Tema 4: Movimientos

Eduardo Peña Royuela

Mayo 2020

1.

(i) *Sea F un giro de $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ al rededor de un punto p. Si $F(q_1) = q_2$, demostrad que p pertenece a la recta perpendicular a $u = q_2 - q_1$ y que contiene el punto $(q_1+q_2)/2$. Como aplicación, encontrad el giro de $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ que verifica $F(1,1) = (-1,3)$ y que $F(2,0) = (0,4)$ (ecuaciones, centro y ángulo de giro).*

(ii) *Sea F una rotación al rededor de una recta r de $\mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$. Si $F(p) = q$, demostrad que el eje r pertenece al plano π perpendicular al vector $u = q - p$ y que contiene el punto $(p+q)/2$. Como aplicación, si F es una rotación de $\mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$ tal que $F(1,1,1) = (1,1,0)$ y que $F(0,1,0) = (1,0,1)$, encontrad el eje, el ángulo de giro y las ecuaciones de F.*

(i) Como F es un movimiento, este mantiene distancias entre puntos, teniendo entonces que $d(p,q_1) = d(F(p),F(q_1)) = d(p,q_2)$. Por tanto p, q_1, q_2 forman un triángulo isósceles, con los lados adyacentes a p del mismo tamaño. Consideremos la recta r que pasa por p y $(q_1+q_2)/2$. Sea α el ángulo del vértice p en el triángulo p, q_1, q_2, entonces los ángulos respectivos a los dos otros vértices serán de $\frac{\pi-\alpha}{2}$. Consideremos ahora el triángulo $p, q_1, (q_1+q_2)/2$. El ángulo del vértice p será lógicamente $\alpha/2$ por simetría, el ángulo del vértice q_1 se mantendrá igual que en el triángulo anterior, y por consecuente, el del vértice $(q_1+q_2)/2$ será $\pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi-\alpha}{2} = \pi/2$. Por tanto la recta r tiene un ángulo de $\pi/2$ con u, por tanto es perpendicular a este vector, tal y como queríamos ver.

Aplicando lo que acabamos de demostrar, consideremos:

$$
\begin{aligned}
r : \frac{(1,1)+(-1,3)}{2} + [(-1,3)-(1,1)]^{\perp} &= (0,2) + [(-2,2)]^{\perp} = (0,2) + [(1,1)] \\
s : \frac{(2,0)+(0,4)}{2} + [(0,4)-(2,0)]^{\perp} &= (1,2) + [(-2,4)]^{\perp} = (1,2) + [(2,1)]
\end{aligned}
$$

Donde obviamente $<(-2,2),(1,1)>= -2+2 = 0$ y $<(-2,4),(2,1)>= -4+4 = 0$, por tanto son ortogonales. Una vez construidas las rectas r, s, siendo p el centro del giro, $p \in r, s$. Por lo tanto, $p \in r \cap s$. Encontremos este punto a partir de las ecuaciones cartesianas de r y s.

$$
\begin{cases} r : x - y + 2 = 0 \\ s : x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = y - 2 \\ y - 2y + 1 = 0 \end{cases} \implies p = r \cap s = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Una vez encontrado el centro del giro, encontremos ahora el ángulo de giro de F. Sea α este ángulo, este será el ángulo entre las rectas $t : p + [\vec{pq}]$ y $l : p + [\vec{pF(q)}]$ $\forall q \in \mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$. Sea $q = (1,1)$ entonces:

$$cos(\alpha) = \frac{< \vec{pq}, \vec{pF(q)} >}{\|\vec{pq}\| \|\vec{pF(q)}\|} = \frac{< (2,0),(0,2) >}{\|(2,0)\| \|(0,2)\|} = \frac{0}{4} = 0$$

Por tanto el giro tiene un ángulo de $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$. Veamos en qué sentido está girando para determinar el signo de α.

$$v = (1,1) - (2,0) = (-1,1) \qquad F(v) = (-1,3) - (0,4) = (-1,-1)$$

$$det(v, F(v)) = det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2 > 0$$

En consecuencia, el giro tiene un sentido antihorario $\Longrightarrow \alpha = \pi/2$. Así que en la base canónica la matriz de la parte lineal del movimiento tendrá la siguiente expresión:

$$\widetilde{F} = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y a partir de $q = (1,1)$ y $F(q) = (-1,3)$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donde obtenemos que $F = \widetilde{F} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Por tanto, si $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, obtenemos como ecuaciones $F : \begin{cases} x' = -y \\ y' = x + 2 \end{cases}$

(ii) Sea v el vector director del eje r. Sea π' el plano generado por $[v]^\perp$ tal que $p, q \in \pi'$. Claramente π' es perpendicular a r por como hemos construido el plano. Sea $c = \pi' \cap r$. Observamos que en este plano π' nos encontramos en la misma situación que en **(i)**, por tanto, $\exists\ s : c + [w] \subset \pi'$ tal que pasa por c y por $\frac{p+q}{2}$ y es perpendicular a $u = q - p$ ($u \perp w$, con $u, w \in \pi'$). Si consideramos ahora el plano $\pi = c + [v, w]$, este contiene a r y el punto $\frac{p+q}{2}$ y es perpendicular a u ($u \perp w, w \perp v$ y $u \in [v]^\perp$ por como lo hemos construido), por tanto tenemos el plano π que buscábamos.

