计算机模拟物理大作业

夏泽宇

2024 年 1 月 5 日

1　悬挂系统的数学模型

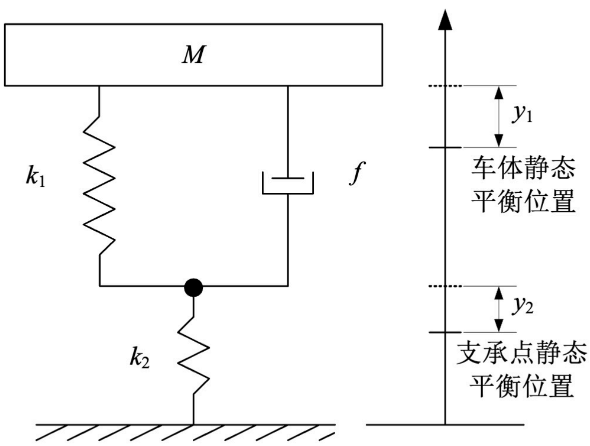

图 1: 示意图

如上图所示，设车体质量的 1/4 为 M，轮胎质量为 m，k_1 为车弹簧弹性系数，k_2 为轮胎弹性系数。减震阻尼不承重，仅提供阻尼 f。

考虑车体的运动方程，设车体相对平衡位置的位移为 y_1，轮胎 (支承点) 相对平衡位置的位移为 y_2，则有:

$$\begin{aligned} M\ddot{y_1} &= -f(\dot{y_1}-\dot{y_2}) - k_1(y_1-y_2) \\ m\ddot{y_2} &= f(\dot{y_1}-\dot{y_2}) + k_1(y_1-y_2) - k_2y_2 \end{aligned} \tag{1}$$

将式 (1) 改写为矩阵形式，有:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y_1} \\ \ddot{y_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f & -f \\ -f & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y_1} \\ \dot{y_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} f & -f \\ -f & f \end{bmatrix} \; C = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix}$$

$$A\ddot{y} + B\dot{y} + Cy = 0 \tag{2}$$

考虑上述二阶常微分方程组的特征方程，其特征矩阵为:

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{bmatrix}$$

代入具体值即可通过计算得到特征值，其虚部表征了系统的特征频率。

2 悬挂系统的数值模拟

2.1 特征频率

通过查阅资料，得到了悬挂系统的参数，如下表所示：

参数	M	m	k_1	k_2	f
数值	500kg	50kg	20kN/m	200kN/m	200N·s/m

表 1: 悬挂系统参数

在此参数下，通过计算得到特征频率为：10.5550Hz、0.9591Hz。

计算过程见于 code 文件夹下的 frequency.m 代码。

2.2 阶跃响应

考虑在 $t=0$ 时刻，轮胎受到一个冲量，使轮胎有向上的位移和速度，无妨设为即 $y_2(0)=1$，$\dot{y}_2(0)=1$。通过模拟车辆的运动，得到 y_1 和 y_2 的变化情况，如下图所示：

