Tema 2: Afinidades

Eduardo Peña Royuela

Marzo 2020

1. *Dado un paralelogramo ABCD en el plano afín, consideremos la familia de afinidades f tal que f(A) = B, f(B) = C y f(C) es un punto de la recta AD.*

(a) *Demostrad que hay una única afinidad de la familia sin puntos fijos y expresadla como la combinación de una homología seguida de una translación.*

(b) *Demostrad que todas las otras afinidades de la familia tienen un punto fijo y encontrad el sitio geométrico de este punto.*

(a) Consideremos la referencia $R = \{A; \vec{AB}, \vec{AC}\}$. Entonces tenemos que:

$$A_R = (0,0) \quad B_R = (1,0) \quad C_R = (0,1)$$

Sabiendo que las imágenes de A, B, C son B, C y un punto de la recta AD respectivamente, tenemos:

$$\begin{gathered} f(A)_R = B_R = (1,0)_R \\ f(\vec{AB})_R = f(B)_R - f(A)_R = C_R - B_R = (0,1) - (1,0) = (-1,1) \\ f(\vec{AC})_R = f(C)_R - f(A)_R = (-\lambda, \lambda) - (1,0) = (-\lambda - 1, \lambda) \end{gathered}$$

En la última de las igualdades anteriores se ha usado que $f(C) \in r := A + [\vec{AD}]$ y que $ABCD$ es un paralelogramo. Por tanto,

$$\begin{cases} f(C) \in r := A + [\vec{AD}] \\ \vec{AD} = \vec{BC} \quad \text{(Regla del paralelogramo)} \end{cases} \implies f(C) \in r := A + [\vec{BC}] = (0,0)_R + [(-1,1)_R]$$

Resultando en:

$$f(\vec{AC}_R) = f(C)_R - f(A)_R = (-\lambda, \lambda) - (1,0) = (-\lambda - 1, \lambda)$$

Donde $(-\lambda, \lambda)$ es un punto genérico de la recta r.

Una vez encontrada la imagen por f de la base y del centro de la referencia R, podemos determinar la matriz genérica en función de λ de esta familia de afinidades. Esta es:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -\lambda - 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Sabemos que una afinidad tiene puntos fijos $\Longleftrightarrow$ $\text{rango}(\widetilde{A} - I) = \text{rango}(\widetilde{A} - I|b)$. Por tanto, calculemos el rango en función del parámetro λ.

$$(\widetilde{A} - I|b) = \begin{pmatrix} -2 & -\lambda - 1 & | & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & | & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & \lambda - 3 & | & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & | & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 1 & | & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Como podemos observar, si $\lambda \neq 3 \Longrightarrow \text{rango}(\widetilde{A} - I) = \text{rango}(\widetilde{A} - I|b) = 2$ y por consecuente las afinidades de la familia que cumplan esta condición contienen puntos fijos. Por otro lado, si $\lambda = 3 \Longrightarrow \text{rango}(\widetilde{A} - I) = 1 \neq 2 = \text{rango}(\widetilde{A} - I|b)$. Así pues, existe una única afinidad f de la familia que no contiene puntos fijos, la que cumple $\lambda = 3$, cuya matriz en coordenadas ampliadas y en referencia R es:

$$M(f, R) = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una vez encontrada la matriz de la afinidad en cuestión, expresémosla ahora como la composición de una homología y una translación. Para eso, veamos si $\widetilde{A}$ diagonaliza. Calculemos el polinomio característico de $\tilde{f}$.

$$P_{\tilde{f}}(x) = \begin{vmatrix} -1 - x & -4 \\ 1 & 3 - x \end{vmatrix} = (-1 - x)(3 - x) + 4 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

Esta afinidad consta de valor propio 1 con una multiplicidad aritmética 2. Calculemos su multiplicidad geométrica para comprobar si diagonaliza.

$$(\widetilde{A} - I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow x + 2y = 0 \Longrightarrow (x, y) = (2, -1)$$

Vemos que dim (Nuc$(\widetilde{A}-I)) = m_g = 1 \neq 2 = m_a \Longrightarrow \widetilde{A}$ no diagonaliza. Pero, debido a que $P_{\tilde{f}(x)}$ descompone completamente, por el segundo teorema de descomposición sabemos que existe una base de Jordan para el subespacio $Nuc(\widetilde{A}-I)^2$. Nos serviremos de esto ya que por el primer teorema de descomposición sabemos que $E = Nuc(\widetilde{A}-I)^2$, y por tanto, la base de Jordan anterior será también una base del espacio. Encontremos entonces una base de Jordan de $Nuc(\widetilde{A}-I)^2$.

