Algorísmica Avançada
Algorismes sobre grafs III

Sergio Escalera

Flujo Máximo

- Imaginemos algún flujo que va desde un sitio ***s***, donde es producido, hasta un sitio ***t*** donde es consumido a la misma tasa de producción.
- Intuitivamente, el flujo en cualquier punto de la red es la tasa a la que se mueve el material.
- Usos: modelado de flujo en tuberías, líneas de ensamblado, corrientes eléctricas, información en redes de comunicación (enroutamientos), optimización sobre datos matriciales, etc.
- Intuitivamente modelable con grafos.

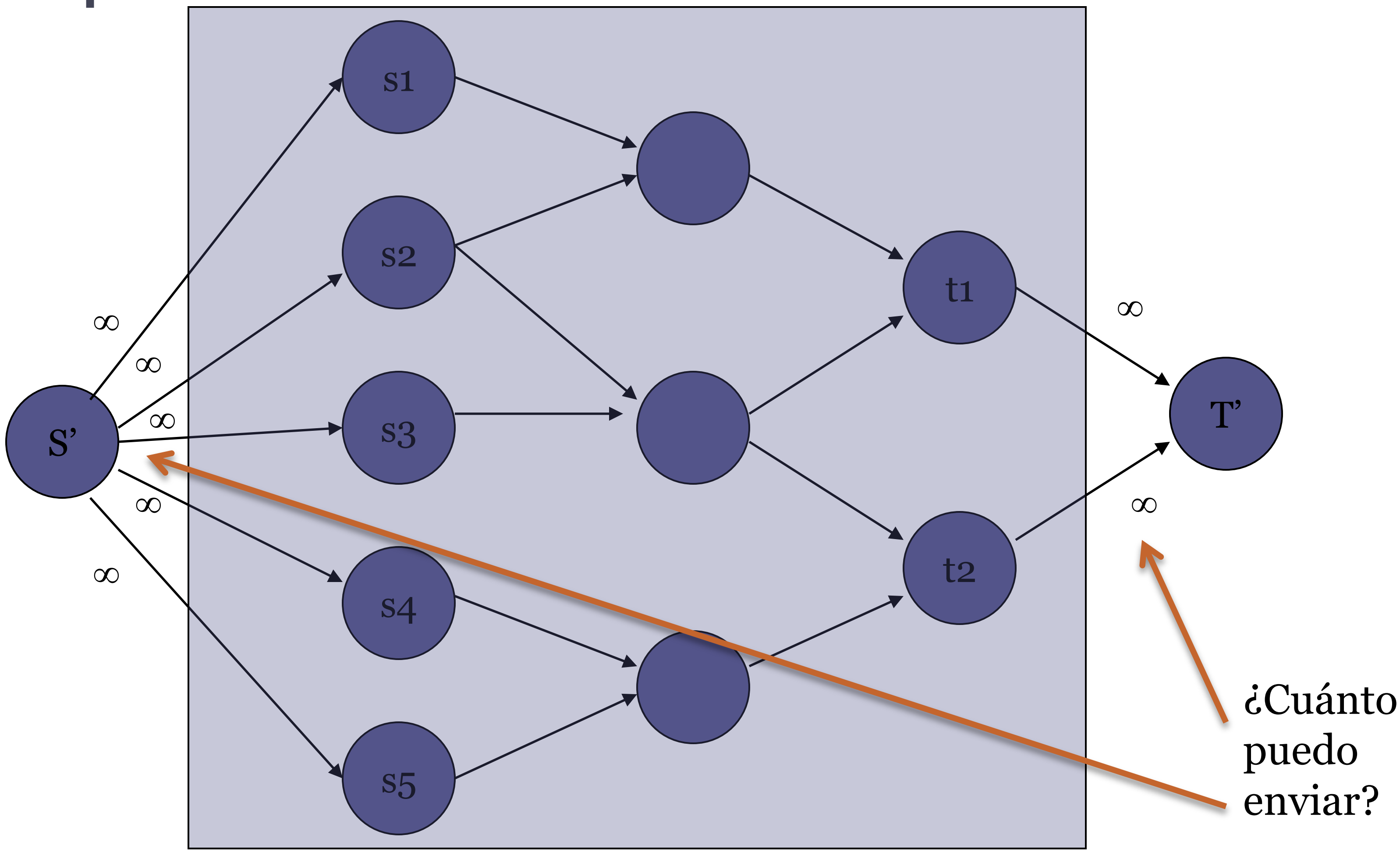
Flujo Máximo

- Cada arco dirigido puede ser visto como un conducto por donde pasa el material, según las siguientes restricciones:
  - Cada conducto tiene una capacidad máxima finita (**>=0**).
  - Se cumple la conservación de flujo. $\Sigma \mathbf{f}_{\mathbf{input}} = \Sigma \mathbf{f}_{\mathbf{output}}$ (por nodo).

Problema del Flujo Máximo:

¿Cuál es la mayor tasa a la que se puede llevar material sin violar ninguna restricción?

Redes de múltiples entradas y múltiples salidas



Método Ford-Fulkerson

- El método iterativo depende de tres ideas importantes:
  - **Red residual**
  - **Aumento de camino**
  - **Cortes**

Para ello usaremos el teorema:

max-flow/min-cut que caracteriza el flujo máximo en términos de cortes de la red de flujo.

Teorema max-flow min-cut

Teorema: El máximo valor de entre todos los flujos que llegan a ***t*** en una red es igual a la *capacidad mínima* de entre todos los cortes que dividen la red.

Prueba: Es suficiente con mostrar un flujo y un corte tal que sean iguales en valor. Luego, el flujo ha de ser máximo pues no puede rebasar la capacidad del corte y el corte ha de ser mínimo porque ninguna otra capacidad puede ser menor que el valor actual del flujo.

