第二周作业

1、

$$
\begin{aligned}
A+B+C &= \Omega - A^C B^C C^C \\
&= ABC + ABC^C + AB^C C + AB^C C^C + A^C BC + A^C BC^C + A^C B^C C
\end{aligned}
$$

其中每项之间互斥。

由Kolmogorov的概率论公理，

$$
\begin{gathered}
P(A) = P(ABC) + P(ABC^C) + P(AB^C C) + P(AB^C C^C) \\
P(B) = P(ABC) + P(ABC^C) + P(A^C BC) + P(A^C BC^C) \\
P(C) = P(ABC) + P(AB^C C) + P(A^C BC) + P(A^C B^C C) \\
P(AB) = P(ABC) + P(ABC^C) \\
P(BC) = P(ABC) + P(A^C BC) \\
P(AC) + P(ABC) + P(AB^C C)
\end{gathered}
$$

代入公式：

$$
\begin{aligned}
LHS &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \\
&= P(ABC) + P(ABC^C) + P(AB^C C) + \cdots + P(A^C B^C C)
\end{aligned}
$$

2、
对于任意事件X，

1)

$$
\begin{gathered}
P(X|B) = \frac{P(XB)}{P(B)} \\
P(XB) > 0, P(B) > 0 \\
\text{所以} P(X|B) > 0
\end{gathered}
$$

2)

$$
\begin{gathered}
\Omega B = B \\
P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1
\end{gathered}
$$

3)

$$\begin{aligned} &\text{对于} A_iA_j=\varnothing, \forall i\neq j \\ P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i|B) &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)}{P(B)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{P(A_i)}{P(B)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|B) \end{aligned}$$

这样就证明了P(·|B)是概率函数

3、

1) $P(A)\geq P(A|B)$

错误，若AB互斥，则$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=0$，而$P(A)$可以为一个大于0的值

2）不存在既互斥也相互独立的事件A,B

正确。若A,B互斥，则$P(AB)=0$，而$P(A)$、$P(B)$可以均不为0，此时独立条件$P(AB)=P(A)P(B)$无法成立

3）若$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，则A,B,C独立

错误，若$C=\varnothing,P(C)=0$，则上式成立，但A,B,C不独立

4、

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$P(A_2)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}, P(A_3)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}, P(A_5)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$
$P(A_2A_3)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}, P(A_2A_5)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$
$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)$
$P(A_2A_5)\neq P(A_2)P(A_5)$
所以A_2, A_3是相互独立的，A_2, A_5不是相互独立的

5、

1) 条件独立 $\nrightarrow$ 独立

假设有2枚硬币A、B，A出现正面的概率为99%，B出现正面的概率为1%，随机取一枚硬币投掷
事件a:第一次出现正面
事件b:第二次出现正面
事件c:取的是第一枚硬币

$$P(ab)=\frac{0.99^2}{2}+\frac{0.01^2}{2}=0.4901$$
$$P(a)=P(b)=\frac{0.99}{2}+\frac{0.01}{2}=0.5$$
$$P(ab)\neq P(a)P(b)$$

所以a、b不相互独立

然而

$$P(ab|c)=0.99^2=0.9801$$
$$P(a|c)=P(b|c)=0.99$$
$$P(ab|c)=P(a|c)P(b|c)$$

在条件c下，a、b条件独立

2) 独立 $\nrightarrow$ 条件独立

假设有2枚均匀硬币A、B，分别投掷2硬币
事件a:A硬币出现正面
事件b:B硬币出现反面
事件c:A、B硬币出现的面相同

$$P(a)=P(b)=0.5, P(ab)=0.5^2=P(a)P(b)$$

所以a、b相互独立

然而

$$P(a|c)=P(a|c)=0.5, P(ab|c)=0\neq P(a|c)P(b|c)$$

在条件c下，a、b不条件独立

6、
记“事件A在第n轮前(包含第n轮)发生”为a

$$\begin{gathered}P(a^c)=(1-\varepsilon)^n\\1-\varepsilon<0,\ \lim_{n->\infty}(1-\varepsilon)^n=0\\P(a)=1-P(a^c)\to 1\text{，当}n\to\infty\end{gathered}$$

