Llavors, observem que $|C(s,t) - C(s_0,t)| \le |C(s,t)| + |C(s_0,t)| \le 2M$ i $|\big(C(s,t)-C(s_0,t)\big)f(t)| = |C(s,t)-C(s_0,t)|\cdot|f(t)| \le 2M|f(t)|$. Com que $f \in L^2[a,b] \subset L^1[a,b]$, $2M|f|$ és integrable en $[a,b]$ i per tant, aplicant el Teorema de la convergència dominada podem intercanviar el límit i la integral a l'equació (2).

(d) Pel fet que $L^2[a,b]$ és espai de Hilbert, és separable i podem trobar una base ortonormal numerable $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ pel Teorema 2. En aquest cas, $\{\varphi_k(s)\varphi_l(t)\}_{k,l=1}^\infty$ és base ortonormal de $L^2([a,b]\times[a,b])$, també espai de Hilbert. Com que $C(s,t)$ és contínua en $[a,b]^2$, en particular $C(s,t) \in L^2([a,b]\times[a,b])$ i tenim que $C(s,t) = \sum_{k,l=1}^\infty a_{k,l}\varphi_k(s)\varphi_l(t)$ quasi segurament amb $\sum_{k,l=1}^\infty |a_{k,l}|^2 < \infty$.

Prenem la successió d'operadors $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ en $L^2[a,b]$ tal que per cada $f \in L^2[a,b]$:

$$T_n(f)(s) = \int_a^b C_n(s,t)f(t)dt \quad , \quad C_n(s,t) = \sum_{k,l=1}^n a_{k,l}\varphi_k(s)\varphi_l(t) \in L^2([a,b]\times[a,b])$$

Com que $C_n(s,t)$ és una suma finita d'elements ortogonals, podem intercanviar la integral i la suma i obtenim:

$$T_n(f)(s) = \sum_{k,l=1}^n a_{k,l}\varphi_k(s)\int_a^b f(t)\varphi_l(t)dt = \sum_{k,l=1}^n a_{k,l}\varphi_k(s)\langle f(t), \overline{\varphi_l(t)}\rangle = \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(s)$$

on $c_k \in \mathbb{C}$ són els coeficients de la base ortonormal en ajuntar els termes del sumatori per cada k.

Així, la imatge de T_n per qualsevol element de $L^2[a,b]$ pertany al espai vectorial $Span(\{\varphi_k\}_{k=1}^n)$. Podem comprovar que T_n són operadors lineals i per tant, els conjunts imatge $T_n(L^2[a,b])$ són espais vectorials. Aleshores, $dim(T_n(L^2[a,b])) \le dim(Span(\{\varphi_k\}_{k=1}^n)) = n$ i per tant, els operadors T_n són compactes. A més, com que T_n són lineals i compactes, en particular són continus i equivalentment, fitats.

Per provar la compactesa de T_C, utilitzarem un resultat vist al curs d'anàlisi funcional. Aquest resultat es pot trobar en forma de proposició en [7] (Proposició 6.1(ii)). Per poder aplicar el resultat i concloure que T_C és compacte, ja havent provat que T_C és operador acotat i que els operadors T_n són compactes, només és necessari comprovar que $||T_n - T_C|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ en norma d'operadors.

Comprovarem que la successió d'operadors $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ tendeix en norma a T_C. Per fer-ho, primer considerem la família d'operadors $A = \{T_K : K(s,t) \in L^2[a,b]^2\}$ sobre $L^2[a,b]$ definits per $T_K(f)(s) = \int_a^b K(s,t)f(t)dt$ i provem que si $T_K, T_{K'} \in A$, llavors, $T_K - T_{K'} \in A$ i que $||T_K|| \leq ||K||_{L^2[a,b]^2}$.

Si prenem $T_K, T_{K'} \in A$, per la linealitat de l'integral i com que $L^2[a,b]^2$ és espai vectorial, obtindrem que $T_K - T_{K'} = T_{K''} \in A$ on $K''(s,t) = K(s,t) - K'(s,t) \in L^2[a,b]^2$.

Per veure la desigualtat $||T_K|| \leq ||K||_{L^2[a,b]^2}$, podem repetir el procediment emprat en l'apartat (b) que és vàlid sempre i quan el nucli K de l'operador estigui dins $L^2[a,b]^2$.

Sabent aquests dos resultats i pel fet que $T_C \in A$, tenim:

$$||T_C - T_n||^2 \leq ||C(s,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l}\varphi_k(s)\varphi_l(t)||^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Finalment, havent vist que els operadors de la successió $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ són fitats i que $||T_C - T_n|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, llavors, tal i com hem explicat prèviament, T_C és compacte.

(e) Aplicant el Teorema de Weierstrass sobre $|C(s,t)|$ i prenent M com hem fet a l'apartat (c), per qualssevol $f, g \in L^2[a,b]$, tenim:

$$\int_a^b \Big(\int_a^b |C(s,t)f(t)\overline{g(s)}|ds\Big)dt \leq M\int_a^b |f(t)|dt \int_a^b |g(s)|ds \overset{\substack{\text{Desigualtat de Cauchy-Schwarz}\\ \downarrow}}{\leq}$$
$$\leq M\Big(\int_a^b |f(t)|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_a^b |g(s)|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}}(b-a) = M(b-a)||f||\cdot||g|| < \infty$$

Per tant, la funció $C(s,t)f(t)\overline{g(s)}$ és integrable i podem aplicar el Teorema de Fubini-Tonelli:

$$\langle T_C(f), g\rangle = \int_a^b \Big(\overline{g(s)}\int_a^b C(s,t)f(t)dt\Big)ds \overset{\substack{\text{Teorema de Fubini-Tonelli}\\ \downarrow}}{=} \int_a^b\int_a^b C(s,t)f(t)\overline{g(s)}ds\,dt \overset{\substack{C \text{ hermítica}\\ \downarrow}}{=} \int_a^b\int_a^b \overline{C(t,s)}f(t)\overline{g(s)}ds\,dt =$$
$$= \int_a^b f(t)\Big(\int_a^b \overline{C(t,s)g(s)}ds\Big)dt = \int_a^b f(t)\overline{\Big(\int_a^b C(t,s)g(s)ds\Big)}dt = \int_a^b f(t)\overline{T_C(g)(t)}dt = \langle f, T_C(g)\rangle$$

i en conseqüència, T_C és autoadjunt.

□

Corol·lari 1. *Els vectors propis (o funcions pròpies) de valor propi no nul d'un operador integral de Hilbert-Schmidt són continus en* $[a,b]$.

Demostració. Si $\varphi(s)$ és vector propi de valor propi no nul per l'operador integral de Hilbert-Schmidt T_C, tenim que $\lambda\varphi(s) = T_C(\varphi)(s)$ i per la Proposició 1 (c), $\varphi(s) = \frac{1}{\lambda}T_C(\varphi)(s)$ és contínua. □

Proposició 2. *Sigui T_C l'operador integral de Hilbert-Schmidt de nucli C hermítica i definida no negativa. Llavors, el valors propis de T_C són reals no negatius.*

Demostració. Sota la hipòtesi que $C(s,t)$ és definida no-negativa, per qualsevol $n \in \mathbb{N}$ i $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es compleix:

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(t_i)C(t_i,t_j)\overline{f(t_j)} \geq 0$$

per qualsevol selecció de punts $\{t_i\}_{i=1}^n \subset [a,b]$.
Primer veiem que si $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ és contínua, llavors, $I = \int_a^b \int_a^b C(s,t)f(s)\overline{f(t)}dsdt \geq 0$. $C(s,t)f(s)\overline{f(t)}$ és funció contínua a $[a,b]^2$ i com que I és integral amb domini d'integració compacte, I és integral de Riemann. En particular, si prenem la successió de particions de $[a,b]$ uniformes $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ amb $P_n = \{t_i = \frac{b-a}{n}i+a : 0 \leq i \leq n\}$, llavors, tenim:

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} C(t_i,t_j)f(t_i)\overline{f(t_j)}(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} C(t_i,t_j)f(t_i)\overline{f(t_j)} \overset{\substack{C \text{ definida no-negativa} \\ \downarrow}}{\geq} 0$$

Sabent que $I \geq 0$, ara comprovarem que els valors propis de T_C són reals no negatius. Pel Lema 1 (a), els valors propis de T_C són reals, i pel Corol·lari 1, si aquests valors propis són no nuls, llavors, els vectors propis associats són funcions contínues en $[a,b]$. Si φ és vector propi de T_C de valor propi λ no nul, aleshores tenim:

$$0 \overset{\substack{\overline{\varphi} \text{ continu} \\ \downarrow}}{\leq} \int_a^b \int_a^b C(s,t)\overline{\varphi(s)}\varphi(t)dsdt \overset{\substack{\varphi(t) \text{ vector propi de } T_C \\ \text{Teorema de Fubini-Tonelli} \\ \downarrow}}{=} \int_a^b \lambda\overline{\varphi(s)}\varphi(s)ds = \lambda\langle\varphi,\varphi\rangle = \lambda||\varphi||^2$$

i en definitiva, $\lambda \geq 0$, tal com volíem veure. □

Ja tenim els resultats necessaris per enunciar i demostrar el Teorema de Mercer, l'objectiu d'aquest apartat. Amb el Teorema de Mercer i amb la integració estocàstica de Riemann, ja podrem demostrar el Teorema de Karhunen-Loève.

Teorema 6. ***Teorema de Mercer***
Sigui $C\colon [a,b]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ funció contínua, hermítica i definida no negativa. Sigui T_C l'operador integral de Hilbert-Schmidt associat a C i $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base ortonormal de l'espai generat pels vectors propis de valor propi no nul de T_C. Si λ_n és el valor propi que correspon al vector propi φ_n per cada $n \in \mathbb{N}$, llavors,

$$C(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(s)\overline{\varphi_n(t)}$$

al compacte $[a,b]\times[a,b]$ tal que:

- *(1) la sèrie convergeix absolutament $\forall (s,t) \in [a,b]^2$.*
- *(2) la sèrie convergeix uniformement conjuntament a tot $[a,b]^2$.*
- *(3) la sèrie convergeix a $C(s,t)$ en norma de $L^2([a,b]^2)$.*

Demostració. Comencem donant sentit a l'enunciat del teorema, que a priori, no és possible trobar una base ortonormal numerable de l'espai generat pels vectors propis de valor propi no nul de T_C.
Per la Proposició 1 i pel fet que C és contínua i hermítica, l'operador T_C és lineal, compacte i autoadjunt. Aleshores, podem aplicar tots els resultats de la teoria espectral i veiem que sí és possible obtenir aquesta base numerable ortonormal i formada de vectors propis.
Dividim la demostració en 5 passos amb els quals podrem obtenir els punts (1), (2) i (3) del teorema.

Pas 1: La sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(s)\overline{\varphi_n(t)}$ convergeix a $C(s,t)$ a $L^2[a,b]$ per cada variable separadament:

La funció $C(s,t)$ és contínua a $[a,b]^2$ i en particular, pertany a $L^2[a,b]$ respecte cada variable per separat. Per qualsevol $t \in [a,b]$, denotem $C_t(s) = C(s,t) \in L^2[a,b]$ i pel Teorema de l'expansió, a $L^2[a,b]$ tenim la igualtat:

$$C_t(s) = h(s,t) + \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t)\varphi_n(s) \tag{3}$$

on $h(\cdot,t) \in E_0$ i $k_n(t) = \langle C_t, \varphi_n \rangle$, i així:

$$k_n(t) = \int_a^b C(s,t)\overline{\varphi_n(s)}ds \overset{\text{C és hermítica}}{=} \overline{\int_a^b C(t,s)\varphi_n(s)ds} \overset{\text{φ_n és vector propi}}{=} \overline{\lambda_n\varphi_n(t)} \overset{\text{Lema 1 (a)}}{=} \lambda_n\overline{\varphi_n(t)} \tag{4}$$

A més, pel fet que $h(\cdot,t) \in E_0$ per qualsevol t, $h(\cdot,t)$ és vector propi de T_C de valor propi 0, i per tant:

$$\bar{0} = \overline{\int_a^b C(t,s)h(s,t)ds} \overset{\text{C és hermítica}}{=} \int_a^b C(s,t)\overline{h(s,t)}ds = \langle C_t, h(\cdot,t)\rangle \overset{\text{Equacions (3) i (4)}}{=}$$

$$= \langle h(\cdot,t) + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n\overline{\varphi(t)}, h(\cdot,t)\rangle \overset{\substack{\text{producte hermític}\\ \text{lineal i continu}}}{=} ||h(\cdot,t)||^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\overline{\varphi_n(t)}\langle\varphi_n, h(\cdot,t)\rangle \overset{\text{Lema 1 (b)}}{=} ||h(\cdot,t)||^2$$

Per tant, $h(\cdot,t) \equiv 0$ a $L^2[a,b]$ per a qualsevol $t \in [a,b]$ i així, per a qualsevol $t \in [a,b]$ a $L^2[a,b]$ tenim:

$$C(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(s)\overline{\varphi_n(t)}$$

Podem repetir l'argument fixant ara $s \in [a,b]$ per obtenir el mateix resultat pensant $C(s,t)$ com a funció de t dins $L^2[a,b]$.

