

WdT – Wstęp do Teleinformatyki

Sygnały

Sygnały - reprezentacja

Transformacja Fouriera rozkłada funkcję okresową na szereg funkcji okresowych tak, że uzyskana transformata podaje w jaki sposób poszczególne częstotliwości składają się na pierwotną funkcję.

Jean-Baptiste Joseph Fourier
1768- 1830

Sygnały

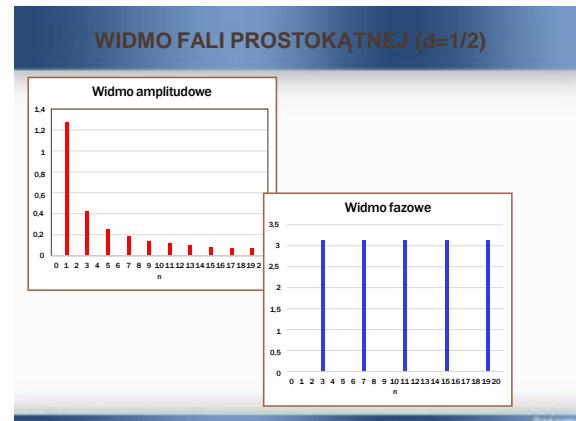
- Sygnał analogowy – ciągły (czas i amplituda są ciągłe)
- Sygnał dyskretny – nieciągły (czas i amplituda mają wartości dyskretne, ze zbioru przeliczalnego)

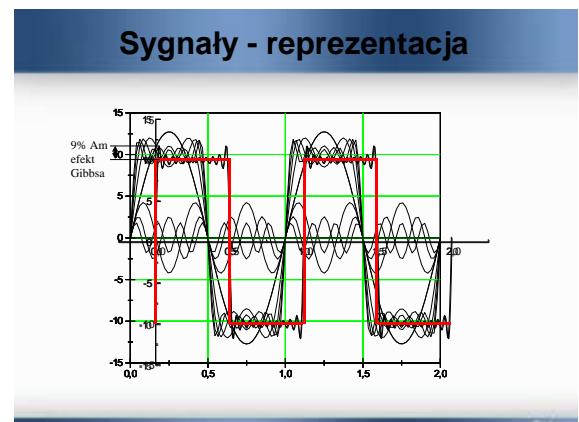
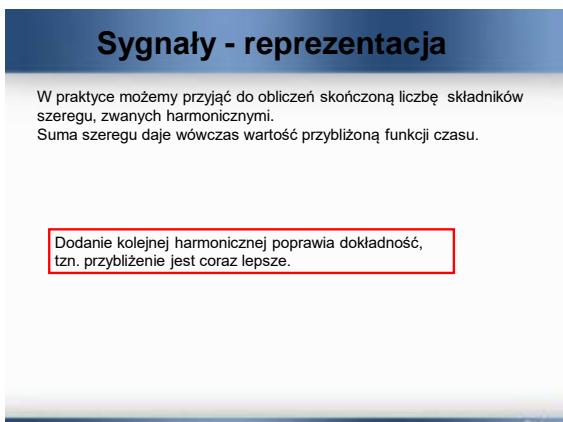
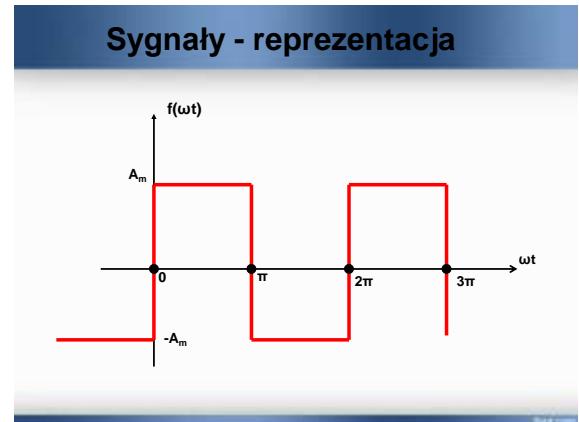
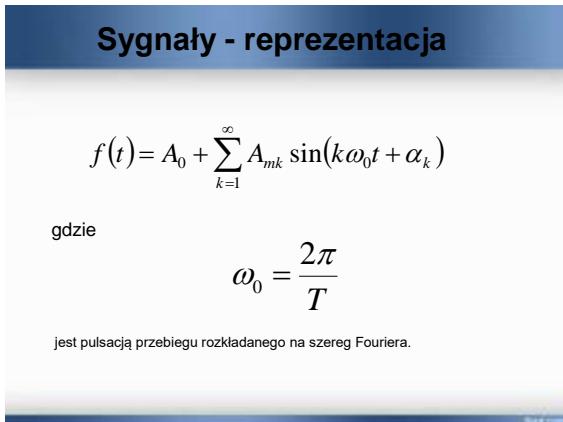
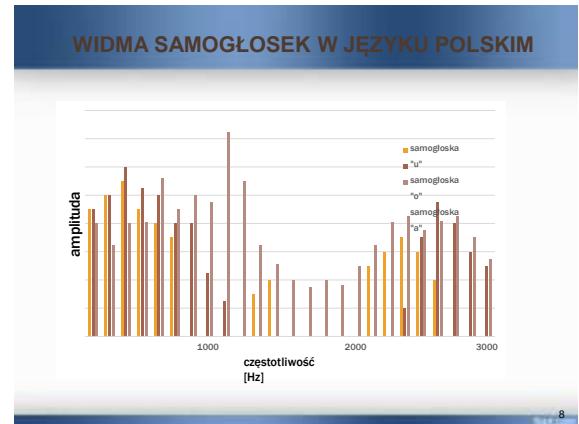
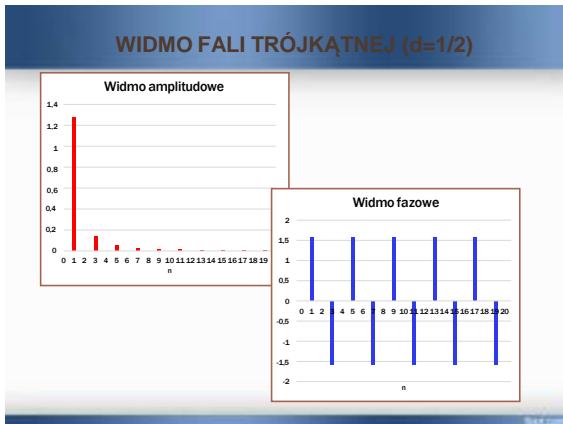
Sygnał dyskretny jest nazywany sygnałem cyfrowym
Przedstawiany jest w postaci binarnej – sygnał dwuwartościowy, binarny