7、
记“随机取一张卡牌放在桌上，朝上的面为红色”为事件A
记“随机取一张卡牌放在桌上，朝上的面为红色，朝下的面为黑色“为事件B

$$\begin{gathered}P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\\P(AB)=P(B)=\frac{1}{6}\\P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}\end{gathered}$$

8、这2种方式都是公平的
方案1中，任意一个人抓到“中”的概率是$\frac{1}{n}$
方案2中，第k个人要抓到“中”，则要求前面k-1个人没有抓到，且自己在剩下的签里抓到，概率为
$\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}\times\frac{1}{n-(k-1)}=\frac{1}{n}$

9、
记“检查出阳性”为事件A，“小明患病”为事件B

$$\begin{aligned}P(B|A)&=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}\\&=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|B^C)P(B^C)}\\&=\frac{1\times 0.6}{1\times 0.6+0.3\times 0.4}\\&=\frac{0.6}{0.72}\approx 83.3\%\end{aligned}$$

因为概率超过了80%，所以我会推荐手术

10、

1)

设P_i为有i元筹码时输光的概率，则有：

$$P_i = pP_{i+1} + (1-p)P_{i-1}$$

变形得：

$$P_{i+1} - \frac{1}{p}P_i + \frac{1-p}{p}P_{i-1} = 0$$

特征方程：

$$x^2 - \frac{1}{p}x + \frac{1-p}{p} = 0$$
$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1-p}{p}$$

因此有：

$$P_i = \alpha + \beta(\frac{1-p}{p})^i$$

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_n = 0 \end{cases}$$
$$\text{记}q = \frac{1-p}{p}, \text{解得}\alpha = \frac{-q^n}{1-q^n}, \beta = \frac{1}{1-q^n}$$
$$P_k = \frac{q^k - q^n}{1-q^n}$$

2)

当$0 < p < 0.5$，有$q > 1$，$n \to \infty$时，q^k、1均为有限项，$P_k \approx \frac{-q^n}{-q^n} = 1$

11、
设有1个这种生物时灭亡的概率为P,

$$P=\frac{1}{3}\times(1+P+P^2)\text{，解得}P=1$$

所以该生物灭亡的概率为1

12、
记治愈为事件T,
若使用甲治疗方案，$P(T)=\sum_i P(B_iT)=\sum_i P(T|B_i)P(B_i)=(0.8,0.1,0.1)\cdot(0.8,0.05,0.1)=0.655$
若使用乙治疗方案，$P(T)=\sum_i P(B_iT)=\sum_i P(T|B_i)P(B_i)=(0.8,0.1,0.1)\cdot(0.6,0.9,0.9)=0.66$
乙方案的治愈率比甲方案高，我会建议乙方案。甲方案也可以被建议，原因在于它的治愈率与乙方案接近，而且对病症A的治愈率显著高于乙方案

13、

1）

由全概率公式：

$$P(B_1)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=0.6$$

2)

若放回：

$$P(B_2)=P(B_1)=0.6$$

若不放回：

$$\begin{aligned}P(B_2)&=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cdot((\frac{4}{5},\frac{1}{5})\cdot(\frac{3}{4},\frac{4}{4}),(\frac{2}{5},\frac{3}{5})\cdot(\frac{1}{4},\frac{2}{4}))\\&=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cdot(\frac{4}{5},\frac{2}{5})\\&=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

放回与不放回摸到黑球的概率是一样的，因为并未从之前的过程中获得能产生影响的信息，第二次摸的球为黑与第一次摸的球为黑本质上没有区别

3）

$$P(B_2|B_1)=\frac{P(B_2B_1)}{P(B_1)}=\frac{\frac{1}{2}\times((\frac{4}{5})^2+(\frac{2}{5})^2)}{0.6}=\frac{2}{3}$$

