计算机模拟物理作业

2023年10月18日

夏泽宇 2021012242

1.1

设左侧弹簧长度为l_1, M初始位置为x_1。中间弹簧长度为l_2，m初始位置为x_2。可列出运动方程：

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1(x_1 - l_1) + k_2(x_2 - x_1 - l_2) \tag{1}$$
$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -Asin(\omega t) - k_2(x_2 - x_1 - l_2) \tag{2}$$

令$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$，$K = \begin{bmatrix} -k_1 - k_2 & k_2 \\ k_2 & -k_2 \end{bmatrix}$，则有$MX'' = KX + b$

共振频率仅有系统本身决定，因此可不考虑由外力带来的影响，即上式中的b项，仅考虑线性方程组$MX'' = KX$
线性方程组可变形为$X'' = M^{-1}KX$

注意到$M^{-1}K$可逆，因此可对角化为$P^{-1}DP$，其中$D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$

因此由$PX'' = DPX$
令$Z = PX$，有$Z'' = DZ$，即$z_i'' = \lambda_i z_i, i = 1, 2$，可得$z_i = Ae^{\sqrt{\lambda_i}x} + Be^{-\sqrt{\lambda_i}x}$

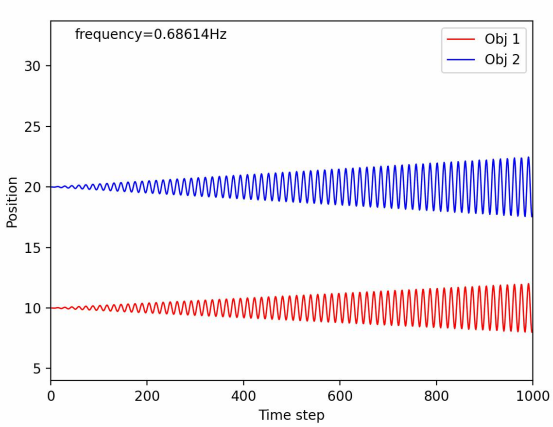
代入数值得$M = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$，$K = \begin{bmatrix} -1600 & 1000 \\ 1000 & -1000 \end{bmatrix}$，$M^{-1}K = \begin{bmatrix} -80 & 50 \\ 100 & -100 \end{bmatrix}$

$M^{-1}K$的特征值$\lambda_1 = -18.5857, \lambda_2 = -161.4143$

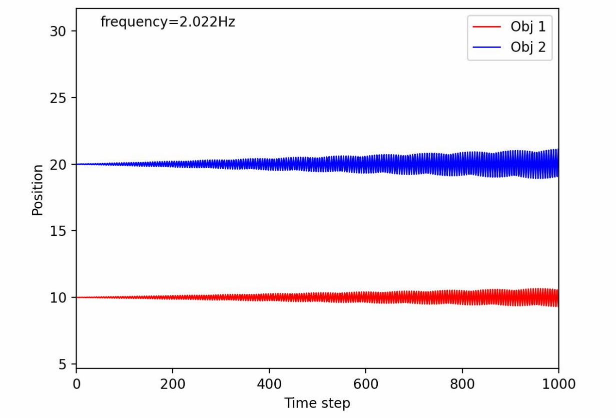
$$z_1 = Ae^{\sqrt{18.5857}ix} + Be^{-\sqrt{18.5857}ix} = Asin(4.311x) + Bcos(4.311x)$$
$$z_2 = Ae^{\sqrt{161.4143}ix} + Be^{-\sqrt{161.4143}ix} = Asin(12.705x) + Bcos(12.705x)$$

因此固有频率$\omega_1 = 4.311\ rad/s$，$\omega_2 = 12.705\ rad/s$。当驱动力为这2个频率时会发生共振

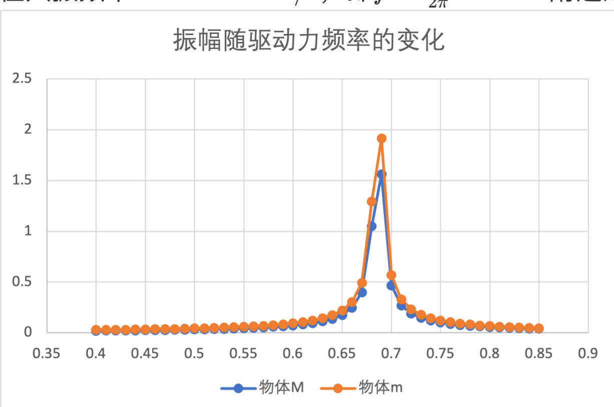
$\omega = 4.311\ rad/s$时，物体运动随时间变化的$x - t$图像如下：



