第二周作业

1、

$$\begin{aligned} A+B+C &= \Omega - A^C B^C C^C \\ &= ABC + ABC^C + AB^C C + AB^C C^C + A^C BC + A^C BC^C + A^C B^C C \end{aligned}$$

其中每项之间互斥。

由Kolmogorov的概率论公理，

$$\begin{gathered} P(A) = P(ABC) + P(ABC^C) + P(AB^C C) + P(AB^C C^C) \\ P(B) = P(ABC) + P(ABC^C) + P(A^C BC) + P(A^C BC^C) \\ P(C) = P(ABC) + P(AB^C C) + P(A^C BC) + P(A^C B^C C) \\ P(AB) = P(ABC) + P(ABC^C) \\ P(BC) = P(ABC) + P(A^C BC) \\ P(AC) + P(ABC) + P(AB^C C) \end{gathered}$$

代入公式：

$$\begin{aligned} LHS &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \\ &= P(ABC) + P(ABC^C) + P(AB^C C) + \cdots + P(A^C B^C C) \end{aligned}$$

2、
对于任意事件X，

1)

$$\begin{gathered} P(X|B) = \frac{P(XB)}{P(B)} \\ P(XB) > 0, P(B) > 0 \\ \text{所以} P(X|B) > 0 \end{gathered}$$

2)

$$\begin{gathered} \Omega B = B \\ P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \end{gathered}$$

3)

$$\begin{aligned} \text{对于} A_i A_j = \varnothing, \forall i \neq j \\ P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i | B) &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)}{P(B)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i)}{P(B)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B) \end{aligned}$$

这样就证明了P(·|B)是概率函数

3、

1) $P(A) \geq P(A|B)$

错误，若AB互斥，则$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 0$，而$P(A)$可以为一个大于0的值

2）不存在既互斥也相互独立的事件A, B

正确。若A, B互斥，则$P(AB) = 0$，而$P(A)$、$P(B)$可以均不为0，此时独立条件$P(AB) = P(A)P(B)$无法成立

3）若$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，则A,B,C独立

错误，若$C=\varnothing, P(C)=0$，则上式成立，但A,B,C不独立

4、

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$P(A_2)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}, P(A_3)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}, P(A_5)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$
$P(A_2A_3)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}, P(A_2A_5)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$
$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)$
$P(A_2A_5)\neq P(A_2)P(A_5)$
所以A_2,A_3是相互独立的，A_2,A_5不是相互独立的

5、

1) 条件独立 $\nrightarrow$ 独立

假设有2枚硬币A、B，A出现正面的概率为99%，B出现正面的概率为1%，随机取一枚硬币投掷
事件a:第一次出现正面
事件b:第二次出现正面
事件c:取的是第一枚硬币

$$P(ab)=\frac{0.99^2}{2}+\frac{0.01^2}{2}=0.4901$$
$$P(a)=P(b)=\frac{0.99}{2}+\frac{0.01}{2}=0.5$$
$$P(ab)\neq P(a)P(b)$$

所以a、b不相互独立

然而

$$P(ab|c)=0.99^2=0.9801$$
$$P(a|c)=P(b|c)=0.99$$
$$P(ab|c)=P(a|c)P(b|c)$$

在条件c下，a、b条件独立

2) 独立 $\nrightarrow$ 条件独立

假设有2枚均匀硬币A、B，分别投掷2硬币
事件a:A硬币出现正面
事件b:B硬币出现反面
事件c:A、B硬币出现的面相同

$$P(a)=P(b)=0.5, P(ab)=0.5^2=P(a)P(b)$$

所以a、b相互独立
然而

$$P(a|c)=P(a|c)=0.5, P(ab|c)=0\neq P(a|c)P(b|c)$$

在条件c下，a、b不条件独立

6、
记“事件A在第n轮前(包含第n轮)发生”为a

$$
\begin{gathered}
P(a^c) = (1-\varepsilon)^n \\
1-\varepsilon < 0, \lim_{n->\infty}(1-\varepsilon)^n = 0 \\
P(a) = 1 - P(a^c) \to 1\text{，当}n \to \infty
\end{gathered}
$$

7、
记“随机取一张卡牌放在桌上，朝上的面为红色”为事件A
记“随机取一张卡牌放在桌上，朝上的面为红色，朝下的面为黑色“为事件B

$$
\begin{gathered}
P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\
P(AB) = P(B) = \frac{1}{6} \\
P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{3}
\end{gathered}
$$