Como nos encontramos en el plano afin (dim 2) y ya disponemos de uno de los dos vectores necesarios para formar la base, siendo este $v_1 = (2,-1) \in Nuc(\widetilde{A}-I)$, solamente tenemos que resolver el siguiente sistema lineal para encontrar el segundo vector de la base, $v_2 \in Nuc(\widetilde{A}-I)^2$.

$$(\widetilde{A}-I)v_2 = v_1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow x + 2y = -1 \Longrightarrow (x,y) = (-3,1)$$

Sea entonces $R' = \{A; v_1, v_2\}$, la afinidad f queda expresada de la siguiente manera:

$$f(x,y)_{R'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Siendo el vector (-1, -1) el vector (1, 0) expresado en la base R'. Ahora solamente nos queda hacer un último cambio de referencia para llegar a la matriz reducida de la afinidad. Sea $\tilde{R} = \{A; u_1, u_2\}$, con $u_1 = (-1)v_1 = (-2,1)$ y $u_2 = (-1)v_1 + (-1)v_2 = (1,0)$, entonces la afinidad f queda en la siguiente forma reducida en esta referencia:

$$f(x,y)_{\tilde{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Por teoría sabemos que esta es la expresión reducida de una homología especial compuesta con una translación.

En conclusión, hemos visto que existe una única afinidad en la familia de afinidades definida en el enunciado que no tenga puntos fijos (la determinada cuando $\lambda = 3$), y hemos llegado a expresarla como la composición de una homología especial con una translación, tal y como vemos en (2). Además, conocemos que la composición de una homología especial y una translación no tiene puntos fijos, que nos dice una vez más lo que ya conocíamos, que la afinidad f no tiene ningún punto fijo.

(b) Como hemos visto en el apartado anterior, si $\lambda \neq 3$, entonces la afinidad en cuestión contiene puntos fijos, por tanto, todas las afinidades de la familia menos la afinidad f (la del apartado anterior) contienen algún punto fijo. Encontremos el lugar geométrico de estos puntos.

Conociendo la expresión de $\widetilde{A}$ y de b en función de λ que sabemos de (1), podemos resolver el siguiente sistema lineal compatible indeterminado para encontrar dónde se encuentran los puntos fijos de cada afinidad en función, una vez más, de λ con $\lambda \neq 3$.

$$\widetilde{A}x + b = x \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -\lambda - 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -x - \lambda y - y + 1 = x \\ x + \lambda y = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-\lambda}{3-\lambda} \\ y = \frac{1}{3-\lambda} \end{cases}$$

De modo que el punto fijo genérico de estas afinidades es $p = (x, y) = (\frac{1-\lambda}{3-\lambda}, \frac{1}{3-\lambda})$. Observamos que, fijada una λ, el sistema anterior pasa a ser compatible determinado, y por consecuente el punto queda unívocamente determinado, por lo que cada una de estas afinidades tiene un único punto fijo. Observamos también lo siguiente:

$$1 - \lambda = 3 - \lambda + 2 \Longrightarrow \quad \frac{1-\lambda}{3-\lambda} = 1 + \frac{2}{3-\lambda}$$

Como $\frac{1}{3-\lambda}$ con $\lambda \neq 3$ toma todos los valores reales, llamemos α a $\frac{1}{3-\lambda}$. Por tanto, el conjunto de puntos fijos es el $(1 + 2\alpha, \alpha)$, que forma una recta $s := (1, 0) + [(2, 1)]$. Por tanto, hemos encontrado el lugar geométrico de los puntos fijos de esta familia de afinidades, este es la recta s.

2. *Considerad la afinidad f de $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ con las propiedades siguientes:*

- *El plano* $\pi : \begin{cases} x - z = 1 \\ y - t = -1 \end{cases}$ *és f-invariante i $f_{|\pi}$ es una homotecia de razón 2.*
- *La recta* $r =$ (2,1,0,1) + [(1,1,0,0)] *es una recta de puntos fijos.*
- *La recta* $s =$ (1,0,2,-1) + [(0,0,1,-1)] *es f-invariante y $f_{|s}$ es una simetría central.*

Calculad $f(2, 0, 3, -2)$.

