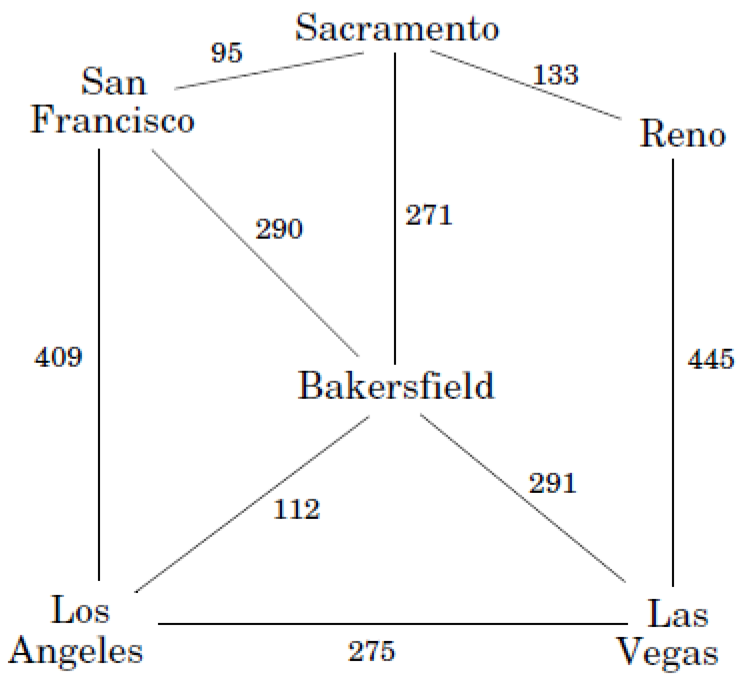
Algorísmica Avançada
Algorismes sobre grafs II

Sergio Escalera

Algorismes sobre grafs

- **Pesos a les arestes**
- Exemple amb distàncies

$e \in E$	Aresta
l_e	Longitud
$e = (u, v)$	Notació d'aresta I
$l(u, v)$	Notació d'aresta II
l_{uv}	Notació d'aresta III



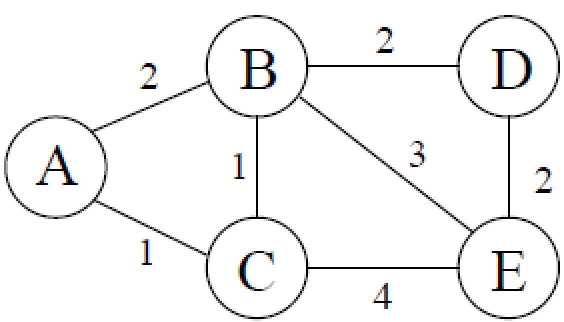
Algorismes sobre grafs

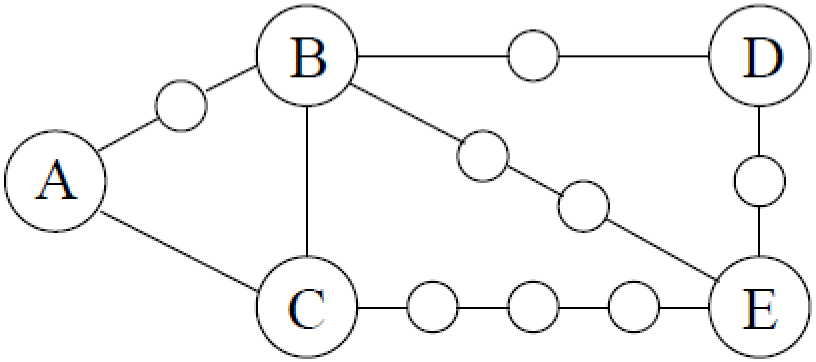
- De moment suposem que tots els pesos són positius >= 0

- BFS troba camins mínims on les arestes tenen un cost unitari.
- Cóm ho fem general per a qualsevol graf G=(V,E) amb l_e enters positius?
  - **Algorisme de Dijkstra**