Sygnały - reprezentacja

Reprezentacja sygnałów
Podział:

- sygnały okresowe i nieokresowe
okresowy: $g(t)=g(t+T_0)$ T_0 – okres
- sygnały deterministyczne (nie istnieje niepewność co do wartości) i stochastyczne (pewien stopień niepewności)
- sygnały o skończonej energii i skończonej mocy





Sygnały - reprezentacja

Reprezentacja sygnałów szeregiem Fouriera

Przewyższa wszystkie inne metody

Rozkład sygnału okresowego na składowe sinusoidalne:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t + \dots \\ + a_2 \sin 2\omega t + b_2 \cos 2\omega t + \dots \\ + a_3 \sin 3\omega t + b_3 \cos 3\omega t + \dots$$

Sygnały - reprezentacja

Przykład transformacji Fouriera



Sygnały - reprezentacja

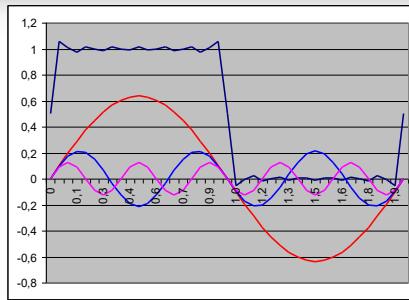
Definicje współczynników szeregu Fouriera:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n \frac{2\pi t}{T} dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n \frac{2\pi t}{T} dt$$

Sygnały - reprezentacja



Sygnały - reprezentacja

...obliczamy kolejne współczynniki:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{2} \int_0^2 1 dt = \left[t \right]_0^2 = 2$$