$P(B_2|B_1)>P(B_2)$，因为已知第一个球为黑球，这使取得1号袋的可能性增加了

4)

$$\begin{aligned}P(B_1B_2\cdots B_n)&=\frac{1}{2}\times((\frac{4}{5})^n+(\frac{2}{5})^n)\\P(B_{n+1}|B_1\cdots B_n)&=\frac{\frac{1}{2}\times((\frac{4}{5})^{n+1}+(\frac{2}{5})^{n+1})}{\frac{1}{2}\times((\frac{4}{5})^n+(\frac{2}{5})^n)}\\&=\frac{(\frac{4}{5})^{n+1}+(\frac{2}{5})^{n+1}}{(\frac{4}{5})^n+(\frac{2}{5})^n}\\&=\frac{\frac{4}{5}+(\frac{1}{2})^n\times\frac{2}{5}}{1+(\frac{1}{2})^n}\\&\approx\frac{4}{5}\text{，当}n\to\infty\end{aligned}$$

可以理解为当前面一直出现黑球，几乎能断定取的是1号袋

5）

记取1号袋为事件A

$$\begin{aligned}P(A|B_1\cdots B_n)&=\frac{P(B_1\cdots B_n|A)P(A)}{P(B_1\cdots B_n)}\\&=\frac{(\frac{4}{5})^n\times 0.5}{\frac{1}{2}\times((\frac{4}{5})^n+(\frac{2}{5})^n)}\\&=\frac{(\frac{4}{5})^n}{(\frac{4}{5})^n+(\frac{2}{5})^n}\\&\approx 1\text{，当}n\to\infty\end{aligned}$$

当1到n次都取得黑球，几乎可以断定取得的是1号袋

14、

1)