Algorismes sobre grafs

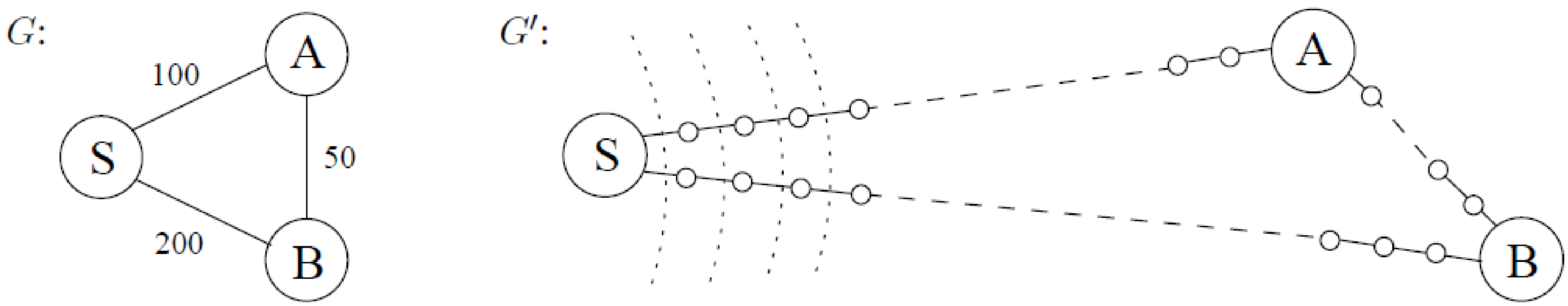
- **Algorisme de Dijkstra**
  - Una versió per fer ús de BFS
  - Dividir les longituds en valors unaris incloent vèrtexs extra





Algorismes sobre grafs

- Un problema evident



- Pensem millor en posar una “alarma” a cada node i l’actualitzem a mida que arribem fent ús de DFS. Els valors de les alarmes podrien ser els costos de les arestes!!!

Algorismes sobre grafs

- Set an alarm clock for node s at time 0.
- Repeat until there are no more alarms:

  Say the next alarm goes off at time T, for node u. Then:

  - The distance from s to u is T.
  - For each neighbor v of u in G:
    - If there is no alarm yet for v, set one for time $T + l(u, v)$.
    - If v's alarm is set for later than $T + l(u, v)$, then reset it to this earlier time.

Ara ens queda implementar el sistema d'alarmes

Algorismes sobre grafs

- **Algorisme de Dijkstra**
  - **Cua amb prioritats** → generalment **heap**

Manté un conjunt d'elements (nodes) amb les valors numèrics associats com a claus (temps de l'alarma) i suporta les següents operacions:

Inserció: *inclou un nou element al conjunt.*
Decrementar-clau: *Decrementa el valor de la clau d'un element particular. La cua amb prioritats normalment no canvia el valor de les claus, el que fa és notificar a la cua que el valor d'una certa clau ha estat decrementat.*
Eliminar-min: *Retorna l'element amb la menor clau i l'elimina del conjunt.*
Fer-cua: *Construeix una cua amb prioritats amb els elements donats i els seus valors de clau associats.*

Algorismes sobre grafs

- ***Inserció:*** *inclou un nou element al conjunt.*
- ***Decrementar-clau:*** *Decrementa el valor de la clau d'un element particular. La cua amb prioritats normalment no canvia el valor de les claus, el que fa és notificar a la cua que el valor d'una certa clau ha estat decrementat.*
- ***Eliminar-min:*** *Retorna l'element amb la menor clau i l'elimina del conjunt.*
- ***Fer-cua:*** *Construeix una cua amb prioritats amb els elements donats i els seus valors de clau associats.*

- Inserir i decrementar clau ens permet fixar les alarmes, mentre que eliminar-min ens diu quina és la pròxima alarma a tenir en compte.