Para encontrar los elementos característicos de F, consideremos los planos construidos a partir de los puntos y sus imágenes por F que nos da el enunciado:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{(1,1,1)+(1,1,0)}{2} + [(1,1,0)-(1,1,1)]^{\perp} = (1,1,1/2) + [(0,0,-1)]^{\perp} \\
&= (1,1,1/2) + [(1,0,0),(0,1,0)] \\
\pi_2 &= \frac{(0,1,0)+(1,0,1)}{2} + [(1,0,1)-(0,1,0)]^{\perp} = (1/2,1/2,1/2) + [(1,-1,1)]^{\perp} \\
&= (1/2,1/2,1/2) + [(1,1,0),(0,1,1)]
\end{aligned}$$

El eje de rotación $r \in \pi_1 \cap \pi_2$. Encontremos este punto a partir de las ecuaciones cartesianas de π_1 y π_2.

$$\begin{cases} \pi_1 : z - 1/2 = 0 \\ \pi_2 : x - y + z - 1/2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 1/2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Longrightarrow r = \pi_1 \cap \pi_2 = (1,1,1/2) + [(1,1,0)]$$

Por tanto el eje de rotación es $r : (1,1,1/2) + [(1,1,0)]$. Ahora, para encontrar el ángulo de giro de la rotación consideremos:

$$\pi' = p + [v]^{\perp} = (1,1,1) + [(1,1,0)]^{\perp} = (1,1,1) + [(1,-1,0),(0,0,1)]$$

$$c = \pi' \cap r = \begin{cases} r : \begin{cases} z = 1/2 \\ x = y \end{cases} \\ \pi' : -x - y + 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = y \\ -2x = -2 \\ z = 1/2 \end{cases} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, si tenemos en cuenta las siguientes rectas $s, l \subset \pi'$, con $p = (1,1,1)$ y $q = (1,1,0)$:

$$\begin{aligned}
s : c + [\vec{cp}] = (1,1,1/2) + [(0,0,1/2)] \\
l : c + [\vec{cq}] = (1,1,1/2) + [(0,0,-1/2)]
\end{aligned}$$

El ángulo de rotación del movimiento será:

$$cos\alpha = \frac{<\vec{cp}, \vec{cq}>}{\|\vec{cp}\|\|\vec{cq}\|} = \frac{<(0,0,1/2),(0,0,-1/2)>}{\|(0,0,1/2)\|\|(0,0,-1/2)\|} = \frac{-1/4}{1/4} = -1$$

Por tanto el ángulo de giro es π, con lo que esta rotación se podría considerar una simetría respecto a r. Esto ya lo podríamos haber deducido antes, ya que s y l son rectas coincidentes. Ahora, estudiando la parte lineal y teniendo en cuenta que r es una recta de puntos fijos, tenemos:

$$\widetilde{F}(1,1,0) = \widetilde{F}(e_1 + e_2) = e_1 + e_2$$

Para el espacio ortogonal a r tendremos que $\widetilde{F}(u) = -u$ por ser una simetría respecto a r. Así que,

$$\widetilde{F}(e_3) = -e_3$$
$$\widetilde{F}(e_1 - e_2) = -e_1 + e_2$$

Por lo que obtenemos que

$$\widetilde{F}(e_1 + e_2 + e_1 - e_2) = \widetilde{F}(e_1 + e_2) + \widetilde{F}(e_1 - e_2) = e_1 + e_2 - e_1 + e_2 = 2e_2$$
$$\Longrightarrow \widetilde{F}(2e_1) = 2e_2 \Longrightarrow \widetilde{F}(e_1) = e_2$$

Luego, como $\widetilde{F}(e_1) = e_2$ y $\widetilde{F}(e_1 + e_2) = e_1 + e_2 \Longrightarrow e_2 = e_1$

Finalmente tenemos $\widetilde{F}(e_3) = -e_3$

Por lo que la matriz de $\widetilde{F}$ en la base canónica es:

$$M(\widetilde{F}, e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora aplicando F a (1,1,1) tenemos,

$$F(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, si $F(x,y,z) = (x', y', z')$ las ecuaciones de F son: $x' = y, y' = x$ y $z' = -z + 1$.