我选甲，单独选择一个对手无必胜策略

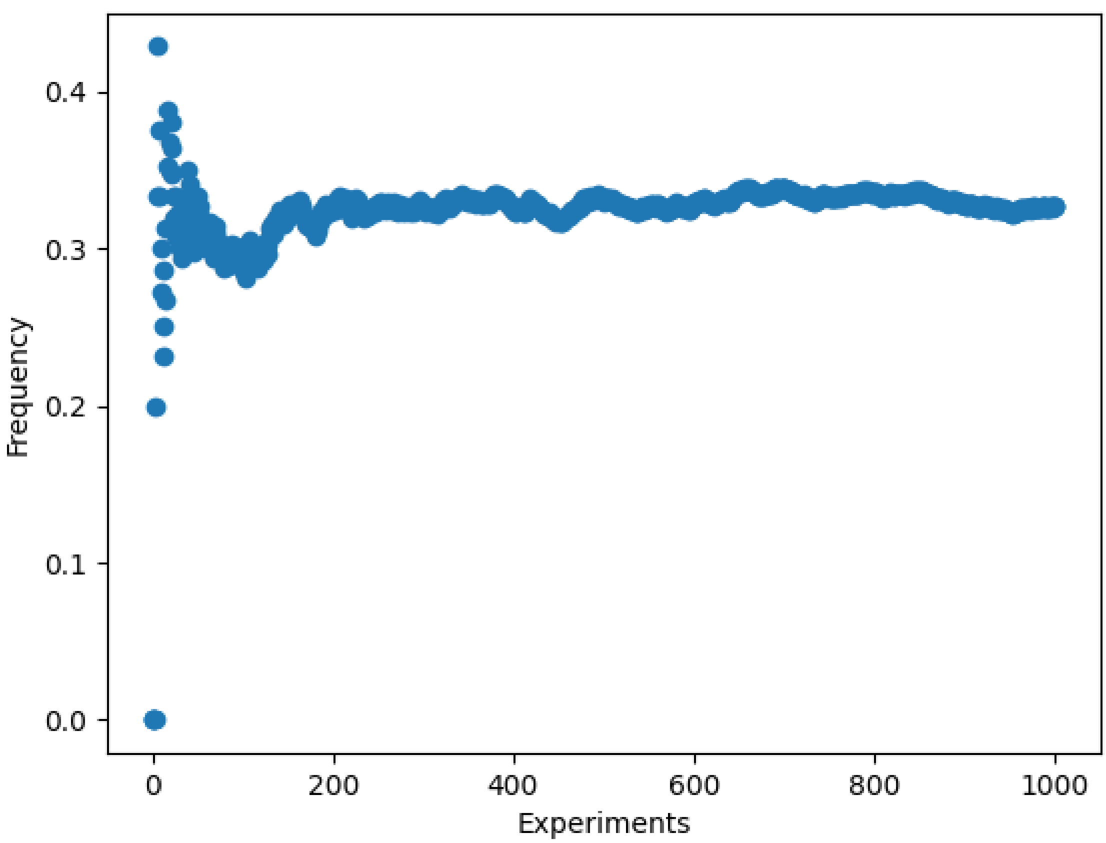
2）

$$
\begin{gathered}
5 \times (1 - P_{甲}(B)) - 20 \times P_{甲}(B) = 0 \\
P_{甲}(B) = 0.2 \\
-15 \times P_{乙}(A) + 10 \times (1 - P_{乙}(A)) = 0 \\
P_{乙}(A) = 0.4
\end{gathered}
$$

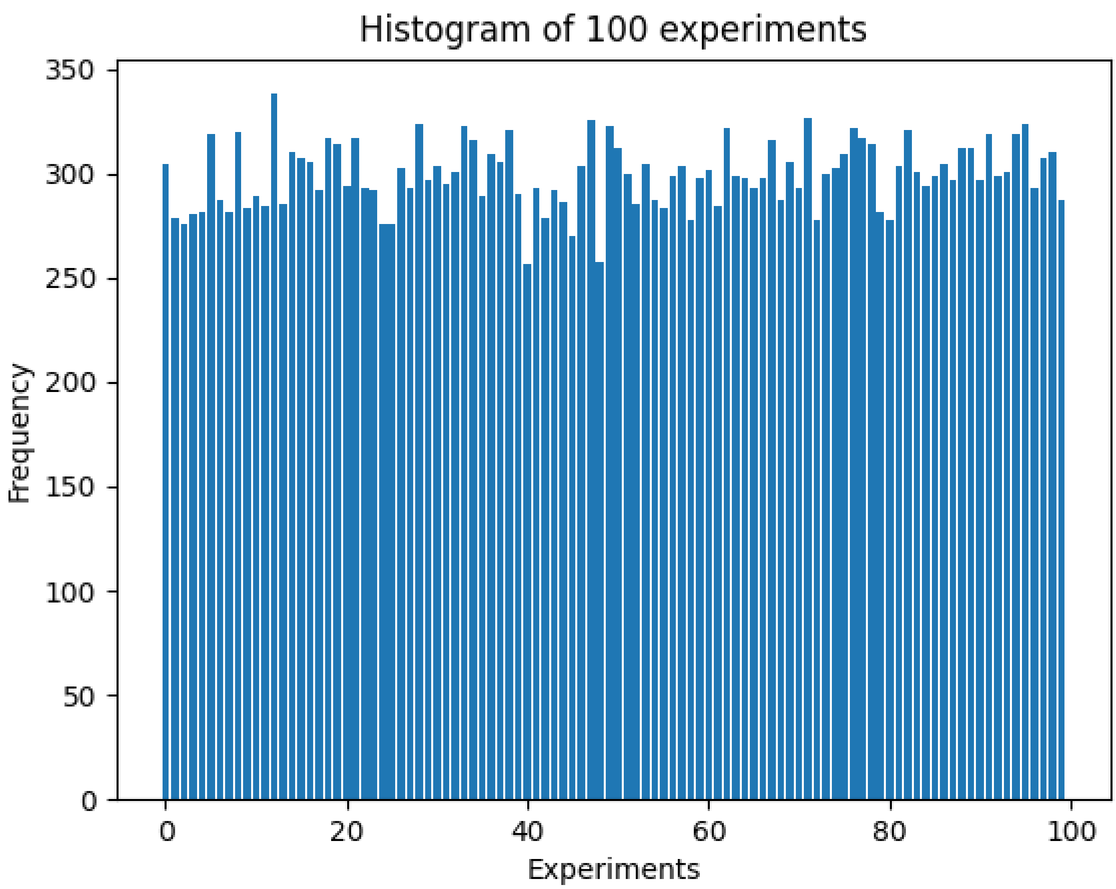
$P_{甲}(B) + P_{乙}(A) = 0.6 < 1$，这说明甲乙都自信自身能够赢，可以通过对冲寻找到必胜策略