Pas 2: El residu definit per $C_n(s,t) \coloneqq C(s,t) - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}$ compleix $C_n(t,t) \geq 0\ \forall t \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}$:

Pel **Pas 1**, a $L^2[a,b]$ tenim $C_n(s,t) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}$. Aleshores, si prenem qualsevol $f \in L^2[a,b]$, observem que:

$$\int_a^b\int_a^b C_n(s,t)\overline{f(s)}f(t)dsdt \overset{\text{Teorema de Fubini-Tonelli}}{=} \int_a^b f(t)\langle C_n(\cdot,t), f\rangle dt = \int_a^b f(t)\overline{\langle f, C_n(\cdot,t)\rangle}dt = \langle f, \langle f, C_n(\cdot,t)\rangle\rangle =$$

$$= \langle f, \langle f, \sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k\varphi_k(\cdot)\overline{\varphi_k(t)}\rangle\rangle \overset{\text{propietats del producte hermític}}{=} \sum_{k=n+1}^{\infty}\langle f,\varphi_k\rangle\lambda_k\overline{\langle f,\varphi_k\rangle} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k|\langle f,\varphi_k\rangle|^2 \overset{\text{Proposició 2}}{\geq} 0 \tag{5}$$

Aleshores, suposem que existeix un punt $t_0 \in [a,b]$ on $C_n(t_0,t_0) < 0$. Les funcions $\varphi_k(s)$ són contínues a $[a,b]$ per el Corol·lari 1 i per tant, també les funcions $\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}$ són contínues a $[a,b]^2$. Així, com que la funció C_n és combinació lineal de $C(s,t)$ i de $\varphi_1(s)\overline{\varphi_1(t)}, \dots, \varphi_n(s)\overline{\varphi_n(t)}$ amb $n < \infty$, tenim que C_n és contínua a $[a,b]^2$. Per tant, podem escollir $\varepsilon, \delta > 0$ tals que per qualsevol punt $(s,t) \in I \times I = [\max(a, t_0-\delta), \min(b, t_0+\delta)]^2$ amb $\min(b, t_0+\delta) > \max(a, t_0-\delta)$, es compleix que $Re(C_n(s,t)) \leq -\varepsilon < 0$. A més, podem comprovar que $C_n(s,t)$ és funció hermítica:

$$\overline{C_n(s,t)} = \overline{C(s,t)} - \overline{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}} \overset{\substack{\text{C hermítica,}\\ \text{Lema 1 (a)}}}{=} C(t,s) - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k(t)\overline{\varphi_k(s)} = C_n(t,s)$$

Definim la funció $\omega(s) = \mathcal{X}_I(s) \in L^2[a,b]$ i tenim:

$$\int_a^b \int_a^b C_n(s,t)\overline{\omega(s)}\omega(t)dsdt = \int_I \int_I C_n(s,t)dsdt = \int_{I\times I} C_n(s,t)dsdt \geq 0$$

Si considerem $\alpha = \max(a, t_0 - \delta)$ i $\beta = \min(b, t_0 + \delta)$, tenim $I = [\alpha, \beta]$ i podem definir la funció h:

$$\begin{aligned} h\colon R &\longrightarrow I \times I \\ (x,y) &\longmapsto (x+y, x-y) \end{aligned}$$

on R és el rombe de vèrtexs $(\alpha, 0), (\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}), (\frac{\alpha+\beta}{2}, -\frac{\beta-\alpha}{2}), (\beta, 0)$. Podem comprovar que la funció $h \in \mathcal{C}^1$ i és bijectiva. A més, com que C_n és contínua, en particular també és integrable a $I \times I$.

D'aquesta manera, estem en hipòtesis d'aplicar el Teorema del canvi de variable i obtenim que la funció $(C_n \circ h)(x,y) \cdot |Jh(x,y)|$ és integrable a R on Jh és el Jacobià de h. A més, es compleix:

$$\begin{aligned} \int_{I\times I} C_n(s,t)dsdt &\overset{\substack{\text{Teorema del canvi de variable} \\ \downarrow}}{=} \int_R (C_n \circ h)(x,y) \cdot |Jh(x,y)|dxdy = 2\int_R C_n(x+y, x-y)dxdy \overset{\substack{\text{Teorema de Fubini-Tonelli} \\ \downarrow}}{=} \\ &= 2\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \int_{-x}^{x} C_n(x+y, x-y)dxdy + 2\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \int_{-(\beta-x)}^{\beta-x} C_n(x+y, x-y)dxdy \end{aligned}$$

Estudiem la primera doble integral:

$$\begin{aligned} 2\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \int_{-x}^{x} C_n(x+y,x-y)dxdy &= 2\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} dx\Big[\int_{-x}^{0} C_n(x+y,x-y)dy + \int_0^x C_n(x+y,x-y)dy\Big] = \\ &= 2\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \int_0^x \big[C_n(x-y,x+y) + C_n(x+y,x-y)\big]dxdy \overset{\substack{C_n \text{ hermítica} \\ \downarrow}}{=} \\ &= 2\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \int_0^x \big[\overline{C_n(x+y,x-y)} + C_n(x+y,x-y)\big]dxdy = \\ &= 4\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \int_0^x Re\big(C_n(x+y,x-y)\big)dxdy \leq -4\varepsilon\big(\frac{\beta-\alpha}{2}\big)^2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Podem repetir el mateix procediment per a la segona doble integral i obtenim:

$$\int_{I\times I} C_n(s,t)dsdt \leq -4\varepsilon(\beta-\alpha)^2 < 0$$

que és contradictori amb el resultat obtingut a l'equació (5). Per tant, $C_n(t,t) \geq 0$ per tot $t \in [a,b]$.

Pas 3: La sèrie convergeix absolutament i uniformement per a cada variable per separat:

Pel **Pas 2**, $C_n(t,t) = C(t,t) - \sum_{k=1}^n \lambda_k |\varphi_k(t)|^2 \geq 0$. Com que $C(s,t)$ és contínua i definida en el compacte $[a,b]^2$, podem definir $M = \sup_{s,t\in[a,b]} |C(s,t)|$ i pel Teorema de Weierstrass obtenim:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k |\varphi_k(t)|^2 \leq C(t,t) \leq M < \infty \tag{6}$$

Per a tot $t \in [a,b]$ la sèrie $\sum_{k=1}^n \lambda_k |\varphi_k(t)|^2$ és de termes no negatius i està acotada per M, i per tant, convergeix a $\mathbb{R}$. En particular, és successió de Cauchy i es compleix que $\sum_{k=n}^m \lambda_k |\varphi_k(t)|^2 \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$.

Aquest resultat ens permet mostrar la convergència absoluta de la sèrie original:

$$\sum_{k=n}^{m} \lambda_k |\varphi_k(s)\varphi_k(t)| = |\sum_{k=n}^{m} \sqrt{\lambda_k} \cdot |\varphi_k(s)| \cdot \sqrt{\lambda_k} \cdot |\varphi_k(t)|| \overset{\text{Desigualtat de Cauchy-Schwarz}}{\leq}$$

$$\leq \Big(\sum_{k=n}^{m} \lambda_k |\varphi_k(s)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=n}^{m} \lambda_k |\varphi_k(t)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_{k=n}^{m} \lambda_k |\varphi_k(s)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \sqrt{M} \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$$

Per tant, no només veiem que la sèrie és absolutament convergent sinó que per $s \in [a,b]$, és uniformement convergent en t, i de manera anàloga, per $t \in [a,b]$, és uniformement convergent en s.

Pas 4: La sèrie convergeix a $C(s,t)$ puntualment:

Fixem $t \in [a,b]$ i pensem la funció $C(s,t)$ com a funció de s. Al **Pas 1** hem vist que la sèrie convergeix a $C(s,t)$ en $L^2[a,b]$ i al **Pas 3**, hem vist que la sèrie convergeix uniformement a una funció $G(\cdot,t)$ puntualment, i per tant, per a tot $t \in [a,b]$, $G(s,t) = C(s,t)$ gairebé per tot $s \in [a,b]$.

Per el Corol·lari 1, $G(s,t)$ és límit uniforme de funcions de s contínues en $[a,b]$ i per tant, $G(\cdot,t)$ és també contínua. Per hipòtesis, $C(\cdot,t)$ és contínua i per tant, per a qualsevol $t \in [a,b]$, $C(s,t) \equiv G(s,t)$ per tot $s \in [a,b]$. En definitiva, obtenim que la sèrie convergeix a $C(s,t)$ a $[a,b]^2$ puntualment i uniformement per a cada variable fixant l'altre.

Pas 5: Teorema de Dini: Si $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ és successió de funcions amb imatge real contínues definides a $[a,b]$ amb $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ per tot $x \in [a,b]$ i $n \in \mathbb{N}$ amb límit a g contínua a $[a,b]$, llavors, $g_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ uniformement a $[a,b]$:

Demostrem el Teorema de Dini suposant que $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ $\forall x \in [a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, però el Teorema és també vàlid quan $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$ $\forall x \in [a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ i es demostra de manera anàlega.

Prenem $\varepsilon > 0$ i definim el conjunt $U_n = \big\{x \in [a,b] \colon |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon\big\}$ que és obert pel fet que $|g_n(x) - g(x)|$ és contínua en $[a,b]$. Com que $g_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, tenim $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = [a,b]$. Així, $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ és recobriment per oberts de $[a,b]$ que en ser tancat i fitat a $\mathbb{R}$, és compacte, i en podem trobar un sots-recobriment finit $\{U_{n_i}\}_{i=1}^{m}$ per un cert $m \in \mathbb{N}$.

Com que $g_{n+1}(x) - g_n(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$, per tal que la successió tingui límit a $g(x)$ puntualment, s'ha de complir que $g(x) \geq \cdots \geq g_{n+1}(x) \geq g_n(x)$ i per tant, $|g_{n+1}(x) - g(x)| < |g_n(x) - g(x)|$ i així $U_n \subset U_{n+1}$. Si prenem els índexs $n_1, \ldots, n_m$ tals que $n_1 < n_2 < \cdots < n_m$, llavors, $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{m} U_{n_i} = U_{n_m}$ i per qualsevol $n > n_m$, $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in [a,b]$.

En conseqüència, per qualsevol $\varepsilon > 0$, podem escollir un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per qualsevol $x \in [a,b]$, si $n > n_0$, llavors, $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$. D'aquesta manera, hem provat que la successió $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergeix uniformement a g en $[a,b]$.

Anem a demostrar el teorema a partir dels 5 passos. Primer, a partir del **Pas 4**, sabem que la sèrie convergeix a $C(s,t)$ puntualment. A més, pel **Pas 3**, directament obtenim el punt (1) del teorema. Per veure el punt (2), utilitzem la convergència puntual de la sèrie a $C(s,t)$:

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}-C(s,t)\Big|^2=\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}\Big|^2\leq\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\cdot|\varphi_k(s)|\cdot\sqrt{\lambda_k}\cdot|\varphi_k(t)|\Big|^2\overset{\substack{\text{Desigualtat de Cauchy-Schwarz}\\ \downarrow}}{\leq}$$

$$=\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k|\varphi_k(s)|^2\Big)\cdot\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k|\varphi_k(t)|^2\Big)\overset{\substack{\text{Equació (6)}\\ \downarrow}}{\leq}M\cdot\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k|\varphi_k(s)|^2\Big)\overset{\substack{\textbf{Pas 4}\\ \downarrow}}{=}M\cdot\Big(C(s,s)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|\varphi_k(s)|^2\Big)\quad(7)$$

Ara considerem la successió de funcions $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tals que $g_n(s)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|\varphi_k(s)|^2$ que per qualsevol $n\in\mathbb{N}$ és suma finita de funcions contínues pel Corol·lari 1 i per tant contínua en $[a,b]$. A més, g_n és sèrie de termes no negatius i per tant, $g_n(s)\leq g_{n+1}(s)$ per qualssevol $n\in\mathbb{N}$ i $s\in[a,b]$. Pel **Pas 4**, $g_n(s)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|\varphi_k(s)|^2\xrightarrow{n\to\infty}C(s,s)$ amb $C(s,s)$ contínua per hipòtesis. Aleshores, podem aplicar el Teorema de Dini (**Pas 5**) i obtenim que la successió $\{g_n(s)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix uniformement a $C(s,s)$.
D'aquesta manera, aplicant la convergència uniforme de la successió $\{g_n(s)\}_{n\in\mathbb{N}}$ a l'equació (7) obtenim la convergència uniforme de la sèrie a $C(s,t)$ en $[a,b]^2$ i per tant, el punt (2) del teorema.
Finalment, falta provar el punt (3) del teorema, és a dir, la sèrie convergeix a $C(s,t)$ en norma de $L^2[a,b]^2$.
Pel punt (2) del Teorema de Mercer ja provat i pel fet que $[a,b]^2$ té mesura de Lebesgue finita a $\mathbb{R}^2$, $\forall\varepsilon>0$ podem escollir $n_0\in\mathbb{N}$ tal que si $n>n_0$, llavors, $\big|\big|C(s,t)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}\big|\big|_{L^2[a,b]^2}<\varepsilon(b-a)$ i per definició de límit, obtenim automàticament la convergència de la sèrie a $C(s,t)$ en norma de $L^2[a,b]^2$. □

5 Funció de covariància d'un procés estocàstic

Cada procés estocàstic té associada una funció de covariància, i ens és de gran interès estudiar-ne les propietats. En aquest apartat, per donar la definició general de funció de covariància, prenem T, que denotarà l'espai de paràmetres d'un procés estocàstic, un conjunt arbitrari. En aquest capítol hem seguit les referències [2] i [9].

Definició 7. *Sigui $\{\xi(t)\ :\ t\in T\}$ un procés estocàstic. Definim la funció de covariància del procés com la funció:*

$$\begin{aligned}C:T\times T&\longrightarrow\mathbb{C}\\ (s,t)&\longmapsto Cov\big(\xi(s),\overline{\xi(t)}\big)=\mathbb{E}\big([\xi(s)-\mathbb{E}(\xi(s))]\cdot\overline{[\xi(t)-\mathbb{E}(\xi(t))]}\big)\end{aligned}$$

Observació 1. *Per tal que la funció de covariància d'un procés estocàstic prengui valors finits, és necessari que $\mathbb{E}(\xi(s)\overline{\xi(t)})$ sigui finita $\forall s,t\in T$ (en aquest cas, $|\mathbb{E}(\xi(t))|<\infty\ \ \forall t\in T$). Prenent el procés estocàstic inclòs en L^2, és condició suficient.*

A continuació, enunciem i provem propietats de les funcions de covariància. Prenent $\langle\cdot,\cdot\rangle$ el producte hermític de L^2, tenim:

- $C(s,t)$ és funció hermítica:

$$\begin{aligned}C(s,t)&=\langle\xi(s)-\mathbb{E}(\xi(s)),\xi(t)-\mathbb{E}(\xi(t))\rangle=\\ &=\overline{\langle\xi(t)-\mathbb{E}(\xi(t)),\xi(s)-\mathbb{E}(\xi(s))\rangle}=\overline{C(t,s)}\end{aligned}$$

- $C(s,t)$ és definida no negativa:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_1, \dots, t_n \in T$ i $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, tenim:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i\overline{z_j}C(t_i,t_j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i\overline{z_j}\mathbb{E}\big([\xi(t_i)-\mathbb{E}(\xi(t_i))]\overline{[\xi(t_j)-\mathbb{E}(\xi(t_j))]}\big) = \\ &= \mathbb{E}\big(\sum_{i=1}^{n} z_i[\xi(t_i)-\mathbb{E}(\xi(t_i))]\overline{\sum_{j=1}^{n} z_j[\xi(t_j)-\mathbb{E}(\xi(t_j))]}\big) = \\ &= \Big|\Big|\sum_{i=1}^{n} z_i[\xi(t_i)-\mathbb{E}(\xi(t_i))]\Big|\Big|_{L^2}^2 \geq 0\end{aligned}$$

Ens interessa saber si aquestes dues propietats caracteritzen les funcions de covariància i per tant, si són condicions suficients per a ser funció de covariància d'algun procés estocàstic. I si és així, cada funció de covariància té associat de manera única un procés estocàstic?
El següent resultat dona una condició necessària i suficient.