Para calcular $f(2, 0, 3, -2)$ hallemos primero la matriz de la afinidad en la referencia canónica. Pero para poder encontrarla hay que hacer primero unas cuantas observaciones sobre el plano y las rectas que nos son dadas en el enunciado. Empecemos primero por el plano π.

De π sabemos que es f-invariante y más importante, que $f_{|\pi}$ es una homotecia de razón 2. Por esta última razón, sabemos que en una cierta referencia R_π, la matriz de $f_{|\pi}$ en coordenadas ampliadas es:

$$M(f_{|\pi}, R_\pi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con $R_\pi = \{p_0; v_1, v_1\}$, donde p_0 es el punto fijo de la homotecia (no nos es necesario encontrarlo, pero por teoría sabemos que existe), y v_1, v_2 son una base cualquiera de $E_{|\pi}$, como por ejemplo $v_1 = (1, 0, 1, 0)$ y $v_2 = (0, 1, 0, 1)$ que son los vectores directores de π.

Continuemos ahora con la recta r, que sabemos que es una recta de puntos fijos, hecho que implica que el vector director de r es un VEP de VAP 1, de modo que la matriz en coordenadas ampliadas de $f_{|r}$ en la referencia $R_r = \{p_1; v_3\} = \{(2, 1, 0, 1); (1, 1, 0, 0)\}$ donde p_1 es un punto de la recta r y v_3 su vector director, es:

$$M(f_{|r}, R_r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, sabemos que s es f-invariante y que $f_{|s}$ es uan simetría central. Una vez más, por esta última razón podemos encontrar una cierta referencia $R_s = \{p_2; v_4\}$ con p_2 el punto fijo de la simetría central (como en el caso de la homotecia, no nos hace falta encontrar este punto, nos servimos de que sabemos de su existencia), y v_4 una base cualquiera de $E_{|s}$. Como $E_{|s}$ tiene dimensión 1, podemos coger un vector cualquiera para que sea base de este subespacio, como por ejemplo el vector director de s, en tal caso $v_4 = (0, 0, 1, -1)$. En esta referencia R_s, la matriz de $f_{|s}$ en coordenadas ampliadas es:

$$M(f_{|s,R_s} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos que los vectores de las bases de las 3 diferentes referencias que hemos definido son L.I.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango } (v_1, v_2, v_3, v_4) = 4$$

Como Rango $(v_1, v_2, v_3, v_4) = 4 \Longrightarrow v_1, v_2, v_3, v_4$ son L.I $\Longrightarrow v_1, v_2, v_3, v_4$ forman una base de $E = R^4$. Como forman base entonces podemos considerar la siguiente referencia $R = \{p; v_1, v_2, v_3, v_4\}$ con $p = (2, 1, 0, 1) \in r$. Como el espacio que generan $[v_1, v_2]$, $[v_3]$ y $[v_4]$ son f-invariantes tal y como nos indica el enunciado del problema, podemos entonces construir la matriz de f por bloques, usando los bloques perteneciente a cada subespacio invariante que hemos encontrado con anterioridad. Así pues,

$$M(f, R) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pasemos ahora la matriz $M(f, R)$ de referencia R a la ordinaria e.

$$M(f, e) = M_{R \to e} M(f, R) M_{e \to R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$M(f, e) = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & -3/2 & 1/2 & 3/2 & -3 \\ -3/2 & 3/2 & 3/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, una vez encontrada la matriz de la afinidad f en la referencia ordinaria, calculemos $f(2,0,3,-2)$.

$$f(2,0,3,-2) = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & -3/2 & 1/2 & 3/2 & -3 \\ -3/2 & 3/2 & 3/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \\ -3/2 \\ 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En conclusión, gracias a que los subespacios que nos daba el enunciado eran f-invariantes y los vectores directores que los generaban eran L.I y formaban una base del espacio, hemos podido construir la matriz de f por bloques, y una vez obtenida y cambiándola de referencia a la ordinaria, la obtención de $f(2,0,3,-2) = (5/2,-1/2,-3/2,5/2)$ es directa.