

第二周作业

1、

$$\begin{aligned} A + B + C &= \Omega - A^C B^C C^C \\ &= ABC + ABC^C + AB^C C + AB^C C^C + A^C BC + A^C BC^C + A^C B^C C \end{aligned}$$

其中每项之间互斥。

由Kolmogorov的概率论公理,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(ABC) + P(ABC^C) + P(AB^C C) + P(AB^C C^C) \\ P(B) &= P(ABC) + P(ABC^C) + P(A^C BC) + P(A^C BC^C) \\ P(C) &= P(ABC) + P(AB^C C) + P(A^C BC) + P(A^C B^C C) \\ P(AB) &= P(ABC) + P(ABC^C) \\ P(BC) &= P(ABC) + P(A^C BC) \\ P(AC) &= P(ABC) + P(AB^C C) \end{aligned}$$

代入公式:

$$\begin{aligned} LHS &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \\ &= P(ABC) + P(ABC^C) + P(AB^C C) + \cdots + P(A^C B^C C) \end{aligned}$$

2、

对于任意事件X,

1)

$$\begin{aligned} P(X|B) &= \frac{P(XB)}{P(B)} \\ P(XB) &> 0, P(B) > 0 \\ \text{所以} P(X|B) &> 0 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \Omega B &= B \\ P(\Omega|B) &= \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \end{aligned}$$

3)

对于 $A_i A_j = \varnothing, \forall i \neq j$

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B\right) &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)}{P(B)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i)}{P(B)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B) \end{aligned}$$

这样就证明了 $P(\cdot|B)$ 是概率函数

3、

1) $P(A) \geq P(A|B)$

错误，若AB互斥，则 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 0$ ，而 $P(A)$ 可以为一个大于0的值

2) 不存在既互斥也相互独立的事件 A, B

正确。若 A, B 互斥，则 $P(AB) = 0$ ，而 $P(A)$ 、 $P(B)$ 可以均不为0，此时独立条件 $P(AB) = P(A)P(B)$ 无法成立

3) 若 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ ，则 A, B, C 独立

错误，若 $C = \varnothing, P(C) = 0$ ，则上式成立，但 A, B, C 不独立

4、

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(A_2) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}, P(A_3) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}, P(A_5) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$P(A_2A_3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, P(A_2A_5) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_2A_5) \neq P(A_2)P(A_5)$$

所以 A_2, A_3 是相互独立的, A_2, A_5 不是相互独立的

5、

1) 条件独立 \nrightarrow 独立

假设有2枚硬币A、B, A出现正面的概率为99%, B出现正面的概率为1%, 随机取一枚硬币投掷

事件a:第一次出现正面

事件b:第二次出现正面

事件c:取的是第一枚硬币

$$P(ab) = \frac{0.99^2}{2} + \frac{0.01^2}{2} = 0.4901$$

$$P(a) = P(b) = \frac{0.99}{2} + \frac{0.01}{2} = 0.5$$

$$P(ab) \neq P(a)P(b)$$

所以a、b不相互独立

然而

$$P(ab|c) = 0.99^2 = 0.9801$$

$$P(a|c) = P(b|c) = 0.99$$

$$P(ab|c) = P(a|c)P(b|c)$$

在条件c下, a、b条件独立

2) 独立 \nrightarrow 条件独立

假设有2枚均匀硬币A、B, 分别投掷2硬币

事件a:A硬币出现正面

事件b:B硬币出现反面

事件c:A、B硬币出现的面相同

$$P(a) = P(b) = 0.5, P(ab) = 0.5^2 = P(a)P(b)$$

所以a、b相互独立

然而

$$P(a|c) = P(a|c) = 0.5, P(ab|c) = 0 \neq P(a|c)P(b|c)$$

在条件c下，a、b不条件独立

6、

记“事件A在第n轮前(包含第n轮)发生”为a

$$\begin{aligned} P(a^c) &= (1 - \varepsilon)^n \\ 1 - \varepsilon &< 0, \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon)^n = 0 \\ P(a) &= 1 - P(a^c) \rightarrow 1, \text{ 当 } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

