蒲丰投针法计算π值

2023年11月21日

夏泽宇 2021012242

1.实验原理

蒲丰投针实验的设置如下:
在平面上有若干条平行且间距为$2a$的线，重复投掷长度为$2l$的针。
每次投针试验， 实际上是从两个均匀分布的随机变量中抽样得到x, θ， 定义描述针与平行线相交状况的随机变量$s(x, \theta)$为:

$$s(x,\theta)=\begin{cases}1 & ,x\le lsin\theta\\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

投针与直线相交概率为:

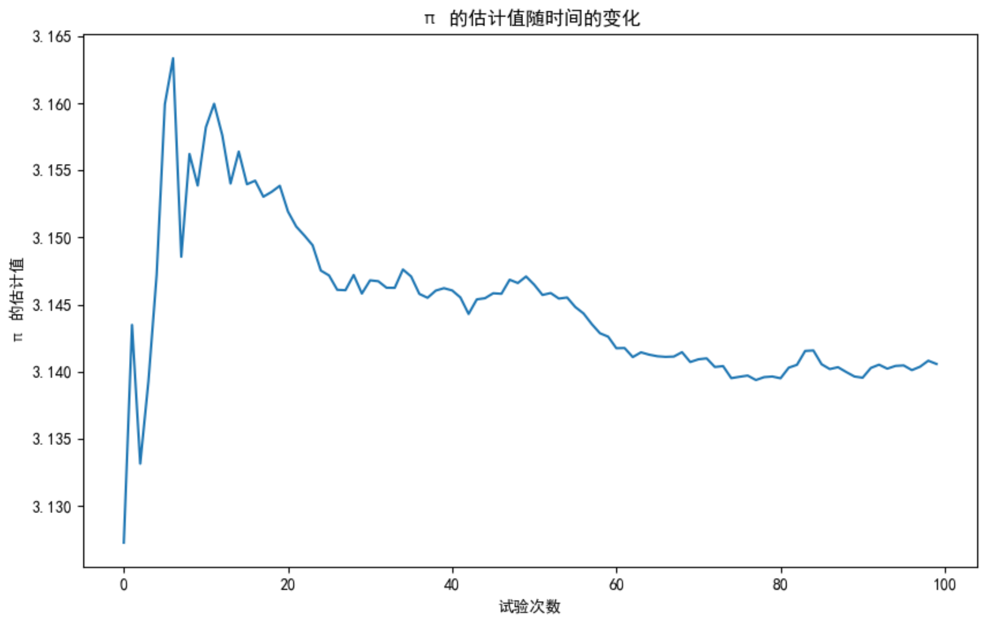
$$P=\iint s(x,\theta)f_1(x)f_2(\theta)dxd\theta=\int_0^\pi \frac{d\theta}{\pi}\int_0^{l\sin\theta}\frac{dx}{a}=\frac{2l}{\pi a}$$

于是有:

$$\pi=\frac{2l}{aP}\approx\frac{2l}{a\bar{s}_N},\text{其中}\bar{s}_N=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}s\left(x_i,\theta_i\right)$$

2.实验结果

在$a=4$，$l=3$的条件下，进行了$N=1000000$次投针实验，得到π的估计值随实验次数增加的图像如下:



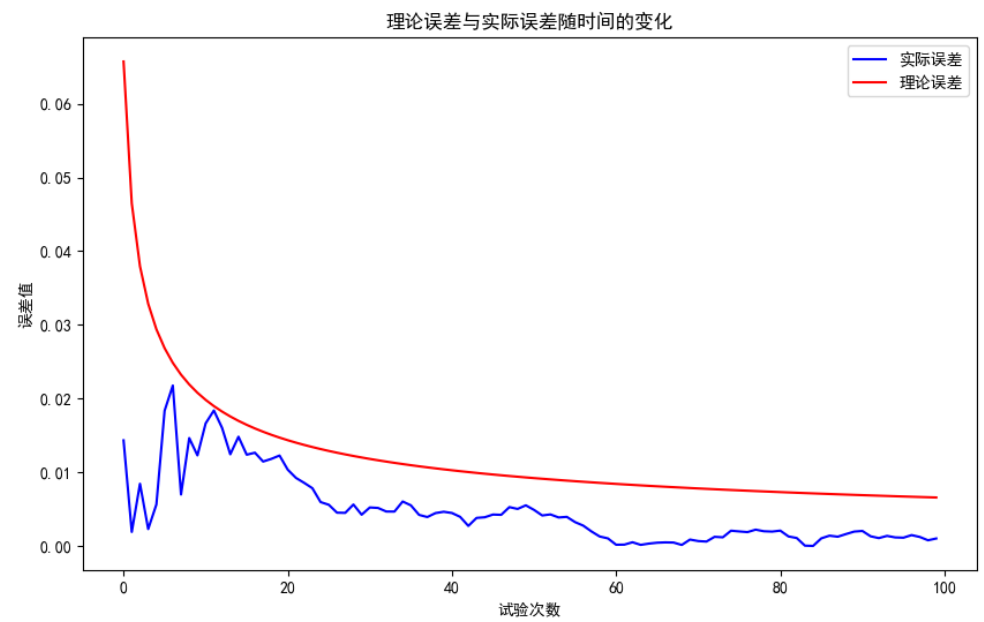
可以看到，随着实验次数的增加，π的估计值逐渐收敛于真实值π。实验最后的π估计值为3.14058

3.误差分析

由于π的估计值为$\pi = \frac{2l}{a\bar{s}_N}$，取2倍标准差计算，$\pi$的估计值的理论误差为：

$$\Delta\pi = \frac{\pi}{p}\frac{2\sigma_p}{\sqrt{N}} = 2\pi\sqrt{\frac{1-p}{Np}}$$

通过计算π的实际误差与理论误差，得到如下图像：



可以看到，实际误差均在理论误差之内，实验结果可信。

4.实验代码

代码见：/code/main.py