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{2}{2} \int_0^2 1 \cdot \sin \pi t dt = -\frac{1}{\pi} \cos \pi t \Big|_0^2 = \frac{2}{\pi}$$

$$b_1 = a_2 = b_2 = 0$$

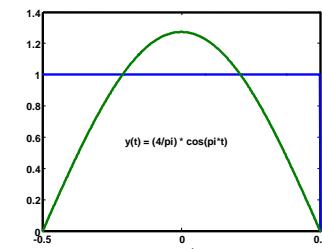
$$a_3 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin 3\frac{2\pi t}{T} dt = \frac{2}{2} \int_0^2 1 \cdot \sin 3\pi t dt = -\frac{1}{3\pi} \cos 3\pi t \Big|_0^2 = \frac{2}{3\pi}$$

itd., ostatecznie

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \pi t + \frac{2}{3\pi} \sin 3\pi t + \frac{2}{5\pi} \sin 5\pi t \dots$$

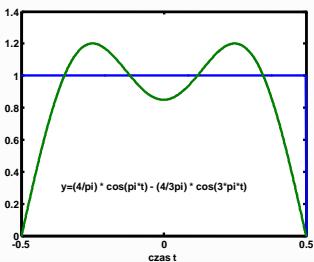
Sygnały - reprezentacja

Aproxymacja impulsu prostokątnego 1 harmoniczna



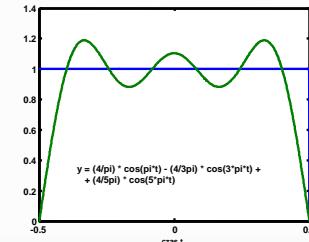
Sygnały - reprezentacja

Aproksymacja impulsu prostokątnego $1 + 3$ harmoniczna



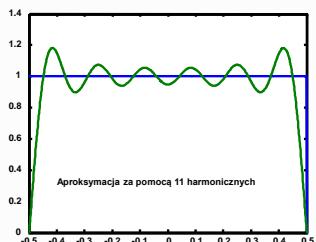
Sygnały - reprezentacja

Aproksymacja impulsu prostokątnego $1 + 3 + 5$ harmoniczna



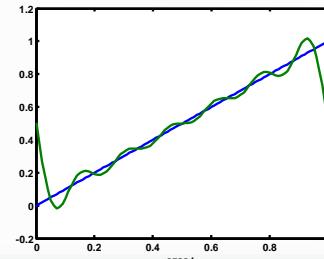
Sygnały - reprezentacja

Aproksymacja impulsu prostokątnego $1 + 3 + 5 + \dots + 11$ harmoniczna



Sygnały - reprezentacja

Aproksymacja impulsu trójkątnego $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ harmoniczna



Użyteczność analizy Fouriera opiera się na zasadzie, że odpowiedź systemu na wymuszenie sinusoidalne jest także sinusoidalna, **pod warunkami**:

- System jest **liniowy** – spełnia zasadę superpozycji - jeżeli na wymuszenia $x_1(t)$ i $x_2(t)$ układ odpowiada sygnałami $y_1(t)$ i $y_2(t)$ to system jest liniowy jeśli na wymuszenie $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ odpowie sygnałem $a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$
- System jest **stacjonarny** – jeżeli na wymuszenie $x(t)$ układ odpowiada sygnałem $y(t)$ to system jest stacjonarny jeśli na wymuszenie $x(t - t_0)$ odpowie sygnałem $y(t - t_0)$

WSPÓŁCZYNNIKI CHARAKTERYZUJĄCE SYGNAŁY OKRESOWE NIESINUSOIDALNE

- Współczynnik odkształcenia (dla sin: $k = 1$)

$$k = \frac{A_{1_{sk}}}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2}} = \frac{A_{1_{sk}}}{\sqrt{A_0^2 + A_{1_{sk}}^2 + A_{2_{sk}}^2 + \dots}}$$

- Współczynnik zawartości k -tej harmonicznej

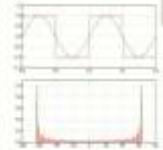
$$\eta_k = \frac{A_{k_{sk}}}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2}}$$

- Współczynnik zawartości harmonicznych

$$h = \sqrt{\frac{\sigma_{n=2}^{\infty} \frac{A_n^2}{2}}{\sigma_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2}}} = \sqrt{\frac{A_{2_{sk}}^2 + A_{3_{sk}}^2 + \dots}{A_{1_{sk}}^2 + A_{2_{sk}}^2 + A_{3_{sk}}^2 + \dots}}$$