Teorema 7. *Sigui $C\colon T \times T \longrightarrow \mathbb{C}$ funció hermítica i definida no-negativa.
Llavors, existeix un procés estocàstic $\{\xi(t),\, t \in T\} \subset L^2$ amb funció de covariància C.*

La demostració d'aquest teorema es pot trobar en la referència [2], pàgina 18, fent ús del resultat de [1], pàgina 280, i la condició de Kolmogorov.

Observació 2. *Es pot comprovar desenvolupant el producte hermític que si $\{X(t),\, t \in T\} \subset L^2$ és procés estocàstic, llavors, si f és funció definida a T que pren valors a $\mathbb{C}$, $\{X(t) + f(t),\, t \in T\}$ és també procés estocàstic a L^2 i es preserva la funció de covariància. D'aquesta manera veiem que l'esperança d'un procés estocàstic no afecta en absolut a la funció de covariància del procés.*

Observació 3. *En la demostració del teorema anterior, a cada funció sota les hipòtesis del teorema s'hi associa un procés Gaussià amb la corresponent funció de covariància, i per tant, diferents processos estocàstics poden tenir una mateixa funció de covariància.*

6 Integració estocàstica de Riemann

L'expansió de Karhunen-Loève és suma numerable de funcions contínues ponderades per coeficients que justament són variables aleatòries. Aquests coeficients són integrals de variables aleatòries respecte l'espai de paràmetres. Per donar sentit a la integral, introduïm la integració estocàstica de Riemann i presentem resultats necessaris per demostrar el Teorema de Karhunen-Loève. A més, tal com hem indicat als preliminars només treballarem amb els processos estocàstics de segon ordre, i per ser més exactes, fixarem l'espai de paràmetres a $T = [a,b] \subset \mathbb{R}$ i conjunt d'estats a $\{\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C})\}$. Desenvolupem la integració estocàstica de Riemann seguint les referències [9], [2] i [4], totes centrades en la prova del Teorema de Karhunen-Loève.

Definició 8. *Prenem $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ funció fitada en norma de $\mathbb{C}$ i $\{X(t)\colon t \in [a,b]\} \subset L^2$ procés estocàstic amb funció de covariància $C\colon [a,b]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$. Considerem $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ successió de particions de $[a,b]$ tals que $P_n = \{t_0^n, \dots, t_n^n\colon a = t_0^n < \dots < t_n^n = b\}$ i $\Delta_n := \max\limits_{1\leq i\leq n} |t_i^n - t_{i-1}^n|$ que compleixi $\Delta_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Definim la successió de variables aleatòries $\{I(P_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tals que $I(P_n) = \sum_{i=1}^{n} g(t_i^n)X(t_i^n)(t_i^n - t_{i-1}^n)$.
Si existeix I variable aleatòria definida en el mateix espai de probabilitat que $X(t)$ i amb valors a $\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{E}(|I(P_n) - I|^2) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (en mitjana quadràtica), llavors, diem que $g(t)X(t)$ és Riemann integrable en $[a,b]$ i denotem $\displaystyle\int_a^b g(t)X(t)dt := I$.*

A continuació, enunciem tres resultats que necessitarem més endavant.

Proposició 3. *Sigui $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua i $\{X(t)\colon t \in [a,b]\} \subset L^2$ procés estocàstic amb funció de covariància $C(s,t)$ contínua en $[a,b]^2$ i $\mathbb{E}(X(t))$ funció contínua en $[a,b]$. Llavors, $g(t)X(t)$ és Riemann integrable en $[a,b]$ amb integral a L^2.*

Demostració. Amb la mateixa notació que en l'anterior definició, hem de veure que la successió $\{I(P_n)\}_{n=1}^{\infty}$ és convergent en mitjana quadràtica a una certa variable aleatòria $I \in L^2$. Com que $I(P_n)$ és combinació lineal finita d'elements de L^2 que és espai vectorial, $\{I(P_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2$.
A més, com que L^2 és espai de Hilbert i per tant complet amb la mètrica $d(X,Y) = ||X-Y|| = \mathbb{E}(|X-Y|^2)^{\frac{1}{2}}$, és suficient veure que la successió $\{I(P_n)\}_{n=1}^{\infty}$ és de Cauchy.
Per $n,m \in \mathbb{N}$, tenim:

$$d(I(P_n),I(P_m))^2 = \mathbb{E}(|I(P_n)-I(P_m)|^2) = \mathbb{E}(I(P_n)\overline{I(P_n)}) + \mathbb{E}(I(P_m)\overline{I(P_m)}) - 2Re\big(\mathbb{E}(I(P_n)\overline{I(P_m)})\big)$$

Llavors,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(I(P_n)\overline{I(P_m)}) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(t_i^n)\overline{g(t_j^m)}X(t_i^n)\overline{X(t_j^m)}(t_i^n - t_{i-1}^n)(t_j^m - t_{j-1}^m)\Big) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(t_i^n)\overline{g(t_j^m)}\langle X(t_i^n), X(t_j^m)\rangle(t_i^n - t_{i-1}^n)(t_j^m - t_{j-1}^m) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(t_i^n)\overline{g(t_j^m)}\big(C(t_i^n,t_j^m) + \mathbb{E}(X(t_i^n))\overline{\mathbb{E}(X(t_j^m))}\big)(t_i^n - t_{i-1}^n)(t_j^m - t_{j-1}^m)\end{aligned}$$

Les funcions $g(s)\overline{g(t)}$, $C(s,t)$ i $\mathbb{E}(X(s))\overline{\mathbb{E}(X(t))}$ són contínues per hipòtesis i per tant, la funció $H(s,t) = g(s)\overline{g(t)}\big(C(s,t) + \mathbb{E}(X(s))\overline{\mathbb{E}(X(t))}\big)$ és contínua. Per tant, $H(s,t)$ és Riemann integrable en $[a,b]^2$ i com que $\{P_n \times P_m\}_{n,m=1}^{\infty}$ és successió de particions de $[a,b]^2$ amb $\Delta_{n,m} = \Delta_n\Delta_m \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$, aplicant el Teorema de Fubini-Tonelli, independentment de com tendeixin n i m a infinit, tenim:

$$\mathbb{E}\big(I(P_n)\overline{I(P_m)}\big) \xrightarrow{n,m\to\infty} \int_a^b\int_a^b g(s)\overline{g(t)}\big(C(s,t) + \mathbb{E}(X(s))\overline{\mathbb{E}(X(t))}\big)dsdt$$

Prendre $m = n$, es tracta d'un cas particular i no fa falta aplicar el Teorema de Fubini-Tonelli per obtenir:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(I(P_n)\overline{I(P_n)}\big) = \int_a^b\int_a^b g(s)\overline{g(t)}\big(C(s,t) + \mathbb{E}(X(s))\overline{\mathbb{E}(X(t))}\big)dsdt$$

Ara, anem a provar que aquesta integral doble només pren valors reals. La funció $H(s,t)$ és hermítica pel fet que suma i producte de funcions hermítiques és hermítica i que $C(s,t)$ és hermítica pel fet que és funció de covariància d'un procés estocàstic. Aleshores, aplicant el mateix procediment que hem emprat en el Pas 2 de la demostració del Teorema de Mercer, obtenim que la integral només pren valors reals.
Finalment, com que el límit quan n i m tendeixen a infinit de $d(I(P_n),I(P_m))^2$ és suma finita de successions amb cadascuna el seu límit convergent corresponent, tenim:

$$\lim_{n,m\to\infty} d(I(P_n),I(P_m))^2 = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(|I(P_n)|^2) + \lim_{m\to\infty}\mathbb{E}(|I(P_m)|^2) - 2\lim_{n,m\to\infty}\mathbb{E}(I(P_n)\overline{I(P_m)}) = 0$$

Havent vist que la successió $\{I(P_n)\}_{n=1}^{\infty}$ és de Cauchy, convergeix en mitjana quadràtica a una variable aleatòria continguda a L^2. $\square$

Lema 6. *Si $g,h\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ són funcions contínues i $\{X(t)\colon t \in [a,b]\} \subset L^2$ és procés estocàstic amb funció* *de covariància $C\colon [a,b]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua i esperança del procés $\mathbb{E}(X(t)) \equiv 0$, llavors,*

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^b g(t)X(t)dt\overline{\int_a^b h(t)X(t)dt}\Big) = \int_a^b\int_a^b g(s)\overline{h(t)}C(s,t)dtds$$

i a més,

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^b g(t)X(t)dt\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_a^b h(t)X(t)dt\Big) = 0$$

Demostració. Per completar la demostració, prendrem les successions de particions de $[a,b]$ de la Proposició 3. Per la Proposició 3, les funcions $g(t)X(t)$ i $h(t)X(t)$ són Riemann integrables en $[a,b]$ i en mitjana quadràtica, les sèries:

$$I(P_n) = \sum_{i=1}^{n} g(t_i^n)X(t_i^n)(t_i^n - t_{i-1}^n)$$
$$J(P_m) = \sum_{j=1}^{m} h(t_j^m)X(t_j^m)(t_j^m - t_{j-1}^m)$$

convergeixen a $I = \int_a^b g(s)X(s)ds$ i $J = \int_a^b h(t)X(t)dt$ respectivament.
Aleshores, en norma de L^2, tenim:

$$\int_a^b g(s)X(s)ds\overline{\int_a^b h(t)X(t)dt} = \lim_{n\to\infty} I(P_n)\lim_{m\to\infty}\overline{J(P_m)} = \lim_{n,m\to\infty} I(P_n)\overline{J(P_m)} =$$
$$= \lim_{n,m\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(t_i^n)\overline{h(t_j^m)}X(t_i^n)\overline{X(t_j^m)}(t_i^n - t_{i-1}^n)(t_j^m - t_{j-1}^m)$$

on podem agrupar els límits ja que individualment $\{I(P_n)\}_{n=1}^\infty$ i $\{J(P_m)\}_{m=1}^\infty$ tenen límit convergent a L^2.
En principi, no hem definit aquesta integral estocàstica sobre L^2 amb espai de paràmetres $[a,b]^2$ però si prenem esperança a banda i banda de la igualtat i som capaços d'intercanviar l'esperança i el límit, llavors, obtenim una integral de Riemann sobre $[a,b]^2$ normal que podem resoldre pel fet que $C(s,t)$ és contínua i per tant, $g(s)\overline{h(t)}C(s,t)$ és Riemann integrable a $[a,b]^2$:

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^b g(s)X(s)ds\overline{\int_a^b h(t)X(t)dt}\Big) = \mathbb{E}\Big(\lim_{n,m\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(t_i^n)\overline{h(t_j^m)}X(t_i^n)\overline{X(t_j^m)}(t_i^n - t_{i-1}^n)(t_j^m - t_{j-1}^m)\Big) =$$
$$= \lim_{n,m\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(t_i^n)\overline{h(t_j^m)}\mathbb{E}\big(X(t_i^n)\overline{X(t_j^m)}\big)(t_i^n - t_{i-1}^n)(t_j^m - t_{j-1}^m) =$$
$$= \lim_{n,m\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(t_i^n)\overline{h(t_j^m)}C(t_i^n, t_j^m)(t_i^n - t_{i-1}^n)(t_j^m - t_{j-1}^m) =$$
$$= \int_a^b\int_a^b g(s)\overline{h(t)}C(s,t)dsdt$$

Ara cal comprovar que realment el límit i l'esperança commuten:

$$|\mathbb{E}\big(I(P_n)\overline{J(P_m)}\big) - \mathbb{E}\big(I\overline{J}\big)| = |\mathbb{E}\big(I(P_n)\overline{J(P_m)} - I\overline{J}\big)| = |\mathbb{E}\big(I(P_n)\overline{J(P_m)} - I(P_n)\overline{J} + I(P_n)\overline{J} - I\overline{J}\big)| =$$
$$= |\mathbb{E}\big(I(P_n)\overline{J(P_m)} - I(P_n)\overline{J}\big) + \mathbb{E}\big(I(P_n)\overline{J} - I\overline{J}\big)| \underset{\text{Desigualtat triangular a } \mathbb{C}}{\leq} \big|\langle I(P_n), J(P_m) - J\rangle\big| + \big|\langle I(P_n) - I, J\rangle\big| \underset{\text{Desigualtat de Cauchy-Schwarz}}{\leq}$$
$$\leq \mathbb{E}\big(|I(P_n)|^2\big)^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\big(|J(P_m) - J|^2\big)^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E}\big(|I(P_n) - I|^2\big)^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\big(|J|^2\big)^{\frac{1}{2}}$$