7、

记“随机取一张卡牌放在桌上，朝上的面为红色”为事件A

记“随机取一张卡牌放在桌上，朝上的面为红色，朝下的面为黑色”为事件B

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ P(AB) &= P(B) = \frac{1}{6} \\ P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

8、这2种方式都是公平的

方案1中，任意一个人抓到“中”的概率是 $\frac{1}{n}$

方案2中，第k个人要抓到“中”，则要求前面k-1个人没有抓到，且自己在剩下的签里抓到，概率为

$$\frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}$$

9、

记“检查出阳性”为事件A，“小明患病”为事件B

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^C)P(B^C)} \\ &= \frac{1 \times 0.6}{1 \times 0.6 + 0.3 \times 0.4} \\ &= \frac{0.6}{0.72} \approx 83.3\% \end{aligned}$$

因为概率超过了80%，所以我会推荐手术

10、

1)

设 P_i 为有 i 元筹码时输光的概率，则有：

$$P_i = pP_{i+1} + (1 - p)P_{i-1}$$

变形得：

$$P_{i+1} - \frac{1}{p}P_i + \frac{1-p}{p}P_{i-1} = 0$$

特征方程：

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{1}{p}x + \frac{1-p}{p} &= 0 \\ x_1 = 1, x_2 &= \frac{1-p}{p} \end{aligned}$$

因此有：

$$\begin{aligned} P_i &= \alpha + \beta \left(\frac{1-p}{p} \right)^i \\ \begin{cases} P_0 = 1 \\ P_n = 0 \end{cases} \\ \text{记 } q &= \frac{1-p}{p}, \text{ 解得 } \alpha = \frac{-q^n}{1-q^n}, \beta = \frac{1}{1-q^n} \\ P_k &= \frac{q^k - q^n}{1-q^n} \end{aligned}$$

2)

当 $0 < p < 0.5$ ，有 $q > 1$ ， $n \rightarrow \infty$ 时， q^k 、1均为有限项， $P_k \approx \frac{-q^n}{-q^n} = 1$

11、

设有1个这种生物时灭亡的概率为 P ，

$$P = \frac{1}{3} \times (1 + P + P^2), \text{ 解得 } P = 1$$

所以该生物灭亡的概率为1

12、

记治愈为事件T,

若使用甲治疗方案, $P(T) = \sum_i P(B_i T) = \sum_i P(T|B_i)P(B_i) = (0.8, 0.1, 0.1) \cdot (0.8, 0.05, 0.1) = 0.655$

若使用乙治疗方案, $P(T) = \sum_i P(B_i T) = \sum_i P(T|B_i)P(B_i) = (0.8, 0.1, 0.1) \cdot (0.6, 0.9, 0.9) = 0.66$

乙方案的治愈率比甲方案高, 我会建议乙方案。甲方案也可以被建议, 原因在于它的治愈率与乙方案接近, 而且对病症A的治愈率显著高于乙方案

13、

1)

由全概率公式:

$$P(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = 0.6$$

2)

若放回:

$$P(B_2) = P(B_1) = 0.6$$

若不放回:

$$\begin{aligned} P(B_2) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right), \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

放回与不放回摸到黑球的概率是一样的, 因为并未从之前的过程中获得能产生影响的信息, 第二次摸的球为黑与第一次摸的球为黑本质上没有区别

3)

$$P(B_2|B_1) = \frac{P(B_2B_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{2} \times ((\frac{4}{5})^2 + (\frac{2}{5})^2)}{0.6} = \frac{2}{3}$$