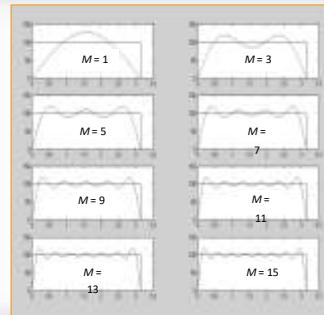
EFEKT GIBBESA

- 1848 - odkryty przez Henry'ego Wilbrahama, który w wieku 22 lat opublikował na ten temat pracę niezauważoną przez środowisko matematyczne
- 1898 - Albert Abraham Michelson - skonstruował urządzenie do syntezy fourierowskiej, w którym zaobserwował ten efekt tłumacząc go błędem maszyny
- 1899 - Josiah Willard Gibbs - opublikowany dowód matematyczny dotyczący natury tego efektu

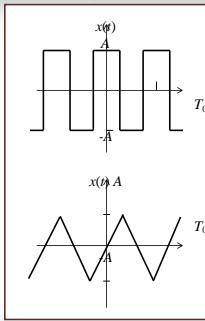


W. Gibbs (1839-1903)

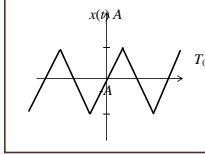
EFEKT GIBBESA



SZEREG FOURIERA - PRZYKŁADY

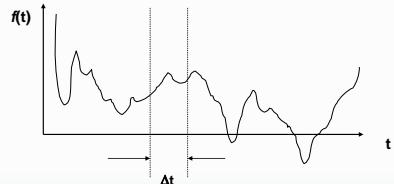


$$\frac{4A}{\pi} \left(\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \dots \right)$$



$$\frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t - \frac{1}{9} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{25} \sin 5\omega_0 t - \dots \right)$$

Także sygnały **ciągle** można **próbkować** – dzielić na przedziały i w każdym wyznaczać widmo Fouriera
Zwykle **przybliżenie** – do n-tej składowej



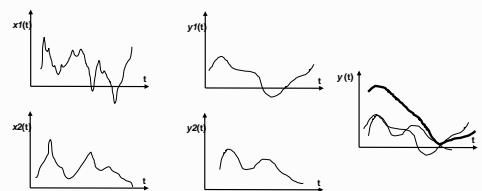
Układ (system) – urządzenie generujące sygnał wyjściowy w odpowiedzi na sygnał wejściowy

wymuszenie - odpowiedź



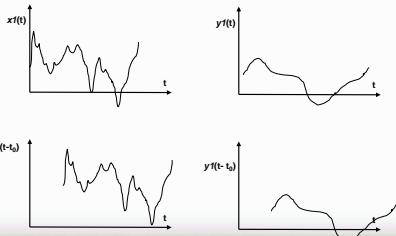
1. System jest **liniowy** – spełnia zasadę superpozycji

jeżeli na wymuszenia $x_1(t)$ i $x_2(t)$ układ odpowiada sygnałami $y_1(t)$ i $y_2(t)$
to system jest liniowy jeśli na wymuszenie $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ odpowie sygnałem $a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$



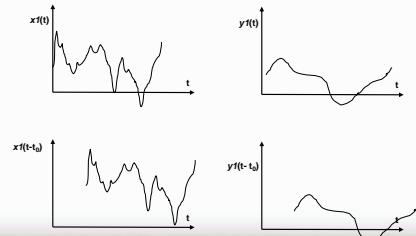
2. System jest stacjonarny

jeżeli na wymuszenie $x(t)$ układ odpowiada sygnałem $y(t)$ to system jest stacjonarny jeśli na wymuszenie $x_1(t - t_0)$ odpowie sygnałem $y_1(t - t_0)$



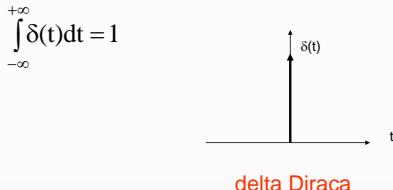
2. System jest stacjonarny

jeżeli na wymuszenie $x(t)$ układ odpowiada sygnałem $y(t)$ to system jest stacjonarny jeśli na wymuszenie $x_1(t - t_0)$ odpowie sygnałem $y_1(t - t_0)$



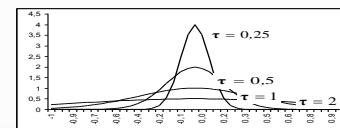
Systemy liniowe opisuje się w dziedzinie czasu przez tzw. odpowiedź impulsową $h(t)$ – odpowiedź na wymuszenie delta Diraca.