2. *En el espacio euclidiano $\mathbb{E}^3$ con la referencia canónica, consideremos los movimientos f, g, h siguientes: f y g son las simetrías especulares respecto a los planos $\pi = x - y = 0$ y $\pi' = x + y + z = 0$ respectivamente, y h tiene expresión*

$$h(x, y, z) = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 6, -2x - 2y + z + 6, -2x + y - 2z + 6).$$

(i) *Clasificad el movimiento $F = h \circ f$, dando sus elementos característicos.*

(ii) *Clasificad y dad los elementos característicos de $G = g \circ F$.*

(iii) *Calculad $F^{15}(0, 0, 0)$ y $G^{18}(0, 0, 1)$.*

(i) Como f es una simetría especular respecto al plano π, tenemos que $\forall p \in \mathbb{E}^3$, si consideramos el vector $u \in \mathbb{E}^3$ perpendicular al plano π, si $p+\lambda u \in \pi \implies f(p) = p+2\lambda u$. Así que, sea $(x, y, z) \in \mathbb{E}^3$ cualquiera, con $u = (1, -1, 0)$[1] y $\lambda = \frac{y-x}{2}$, entonces como $(x, y, z) + \frac{y-x}{2}(1, -1, 0) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z) \in \pi \implies f(x, y, z) = (x, y, z) + 2(\frac{y-x}{2}, \frac{x-y}{2}, z) = (x + x - y, y + x - y, z) = (y, x, z)$.

Ahora $F(x, y, z) = (h \circ f)(x, y, z) = h(y, x, z) = \frac{1}{3}(y - 2x - 2z + 6, -2y - 2x + z + 6, -2y + x - 2z + 6)$. Expresando F en su forma matricial con coordenadas ampliadas y en la base canónica tenemos:

$$M(F, e) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 6 \\ -2 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Calculemos ahora el determinante de $\widetilde{F}$

$$det(M(\widetilde{F}, e)) = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3^3}(-8 - 8 - 4 - 4 - 4 + 1) = \frac{1}{3^3}(-27) = -1$$

Como el determinante de $\widetilde{F}$ es -1, F se trata de un movimiento inverso, por tanto puede tratarse de una simetría especular, una simetría especular deslizante o una composición de una rotación y una simetría especular. Busquemos ahora si existen puntos fijos, es decir, p tal que $F(p) = p$.

[1] Observamos claramente que π es el plano con expresión cartesiana $(1, 1, 0) + [(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$, y el vector $u = (1, -1, 0)$ es perpendicular a este plano. Tenemos que $< (1, 1, 0), (1, -1, 0) >= 1 - 1 = 0$ y $< (0, 0, 1), (1, -1, 0) >= 0$.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 6 \\ -2 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{1}{3}(-2x+y-2z+6) = x \\ \frac{1}{3}(-2x-2y+z+6) = y \\ \frac{1}{3}(x-2y-2z+6) = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5z+2y-6 \\ y = 5x+2z-6 \\ z = 5y+2x-6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto existe un único punto fijo $p = (1,1,1)$. Ahora, según el teorema de clasificación de movimientos en $\mathbb{E}^3$ tenemos que existe una base R donde

$$M(F,R) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como la traza de la matriz es invariante por la base, tenemos que -1+2cos$\alpha = \frac{1}{3}(-2-2-2) = (-2) \implies \cos\alpha = -\frac{1}{2} \implies \alpha = \pm\frac{2\pi}{3}$, dependiendo de la dirección escogida. Por tanto, al tener un ángulo $\alpha = \pm\frac{2\pi}{3}$, podemos descartar que F sea una simetría especular o una simetría especular deslizante. Tenemos que F es una rotación al rededor de una recta seguido de una simetría especular respecto de un plano perpendicular a la recta. Sabemos que el punto $p = (1,1,1)$ pertenece al plano y a la recta por ser un punto fijo. Para encontrar los puntos de la recta podemos considerar los puntos q tal que $\frac{F(q)+q}{2} = p$, es decir, aquellos que solamente han sido trasladados por la simetría.

$$\frac{F(q)+q}{2} = p \iff \frac{1}{2}(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 6 \\ -2 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2x+y-2z+6 = 6-3x \\ -2x-2y+z+6 = 6-3y \\ x-2y-2z+6 = 6-3z \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-2z = 0 \\ -2x+y+z = 0 \\ x-2y+z = 0 \end{cases} \iff \quad x = y = z$$

Resolviendo el sistema encontramos que estos son los puntos de la forma $r : (\lambda,\lambda,\lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir, la recta con expresión paramétrica $r : (0,0,0) + [(1,1,1)]$. En consecuencia, el plano respecto al que se hace la simetría es el generado por $r^{\perp}$ y que pasa por el punto p. Este plano es $\tau : (1,1,1) + [(1,-1,0),(1,0,-1)]$

En conclusión, $F = h \circ f$ es una rotación compuesta con una simetría especular, donde el eje de rotación es $r : (0,0,0) + [(1,1,1)]$ y esta rotación es de un ángulo $\alpha = \pm\frac{2\pi}{3}$. El plano respecto al que se hace la simetría es $\tau : (1,1,1) + [(1,-1,0),(1,0,-1)]$, y es perpendicular a r. La expresión matricial de F en la base canónica es la obtenido en (1).