$P(B_2|B_1) > P(B_2)$, 因为已知第一个球为黑球, 这使取得1号袋的可能性增加了

4)

$$\begin{aligned} P(B_1B_2 \cdots B_n) &= \frac{1}{2} \times ((\frac{4}{5})^n + (\frac{2}{5})^n) \\ P(B_{n+1}|B_1 \cdots B_n) &= \frac{\frac{1}{2} \times ((\frac{4}{5})^{n+1} + (\frac{2}{5})^{n+1})}{\frac{1}{2} \times ((\frac{4}{5})^n + (\frac{2}{5})^n)} \\ &= \frac{(\frac{4}{5})^{n+1} + (\frac{2}{5})^{n+1}}{(\frac{4}{5})^n + (\frac{2}{5})^n} \\ &= \frac{\frac{4}{5} + (\frac{1}{2})^n \times \frac{2}{5}}{1 + (\frac{1}{2})^n} \\ &\approx \frac{4}{5}, \text{ 当 } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

可以理解为当前面一直出现黑球, 几乎能断定取的是1号袋

5)

记取1号袋为事件A

$$\begin{aligned} P(A|B_1 \cdots B_n) &= \frac{P(B_1 \cdots B_n|A)P(A)}{P(B_1 \cdots B_n)} \\ &= \frac{(\frac{4}{5})^n \times 0.5}{\frac{1}{2} \times ((\frac{4}{5})^n + (\frac{2}{5})^n)} \\ &= \frac{(\frac{4}{5})^n}{(\frac{4}{5})^n + (\frac{2}{5})^n} \\ &\approx 1, \text{ 当 } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

当1到n次都取得黑球, 几乎可以断定取得的是1号袋

14、

1)

我选甲，单独选择一个对手无必胜策略

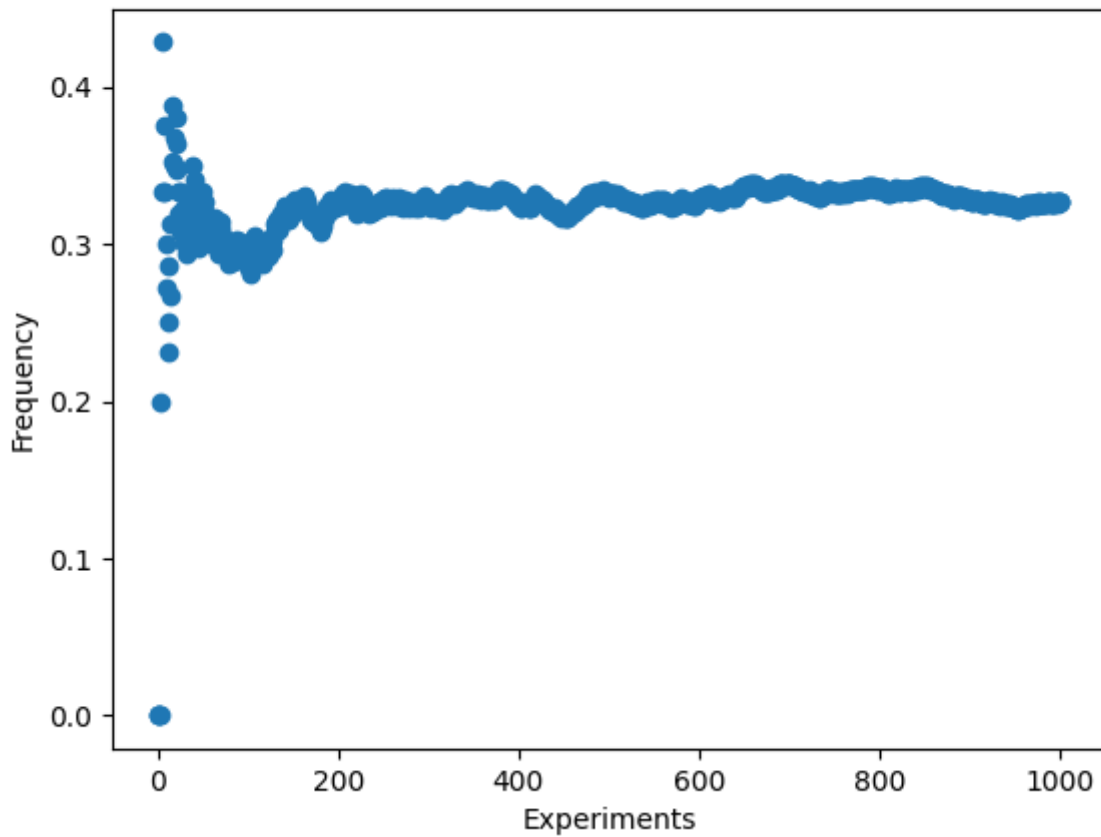
2)