- zerowa amplituda z wyjątkiem $t=0$ gdzie osiąga nieskończoność
- powierzchnia pod funkcją jest równa 1



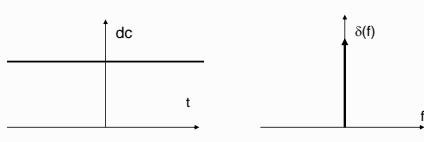
- Delta Diraca wywodzi się z funkcji Gaussa

$$g(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{\pi t^2}{\tau^2}} \quad \delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} g(t)$$



Wykorzystanie funkcji Diraca

widmo częstotliwościowe sygnału stałoprądowego



Zespolona transformata Fouriera

Jeżeli każdy skończony przedział (a,b) można podzielić na skończoną liczbę podprzedziałów, w których $f(x)$ jest monotoniczna oraz w każdym punkcie przedziału (a,b) są spełnione warunki Dirichleta i funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $(-\infty, \infty)$, to funkcję:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-iux) dx$$

Zespolona transformata Fouriera

Transformacja Fouriera jest operacją odwracalną, zatem posiadając transformatę $F(u)$ możemy wyznaczyć jej **oryginal**

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp(iux) du$$

Na funkcję $f(x)$ oraz jej transformatę $F(u)$ należy patrzeć jak na różne reprezentacje tej samej funkcji w różnych dziedzinach na przykład czas / częstotliwość, czy położenie / wektor faliowy.

Analiza Fouriera

Bardzo często w fizyce i innych naukach ścisłych mierzone wielkości mają charakter okresowy, tzn. taki, który powoduje powtarzanie się danej wielkości fizycznej z określonym okresem. Zazwyczaj taką funkcję okresową można przedstawić w postaci nieskończonego szeregu trygonometrycznego zwanego też **szeregiem Fouriera**.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$$

Analiza Fouriera

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned}$$

Powyższe wzory określające współczynniki szeregu Fouriera są znane pod nazwą wzorów **Eulera-Fouriera**.

Dyskretna transformata Fouriera

Przypuśćmy, że mamy N kolejnych wartości zmierzonych w odcinkach czasu Δ , tak że

$$h_k \equiv h(t_k), \quad t_k = k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Zamiast próbować znaleźć transformatę dla wszystkich wartości f oszacujmy ją jedynie w konkretnych punktach, danych przez:

$$f_n = \frac{n}{N\Delta}, \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$$

$$\text{Po przybliżeniu całki otrzymujemy} \quad H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n / N}$$

Zastosowane powyżej przekształcenie nosi nazwę **dyskretnej transformaty Fouriera**

Algorytm FFT

Uwagi ogólne

- Obliczanie transformaty bezpośrednio ze wzoru jest nieefektywne ze względu na zbyt dużą złożoność obliczeniową.
- Wzrost wydajności przy zastosowaniu FFT

	N	2	4	8	16	32	64	128
DFT	$2N^2$	8	32	128	512	2048	8192	32768
FFT	$\frac{1}{2} \log_2(N)$	2	8	24	64	160	384	896

Algorytm FFT

Idea

Sama idea algorytmu opiera się na tzw. lemacie **Danielsona-Lanczosa**. Odkryli oni, że pojedyńcza DFT o długości N , jest równoważna sumie dwóch transformat o długości $N/2$, jedna z nich jest złożona z nieparzystych punktów spośród oryginalnych N , a druga z parzystych.

$$\begin{aligned} H_n &= \sum_{k=0}^{N/2-1} e^{2\pi i n k / (N/2)} f_{2k} + W^n \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{2\pi i n j / (N/2)} f_{2k+1} = \\ &= H_n^e + W^n H_n^o \end{aligned}$$

H_n^e oznacza n -ty składnik transformaty o długości $N/2$, stworzony z parzystych (even) punktów, a H_n^o odpowiednio z nieparzystych (odd).