Prenent límit $n,m\to\infty$, pel fet que l'última equació és suma finita de finits productes de termes on cadascun té límit convergent, tenim:

$$\lim_{n,m\to\infty}\left|\mathbb{E}(P_n)\overline{J(P_m)}-\mathbb{E}(I\overline{J})\right|\leq\lim_{n,m\to\infty}\Big(\mathbb{E}\big(|I(P_n)|^2\big)^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\big(|J(P_m)-J|^2\big)^{\frac{1}{2}}+\mathbb{E}\big(|I(P_n)-I|^2\big)^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\big(|J|^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\big(|I(P_n)|^2\big)^{\frac{1}{2}}\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}\big(|J(P_m)-J|^2\big)^{\frac{1}{2}}+\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\big(|I(P_n)-I|^2\big)^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\big(|J|^2\big)^{\frac{1}{2}}=0$$

Per tant, hi ha convergència de $\mathbb{E}\big(I(P_n)\overline{J(P_m)}\big)$ a $\mathbb{E}(I\overline{J})$ i això prova el primer punt del lema.
Per provar la segona igualtat del lema, donat que g i h estan condicionades només pel fet que són contínues, si veiem que $\mathbb{E}(I)=0$, també tindrem que $\mathbb{E}(J)=0$.
En norma de L^2, $\{I(P_n)\}_{n=1}^{\infty}$ convergeix a I. Prenent esperança, si suposem que podem commutar el límit i la funció esperança, tenim:

$$\mathbb{E}(I)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\big(I(P_n)\big)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}g(t_i^n)\mathbb{E}(X(t_i^n))(t_i^n-t_{i-1}^n)=0$$

Per tant, només és necessari comprovar que el límit i l'esperança commuten. Per la desigualtat de Cauchy-Schwarz i com que $1\in L^2$, tenim:

$$\left|\mathbb{E}\big(I(P_n)-I\big)\right|=\left|\mathbb{E}\big((I(P_n)-I)\cdot\overline{1}\big)\right|=|\langle I(P_n)-I),1\rangle_{L^2}|\leq\mathbb{E}\big(|I(P_n)-I|^2\big)^{\frac{1}{2}}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

D'aquesta manera, hem vist que l'esperança i el límit commuten i hem provat la segona afirmació del lema. $\square$

Lema 7. *Si $h\colon[a,b]\to\mathbb{C}$ és contínua i $\{X(t)\colon t\in[a,b]\}\subset L^2$ és procés estocàstic amb funció de covariància $C\colon[a,b]^2\to\mathbb{C}$ contínua i esperança del procés $\mathbb{E}\big(X(t)\big)\equiv0$, llavors, $\forall s\in[a,b]$:*

$$\mathbb{E}\Big(X(s)\overline{\int_a^b h(t)X(t)dt}\Big)=\int_a^b\overline{h(t)}C(s,t)dt$$

Demostració. Pel fet que h és contínua, $h(t)X(t)$ és Riemann integrable per la Proposició 3 i si denotem $I=\int_a^b h(t)X(t)dt$, prenent $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successió de particions de $[a,b]$ que compleixin $\Delta_n\coloneqq\max_{1\leq i\leq n}|t_i^n-t_{i-1}^n|\xrightarrow{n\to\infty}0$ tal com hem fet en la Proposició 3, tenim en norma de L^2:

$$I(P_n)=\sum_{i=1}^{n}h(t_i^n)X(t_i^n)(t_i^n-t_{i-1}^n)\xrightarrow{n\to\infty}I$$

Comencem comprovant que $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\big(X(s)\overline{I(P_n)}\big)\xrightarrow{n\to\infty}\mathbb{E}\big(X(s)\overline{I}\big)$, és a dir, que el límit commuta amb l'esperança i que el límit no es veu afectat per el producte amb $X(s)$:

$$\left|\mathbb{E}\big(X(s)\overline{I(P_n)}\big)-\mathbb{E}\big(X(s)\overline{I}\big)\right|=\left|\mathbb{E}\big(X(s)\big[\overline{I(P_n)}-\overline{I}\big]\big)\right|\overset{\substack{\text{Desigualtat de Cauchy-Schwarz}\\ \downarrow}}{\leq}\mathbb{E}\big(|X(s)|^2\big)^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\big(|I(P_n)-I|^2\big)^{\frac{1}{2}}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

Ara bé, els termes de la successió $\{\mathbb{E}\big(X(s)\overline{I(P_n)}\big)\}_{n=1}^{\infty}$ es poden desenvolupar:

$$\mathbb{E}\big(X(s)\overline{I(P_n)}\big)=\mathbb{E}\big(\sum_{i=1}^{n}\overline{h(t_i^n)}X(s)\overline{X(t_i^n)}(t_i^n-t_{i-1}^n)\big)=\sum_{i=1}^{n}\overline{h(t_i^n)}C(s,t_i^n)(t_i^n-t_{i-1}^n)$$

i com que $\overline{h(t)}C(s,t)$ és contínua respecte t, és Riemann integrable en $[a,b]$ i tenim:

$$\mathbb{E}\Big(X(s)\overline{\int_a^b h(t)X(t)dt}\Big) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\overline{h(t_i^n)}C(s,t_i^n)(t_i^n - t_{i-1}^n) = \int_a^b \overline{h(t)}C(s,t)dt$$

i arribem a la igualtat que volíem. □

7 Teorema de Karhunen-Loève

En aquesta secció, enunciarem i demostrarem el Teorema de Karhunen-Loève. També, enunciarem el principal resultat que ens informa, acord amb un criteri d'error a minimitzar, de com truncar l'expansió de Karhunen-Loève en finits termes. La prova del Teorema i les següents observacions les hem completat de [4] i el resultat principal del truncament de l'expansió l'hem extret de [4] també.

Teorema 8. ***Expansió de Karhunen-Loève***

Considerem $\{X(t)\colon t\in T\}$ procés estocàstic contingut a L^2 i espai de paràmetres $T=[a,b]\subset\mathbb{R}$ amb conjunt d'estats $\{\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C})\}$, amb funció de covariància $C\colon[a,b]\times[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ contínua i esperança del procés $\mathbb{E}(X(t))\equiv 0$. A més, denotem per T_C l'operador integral de Hilbert-Schmidt de nucli $C(s,t)$ sobre $L^2[a,b]$.
Finalment, denotem per $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de l'espai vectorial generat pels vectors propis de T_C de valor propi no nul tal que λ_n és el valor propi de T_C associat a φ_n per cada $n\in\mathbb{N}$.
Llavors, en norma de L^2, tenim la igualtat:

$$X(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}Z_n\varphi_n(t)\ ,\quad on\ \ Z_n=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_a^b X(\tau)\overline{\varphi_n(\tau)}d\tau \tag{8}$$

on la sèrie convergeix uniformement en t a $[a,b]$.
A més, $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ és un sistema ortogonal de variables aleatòries de L^2 amb $\mathbb{E}(Z_n)=0$ i $Var(Z_n)=\mathbb{E}(|Z_n|^2)=1$.

Demostració. Pel Corol·lari 1, les funcions φ_n són contínues a $[a,b]$ i per la Proposició 3, les variables aleatòries $X(t)\overline{\varphi_n(t)}$ són Riemann integrables en $[a,b]$ amb integral a L^2. Per tant, les variables aleatòries $Z_n=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_a^b X(\tau)\overline{\varphi_n(\tau)}d\tau$ estan ben definides i estan contingudes a L^2.
A més, pel Lema 6, tenim:

- $$\mathbb{E}(Z_n)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\mathbb{E}\Big(\int_a^b X(\tau)\overline{\varphi_n(\tau)}d\tau\Big)=0 \tag{9}$$
- $$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_n\overline{Z_m}) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n\lambda_m}}\mathbb{E}\Big(\int_a^b X(s)\overline{\varphi_n(s)}ds\overline{\int_a^b X(t)\overline{\varphi_m(t)}dt}\Big)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n\lambda_m}}\int_a^b\int_a^b\overline{\varphi_n(s)}\varphi_m(t)C(s,t)dsdt \overset{\text{Teorema de Fubini-Tonelli}}{=} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n\lambda_m}}\int_a^b\overline{\varphi_n(s)}\Big(\int_a^b\varphi_m(t)C(s,t)dt\Big)ds \overset{T_C(\varphi_m)(s)=\lambda_m\varphi_m(s)}{=} \sqrt{\frac{\lambda_m}{\lambda_n}}\int_a^b\overline{\varphi_n(s)}\varphi_m(t)ds=\sqrt{\frac{\lambda_m}{\lambda_n}}\langle\varphi_m,\varphi_n\rangle_{L^2[a,b]} \overset{\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}\text{ base ortonormal}}{=} \delta_{n,m}\end{aligned} \tag{10}$$

D'aquesta manera, acabem de provar la segona part del teorema i falta comprovar la convergència de la sèrie a $X(t)$ en norma de L^2 uniformement en t.
Recordem que pel fet que C és funció de covariància, és hermítica i definida no negativa i per la Proposició 2 els valors propis de T_C són reals no negatius. Així, definim $S_n(t)=\sum_{k=1}^{n}Z_k\sqrt{\lambda_k}\varphi_k(t)$ i en norma de L^2 tenim:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X(t)-S_n(t)|^2) &= \mathbb{E}(|X(t)|^2)+\mathbb{E}(|S_n(t)|^2)-2Re\big(\mathbb{E}(X(t)\overline{S_n(t)})\big) = \\
&= \mathbb{E}(|X(t)|^2)+\mathbb{E}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}\varphi_i(t)\overline{\varphi_j(t)}Z_i\overline{Z_j}\Big)-2Re\Big(\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_i}\cdot\overline{\varphi_i(t)}X(t)\overline{Z_i}\Big)\Big) = \\
&= \mathbb{E}(|X(t)|^2)+\sum_{i,j=1}^{n}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}\varphi_i(t)\overline{\varphi_j(t)}\mathbb{E}(Z_i\overline{Z_j})-2Re\Big(\sum_{i=1}^{n}\overline{\varphi_i(t)}\mathbb{E}\Big[X(t)\overline{\int_a^b X(\tau)\overline{\varphi_i(\tau)}d\tau}\Big]\Big) = \\
&\overset{\text{Equació 10, Lema 7}}{=} \mathbb{E}(|X(t)|^2)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|\varphi_i(t)|^2-2Re\Big(\sum_{i=1}^{n}\overline{\varphi_i(t)}\int_a^b C(t,\tau)\varphi_i(\tau)d\tau\Big) \overset{T_C(\varphi_i)(t)=\lambda_i\varphi_i(t)}{=} \\
&= C(t,t)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|\varphi_i(t)|^2-2Re\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|\varphi_i(t)|^2\Big) = C(t,t)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|\varphi_i(t)|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

on la convergència uniforme en t en $[a,b]$ és pel punt (2) del Teorema de Mercer. □

Observació 4. *Un procés estocàstic $\{X(t)\colon t\in T\}$ sota les hipòtesis del Teorema de Karhunen-Loève llevat que $\mathbb{E}(X(t))$ és qualsevol funció acotada en norma de $\mathbb{C}$ dona lloc a un procés estocàstic centrat $\{\xi(t) := X(t)-\mathbb{E}(X(t))\colon t\in T\}$ i pel fet que la funció de covariància d'un procés és invariant respecte l'esperança del procés (Observació 2), apliquem el Teorema de Karhunen-Loève sobre el procés $\{\xi(t)\colon t\in T\}$ per obtenir en norma de L^2:*

$$X(t)=\mathbb{E}(X(t))+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}Z_n\varphi_n(t)\ ,\quad on\ \ Z_n=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_a^b\big(X(t)-\mathbb{E}(X(t))\big)\overline{\varphi_n(\tau)}d\tau$$

on la sèrie convergeix uniformement en t a $[a,b]$ i $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ és un sistema ortogonal de variables aleatòries de L^2 amb $\mathbb{E}(Z_n)=0$ i $Var(Z_n)=\mathbb{E}(|Z_n|^2)=1$.
Notem a més que com que $L^2\subset L^1$, implícitament s'imposa que $\mathbb{E}(|X(t)|)<\infty\,\forall t\in[a,b]$.

Observació 5. *Si determinem les funcions $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ que són contínues pel Corol·lari 1, amb el Teorema de Karhunen-Loève, podem trobar realitzacions (en norma de L^2) del procés estocàstic a **tot** $t\in[a,b]$ a partir de realitzacions del conjunt numerable $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$.*
Per trobar les funcions $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, normalment és suficient trobar l'expressió general de les solucions contínues de l'equació $\lambda\varphi(s)=\int_a^b C(s,t)\varphi(t)dt$ i la dificultat depèn totalment de l'expressió de la funció de covariància del procés.
Per altra banda, per trobar realitzacions de $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, sabent que són variables aleatòries centrades i no correlacionades, si a més fossin independents les podríem generar aleatòriament sabent les distribucions. En el pròxim capítol, veurem una condició suficient perquè això succeeixi.

A la pràctica, en el millor dels casos trobarem les funcions $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ però no serem capaços de sumar els infinits termes de la sèrie per cada $t\in[a,b]$ i convindrà truncar la sèrie fins a un cert nombre de sumands on creiem que l'error, segons un criteri, és prou petit. Això ens genera dos qüestions:

- Quin criteri d'error escollim?
- En una selecció de n termes, quins sumands escollim?

La segona qüestió la resoldrem a partir de la primera i un resultat que només enunciarem.

Definició 9. *Considerem un procés estocàstic $\{X(t)\colon t\in T\}$ que compleix les hipòtesis del Teorema de Karhunen-Loève. Sobre el procés, apliquem el Teorema de Karhunen-Loève i sabem que les sumes parcials $S_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_i}Z_i\varphi_i(t)$ convergeixen a $X(t)$ en norma de L^2.*

Denotem $\varepsilon_n(t) = |X(t) - S_n(t)|$ i definim l'error mitjà quadràtic com $\mathbb{E}(\varepsilon_n(t)^2)$ i l'error mitjà quadràtic total com $\varepsilon_n^2(\{\varphi_i\}_{i=1}^n) = \int_a^b \mathbb{E}(\varepsilon_n^2(t))dt$. Tant l'error mitjà quadràtic com l'error mitjà quadràtic total depenen de quins n primers termes de la sèrie escollim.

L'error mitjà quadràtic total serà el nostre criteri d'error i representa la suma infinitesimal de la variació d'error al llarg de l'interval $[a, b]$. Enunciem un teorema que ens caracteritza la truncació de la sèrie en funció de l'error mitjà quadràtic total.

