Tema 1: Espacios Afines

Eduardo Peña Royuela

Febrero 2020

1. *En* $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ *con la referencia natural considerad el punto p = (3, 5, 1) y las rectas r y s de ecuaciones*

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \qquad s : (x, y, z) = (1, 1, 0) + [(1, 1, 1)]$$

(a) *Encontrad una recta l que corte r y s y que contenga el punto p*

Veamos primero si $r \cap s \neq \emptyset$, para esto pasaremos s a ecuaciones cartesianas mediante eliminación Gaussiana.

$$\begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 1 & y-1 \\ 1 & z \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & y-x \\ 0 & z-x+1 \end{pmatrix} \implies s = \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

Calculemos ahora la intersección de r, s :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z - 2 = 0 \\ x - y = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -y \\ x = y \end{cases} \implies x = y = 0 \implies \begin{cases} 0 = 0 \\ z = 2 \\ 0 = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

Como podemos observar, este sistema es claramente incompatible, por tanto la intersección de r y s es vacía. Comprobemos ahora si $r \parallel s$. Para esto pasemos r a sus ecuaciones paramétricas.

$$r : (x, y, z) = (0, 0, 2) + [(1, -1, -1)]$$
$$s : (x, y, z) = (1, 1, 0) + [(1, 1, 1)]$$

Se ve claramente que los vectores directores de s y r son linealmente independientes, por tanto $r \nparallel s$. Como consecuencia, r y s se cruzan. En esta situación no podemos aprovecharnos de la posición relativa de estas rectas para construir l, entonces tendremos que imponer que corte a r y s en dos puntos distintos y crear la recta después. Sea $A = l \cap r$ y sea $B = l \cap s$, entonces A es de la forma $(a, -a, 2-a)$ y B es de la forma $(b+1, b+1, b)$. Sea $\vec{AB} = (b-a+1, b+a+1, b+a-2)$, construimos la siguiente recta:

$$l = B + \vec{AB} = \begin{cases} x = b+1+c(b-a+1) \\ y = b+1+c(b+a+1) \\ z = b+c(b+a-2) \end{cases}$$

Imponiendo que contenga a p y resolviendo el sistema obtenemos:

$$\begin{cases} b+1+c(b-a+1) = 3 \\ b+1+c(b+a+1) = 5 \\ b+c(b+a-2) = 1 \end{cases} \implies a = b = c = 1$$

Como el sistema anterior es compatible determinado, la recta l es la única que cumple las hipótesis del enunciado. Su expresión en forma paramétrica es:

$$l : (x, y, z) = (2, 2, 1) + [(1, 3, 0)]$$

(b) *Encontrad una referencia afin $\bar{R}$ en la cual $r : \bar{y} = \bar{z} = 0$, $s : \bar{x} = \bar{z} - 2 = 0$ y $p = (0, 0, a)_{\bar{R}}$.*

Para encontrar $\bar{R}$, pasemos primero las ecuaciones cartesianas que definen a r y s en la referencia $\bar{R}$ a sus ecuaciones paramétricas.

$$r : (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 0) + [(1, 0, 0)]$$
$$s : (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 2) + [(0, 1, 0)]$$

Sea $\bar{R} = \{p_0; v_1, v_2, v_3\}$, podemos observar fácilmente que v_1 es el vector director de r y que v_2 es el vector director de s.

$$(1, 0, 0)_{\bar{R}} = 1(v_1) + 0(v_2) + 0(v_3) \implies v_1 = (1, -1, -1)$$
$$(0, 1, 0)_{\bar{R}} = 0(v_1) + 1(v_2) + 0(v_3) \implies v_2 = (1, 1, 1)$$

Una vez encontrados v_1 y v_2, necesitamos un tercer vector linealmente independiente con estos dos vectores para formar la base de la referencia. Vectores linealmente independientes a v_1, v_2 hay infinitos, pero podemos hacer uso de lo siguiente: vemos que $p = (0, 0, a)_{\bar{R}}$

y como solo tiene entradas diferentes de 0 en la tercera componente esto implica que p vive en $< v_3 >$. Por tanto, de los infinitos vectores linealmente independientes con v_1, v_2 si imponemos que además el espacio que genera este vector contenga a p, solamente hay un vector que cumpla esto. Este es el vector director de la recta l del apartado **(a)**. Como sabemos $p \in l$ y además $l \cap r \neq \emptyset, l \cap s \neq \emptyset \implies v_1, v_2, v_3$ l.i, siendo v_3 un múltiple del vector director de l. Es decir, $v_3 = \lambda(1, 3, 0)$. La λ será determinada más adelante en este ejercicio, de momento nos serviremos de que v_3 sea un múltiple de (1, 3, 0).

Ahora que ya hemos encontrado los vectores de la base de la referencia $\bar{R}$, observamos que $(0, 0, 0)_{\bar{R}} \in r_{\bar{R}}$. Esto significa que el punto p_0 de la referencia $\bar{R}$ pertenece a la recta r. Otra observación a hacer es la siguiente:

$$p_{\bar{R}} = (0, 0, a)_{\bar{R}} \implies p_0 + 0(v_1) + 0(v_2) + a(v_3) = p_0 + a\lambda(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0) = (3, 5, 1) = p$$

Como p en la referencia ordinaria tiene un 1 en la tercera componente y v_3 es nulo en la tercera componente, implica que p_0 tiene que tener un 1 en su tercera componente. Imponiendo esto y teniendo en cuenta que p_0 pertenece a r, tenemos:

$$r = \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases} , \quad (\text{con z} = 1)$$

Por tanto p_0 = (1, -1, 1) en la referencia ordinaria.