8、这2种方式都是公平的
方案1中，任意一个人抓到“中”的概率是$\frac{1}{n}$
方案2中，第k个人要抓到“中”，则要求前面k-1个人没有抓到，且自己在剩下的签里抓到，概率为$\frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}$

9、
记“检查出阳性”为事件A，“小明患病”为事件B

$$
\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^C)P(B^C)} \\
&= \frac{1 \times 0.6}{1 \times 0.6 + 0.3 \times 0.4} \\
&= \frac{0.6}{0.72} \approx 83.3\%
\end{aligned}
$$

因为概率超过了80%，所以我会推荐手术

10、

1)

设P_i为有i元筹码时输光的概率，则有：

$$
P_i = pP_{i+1} + (1-p)P_{i-1}
$$

变形得：

$$
P_{i+1} - \frac{1}{p}P_i + \frac{1-p}{p}P_{i-1} = 0
$$

特征方程：

$$
\begin{gathered}
x^2 - \frac{1}{p}x + \frac{1-p}{p} = 0 \\
x_1 = 1, x_2 = \frac{1-p}{p}
\end{gathered}
$$

因此有：

$$
P_i = \alpha + \beta(\frac{1-p}{p})^i
$$

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_n = 0 \end{cases}$$

$$记q = \frac{1-p}{p}, 解得\alpha = \frac{-q^n}{1-q^n}, \beta = \frac{1}{1-q^n}$$

$$P_k = \frac{q^k - q^n}{1-q^n}$$

2)

当$0 < p < 0.5$，有$q > 1$，$n \to \infty$时，q^k、1均为有限项，$P_k \approx \frac{-q^n}{-q^n} = 1$

11、

设有1个这种生物时灭亡的概率为P，

$$P = \frac{1}{3} \times (1 + P + P^2)，解得P = 1$$

所以该生物灭亡的概率为1

12、

记治愈为事件T，

若使用甲治疗方案，$P(T) = \sum_i P(B_iT) = \sum_i P(T|B_i)P(B_i) = (0.8, 0.1, 0.1) \cdot (0.8, 0.05, 0.1) = 0.655$

若使用乙治疗方案，$P(T) = \sum_i P(B_iT) = \sum_i P(T|B_i)P(B_i) = (0.8, 0.1, 0.1) \cdot (0.6, 0.9, 0.9) = 0.66$

乙方案的治愈率比甲方案高，我会建议乙方案。甲方案也可以被建议，原因在于它的治愈率与乙方案接近，而且对病症A的治愈率显著高于乙方案

13、

1)

由全概率公式：

$$P(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = 0.6$$

2)

若放回：

$$P(B_2) = P(B_1) = 0.6$$

若不放回：

$$\begin{aligned} P(B_2) &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cdot ((\frac{4}{5}, \frac{1}{5}) \cdot (\frac{3}{4}, \frac{4}{4}), (\frac{2}{5}, \frac{3}{5}) \cdot (\frac{1}{4}, \frac{2}{4})) \\ &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cdot (\frac{4}{5}, \frac{2}{5}) \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

放回与不放回摸到黑球的概率是一样的，因为并未从之前的过程中获得能产生影响的信息，第二次摸的球为黑与第一次摸的球为黑本质上没有区别

3)

$$P(B_2|B_1) = \frac{P(B_2B_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{2} \times ((\frac{4}{5})^2 + (\frac{2}{5})^2)}{0.6} = \frac{2}{3}$$

$P(B_2|B_1) > P(B_2)$，因为已知第一个球为黑球，这使取得1号袋的可能性增加了

4)

$$P(B_1B_2 \cdots B_n) = \frac{1}{2} \times ((\frac{4}{5})^n + (\frac{2}{5})^n)$$

$$
\begin{aligned}
P(B_{n+1}|B_1\cdots B_n) &= \frac{\frac{1}{2}\times((\frac{4}{5})^{n+1}+(\frac{2}{5})^{n+1})}{\frac{1}{2}\times((\frac{4}{5})^{n}+(\frac{2}{5})^{n})} \\
&= \frac{(\frac{4}{5})^{n+1}+(\frac{2}{5})^{n+1}}{(\frac{4}{5})^{n}+(\frac{2}{5})^{n}} \\
&= \frac{\frac{4}{5}+(\frac{1}{2})^{n}\times\frac{2}{5}}{1+(\frac{1}{2})^{n}} \\
&\approx \frac{4}{5}，当 n\to\infty
\end{aligned}
$$