Teorema 9. *Considerem un procés estocàstic $\{X(t) \colon t \in T\}$ que compleix les hipòtesis del Teorema de Karhunen-Loève.*
L'error mitjà quadràtic total $\varepsilon_n^2(\{\varphi_i\}_{i=1}^n)$ es minimitza si i només si els valors propis associats als n termes que escollim són els n valors propis més grans de l'operador T_C.

8 Expansió de Karhunen-Loève en processos Gaussians

Tal com hem comentat en la Observació 5, és de gran interès saber quan els coeficients de l'expansió de Karhunen-Loève són independents. Ara, veurem que en processos gaussians, sempre es compleix.
També veurem que sobre processos Gaussians la convergència de l'expansió al procés és no només en norma de L^2 sinó quasi segurament, per cada $t \in [a, b]$. A més, a partir d'ara només tractarem amb processos estocàstics amb imatge a $\mathbb{R}$, que tal com hem comentat a la secció de preliminars, tot el procediment fins ara segueix sent vàlid, restringint quan cal les variables $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$. D'aquesta manera, simplificarem el procediment a continuació notablement. La primera part del capítol l'hem completada de les referències [4] i [3], mentre que per l'estudi numèric hem seguit [10], amb la implementació en Python pròpia.

8.1 Independència dels coeficients de l'expansió

Considerem un vector aleatori $X = (X_1, \dots, X_n)$ amb components contingudes a L^2 i amb valors a $\mathbb{R}^n$. Denotem $\mathbb{E}(X) = \big(\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_n)\big)$ i $\Sigma = (\sigma_{i,j})_{i,j}$ on $\sigma_{i,j} = \mathbb{E}\big((X_i - \mathbb{E}(X_i))(X_j - \mathbb{E}(X_j))\big)$. Com que $X_i \in L^2$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, el vector $\mathbb{E}(X)$ i la matriu Σ tenen components finites.
El vector X és Gaussià si té funció característica:

$$\phi(\lambda) = \exp\big(i\lambda^T \mathbb{E}(X) - \frac{1}{2}\lambda^T \Sigma \lambda\big) \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^n$$

Definició 10. *Un procés estocàstic $\{X(t) \colon t \in T\}$ és Gaussià si $\forall n \in \mathbb{N}$ i $\forall \{t_1, \dots, t_n\} \subset T$, $X = \big(X(t_1), \dots, X(t_n)\big)$ és vector Gaussià.*

Teorema 10. *Si $\{X(t) \colon t \in T\}$ és procés Gaussià sota les hipòtesis del Teorema de Karhunen-Loève, llavors, els coeficients de l'expansió són variables aleatòries independents amb llei normal.*

Demostració. Els coeficients de l'expansió de Karhunen-Loève, $\{Z_k\}_{k=1}^\infty$, compleixen $\mathbb{E}(Z_k) = 0$, $\mathbb{E}(Z_k Z_j) = \delta_{k,j}$ i es poden expressar com:

$$Z_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_a^b X(t)\varphi_k(t)dt \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Per tant, per la construcció de l'integral estocàstica de Riemann, podem prendre $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ successió de particions de $[a, b]$ com hem fet en la demostració de la Proposició 3 i les variables aleatòries $\{I_k(P_n)\}_{k,n=1}^\infty$ tal que:

$$I_k(P_n) = \sum_{i=1}^n X(t_i^n)\varphi_k(t_i^n)(t_i^n - t_{i-1}^n)$$

i $\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\lim_{n\to\infty} I_k(P_n) = Z_k$ en norma de L^2.
Com que $\{X(t)\colon t\in T\}$ és procés Gaussià, $\big(X(t_1^n),\dots,X(t_n^n)\big)$ és vector Gaussià i com que qualsevol transformació lineal sobre un vector Gaussià és vector Gaussià, tenim que per qualssevol m índexs $r_1,\dots,r_m\in\mathbb{N}$ diferents entre ells:

$$\begin{pmatrix} I_{r_1}^*(P_n)\\ \vdots \\ I_{r_m}^*(P_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{r_1}}} I_{r_1}(P_n)\\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_{r_m}}} I_{r_m}(P_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{r_1}}}\varphi_{r_1}(t_1^n)(t_1^n-t_0^n) & \dots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_{r_1}}}\varphi_{r_1}(t_n^n)(t_n^n-t_{n-1}^n)\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_{r_m}}}\varphi_{r_m}(t_1^n)(t_1^n-t_0^n) & \dots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_{r_m}}}\varphi_{r_m}(t_n^n)(t_n^n-t_{n-1}^n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(t_1^n)\\ \vdots \\ X(t_n^n)\end{pmatrix}$$

és vector Gaussià. Determinem l'esperança i la matriu de covariàncies del vector:

- $\mathbb{E}(I_{r_i}^*(P_n)) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{r_i}}}\mathbb{E}\big(\sum_{k=1}^n X(t_k^n)\varphi_{r_i}(t_k^n)(t_k^n-t_{k-1}^n)\big) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{r_i}}}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X(t_k^n))\varphi_{r_i}(t_k^n)(t_k^n-t_{k-1}^n) = 0$
- $\sigma_{i,j}(P_n) \coloneqq \mathbb{E}\big(\big[I_{r_i}^*(P_n)-\mathbb{E}(I_{r_i}^*(P_n))\big]\big[I_{r_j}^*(P_n)-\mathbb{E}(I_{r_j}^*(P_n))\big]\big) =$

$$= \mathbb{E}\big(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{r_i}\lambda_{r_j}}}\sum_{k,l=1}^n X(t_k^n)X(t_l^n)\varphi_{r_i}(t_k^n)\varphi_{r_j}(t_l^n)(t_k^n-t_{k-1}^n)(t_l^n-t_{l-1}^n)\big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{r_i}\lambda_{r_j}}}\sum_{k,l=1}^n C(t_k^n,t_l^n)\varphi_{r_i}(t_k^n)\varphi_{r_j}(t_l^n)(t_k^n-t_{k-1}^n)(t_l^n-t_{l-1}^n) \implies \Sigma_n = \big(\sigma_{i,j}(P_n)\big)_{i,j=1}^m$$

El vector doncs té la funció característica:

$$\phi_n(\lambda) = \exp\big(-\frac{1}{2}\lambda^T\Sigma_n\lambda\big)$$

i quan prenem $n\to\infty$, per continuïtat de la funció exponencial, tenim:

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(\lambda) = \exp\big(-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^m \sigma_{i,j}(P_n)\lambda_i\lambda_j\big)$$

Ara bé, de la primera part de la demostració del Lema 6, pel fet que les funcions φ_k $\forall k\in\mathbb{N}$ són contínues pel Corol·lari 1, tenim:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{i,j}(P_n) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{r_i}\lambda_{r_j}}}\int_a^b\int_a^b C(s,t)\varphi_{r_i}(s)\varphi_{r_j}(t)dsdt \overset{\text{Lema } 6}{=}$$

$$= \mathbb{E}\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{r_i}}}\int_a^b X(t)\varphi_{r_i}(t)dt\frac{1}{\sqrt{\lambda_{r_j}}}\int_a^b X(t)\varphi_{r_j}(t)dt\Big) = \mathbb{E}(Z_{r_i}Z_{r_j}) = \delta_{i,j}$$

Aleshores, com que $\forall i,j$, $\sigma_{i,j}(P_n)$ té límit finit, $\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^m \sigma_{i,j}(P_n)\lambda_i\lambda_j = \sum_{i,j=1}^m \lim_{n\to\infty}\sigma_{i,j}(P_n)\lambda_i\lambda_j = \sum_{i=1}^m \lambda_i^2$ i:

$$\phi(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\phi_n(\lambda) = \exp\big(-\frac{1}{2}\lambda^T Id_m\lambda\big)$$

Llavors, pel Teorema de Paul-Lévy i perquè la funció característica determina la llei del vector, el vector $\big(Z_{r_1},\dots,Z_{r_m}\big) = \lim_{n\to\infty}\big(I_{r_1}^*(P_n),\dots,I_{r_m}^*(P_n)\big)$ (en norma de L^2) té llei Gaussiana amb esperança $\vec{0}$ i matriu de covariàncies Id_m. A més, com que es tracta d'un vector Gaussià ortogonal, en particular, té components independents.
Finalment, com que això es compleix per tota selecció $\{r_i\}_{i=1}^m\subset\mathbb{N}$ i $\forall m\in\mathbb{N}$, obtenim que $\{Z_k\}_{k=1}^\infty$ són variables aleatòries Gaussianes independents. □

Amb aquest Teorema, podrem trobar realitzacions d'un procés estocàstic, mitjançant l'expansió de Karhunen-Loève i la generació aleatòria de gaussianes $\mathcal{N}(0,1)$, però de moment, en norma de L^2.

8.2 Convergència quasi segura de l'expansió

Ara, veurem que la convergència de l'expansió no només és en norma de L^2 sinó quasi segurament,
Recordem els conceptes de convergència quasi segura i en probabilitat.

Definició 11. *Siguin $X, \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ variables aleatòries definides en un mateix espai de probabilitat. Diem que $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergeix quasi segurament a X si $P\big\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\big\} = 1$.*

Definició 12. *Siguin $X, \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ variables aleatòries definides en un mateix espai de probabilitat. Diem que $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergeix en probabilitat a X si $\forall\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} P\big\{|X_n - X| \geq \varepsilon\big\} = 0$.*

Proposició 4. *Siguin $X, \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ variables aleatòries definides en un mateix espai de probabilitat i contingudes en L^2. Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergeix a X en mitjana quadràtica, llavors, també hi convergeix en probabilitat.*

Demostració. Considerem qualsevol $\varepsilon > 0$ i tenim:

$$P\big\{|X_n - X| \geq \varepsilon\big\} = \mathbb{E}\big(\mathcal{X}_{\{|X_n - X|\geq\varepsilon\}}\big) = \mathbb{E}\big(\mathcal{X}_{\{\frac{|X_n-X|^2}{\varepsilon^2}\geq 1\}}\big) \leq \mathbb{E}\big(\frac{|X_n - X|^2}{\varepsilon^2}\mathcal{X}_{\{\frac{|X_n-X|^2}{\varepsilon^2}\geq 1\}}\big) \leq \frac{\mathbb{E}\big(|X_n - X|^2\big)}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

□

Teorema 11. ***Desigualtat d'Etemadi***
Sigui $n \in \mathbb{N}$ i $\{Z_k\}_{k=1}^{n}$ variables independents definides en el mateix espai de probabilitat.
Llavors, si definim $S_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i$ amb $k \leq n$, $\forall\alpha \geq 0$, tenim:

$$P\big\{\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq 3\alpha\big\} \leq 3 \max_{1\leq k\leq n} P\big\{|S_k| \geq \alpha\big\}$$

Demostració. Prenem els conjunts $B_k = \{|S_k| \geq 3\alpha\} \cap \big(\bigcap_{1\leq j<k} \{|S_j| < 3\alpha\}\big)$ i observem que la unió d'aquests conjunts és igual al conjunt $\big\{\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq 3\alpha\big\}$. A més,

$$\big\{\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq 3\alpha\big\} = \Big(\big(\biguplus_{k=1}^{n} B_k\big)\cap\{|S_n| < \alpha\}\Big)\uplus\Big(\big(\biguplus_{k=1}^{n} B_k\big)\cap\{|S_n| \geq \alpha\}\Big) \subset \Big(\biguplus_{k=1}^{n-1} \big(B_k\cap\{|S_n| < \alpha\}\big)\Big)\uplus\{|S_n| \geq \alpha\}$$

Per tant, aplicant les propietats de la probabilitat, obtenim:

$$\begin{aligned} P\big\{\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq 3\alpha\big\} &\leq P\{|S_n| \geq \alpha\} + \sum_{k=1}^{n-1} P(B_k \cap \{|S_n| < \alpha\}) \leq P\{|S_n| \geq \alpha\} + \sum_{k=1}^{n-1} P(B_k) \cdot P\{|S_n - S_k| > 2\alpha\} \leq \\ &\leq P\{|S_n| \geq \alpha\} + \max_{1\leq k\leq n} P\{|S_n - S_k| > 2\alpha\} \leq P\{|S_n| \geq \alpha\} + \max_{1\leq k\leq n} P\{|S_n| + |S_k| > 2\alpha\} \leq \\ &\leq P\{|S_n| \geq \alpha\} + \max_{1\leq k\leq n} P\{\max(|S_n|, |S_k|) \geq \alpha\} \leq \\ &\leq P\{|S_n| \geq \alpha\} + \max_{1\leq k\leq n} \big(P\{|S_n| \geq \alpha\} + P\{|S_k| \geq \alpha\}\big) \leq 3 \max_{1\leq k\leq n} P\{|S_k| \geq \alpha\} \end{aligned}$$

□

Teorema 12. *Sigui $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty}$ una successió de variables aleatòries independents definides en el mateix espai de probabilitat. Si $S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$ convergeix en probabilitat a una variable aleatòria S, també ho fa quasi segurament.*

Demostració. Aplicant el mateix procediment que en la última part de la demostració de la Desigualtat de Etemadi, tenim:

$$P\{|S_{n+j} - S_n| \geq \varepsilon\} \leq P\{|S_{n+j} - S| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} + P\{|S_n - S| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \tag{11}$$

i com que $\{S_n\}$ convergeix en probabilitat, de l'equació (11) tenim:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{j\geq 0} P\{|S_{n+j} - S_n| \geq \varepsilon\} = 0 \tag{12}$$

Per altra banda, per la Desigualtat d'Etemadi,

$$P\{\max_{1\leq j\leq k} |S_{n+j} - S_n| \geq \varepsilon\} \leq 3 \max_{1\leq j\leq k} P\{|S_{n+j} - S_n| \geq \frac{\varepsilon}{3}\}$$

i en prendre límit $k \to \infty$, obtenim:

$$P\{\sup_{j\geq 1} |S_{n+j} - S_n| > \varepsilon\} \leq 3 \sup_{j\geq 1} P\{|S_{n+j} - S_n| \geq \frac{\varepsilon}{3}\}$$