Algorytm FFT

Algorytm Cooley'a-Tukey'a

Przykład wykonyania transformaty dla $N = 8$ punktów									
	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	
α_0	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	
$\alpha_0 = 0$	$100 - k$	$110 - k$	$110 - k$	$110 - k$	$101 - k$	$101 - k$	$101 - k$	$111 - k$	
α_1	α_3	α_2	α_4	α_5	α_6	α_7	α_0	α_1	
$\alpha_0 = 0$	$100 - k$	$100 - k$	$100 - k$	$100 - k$	$101 - k$	$101 - k$	$101 - k$	$111 - k$	
α_2	$\alpha_0 + \alpha_4$	$\alpha_2 + \alpha_6$	$\alpha_4 + \alpha_0$	$\alpha_6 + \alpha_2$	$\alpha_0 + \alpha_5$	$\alpha_2 + \alpha_7$	$\alpha_4 + \alpha_1$	$\alpha_6 + \alpha_3$	
α_3	$\alpha_0 - \alpha_4$	$\alpha_2 - \alpha_6$	$\alpha_4 - \alpha_0$	$\alpha_6 - \alpha_2$	$\alpha_0 - \alpha_5$	$\alpha_2 - \alpha_7$	$\alpha_4 - \alpha_1$	$\alpha_6 - \alpha_3$	
α_4	$\alpha_0 + \alpha_2$	$\alpha_4 - \alpha_6$	$\alpha_2 + \alpha_0$	$\alpha_6 - \alpha_4$	$\alpha_0 + \alpha_7$	$\alpha_4 - \alpha_1$	$\alpha_2 + \alpha_5$	$\alpha_6 - \alpha_3$	
α_5	$\alpha_0 + \alpha_3$	$\alpha_1 - \alpha_7$	$\alpha_3 + \alpha_0$	$\alpha_7 - \alpha_1$	$\alpha_0 + \alpha_6$	$\alpha_1 - \alpha_5$	$\alpha_3 + \alpha_4$	$\alpha_7 - \alpha_2$	
α_6	$\alpha_0 + \alpha_5$	$\alpha_2 - \alpha_7$	$\alpha_5 + \alpha_0$	$\alpha_7 - \alpha_2$	$\alpha_0 + \alpha_7$	$\alpha_2 - \alpha_5$	$\alpha_5 + \alpha_1$	$\alpha_7 - \alpha_3$	
α_7	$\alpha_0 + \alpha_6$	$\alpha_3 - \alpha_1$	$\alpha_6 + \alpha_0$	$\alpha_1 - \alpha_6$	$\alpha_0 + \alpha_4$	$\alpha_3 - \alpha_7$	$\alpha_6 + \alpha_2$	$\alpha_1 - \alpha_5$	

$$W_N^{k-\frac{N}{2}} = e^{j2\pi(k-\frac{N}{2})/N} = e^{j2\pi k/N} e^{-j\pi} = -e^{j2\pi k/N} = -W_N^k$$

Zastosowanie analizy Fouriera

Uwagi ogólne

- W ciągu ostatnich lat, wraz z rozwojem elektronicznej techniki obliczeniowej, nastąpił szybki rozwój teorii dotyczących analiz szeregów czasowych.
- Powstawały nowe metody numerycznego opracowania danych, które wcześniej nie mogły być zastosowane, ze względu na ogromną czasochlonność obliczeń.
- Metody te opracowywane były głównie dla potrzeb elektroniki gdzie, aby dostać np. dokładniejsze estymatory widma mocy lub lepszą filtrację, wydłużano szeregi czasowe.

Zastosowanie analizy Fouriera

Analiza Fouriera w fizyce

- Współczynniki Fouriera są interpretowane jako amplitudy odpowiednich składowych harmonicznych.
- Pierwsza składowa przekształcenia a_0 określa wartość stałą. Zależy ona od położenia sygnału względem osi poziomej. W praktyce jest najczęściej pomijana.
- Kwadraty współczynników z dokładnością do czynnika mnożnika określają energię danej składowej harmonicznej.
- W ten sposób można mówić fizycznie o badaniu widma pewnej wielkości fizycznej tzn. rozkładzie energii w funkcji częstotliwości.