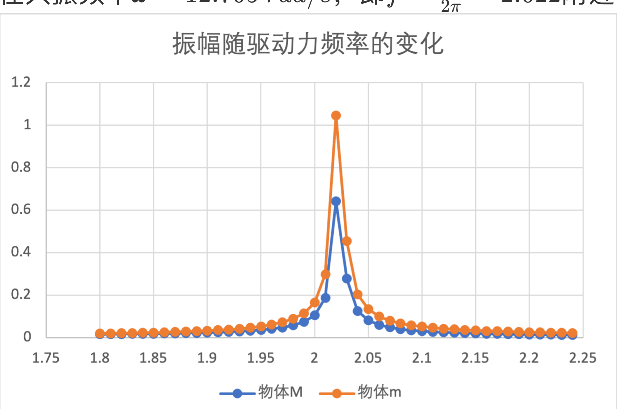
$\omega = 12.705\ rad/s$时，物体运动随时间变化的$x - t$图像如下：



通过分析共振频率附近频谱的振幅，可得到以下图像
在共振频率$\omega = 4.311\ rad/s$，即$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.686$附近的振幅 $-$ 频率关系如下



在共振频率$\omega = 12.705\ rad/s$，即$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2.022$附近的振幅 $-$ 频率关系如下



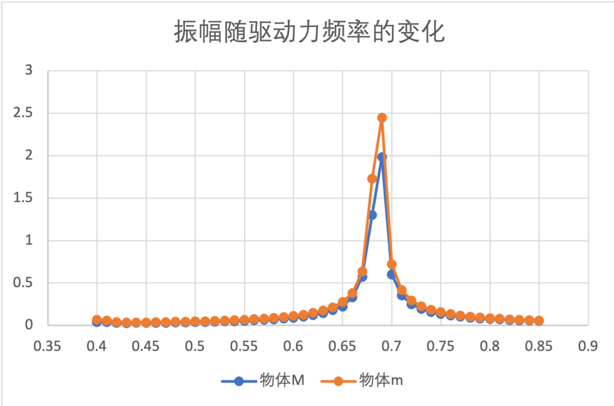
可见在共振频率附近，振幅会显著增大，且理论计算值与模拟值相当一致

1.2

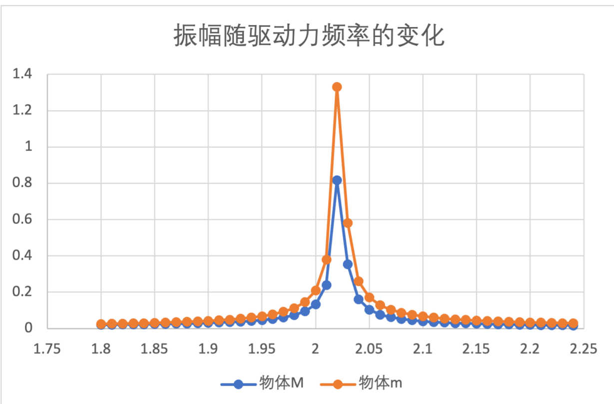
将外力改为矩形波，即：

$$f(t) = \begin{cases} A & , kT \leq t < (k+\frac{1}{2})T \\ -A & , (k+\frac{1}{2})T \leq t < (k+1)T \end{cases}$$

在模拟中取$A = 5, T = \frac{1}{f}$。在2个振动频率附近的振幅 $-$ 频率关系见下图。
在共振频率$f = 0.686$附近的振幅 $-$ 频率关系如下：



在共振频率$f = 2.022$附近的振幅 – 频率关系如下：



可以看出在矩形波的作用下，由于系统不变，共振频率仍为$f = 0.686Hz$和$2.022Hz$。但由于驱动力的不同，整体振幅发生了变化。由于矩形波作用的力为定值，总体功更大，因此系统的振幅也更大。

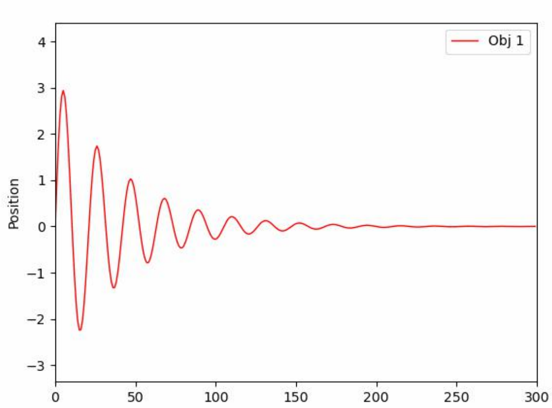
2.1

对于该运动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \gamma\frac{dx}{dt}$$

代入特征方程$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$
求根，得$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4\omega_0^2}}{2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$，$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
在欠阻尼状态下，$\gamma^2 - 4\omega_0^2 < 0$
$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(c_1\cos\omega_1 t + c_2\sin\omega_1 t\right) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} A\cos\left(\omega_1 t + \phi\right)$，其中$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$，因此共振频率即为$\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \approx 2.9896\ rad/s$

模拟得到的运动轨迹如下图



2.2

临界阻尼系数即满足$\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} = 0$的$\gamma$值。在本题中$\gamma = 2\omega_0 = 6$，模拟得到的图像如下