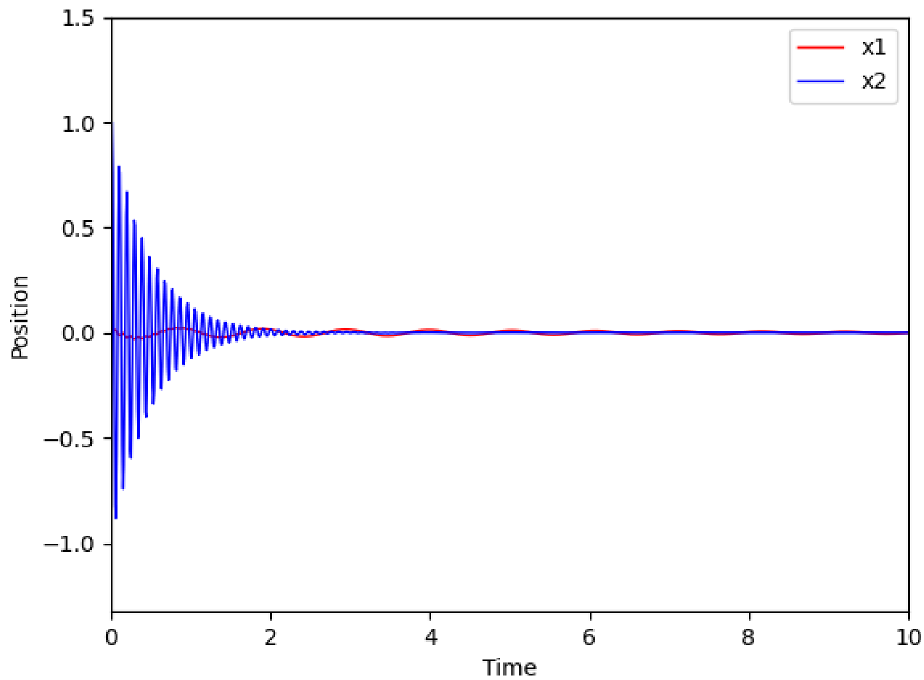

图 2: 阶跃响应

在此冲击下，0 时刻轮胎相较平衡位置有一个较大的位移和速度，但由于弹簧和阻尼器的作用，振幅很快衰减。一部分能量同时传播到车身上，使车身发生振动。整个过程中，轮胎的位移和速度有一个较大的变化，其振幅为 0.901m；但是车体的位移和速度变化较小，其振幅为 0.0223m 说明悬挂系统的减震效果较好。

2.3 正弦响应

考虑从 $t = 0$ 时起，轮胎受到一个周期性的正弦信号，$f(t) = 1000sin(2\pi ft + \frac{\pi}{2})$，同上面一样，设初始条件为 $y_2(0) = 1$，$\dot{y_2}(0) = 1$。取正弦信号的频率为特征频率 10.5550Hz，通过模拟车辆的运动，得到 y_1 和 y_2 的变化情况，如下图所示：

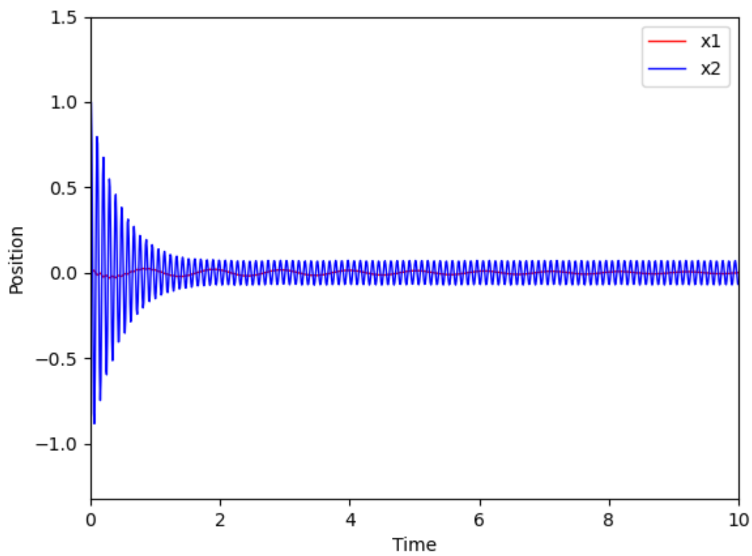

图 3: 正弦响应

可以看到，在此特征频率下，轮胎的振幅较大，为 0.0717m，而车体的振幅依然很小，为 0.0118m。特征频率是同等振幅下引起车身振幅最大的振动频率，在此频率下的车身振幅完全是可接受的，这证实了减震系统的有效性。

2.4 幅频特性

对于频率变化的正弦激励信号 $f(t) = 1000sin(2\pi ft + \frac{\pi}{2})$，$f$ 从 0Hz 到 15Hz 变化。通过模拟车辆的运动，得到 y_1 和 y_2 对应振幅的变化情况，如下图所示：

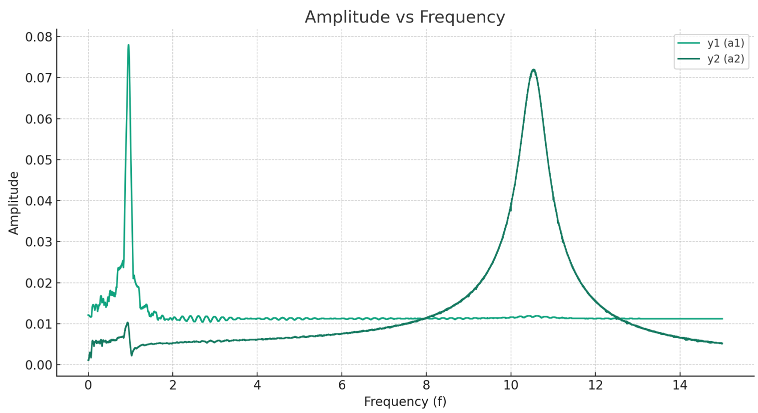

图 4: 幅频特性曲线

从图中可以看出，幅频特性曲线的 2 个极大值就是前面计算得到的特征频率，这印证了计算过程的正确性。

3 总结

通过对悬挂系统的数学模型的建立，可以得到悬挂系统的特征频率；通过对悬挂系统的数值模拟，可以得到悬挂系统的阶跃响应、正弦响应和幅频特性曲线。在选定参数下，对悬挂系统在不同激励下的响应进行了分析，并测得了幅频特性曲线。多重实验结果表明了悬挂系统的有效性。