Si a més prenem límit en n, per l'equació (12) obtenim:

$$\lim_{n\to\infty} P\Big\{\sup_{k\geq 1} |S_{n+k} - S_n| > \varepsilon\Big\} = 0\ , \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{13}$$

Ara, considerem els conjunts $E_{n,\varepsilon} = \{\sup_{j,k\geq n} |S_j - S_k| > 2\varepsilon\}$ d'on observem que $E_{n+1,\varepsilon} \subset E_{n,\varepsilon}$. Si denotem $E_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n,\varepsilon}$, per la continuïtat seqüencial de successos decreixents, tenim:

$$P(E_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(E_{n,\varepsilon}) = \lim_{n\to\infty} P\Big\{\sup_{k\geq 1} |S_{n+k} - S_n| > \varepsilon\Big\} \overset{\text{Equació (13)}}{=} 0$$

Finalment, considerem el conjunt $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}^+} E_q$ que agrupa les realitzacions de la successió $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ que no compleixen la condició de Cauchy per als racionals, i pertany a la σ-àlgebra de l'espai de probabilitat. Per la subadditivitat de la probabilitat, $P(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}^+} E_q) \leq \sum_{q\in\mathbb{Q}^+} P(E_q) = 0$. Ara bé, com que $E_r \subset E_s$ si $s < r$ per tot $r, s \in \mathbb{R}^+$ i com que $\mathbb{Q}^+$ és dens en $\mathbb{R}^+$, el conjunt $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}^+} E_q$ agrupa totes realitzacions on no es compleix la condició de Cauchy.
Per tant, la successió $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ és de Cauchy quasi segurament, i sabent que convergeix en probabilitat a S, convergeix quasi segurament a S. □

Corol·lari 2. *Per cada $t \in [a,b]$, l'expansió de Karhunen-Loève convergeix quasi segurament al procés estocàstic a temps t.*

Demostració. Considerem un procés estocàstic $\{X(t) \colon t \in [a,b]\}$ sota les condicions del Teorema de Karhunen-Loève. Els coeficients $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty}$ de l'expansió estan definits en el mateix espai de probabilitat i pel Teorema 10 són independents. Per tant, també ho són les variables $\{\sqrt{\lambda_k} Z_k \varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$. Com que les sumes parcials $\{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_k} Z_k \varphi_k(t)\}_{n=1}^{\infty}$ estan contingudes en L^2 i convergeixen en mitjana quadràtica a $X(t) \in L^2$, per la Proposició 4, també hi convergeixen en probabilitat.
Sabent que $\{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_k} Z_k \varphi_k(t)\}_{n=1}^{\infty}$ convergeix en probabilitat a $X(t)$ per cada $t \in [a,b]$, aplicant el Teorema 12 obtenim que la convergència a $X(t)$ és quasi segura. □

8.3 Estudi analític de les trajectòries del moviment Brownià

Quan un procés estocàstic sota les condicions del Teorema de Karhunen-Loève és Gaussià, pren sentit intentar calcular l'expansió associada, ja que coneixem la distribució dels coeficients de l'expansió i sabem que són independents. No obstant, és necessari trobar les funcions $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ i depèn de l'expressió de la funció de covariància, pot ser impossible abordar el problema analíticament. Per tant, hem escollit com exemple, el moviment Brownià que té una funció de covariància senzilla.
Comencem definint el moviment Brownià.

Definició 13. *Un procés estocàstic $\{W(t)\colon t \geq 0\}$ és moviment Brownià si:*

- $W(0) = 0$ *quasi segurament.*
- $W(s) - W(t)$ *i* $W(s') - W(t')$ *són independents si* $s > t \geq s' > t'$.
- $W(s) - W(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(s-t))$ *si* $s > t$ *per un cert* $\sigma^2 > 0$.

Per aplicar el Teorema de Karhunen-Loève, necessitem que l'espai de paràmetres sigui un interval acotat i per tant, prenem el moviment Brownià estàndard ($\sigma^2 = 1$) en l'interval $[0, 1]$. Es pot comprovar que el moviment Brownià estàndard és un procés Gaussià amb funció de covariància $C(s,t) = min(s,t)$.
Així, l'objectiu d'aquesta secció és determinar analíticament l'expansió de Karhunen-Loève per el moviment Brownià estàndard en l'interval $[0, 1]$.

Per a determinar l'expansió, hem de resoldre l'equació integral:

$$\lambda\varphi(s) = \int_0^1 \min(s,t)\varphi(t)dt = \int_0^s t\varphi(t)dt + s\int_s^1 \varphi(t)dt =: g(s) \tag{14}$$

per $\lambda > 0$ i qualsevol funció $\varphi(s)$ contínua a $[a, b]$ no nul·la.
Pel criteri de derivació sota el signe integral, la funció $g(s)$ és derivable pel fet que φ és contínua i té derivada $g'(s) = \displaystyle\int_s^1 \varphi(t)dt$. Aplicant altre cop el Teorema de derivació sota el signe integral sobre $g'(s)$, veiem que $g'(s)$ és derivable amb derivada $-s\varphi(s)$ que és contínua.
Així, com que $\lambda\varphi(s) = g(s)$, $\varphi \in \mathcal{C}^2[0, 1]$. Aleshores, la primera i segona derivada de l'equació $\lambda\varphi(s) = g(s)$, són:

- $$\lambda\varphi'(s) = \int_s^1 \varphi(t)dt \tag{15}$$
- $$\lambda\varphi''(s) = -\varphi(s) \tag{16}$$

La equació (16) és una EDO amb polinomi característic $x^2\lambda + 1$ i per tant, la solució general és de la forma:

$$\varphi(s) = C_1 \sin(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}) + C_2 \cos(\frac{s}{\sqrt{\lambda}})$$

Avaluem $\varphi(0)$ a l'equació (14) i tenim que $\lambda\varphi(0) = \lambda C_2 = \int_0^1 0\varphi(t)dt = 0$ i per tant, $C_2 = 0$. També avaluem $\varphi'(1)$ a l'equació (15) i tenim que $\varphi'(1) = \frac{C_1}{\sqrt{\lambda}}\cos(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) = \int_1^1 \varphi(t)dt = 0$. Observem que si $\cos(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) \neq 0$, llavors, $C_1 = 0$ i per tant, $\varphi(s)$ és la funció zero, contradictori amb el fet que és vector propi. Per tant, s'ha de complir:

$$0 \overset{\text{Proposició 2}}{\overset{\downarrow}{<}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \pi k - \frac{\pi}{2} = \pi(k - \frac{1}{2}) \Longrightarrow \lambda = +\frac{1}{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2}$$

amb $k \in \mathbb{Z}$. De fet, perquè es compleixi la igualtat, $k \in \mathbb{N}$. Així, totes les solucions de l'equació (14) s'expressen com:

$$\varphi_k(s) = C \sin(s\pi(k - \frac{1}{2})) \ \ , \ \ C \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

Ara, comprovem que si $k \neq l$ amb $k, l \in \mathbb{N}$, llavors, φ_k i φ_l són ortogonals:

$$\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = C_k C_l \int_0^1 \sin(t\pi(k - \frac{1}{2})) \sin(t\pi(l - \frac{1}{2})) dt = \frac{\frac{\sin(\pi(k-l))}{k-l} - \frac{\sin(\pi(k+l-1))}{k+l-1}}{2\pi} = 0$$

Trobem les constants $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$ per tal que les funcions $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ tinguin norma 1:

$$||\varphi_k||^2 = C_k^2 \int_0^1 \sin(t\pi(k - \frac{1}{2}))^2 dt = \frac{C_k^2}{2}\Big(1 + \frac{\sin(2\pi k)}{\pi(2k-1)}\Big) = \frac{C_k^2}{2} \Longrightarrow C_k = \pm\sqrt{2}$$

i observem que $\{\varphi_k = \sqrt{2}\sin(s\pi(k - \frac{1}{2}))\}_{k=1}^{\infty}$ és base ortonormal de l'espai generat pels vectors propis de T_C de valor propi $\lambda_k = \frac{1}{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2}$ no nul.
Finalment, l'expansió de Karhunen-Loève per el moviment Brownià estàndard en $[0, 1]$ és:

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi(n - \frac{1}{2})} Z_n \sqrt{2} \sin\big(t\pi(n - \frac{1}{2})\big) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} Z_n \sin\big(t\pi(n - \frac{1}{2})\big) \ \ , \ \ \{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

on la convergència és quasi segura i uniformement en $t \in [a, b]$.

8.4 Estudi numèric de les trajectòries d'un procés Gaussià

Pel Teorema 7, C és funció de covariància d'un procés estocàstic si i només si C és hermítica (simètrica a $\mathbb{R}$) i definida no-negativa. Fins i tot si imposem que C és contínua, no hi ha cap metodologia per resoldre l'equació integral:

$$\lambda\varphi(s) = \int_a^b C(s,t)\varphi(t)dt \ \forall s \in [a,b] \tag{17}$$

de manera analítica per qualsevol C.
En aquesta secció, abordarem el problema amb mètodes numèrics que tot i que ens permetran obtenir una aproximació de la solució de l'equació integral per qualsevol C contínua, només podrem obtenir un nombre finit de famílies de solucions.

Els mètodes numèrics que tractarem els podem classificar en mètodes integrals i mètodes d'expansió.

8.4.1 Mètodes integrals

Sabent que les funcions $C(s, t)$, $\varphi(t)$ són contínues per hipòtesis i pel Corol·lari 1, són Riemann integrables i podem fer l'aproximació:

$$\lambda\varphi(s) = \int_a^b C(s,t)\varphi(t)dt \approx \sum_{i=0}^{n} C(s,t_i)\varphi(t_i)\omega_i \tag{18}$$

on $\{t_i\}_{i=0}^n$ és partició de $[a, b]$ i $\{\omega_i\}_{i=0}^n$ són pesos restringits a $\omega_i \geq 0$ i $\sum_{i=0}^n \omega_i = b - a$. Els pesos depenen de la partició $\{t_i\}_{i=0}^n$ escollida i els més coneguts i simples són l'uniforme ($t_i = \frac{b-a}{n}i + a$, $\omega_i = \frac{b-a}{n+1}$ per $0 \leq i \leq n$) i de trapezis ($t_i = \frac{b-a}{n}i + a$, $\omega_0 = \omega_n = \frac{b-a}{2(n-1)}$ i $\omega_i = \frac{b-a}{n-1}$ per $1 \leq i < n$).
Si $\varphi(t)$ és solució de l'equació integral (17), definim el vector $\vec{\phi} = \big(\varphi(t_0), \ldots, \varphi(t_n)\big)^T$, la solució discretitzada a la partició $\{t_i\}_{i=0}^n$. Així, l'equació (18) la podem pensar matricialment:

$$\lambda\vec{\phi} \approx K \cdot W \cdot \vec{\phi} \quad \text{on} \quad K = \big(C(t_i,t_j)\big)_{i,j=0}^n \ \text{ i } \ W = (\omega_i\delta_{i,j})_{i,j=0}^n$$

Observem que la solució discretitzada és vector propi per la dreta de la matriu $K \cdot W$ que a priori no és matriu simètrica. Definim $W^{\frac{1}{2}} := (\sqrt{\omega_i}\delta_{i,j})_{i,j=0}^n$ i $\vec{u} := W^{\frac{1}{2}}\vec{\phi}$. Aleshores, imposant que W sigui invertible, multiplicant a banda i banda de l'anterior equació per $W^{\frac{1}{2}}$ obtenim:

$$W^{\frac{1}{2}}KW\vec{\phi} = W^{\frac{1}{2}}KW^{\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}}\vec{\phi} = W^{\frac{1}{2}}KW^{\frac{1}{2}}\vec{u} = \lambda W^{\frac{1}{2}}\vec{\phi} = \lambda\vec{u} \tag{19}$$

Pel fet que $C(s,t)$ és simètrica, K és matriu simètrica i per tant, també ho és $W^{\frac{1}{2}}KW^{\frac{1}{2}}$. Així, $\vec{u}$ és vector propi tant per la dreta com per l'esquerra de $W^{\frac{1}{2}}KW^{\frac{1}{2}}$. Podem trobar una base de valors i vectors propis de $W^{\frac{1}{2}}KW^{\frac{1}{2}}$ que expressem com $\{\lambda_i\}_{i=0}^k$ i $\{\vec{u_i}\}_{i=0}^k$ amb $k \leq n$. Cada vector $\vec{u_i}$ té associat una aproximació d'una solució de la equació (18) discretitzada en $\{t_j\}_{j=0}^n$ mitjançant $\{\vec{\phi_i} = W^{-\frac{1}{2}}\vec{u_i}\}_{i=0}^k$ on $W^{-\frac{1}{2}} := (\frac{1}{\sqrt{\omega_i}}\delta_{i,j})_{i,j=0}^n$. A més, el valor propi associat a cada $\vec{\phi_i}$ és λ_i, o almenys λ_i és una aproximació al valor propi que correspon a $\varphi_i(t)$.
Aquests vectors $\vec{\phi_i}$ aproximen les avaluacions en $\{t_j\}_{j=0}^n$ de funcions pròpies de l'equació integral (17) i com que W té per hipòtesis rang màxim, $\{\vec{\phi_i}\}_{i=0}^k$ són independents com a vectors. Ara bé, no sabem si les funcions pròpies que aproximen són ortogonals dos a dos i per tant, pel Lema 1 (b), és suficient comprovar que els valors propis associats són diferents.
Finalment, és necessari normalitzar aquests vectors però pensats com a funcions:

$$||\varphi||^2 = \int_a^b \varphi^2(t)dt \approx \sum_{j=0}^n \varphi^2(t_j)\omega_j \Longrightarrow \vec{\phi_i^*} = \big(\sum_{j=0}^n \phi_i^2(t_j)\omega_j\big)^{-1/2}\vec{\phi_i}$$

d'on obtenim que $\{\vec{\phi_i^*}\}_{i=0}^k$ aproxima les avaluacions de $k+1$ elements de l'expansió de Karhunen-Loève.
Per tant, obtenim la sèrie truncada discreta:

$$\begin{pmatrix} X(t_0) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{pmatrix} = [\vec{\phi_0^*}, \ldots, \vec{\phi_k^*}]_{(n+1)\times k} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_0}Z_0 \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_k}Z_k \end{pmatrix}$$

8.4.2 Mètodes d'expansió

Els mètodes d'expansió es basen en construir una base numerable d'un conjunt de funcions i expressar les funcions solucions de l'equació integral (17) com a combinació lineal infinita d'elements de la base. Això permet facilitar el calcul de solucions però cada algorisme depèn de la base que escollim i en particular, només tractarem amb el mètode de Haar.