$$\begin{aligned}5 \times (1 - P_{\text{甲}}(B)) - 20 \times P_{\text{甲}}(B) &= 0 \\P_{\text{甲}}(B) &= 0.2 \\-15 \times P_{\text{乙}}(A) + 10 \times (1 - P_{\text{乙}}(A)) &= 0 \\P_{\text{乙}}(A) &= 0.4\end{aligned}$$

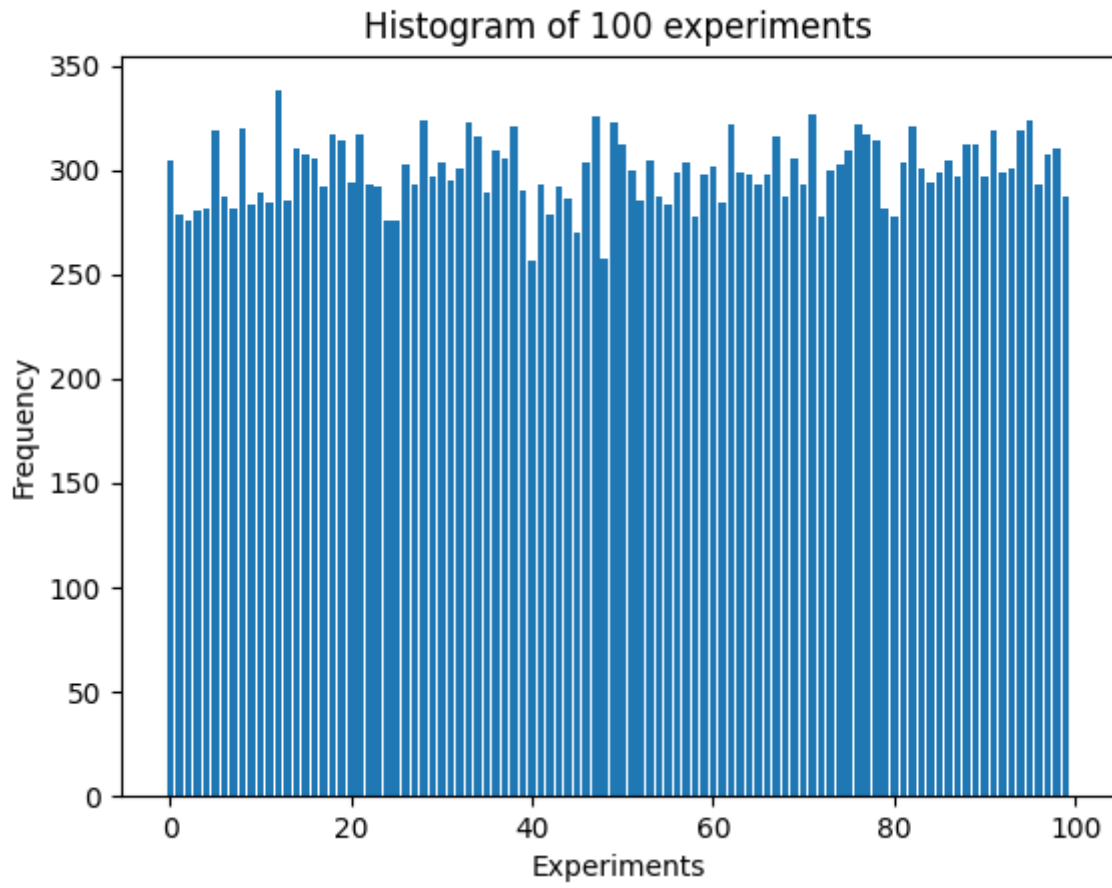
$P_{\text{甲}}(B) + P_{\text{乙}}(A) = 0.6 < 1$ ，这说明甲乙都自信自身能够赢，可以通过对冲寻找到必胜策略