Zastosowanie analizy Fouriera

Analiza Fouriera w elektronice

- Widmo sygnału prostokątnego składa się z harmonicznych o częstotliwościach będących całkowitą nieparzystą wielokrotnością częstotliwości podstawowej o amplitudach malejących ze wzrostem częstotliwości harmonicznych.
- Im więcej składowych harmonicznych jest sumowanych tym lepsze jest przybliżenie przebiegu prostokątnego.
- W konkretnych zagadnieniach, kształt badanego sygnału jest na tyle skomplikowany, że trudno jest obliczyć go w sposób scisły. Problemy z detekcją i szumami.
- Filtracja oraz pasmo przenoszenia sygnału.

Zastosowanie analizy Fouriera

Teoria próbkowania sygnałów

- Kryterium Nyquista** w teorii próbkowania sygnałów mówi, że dla każdego kroku próbkowania Δ istnieje specjalna częstotliwość f_c zwana częstotliwością krytyczną Nyquista.

$$f_c = \frac{1}{2\Delta}$$

- Dlaczego częstotliwość ta jest tak istotna ?
- Zjawisko **aliasingu**.
- Ogromne możliwości kompresji sygnałów.

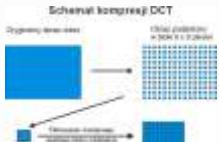
Zastosowanie analizy Fouriera

Cyfrowe przetwarzanie sygnałów

- Dzięki istnieniu algorytmu FFT praktyczne stało się cyfrowe przetwarzanie sygnałów (DSP).
- Dyskretna transformata cosinusowa (DCT) używana na przykład w kompresji MP3 oraz JPEG.
- Wykorzystanie transformaty w programach graficznych do cyfrowej obróbki obrazu (filtry).

Zastosowanie analizy Fouriera

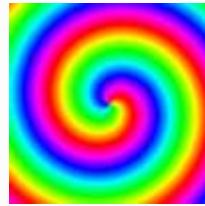
Kompresja JPEG



- Technologia DCT dzieli obraz wideo na bloki po 64 punkty każdy, co tworzy blok 8 x 8.
- Każdy tak utworzony blok jest kompresowany indywidualnie.
- Otrzymujemy w ten sposób obraz ze skazą, która powstaje przy łączeniu tak skompresowanych bloków, a w rezultacie wysoką degradację jakości wideo.

Zastosowanie analizy Fouriera

Kompresja JPEG



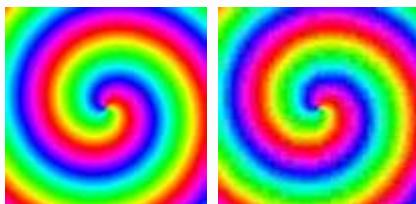
Obraz oryginalny
rozmiar: 196 662 b

Przebieg kompresji

- 3 kanały RGB zastępujemy dwoma kanałami barw i kanałem jaskrawości
- Odrzucenie części pikseli z kanału barw
- Podział na bloki 8x8
- Wykonanie **DCT** na każdym bloku
- Zastąpienie liczb zmiennoprzecinkowych liczbami całkowitymi (kompresja strata)

Zastosowanie analizy Fouriera

Kompresja JPEG

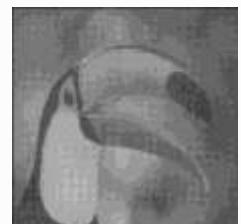
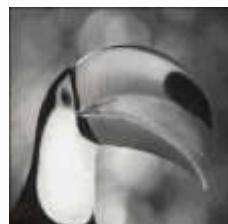


Kompresja silna
upakowanie danych do
poziomu około 25%
rozmiar: 4 070 b

Kompresja bardzo silna
upakowanie danych do
poziomu około 5%
rozmiar: 1 741 b

Zastosowanie analizy Fouriera

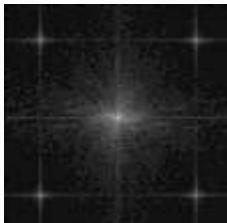
Filtracja obrazów



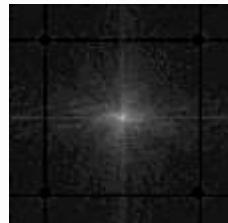
Zniekształcony funkcją o sinusoidalnym kształcie