Objetivo: Saturar la red para satisfacer el teorema!!!

Iteración

- **En cada iteración se va consiguiendo un valor de flujo que aumenta el camino, es decir, podemos aumentar el flujo en un camino de *s* a *t*. Este proceso se repite hasta que no haya más posibilidad de aumentar.**

FORD-FULKERSON-METHOD(*G*,*s*,*t*)
1 Inicializar el flujo de toda conexión a 0
2 Mientras exista un camino de acceso por flujo ***p*** de ***s*** a ***t*** (*path*)
3 Aumentar el flujo f encontrado a través de todo el camino ***p***
4 *return f*.

Red Residual

La red residual consiste en arcos que admiten más flujo. Dada una red de flujo *G=(V,E)* con fuente ***s*** y destino ***t***. Sea *f* el flujo en *G*, y considere un par de vértices $u,v \in V$, la cantidad de flujo adicional que se puede verter sobre *u,v* es la **capacidad residual**.

$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$

Ejemplo:

$c(u,v)=16$, $f(u,v)=10 \Rightarrow c_f(u,v)=6$

Capacidad residual conexión (u,v) en paso 1

Capacidad residual conexión (u,v) en paso 2

Aumento de Caminos

- Dada una red de flujo $G=(V,E)$, un camino aumentado p es un camino simple de s a t en la red residual G_f. Este camino sólo admite flujo positivo.
- La cantidad máxima de flujo que puede llevarse por los arcos en un aumento de p se denomina **capacidad residual** de p, y está dado por:

  $c_f(p) = \min \{c_f(u,v) : (u,v) \in p\}$
- **¿Cómo creéis que lo podemos hacer?**

Corte de la red de flujo

- El método aumenta repetidamente el flujo a través de los caminos de aumento *p* hasta alcanzar el máximo.