El mètode de Haar és un sistema "Wavelet". Un sistema "Wavelet" és la col·lecció de funcions que s'obtenen en composar una funció inicial ψ mitjançant $\{\psi_{j,k}(x) = \psi(2^jx - k)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$.
En les "wavelets" de Haar, la funció inicial és:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

i les funcions $\psi_{j,k}$ esdevenen:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & k2^{-j} < x < k2^{-j} + 2^{-j-1} \\ -1 & k2^{-j} + 2^{-j-1} \leq x < k2^{-j} + 2^{-j} \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Podem comprovar que si $j, j', k, k' \in \mathbb{Z}$, $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = 2^{-j}\delta_{j,j'}\delta_{k,k'}$ i que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ és base ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$. En particular, si prenem $\psi_1 = 1$ i $\psi_i = \psi_{j,k}$ on $i = 2^j + k + 1$ per $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$, llavors, $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ és base ortogonal de $L^2[0,1]$. No obstant, com que treballem amb funcions definides en $[a,b]$, és necessari realitzar un canvi de variable: $\psi_i^*(t) = \psi_i(\frac{t-a}{b-a})$.
Aleshores, sabent que $\{\psi_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ és base de $L^2[a,b]$ i $\{\psi_i^*(s)\psi_j^*(t)\}_{i,j=1}^{\infty}$ base de $L^2[a,b]^2$, tenim per $M = 2^n$, per un cert $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi(t) \approx \sum_{i=1}^{M} d_i \psi_i^*(t) = \Psi^T(t)\vec{d} \qquad\qquad C(s,t) \approx \sum_{i,j=1}^{M} a_{i,j}\psi_i^*(s)\psi_j^*(t) = \Psi^T(s)A\Psi(t)$$

on $\Psi^T(t) = \big(\psi_1^*(t), \dots, \psi_M^*(t)\big)$, $\vec{d} = (d_1, \dots, d_M)^T$ i $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{M}$. D'aquesta manera, podem transformar l'equació (17) per obtenir:

$$\lambda\Psi^T(s)\vec{d} = \lambda\varphi(s) = \int_a^b C(s,t)\varphi(t)dt = \int_a^b \Psi^T(s)A\Psi(t)\Psi^T(t)\vec{d}\,dt = \Psi^T(s)A\Big(\int_a^b \Psi(t)\Psi^T(t)dt\Big)\vec{d} \tag{20}$$

on $\int_a^b \Psi(t)\Psi^T(t)dt$ és la matriu dels productes escalars en $L^2[a,b]$ dels elements $\{\psi_i^*\}_{i=1}^{M}$ que denotem per H. En aquesta última equació, el vector a determinar és $\vec{d}$ ja que podrem calcular les solucions a l'equació (17) mitjançant $\varphi(t) = \Psi^T(t)\vec{d}$ però no disposem de la matriu A. Per calcular A, discretitzem la funció de covariància $C(s,t)$ en la partició $\{t_i = (b-a)(\frac{2i-1}{2M}) + a\}_{i=1}^{M}$ per obtenir una matriu $K = \big(C(t_i,t_j)\big)_{i,j=1}^{M}$. Així, les igualtats $C(t_i,t_j) = \Psi^T(t_i)A\Psi(t_j)$ esdevenen un sistema de $M \times M$ equacions i pel fet que $\psi_1^*(t), \dots, \psi_M^*(t)$ es converteixen en vectors independents escollint la partició definida prèviament, la matriu A té el mateix rang que la matriu K.
Considerem $\varphi_1, \dots, \varphi_p$, $p \leq M$ solucions de l'equació integral (17) i $\vec{d_1}, \dots, \vec{d_p}$, els coeficients de l'expansió de Haar respectivament. A més definim les matrius:

$$\Delta := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \qquad\qquad D := \begin{pmatrix} \vec{d_1}^T \\ \vdots \\ \vec{d_p}^T \end{pmatrix}$$

i a partir de l'equació (20), obtenim el sistema:

$$\Delta D\Psi(t) = DHA\Psi(t) \tag{21}$$

Sabent que les funcions dins $\Psi(t)$ són independents, podem simplificar l'equació a $\Delta D = DHA$. La matriu H, pel fet que les funcions $\psi_1^*(t), \dots, \psi_M^*(t)$ són ortogonals, és diagonal, i com que $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = 2^{-j}\delta_{j,k}\delta_{j',k'}$, tenim que $h_i := \langle \psi_i^*, \psi_{i'}^* \rangle = (b-a)2^{-j}\delta_{j,k}\delta_{j',k'}$ on $i = 2^j + k + 1$ i $i' = 2^{j'} + k' + 1$.
Així, multipliquem a banda i banda per $H^{1/2}$ a l'equació (21) i obtenim:

$$\Delta\big(DH^{1/2}\big) = \big(DH^{1/2}\big)\big(H^{1/2}AH^{1/2}\big)$$

on observem que $DH^{1/2}$ conté en files els vectors propis de la matriu $H^{1/2}AH^{1/2}$ que podem comprovar que és simètrica. Trobem de la matriu $H^{1/2}AH^{1/2}$, els valors propis $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ i els vectors propis en forma de files de la matriu $DH^{1/2}$. Obtenim p solucions ortogonals de l'equació (17) mitjançant el càlcul $\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t)\big)^T = D\Psi(t) = \big(DH^{1/2}\big)H^{-1/2}\Psi(t)$.

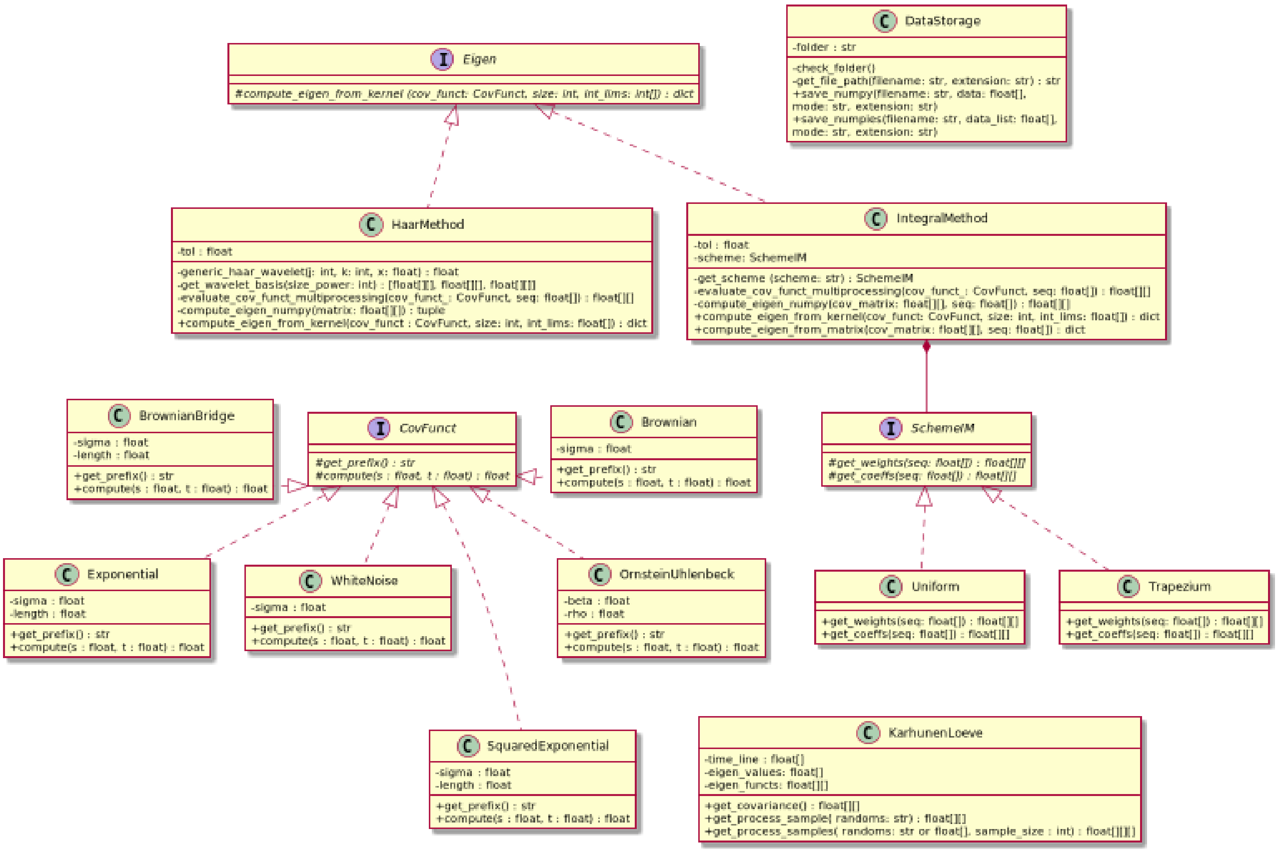


Figura 1: Diagrama de classes UML.

Per tant, obtenim la sèrie truncada:

$$X(t) = \left(Z_1\sqrt{\lambda_1}, \dots, Z_p\sqrt{\lambda_p}\right)\left(DH^{1/2}\right)H^{-1/2}\Psi(t)$$

que a diferència dels mètodes integrals, la solució és una aproximació **analítica** a tot $t \in [a, b]$ del procés.

8.5 Implementació en Python

Volem generar trajectòries d'un procés estocàstic mitjançant l'expansió de Karhunen-Loève. Amb aquest objectiu, hem implementat els mètodes d'integració i d'expansió per aproximar les solucions de l'equació integral (17). A més, el codi és reutilitzable en el sentit que està organitzat en diverses classes que l'usuari fa servir en el cas particular que vol estudiar.

El codi és disponible a `https://github.com/Agaskafara/KLE-numeric` i conté dos exemples d'ús (`main.py`, `mainhaar.py`) amb la configuració de l'execució al final dels fitxers. El diagrama 1 mostra les funcionalitats de les classes i com es relacionen entre elles.

A continuació, fem un breu resum de la funcionalitat de cada classe. Primer de tot, escollim l'estructura que han de tenir les funcions de covariància mitjançant la interfície `CovFunct`. Les classes derivades de `CovFunct` han d'implementar els mètodes `get_prefix` i `compute`. En el diagrama apareixen les funcions de covariància més conegudes però recordem que el procediment sencer és vàlid per qualsevol funció contínua, simètrica i definida no-negativa. Les classes derivades de `Eigen` són les implementacions del mètode integral i del mètode de Haar. Amb el mateix format de sortida, aquestes classes calculen finites solucions independents de l'equació

(17) discretitzades en una partició finita de $[a, b]$ i a partir d'una classe derivada de `CovFunct`. En particular, la classe `IntegralMethod` implementa els mètodes integrals de manera general i dona a escollir els pesos de la integral acord amb l'estructura de `SchemeIM`. A més, notem que la implementació del mètode de Haar és discreta tot i que es podria fer de manera analítica. Aleshores, disposant dels valors i vectors propis calculats amb `Eigen`, la classe `KarhunenLoeve` genera una o múltiples simulacions del procés, i si es vol, recuperar la funció de covariància seguint el Teorema de Mercer. Finalment, la classe `DataStorage` permet guardar els resultats en fitxers amb el format correcte per llavors graficar-los amb Gnuplot.

A mesura que la seqüència on discretitzem la funció de covariància es fa més fina, la solució és més precisa però el comput de vectors i valors propis es torna molt més costós. No obstant, un cop calculats els valors i vectors propis, els podem guardar i generar noves trajectòries sense haver-los de calcular de nou. A més, per evitar aquest creixement de temps d'execució, fem servir la llibreria `multiprocessing`, que permet tan avaluar la funció de covariància com generar trajectòries paral·lelament. L'ús d'aquesta llibreria també té un inconvenient pel fet que quan es tracta d'una discretització senzilla i/o de poques trajectòries a generar, hi ha un temps addicional que es consumeix organitzant el processament paral·lel.

8.6 Simulacions i resultats

Havent presentat els mètodes numèrics i la implementació, a continuació generem trajectòries de processos gaussians i comparem en el cas del moviment Brownià, la solució numèrica amb la analítica.

En el diagrama 1 apareixen diverses classes que implementen la interfície `CovFunct` i corresponen a les funcions de covariància:

- *Brownian*: $C(s,t) = \sigma^2 min(s,t)$ amb $\sigma > 0$
- *BrownianBridge*: $C(s,t) = \sigma^2\big(\min(s,t) - \dfrac{s \cdot t}{l}\big)$ amb $\sigma, l > 0$
- *WhiteNoise*: $C(s,t) = \sigma^2 \cdot \mathcal{X}_{\{s=t\}}(s,t)$ amb $\sigma > 0$
- *OrnsteinUhlenbeck*: $C(s,t) = \dfrac{\rho^2}{2\beta} e^{-\beta|s-t|}$ amb $\beta, \rho > 0$
- *Exponential*: $C(s,t) = \sigma^2 e^{-\dfrac{|s-t|}{2l^2}}$ amb $\sigma, l > 0$
- *SquaredExponential*: $C(s,t) = \sigma^2 e^{-\dfrac{(s-t)^2}{2l^2}}$ amb $\sigma, l > 0$

d'on observem que la quarta i cinquena funció són les mateixes però expressades en diferents paràmetres, i ho fem així per comparar el comportament de les trajectòries entre la cinquena i sisena funció de covariància.
Hem simulat per a cada funció de covariància 5 trajectòries mitjançant el mètode de Haar amb una mida de discretització de 512 nodes. La figura 2 mostra aquestes trajectòries. Notem que el comportament de les trajectòries és diferent en cada cas:

- El moviment Brownià neix a 0, té trajectòries contínues sense cap tendència determinada i en cada punt hi ha oscil·lacions infinitesimals.