可以理解为当前面一直出现黑球，几乎能断定取的是1号袋

5）

记取1号袋为事件A

$$
\begin{aligned}
P(A|B_1\cdots B_n) &= \frac{P(B_1\cdots B_n|A)P(A)}{P(B_1\cdots B_n)} \\
&= \frac{(\frac{4}{5})^{n}\times 0.5}{\frac{1}{2}\times((\frac{4}{5})^{n}+(\frac{2}{5})^{n})} \\
&= \frac{(\frac{4}{5})^{n}}{(\frac{4}{5})^{n}+(\frac{2}{5})^{n}} \\
&\approx 1，当 n\to\infty
\end{aligned}
$$

当1到n次都取得黑球，几乎可以断定取得的是1号袋

14、

1)

我选甲，单独选择一个对手无必胜策略

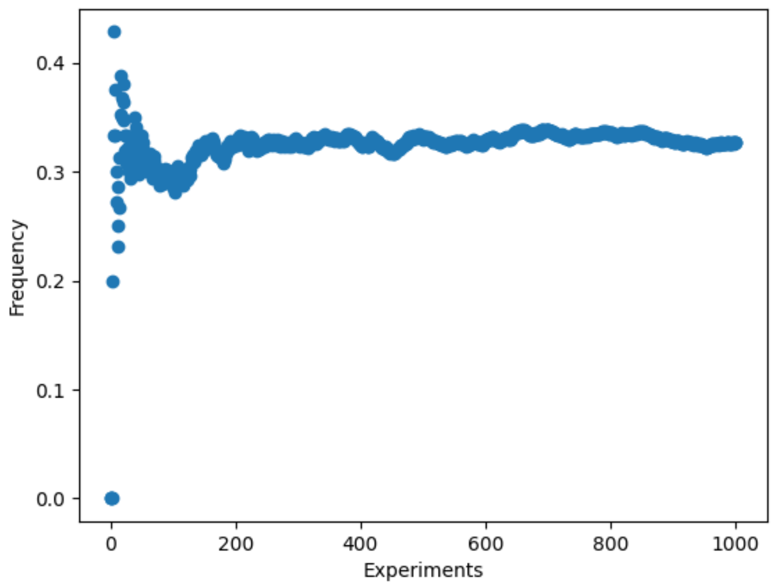
2)

$$
\begin{gathered}
5\times(1-P_{甲}(B))-20\times P_{甲}(B)=0 \\
P_{甲}(B)=0.2 \\
-15\times P_{乙}(A)+10\times(1-P_{乙}(A))=0 \\
P_{乙}(A)=0.4
\end{gathered}
$$

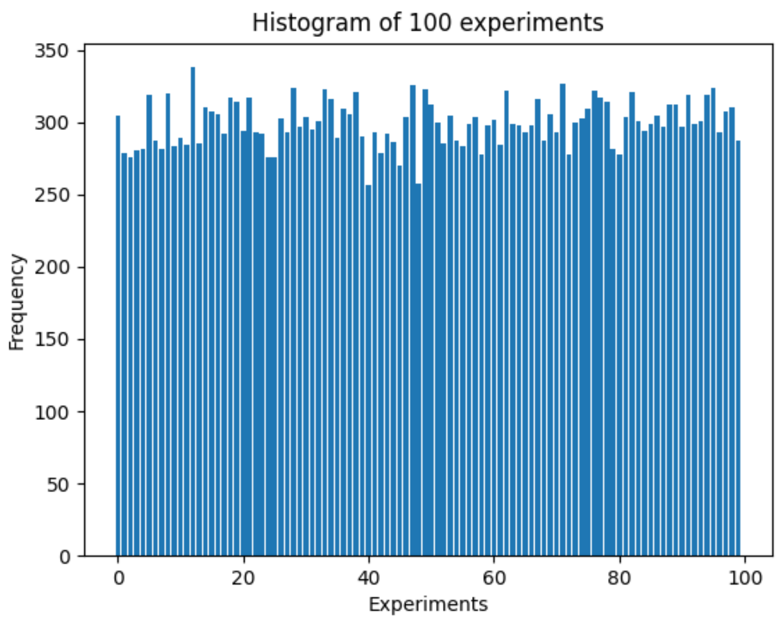
$P_{甲}(B)+P_{乙}(A)=0.6<1$，这说明甲乙都自信自身能够赢，可以通过对冲寻找到必胜策略

15、

1）散点图：



2) 100正面朝上直方图



3)

100次实验平均值为299.43，与$np = 300$非常接近

4)尝试$p = 0.5, n = 2000$