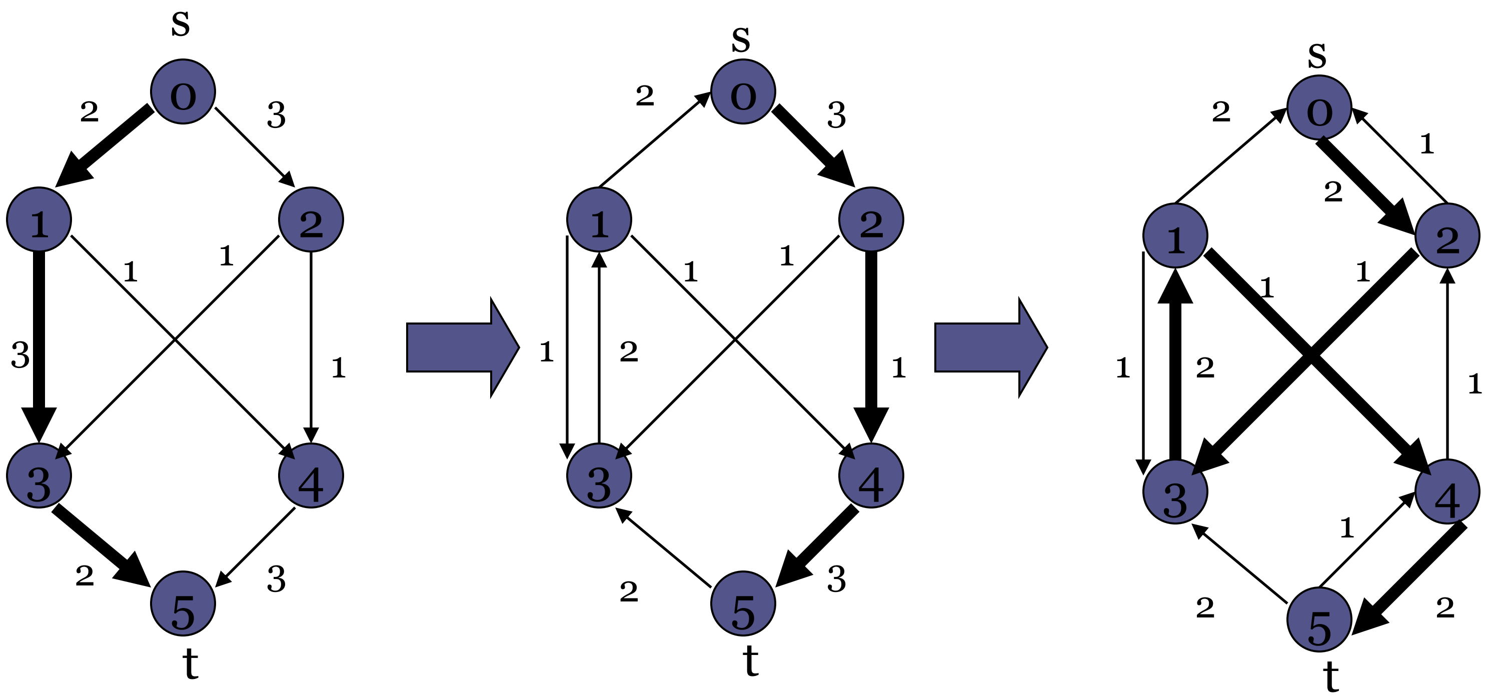
- Un corte *(S,T)* de la red de flujo *G=(V,E)* es una partición de *V* en *S* y *T=V-S* tal que $s \in S$ y $t \in T$. Si *f* es el flujo, entonces **el flujo de red a través del corte *(S,T)* se define *f(S,T)*. La capacidad del corte *(S,T)* es *C(S,T)*.**

Algoritmo de Ford-Fulkerson

FORD-FULKERSON(G,s,t)

for cada arista $(u,v) \in E[G]$
do $f[u,v] \leftarrow 0$, $c_f(u,v)=c(u,v)$
$f[v,u] \leftarrow 0$, $c_f(v,u)=c(v,u)$
while existe camino p de s a t en la red residual G_f
do $c_f(p)=\min \{c_f(u,v) : (u,v) \in p\}$
for cada arista (u,v) en p
do $f[u,v] \leftarrow f[u,v] + c_f(p)$
$f[v,u] \leftarrow -f[u,v]$
$c_f(u,v)=c_f(u,v)-c_f(p)$
$c_f(v,u)=c_f(v,u)+c_f(p)$