- El pont Brownià té el mateix comportament que el moviment Brownià però les trajectòries neixen i moren a 0.

- El soroll blanc en cada punt pren un valor independent dels altres i per tant, no podem esperar trajectòries contínues. De fet, amb una discretització de 512 nodes, no podem discernir cap de les 5 trajectòries. Ara bé, si que podem apreciar la distribució del soroll: està centrat en 0 i la majoria de valors estan continguts en l'interval $[-1.96, 1.96]$.

- El procés de Ornstein-Uhlenbeck i el procés associat a la funció de covariància *Exponential* tenen mateix comportament que el moviment Brownià però les trajectòries no neixen necessàriament en 0. A més, veiem que modificar els valors dels paràmetres ofereix un canvi de comportament prou significatiu.

- El procés associat a la funció de covariància *SquaredExponential* veiem que és l'únic procés amb trajectòries no només contínues sinó suaus, i intuïtivament, diferenciables.

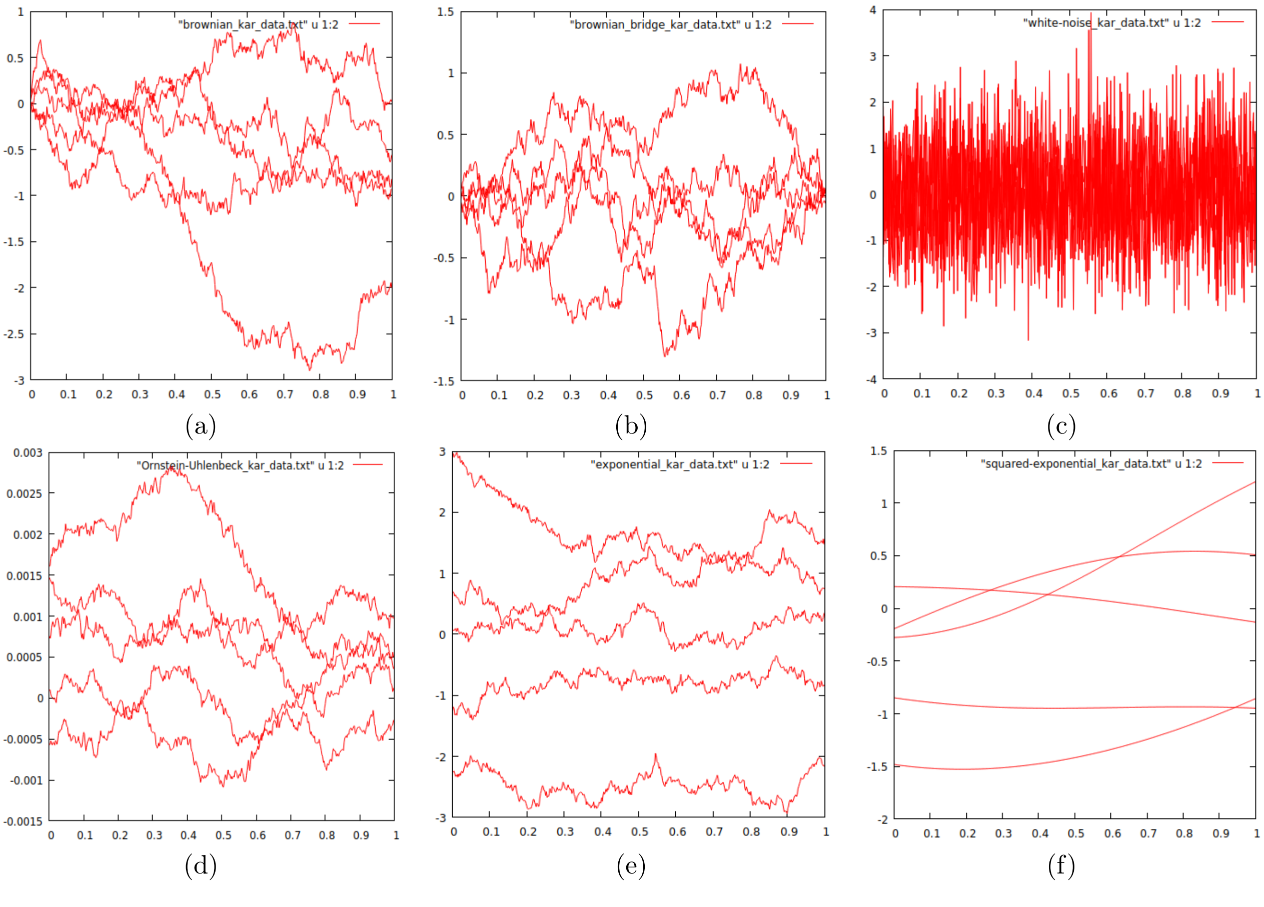
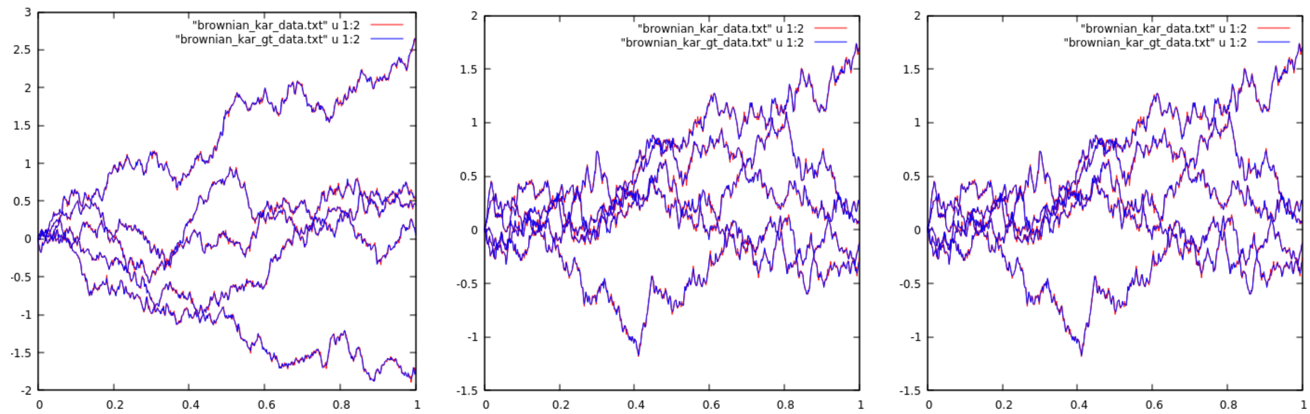


Figura 2: a) *Brownian*$(\sigma^2 = 1)$. b) *BrownianBridge*$(\sigma^2 = 1,\, l = 1)$. c) *WhiteNoise*$(\sigma^2 = 1)$. d) *OrnsteinUhlenbeck*$(\beta = \frac{1}{2},\, \rho = 10^{-3})$. e) *Exponential*$(\sigma^2 = 1,\, l = 1)$. f) *SquaredExponential*$(\sigma^2 = 1,\, l = 1)$.

Ara, comparem els mètodes implementats amb la solució analítica del moviment Brownià, figura 3. Com a criteri d'error hem escollit la mitjana dels màxims errors obtinguts en 5 trajectòries. El màxim error en cada trajectòria és la màxima diferència en valor absolut en cada punt de la discretització de l'interval $[0, 1]$.
Comparativament, el mètode de Haar és més precís que els mètodes integrals implementats per mides de discretització similars. Ara bé, el mètode de Haar només accepta mides de discretització potències de 2 i això esdevé un gran problema computacional quan es necessita o bé un nombre concret de nodes o augmentar lleugerament el nombre de nodes. Per exemple, si actualment es tenen 2^9 nodes, la mínima quantitat de nodes



(a) (b) (c)

Figura 3: a) Mètode integral amb pesos uniformes. Mida de discretització de 500 nodes i error de 0.06555. b) Mètode integral amb pesos de trapezis. Mida de discretització de 500 nodes i error de 0.06024. c) Mètode de Haar. Mida de discretització de 512 nodes i error de 0.05497.

superiors que fan més precisa la solució és 2^{10}, el doble. Comparant la solució analítica amb la numèrica, obtenim un error de l'ordre de 10^{-2} en tots els casos. Els errors es produeixen en el càlcul dels valors i vectors propis i en les aproximacions realitzades. Posteriorment, es construeix l'expansió de Karhunen-Loève i per la aleatorietat del signe dels coeficients de l'expansió, aquests errors no s'acumulen. Ara bé, el nombre de sumands de l'expansió i l'ajust de l'aproximació de l'algorisme estan determinats per la mida de la discretització. Per tant, com que un augment de la mida de la discretització és cada vegada més costós, i per la mida 500, que ja és prou costós, obtenim un error d'ordre 10^{-2}, resultarà difícil obtenir solucions més precises.

9 Conclusions

Partint dels cursos d'anàlisi funcional i de probabilitat, hem detallat el procediment necessari per arribar a la prova de l'expansió de Karhunen-Loève. Aquesta tasca ha comportat reunir i comparar diverses fonts d'informació, i en alguns casos, completar, generalitzar o simplificar procediment. Així, oferim un contingut complet (llevat d'alguna demostració citada) i sense redundàncies ni complicacions.

Amb el Teorema de Karhunen-Loève, en norma de L^2 i uniformement en $[a, b]$ expressem un procés estocàstic de segon ordre amb espai de paràmetres $[a, b] \subset \mathbb{R}$, amb valors a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ i amb funció de covariància contínua a partir de un conjunt numerable de variables aleatòries, i això comporta estudiar la integració estocàstica de Riemann, les propietats de les funcions de covariància i dels operadors de Hilbert-Schmidt i el Teorema de Mercer.

En la majoria dels casos no és possible tractar amb infinites variables aleatòries i per tant, ens pot interessar truncar l'expansió de Karhunen-Loève en finits sumands. Només presentem el resultat principal de l'estudi de la optimització al truncar la sèrie però és suficient per determinar quins termes hem d'escollir: els sumands que contenen els majors valors propis.

En processos Gaussians, la convergència de l'expansió al procés és no només en norma de L^2 sinó quasi segura i els coeficients de l'expansió són variables aleatòries independents amb distribució $\mathcal{N}(0, 1)$. Aquests dos resultats donen molt valor al Teorema de Karhunen-Loève pel fet que fan tractable l'aleatorietat del procés i que en probabilitat 1 podem determinar el procés estocàstic completament sense haver de tractar les propietats del procés, només coneixent la funció de covariància.

Posteriorment hem desenvolupat l'expansió pel moviment Brownià, comprovant que obtenim un resultat molt tractable però al mateix temps, notant la dificultat de solucionar l'equació integral (17) per funcions de covariància més complexes.

Això dona pas a l'estudi numèric per resoldre l'equació integral (17), on acceptem aproximacions i tractem amb l'expansió de Karhunen-Loève truncada. Dividim les metodologies numèriques en mètodes integrals i mètodes d'expansió. Les dues metodologies es basen en trobar valors i vectors propis de matrius simètriques però mentre que els mètodes integrals donen solucions discretes en finits punts de $[a, b]$, els mètodes d'expansió ofereixen un resultat analític, vàlid en tot l'interval $[a, b]$. En particular, hem tractat el mètode integral amb pesos uniformes i de trapezis i el mètode d'expansió de Haar.

La implementació dels mètodes numèrics i simulació de trajectòries de processos Gaussians ha resultat un èxit: hem pogut comprovar, tenint previ coneixement dels diversos processos estocàstics que tractem, que les trajectòries generades corresponen a les trajectòries dels processos estocàstics en qüestió. Estudiant el moviment Brownià, el mètode de Haar ha resultat ser més precís que els mètodes integrals uniforme i de trapezis i comparant la solució numèrica amb la analítica, la solució numèrica s'adapta prou bé a la analítica. No obstant, també hem pogut observar que és cada vegada més difícil obtenir simulacions numèriques amb major precisió pel gran cost computacional que suposa trobar els valors i vectors propis.

Hem construït l'expansió de Karhunen-Loève en el cas més simple i seguint estrictament els mínims passos per poder demostrar el Teorema de Karhunen-Loève. Ara bé, amb més temps hauria ampliat el treball a caracteritzar els processos estocàstics sobre els quals es pot aplicar el Teorema de Karhunen-Loève i a caracteritzar els tipus de funcions de covariància entre les que tenen finits o numerables valors propis. També, hauria comentat altres construccions alternatives o que complementen la construcció del Teorema de Karhunen-Loève, com en [9]. Finalment, les aplicacions presents al treball són les més teòriques i sovint les menys interessants. Hauria introduït l'expansió condicionada de Karhunen-Loève per estudiar el filtratge del senyal quan hi ha soroll Gaussià, seguint la referència [5] amb aplicacions a [8].

Referències

[1] Robert B. Ash. *Basic probability theory.* Dober Publications, Inc., 1970.

[2] Robert B. Ash. *Topics in stochastic processes.* Academic Press, Inc., 1975.

[3] Patrick Billingsley. *Probability and Measure.* John Wiley & Sons, Inc., 1979.

[4] Giordano Giambartolomei. The karhunen-loève theorem. Università Di Bologna, 2014-15. Bachelor's thesis.

[5] Carl. E. Rasmussen and Christopher K. I. Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning.* The MIT Press, 2006.

[6] Frigyes Riesz and Béla SZ-Nagy. *Functional analysis.* Frederick Ungar Publishing Co., 1955.

[7] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Real analysis.* Princeton University Press, 2005.

[8] Alexandre M. Tartakovsky, David A. Barajas-Solano, and Qizhi He. Physics-informed machine learning with conditional karhunen-loève expansions, 2019.

[9] Petar Todorovic. *An introduction to Stochastic Processes and Their Applications.* Springer-Verlag, 1992.

[10] Limin Wang. *Karhunen-Loève Expansions and their Applications.* PhD thesis, The London School of Economics and Political Science, 2008.