(ii) Utilizaremos la descomposición de F como una rotación seguida de una simetría especular. Nos fijamos que el plano de simetría de F es paralelo al plano respecto al que se hace la simetría g. Esto es inmediato observarlo, ya que estos planos, τ y π' respectivamente, tienen ecuaciones paramétricas $\tau : (1,1,1) + [(1,-1,0),(1,0,-1)]$ y $\pi' : (0,0,0) + [(1,-1,0),(1,0,-1)]$, donde vemos que los vectores que los generan son los mismos y que $(1,1,1) \in \tau$ no pertenece a π', ya que substituyendo en sus ecuaciones tenemos que $1+1+1 = 3 \neq 0$. Por tanto τ y π' son paralelos.

Al ser estos planos paralelos, la composición de estos dos movimientos dará resultado a una traslación. Así que el movimiento G será una rotación seguida de una traslación. La rotación tiene las mismas características que la rotación de F, es decir, al rededor de la recta $r : (\lambda,\lambda,\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ con un ángulo $\alpha = \pm\frac{2\pi}{3}$. La traslación tendrá dirección el vector perpendicular a los planos τ y π', con el sentido del primero al segundo y módulo el doble de su distancia. Para encontrar un vector perpendicular a los planos, calculemos el producto vectorial entre los vectores que generan estos planos.

$$(1,0,-1) \wedge (1,-1,0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -i - j - k \Longrightarrow (-1,-1,-1)$$

El vector $(-1,-1,-1)$, que es perpendicular a los 2 vectores anteriores, une los planos yendo de τ a π' que es el orden de la composición. Una vez obtenido un vector perpendicular a los planos, para encontrar la distancia entre ellos simplemente tenemos que resolver el siguiente sistema en función de λ y con $p \in \tau$:

$$p + \lambda(-1,-1,-1) \in \pi' \Longleftrightarrow (1,1,1) + \lambda(-1,-1,-1) \in \pi'$$

$$\text{Como } \pi' : x + y + z = 0 \Longrightarrow (1-\lambda) + (1-\lambda) + (1-\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1$$

Por tanto la traslación será la de 2λ veces el vector $(-1,-1,-1)$, es decir, la traslación tendrá por vector el $(-2,-2,-2)$. En conclusión, el movimiento G consta de una rotación de eje $r : (0,0,0) + [(1,1,1)]$ y ángulo $\pm\frac{2\pi}{3}$ compuesta con una traslación de vector $(-2,-2,-2)$.

(iii) Nos fijamos que el punto $(0,0,0) \in r$ donde r es la recta al rededor de la cual se hace la rotación en el movimiento F. Por tanto la imagen del $(0,0,0)$ es fija respecto a la rotación y solamente le afectará la simetría. Sabemos que dada una simetría ϕ, $\phi^2 = Id$. Por tanto, $F^{15}(0,0,0) = F^{14+1}(0,0,0) = F(0,0,0)$. Por tanto simplemente tenemos que calcular la imagen por F de este punto.

$$F(0,0,0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 6 \\ -2 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $F^{15}(0,0,0) = (2,2,2)$.

Observamos que la translación de G es dada por un vector paralelo a la recta del eje de rotación[2]. Por tanto cuando componemos G^2 podemos primero aplicar dos veces la rotación y seguidamente dos veces la traslación. Por inducción, para G^n podemos realizar primero n rotaciones y seguidamente n traslaciones. Sea ψ la rotación de G, como la rotación ψ se da en un ángulo de $\pm\frac{2\pi}{3}$ tenemos que ψ^{18} es una rotación de ángulo $\pm\frac{2\pi}{3}18 = \pm 12\pi \equiv 0$. Así que al aplicar la rotación 18 veces a un punto, este punto acabaría en el mismo sitio. Pero si aplicamos la traslación del vector $(-2,-2,-2)$ 18 veces, esto será equivalente a aplicar la traslación del vector $18 \times (-2,-2,-2) = (-36,-36,-36)$. Por tanto, finalmente obtenemos que:

$$G^{18}(0,0,1) = (0,0,1) + (-36,-36,-36) = (-36,-36,-35)$$

[2]Esto es inmediato comprovarlo, ya que el vector de traslación es el $(-2,-2,-2)$ y el vector director del eje de rotación r es el $(1,1,1)$, que son claramente dependientes, solamente difieren en una constante $\mu = -2$.