15、

1）散点图：



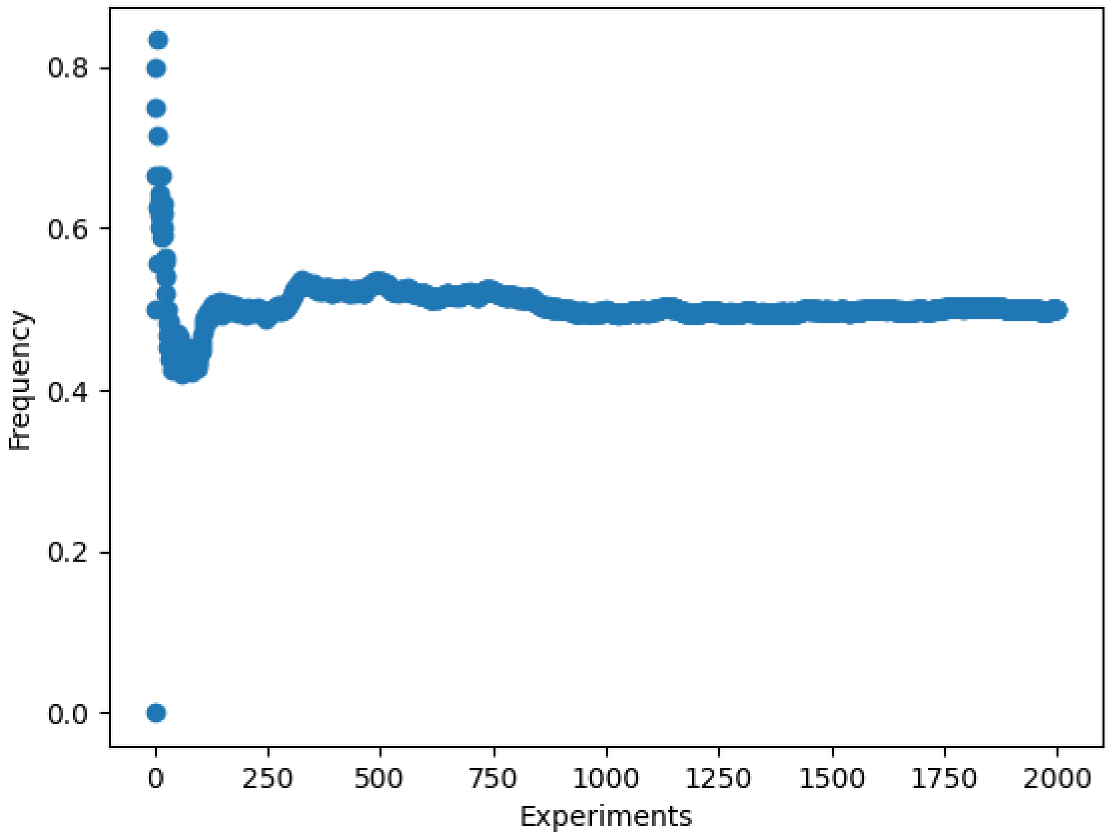
2) 100正面朝上直方图

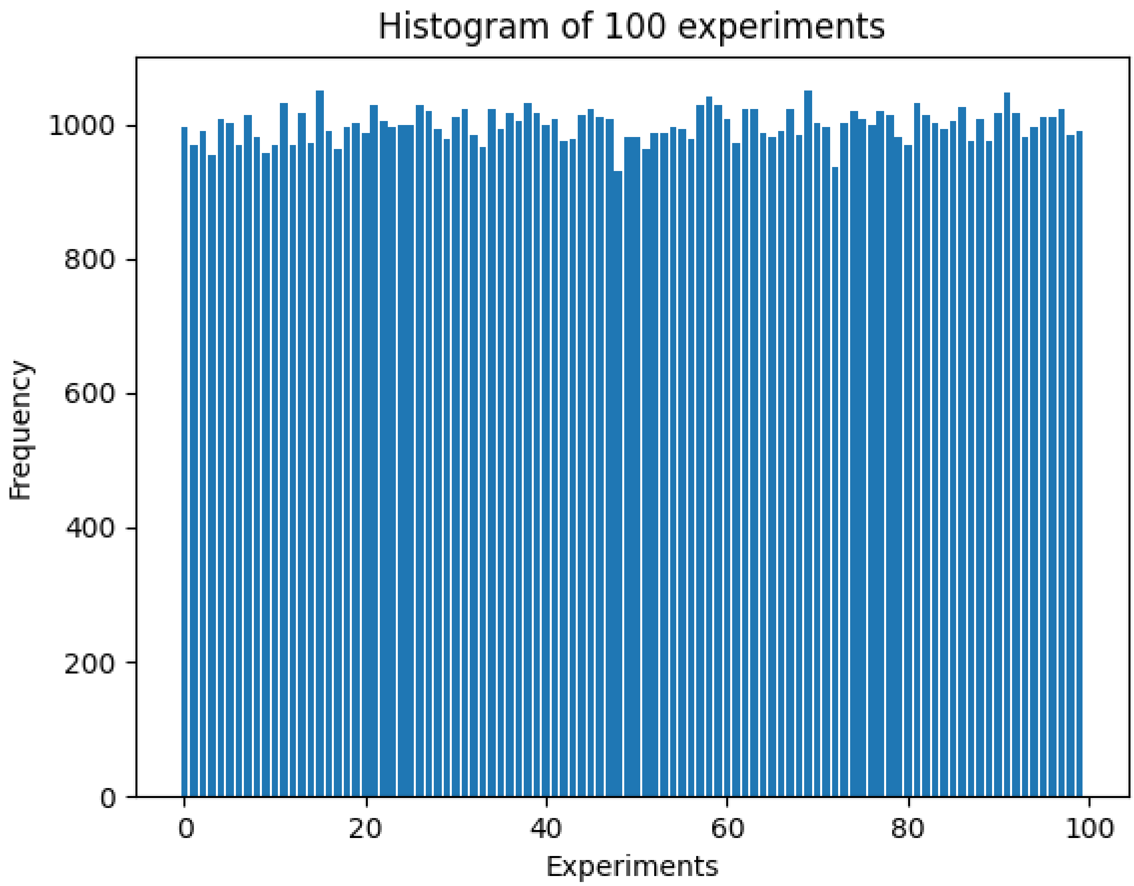


3)

100次实验平均值为299.43，与$np = 300$非常接近

4)尝试$p = 0.5, n = 2000$




Histogram of 100 experiments
Frequency
Experiments
0
200
400
600
800
1000
0
20
40
60
80
100

代码:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def experiment(n, probablity, ifprint, figname):
    tot = 0
    pos = 0
    freq = []
    frame = np.linspace(0, n, n)
    for i in range(n):
        x = np.random.rand()
        if(x <= probablity):
            pos += 1
        tot += 1
        freq.append(pos/tot)
    if(ifprint):
        plt.scatter(frame, freq, marker='o')
        plt.xlabel("Experiments")
        plt.ylabel("Frequency")
        plt.savefig(figname)
    return pos

# experiment(2000, 0.5, True, "3.png")
# exit()
num = []
for i in range(100):
    num.append(experiment(2000, 0.5, False, ""))
plt.bar(range(0, 100), num)
plt.title("Histogram of 100 experiments")
plt.xlabel("Experiments")
plt.ylabel("Frequency")
print(np.mean(num))
plt.savefig("4.png")
```