15、

1) 散点图：



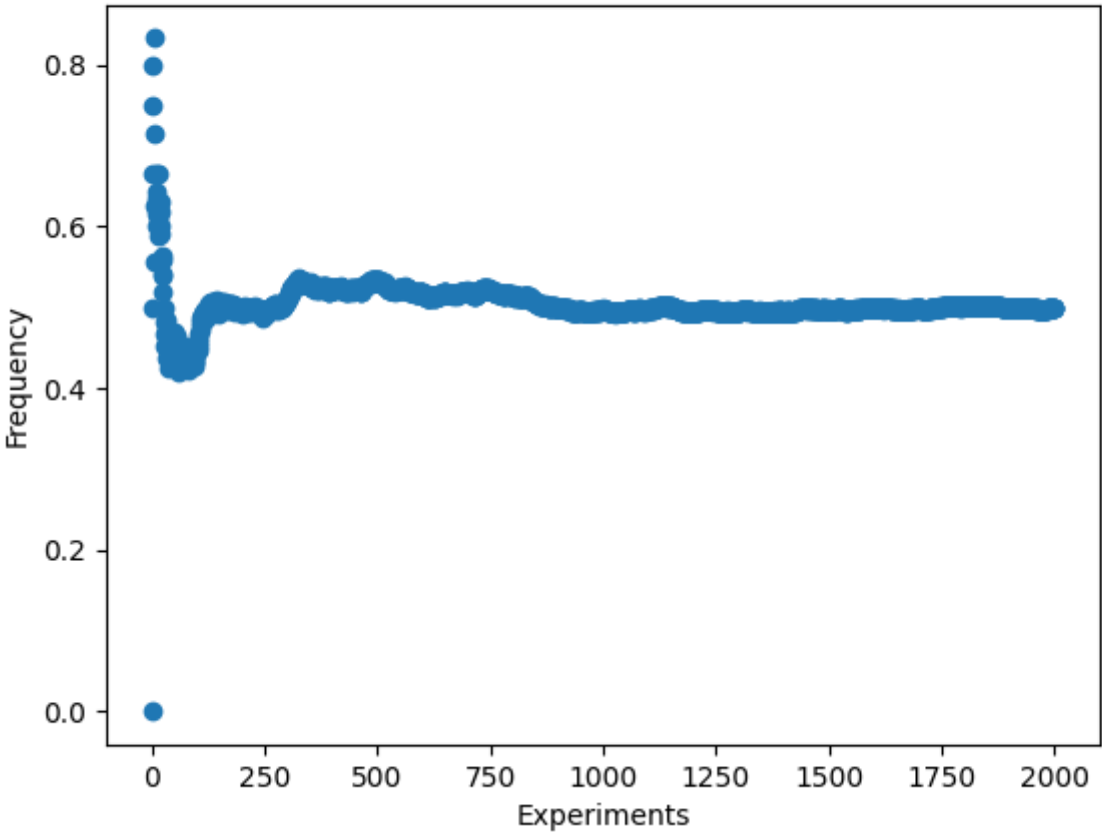
2) 100正面朝上直方图

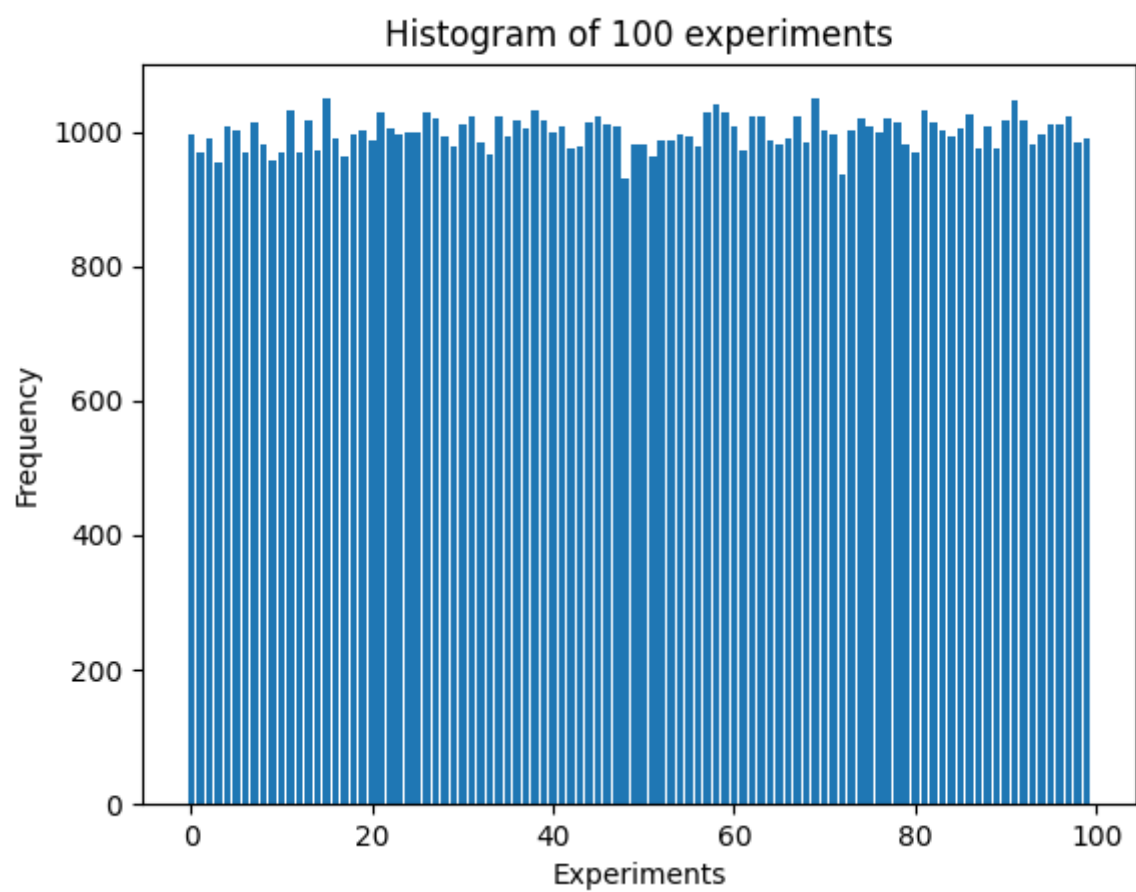


3)

100次实验平均值为299.43，与 $np = 300$ 非常接近

4)尝试 $p = 0.5, n = 2000$





代码:

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def experiment(n, probablity, ifprint, figname):
    tot = 0
    pos = 0
    freq = []
    frame = np.linspace(0, n, n)
    for i in range(n):
        x = np.random.rand()
        if(x <= probablity):
            pos += 1
        tot += 1
        freq.append(pos/tot)
    if(ifprint):
        plt.scatter(frame, freq, marker='o')
        plt.xlabel("Experiments")
        plt.ylabel("Frequency")
        plt.savefig(figname)
    return pos

# experiment(2000, 0.5, True, "3.png")
# exit()
num = []
for i in range(100):
    num.append(experiment(2000, 0.5, False, ""))
plt.bar(range(0, 100), num)
plt.title("Histogram of 100 experiments")
plt.xlabel("Experiments")
plt.ylabel("Frequency")
print(np.mean(num))
plt.savefig("4.png")

```