Zastosowanie analizy Fouriera

Filtracja obrazów



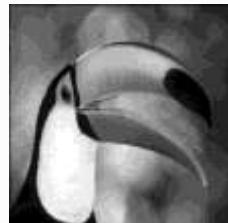
Po wykonaniu transformaty
Fouriera



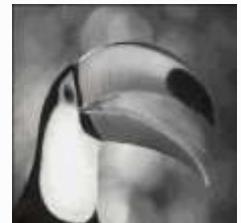
Wyzerowanie wartości
odpowiedzialnych za częstotliwość
zniekształceń

Zastosowanie analizy Fouriera

Filtracja obrazów



Obraz po wykonaniu odwrotnej
transformaty Fouriera



Oryginal

Sygnały

Każdy sygnał może być opisany przez następujące wielkości:

- Czas trwania, który może być ograniczony jakimś przedziałem czasowym, formalnie przedstawionym jako różnica pomiędzy końcem przedziału T2 i początkiem przedziału T1,
- Wartość chwilowa sygnału, mierzona w jednostkach właściwych dla danej wielkości,
- Funkcja opisująca przebieg sygnału, przy czym sygnał może być funkcją jednej zmiennej lub wielu zmiennych niezależnych,
- Specyficzne własności, opisujące naturę danego sygnału, takie jak: amplituda, częstotliwość, energia, moc, okresowość, itp.

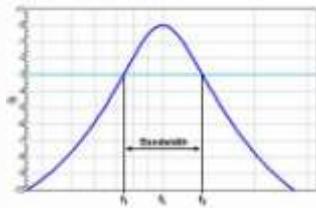
Sygnały

Parametry opisujące właściwości sygnałów:

- prąd, napięcie, moc
- natężenie pola elektrycznego, natężenie pola magnetycznego
- Intensywność
- Częstotliwość
- pasmo – różnica między górną i dolną częstotliwością (szerokość pasma)
- stosunek mocy wyjściowej do wejściowej podaje się w decybelach
Moc [dB] = $10 \log (P_{wy}/P_{we})$

Pasmo przenoszenia

Pasmo przenoszenia (także: *pasmo przepustowe*) – zakres częstotliwości, w którym tłumienie sygnału jest nie większe niż 3 dB



Przeważnie pasmo przenoszenia na charakterystyce amplitudowo-częstotliwościowej $A = f(f)$ przyjmuje kształt dzwonu.

Szerokość pasma transmisyjnego

- Jest to różnica między częstotliwością najwyższą a najniższą stosowaną w danym celu
- Szerokość pasma sygnału
- Szerokość pasma kanału
- Oznacza dostępną granicę (przedział) w jakiej mogą być transmitowane sygnały np. w kanale
- Jednostką jest herc [Hz]

Dla sygnału cyfrowego

- Przepływność:** ilość informacji przesyłanej w jednostce czasu bit/s lub wielokrotności
- Szybkość generowania znaków:** szybkość z jaką następują zmiany momentów zmieniennych dla sygnału (np. wartości napięcia)
- bod (Baudot); liczba zmian na sekundę
Przykład: 250 bodów oznacza, że w ciągu sekundy sygnał może zmienić się 250 razy. Jeżeli każda zmiana sygnału niesie z sobą informację o 4 bitach, oznacza to, że w ciągu każdej sekundy przesyłanych jest 1000 bitów.
- Gdy każda zmiana sygnału niesie ze sobą informację tylko o jednym bicie, wtedy ilość bodów jest równa prędkości transmisji danych

Kodowanie

- Aby przesyłać jakieś dane konieczne jest ich zakodowanie w odpowiedniej formie pasującej do danego medium.
- W teorii informacji kod, to wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie, które każdej wiadomości z alfabetu źródła przyporządkowuje ciąg określonych symboli kodowych.
- Słownem kodowym nazywamy ciąg symboli kodowych przyporządkowany do konkretnej wiadomości.
- Odbiorca może zrozumieć otrzymaną informację dopiero po jej zdekodowaniu.

Dziękuję za uwagę !