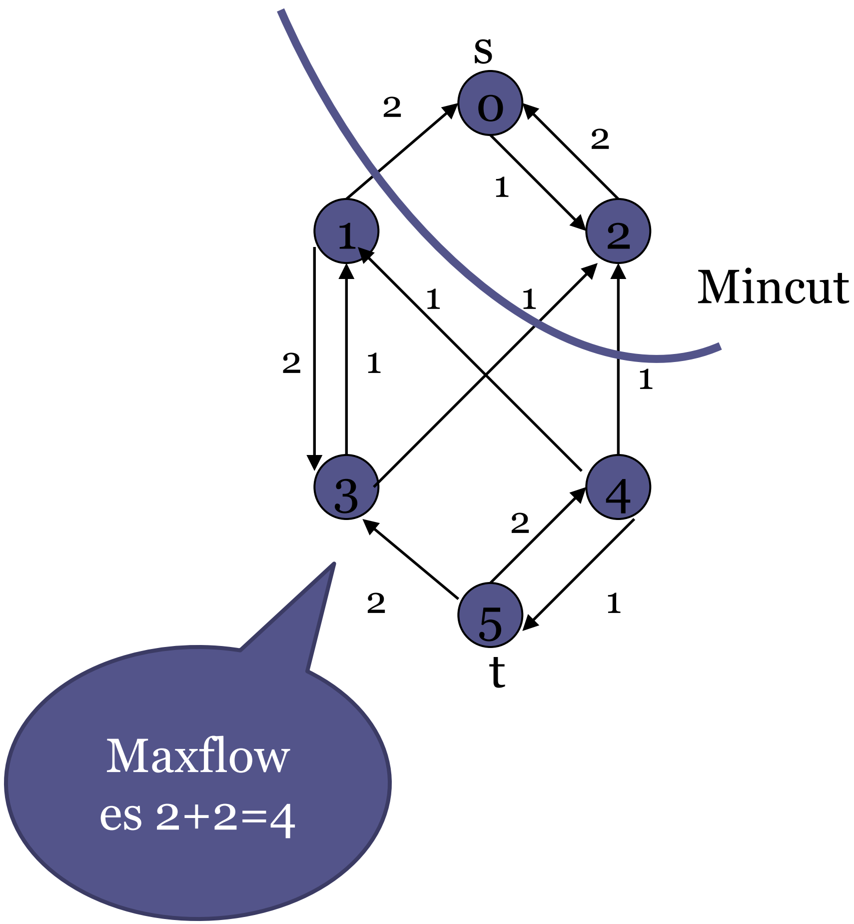
Ejemplo

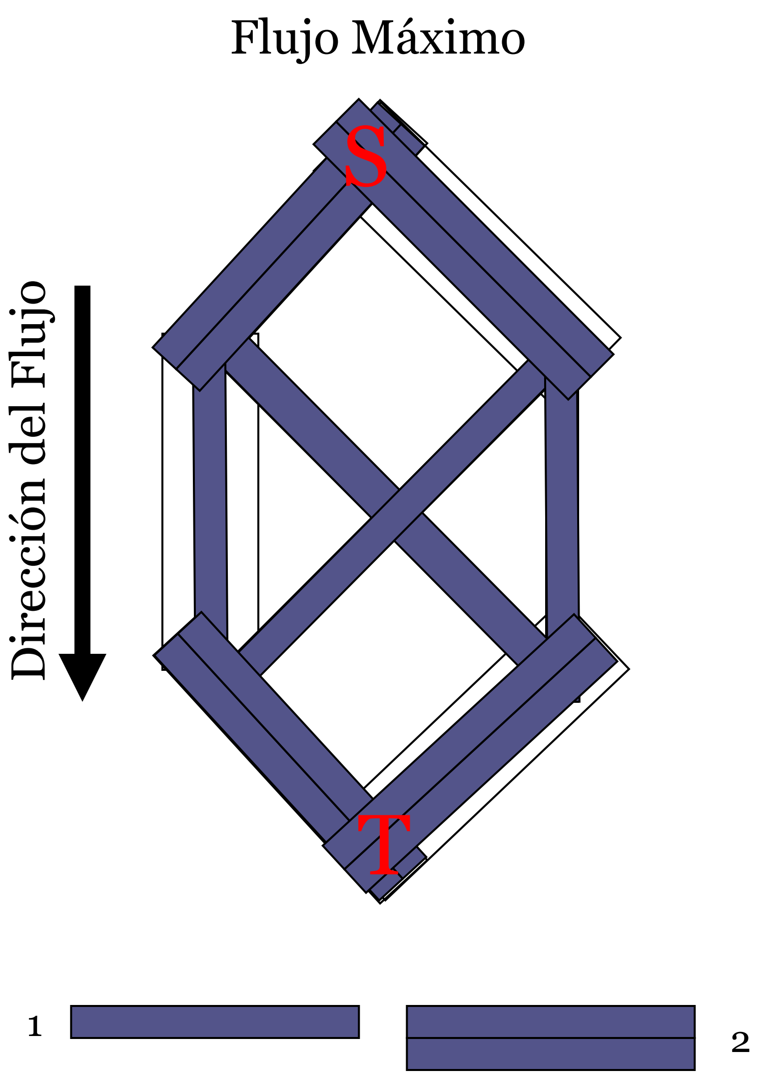


Cmin = 2 Cmin = 1 Cmin = 1

Path *p*: p.e. usando BFS (sin criterio de ordenación de vértices)

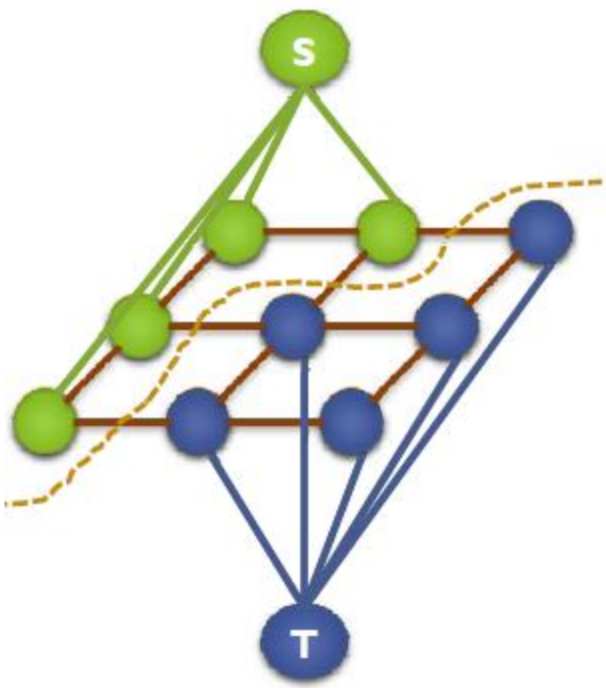
Ejemplo


s
0
t
5
1
2
3
4
Mincut
Maxflow
es 2+2=4

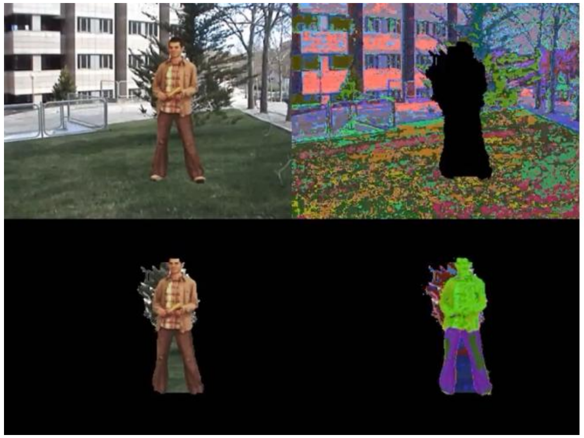

Flujo Máximo
S
T
Dirección del Flujo
1
2

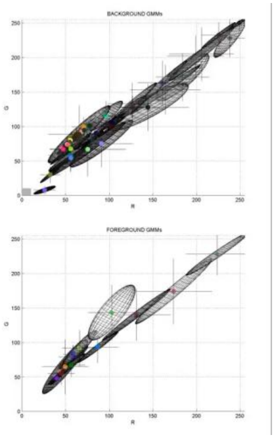
Aplicaciones

- Segmentación de imágenes – Ford-Fullkerson



"Graph Cut"
-Imagen como un grafo
-Los costes son probabilidades de pertenecer a uno de dos posibles grupos
-La saturación define la segmentación aplicando Ford-Fulkerson





Algorismes sobre grafs

- Exercici
- Aplica Ford-Fullkerson: identifica **min-cut** y **max-flow**