Finalmente solo nos queda determinar qué múltiple del vector v_3 forma parte de la referencia $\bar{R}$, dicho de otra manera, queda determinar la λ.

$$(0, 0, 2)_{\bar{R}} \in s \implies p_0 + 2\lambda v_3 \in s \implies (1 + 2\lambda, -1 + 6\lambda, 1) \in s \iff$$

$$\begin{cases} (1 + 2\lambda) + (1 - 6\lambda) = 0 \\ (1 + 2\lambda) - (1) = 1 \end{cases} \iff \lambda = \frac{1}{2}$$

De modo que $v_3 = \lambda(1, 3, 0) = \frac{1}{2}(1, 3, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$.

En conclusión, la referencia afín que es requerida en el enunciado de este ejercicio es $\bar{R} = \{p_0; v_1, v_2, v_3\} = \{(1, -1, 1); (1, -1, -1), (1, 1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)\}$.

(c) *Decid cuento vale a*

Sabiendo que $\bar{R} = \{(1,-1,1);(1,-1,-1),(1,1,1),(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0)\}$, es inmediato comprobar que $a = 4$, ya que:

$$p_{\bar{R}} = (0,0,a)_{\bar{R}} \Longrightarrow \; p_0 + a(v_3) = (1,-1,1) + a(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0) = (3,5,1) = p_R$$

$$(1+\frac{a}{2},-1+\frac{3a}{2},1) = (3,5,1) \iff a = 4$$

Una manera alternativa de proceder es mediante el cálculo de razones simples, que recordemos, su valor es independiente de la referencia escogida. Entonces, sea $A = r \cap l$, $B = s \cap l$ y el punto p. Como $A, B, p \in l$, esto implica que estos tres puntos están alineados y que podemos calcular su razón simple:

$$p = (3,5,1) \quad A = (1,-1,1) \quad B = (2,2,1)$$

$$(p,A,B) = \frac{2-3}{1-3} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, expresando los puntos p, A, B en la referencia $\bar{R}$ y calculando su razón simple:

$$p_{\bar{R}} = (0,0,a) \quad A_{\bar{R}} = (0,0,0) \quad B_{\bar{R}} = (0,0,2)$$

$$(p,A,B)_{\bar{R}} = \frac{2-a}{-a} = \frac{1}{2} \iff a = 4$$

2. *Discutid en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ la posición relativa de los planos π_1 y π_2 de $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ que tienen por ecuaciones en la referencia natural*

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -2\lambda + \mu \\ z = 2 + \mu \\ u = 2 \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \qquad \pi_2 : \begin{cases} x - 2u = 0 \\ x + 2y - az = 1 \end{cases}$$

Antes de empezar, recordemos que existen solamente 3 posibles posiciones relativas de estos planos: $\pi_1 \parallel \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$ o, si no se dan ninguna de los anteriores escenarios, π_1, π_2 se cruzan.

Primero comprobaremos si por algún valor de a los planos π_1 y π_2 se cortan. Para eso substituimos en las ecuaciones que definen π_2 los valores de las coordenadas de π_1 en función de λ i μ :

$$\begin{cases} (1 + \lambda + \mu) - 2(2) = 0 \\ (1 + \lambda + \mu) + 2(-2\lambda + \mu) - a(2 + \mu) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ -3\lambda + 3\mu - a\mu = 2a \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación substituyendo la primera ecuación en función de μ en la segunda, nos queda:

$$-3(3 - \mu) + 3\mu - a\mu = 2a \implies -9 + \mu(6 - a) = 2a \implies \mu = \frac{2a + 9}{(6 - a)}$$

Observamos que si $a \neq 6$ el sistema anterior es un sistema compatible determinado, y por tanto, **los planos se cortan en un punto**. Calculemos la expresión de este punto en función de a :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ \mu = \frac{2a+9}{6-a} \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = \frac{9-5a}{6-a} \\ \mu = \frac{2a+9}{6-a} \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 + \frac{9-5a}{6-a} + \frac{2a+9}{6-a} = 4 \\ y = \frac{-2(9-5a)}{6-a} + \frac{2a+9}{6-a} = \frac{-9+12a}{6-a} \\ z = 2 + \frac{2a+9}{6-a} = \frac{21}{6-a} \\ u = 2 \end{cases}$$

Por tanto, si $a \neq 6$,

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{-9+12a}{6-a} \\ \frac{21}{6-a} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ahora el único caso que nos queda comprobar es cuando $a = 6$, que como sabemos que los planos no intersecan, tenemos que comprobar si son paralelos, en caso contrario los planos se cruzan. Para esto expresemos π_1 en forma paramétrica:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Sean v_1 = (1, -2, 0 0) y v_2 = (1, 1, 1, 0) los vectores directores de π_1, entonces:
$\pi_1 \parallel \pi_2 \Longleftrightarrow v_1$ y v_2 satisfacen las ecuaciones homogéneas que definen a π_2. Comprobemos esto último con v_1 :

$$\begin{cases} 1 - 2(0) = 1 = 0 \\ 1 + 2(-2) - 6(0) = 1 - 4 = -3 = 0 \end{cases}$$

Como hemos visto, v_1 no satisface las ecuaciones de π_2 homogenizadas, por tanto, sin necesidad de comprobarlo por v_2 (ya que π_1 y π_2 son variedades lineales con la misma dimensión), podemos afirmar que $\pi_1 \nparallel \pi_2$. Así que por $a = 6$ los planos no se intersecan ni son paralelos, por tanto π_1, π_2 **se cruzan**.