Algorismes sobre grafs

```
procedure dijkstra(G, l, s)
Input:    Graph G = (V, E), directed or undirected;
          positive edge lengths {l_e : e ∈ E}; vertex s ∈ V
Output:   For all vertices u reachable from s, dist(u) is set
          to the distance from s to u.

for all u ∈ V:
   dist(u) = ∞
   prev(u) = nil
dist(s) = 0

H = makequeue(V)  (using dist-values as keys)
while H is not empty:
   u = deletemin(H)
   for all edges (u, v) ∈ E:
      if dist(v) > dist(u) + l(u, v):
         dist(v) = dist(u) + l(u, v)
         prev(v) = u
         decreasekey(H, v)
```

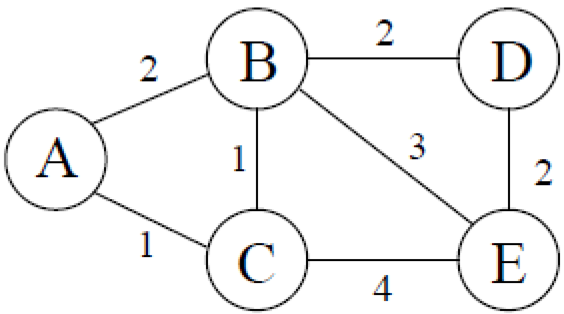
Algorismes sobre grafs

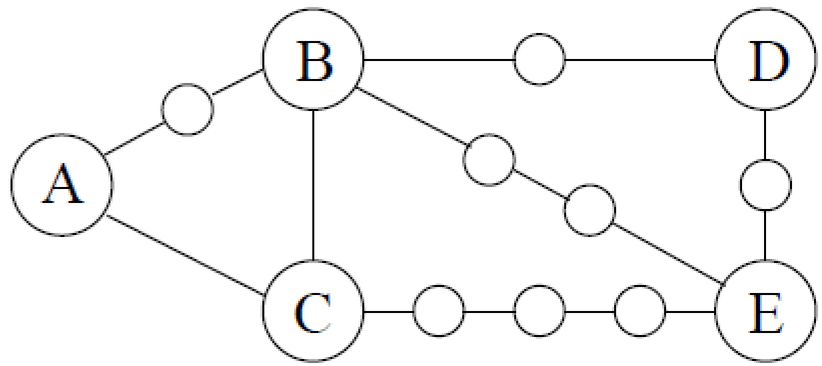
- **dist(u)** es refereix als valors actuals d'alarma del node u. Un valor infinit significa que encara no hem posat valor a l'alarma.
- L'array **prev**: guarda informació del node immediat abans del node actual u dins la ruta més curta entre s i u.
- Si retornem fent ús dels valor d'aquests punters podem reconstruir els camins més curts de forma senzilla.

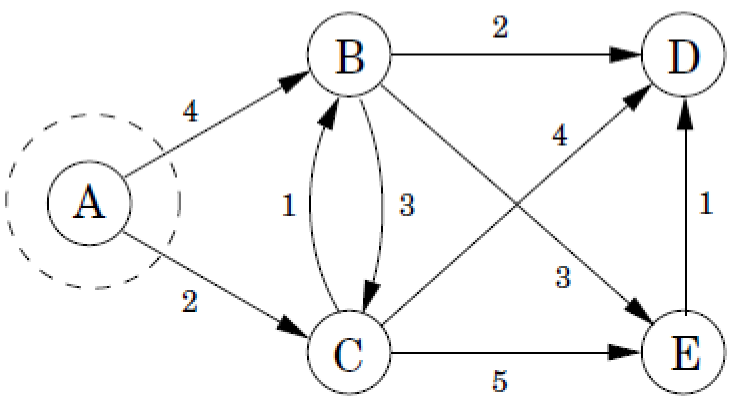
- Podem veure que la diferència principal entre l'algorisme Dijkstra I BFS és que el primer usa una cua amb prioritats en lloc d'una cua regular, de forma que prioritza nodes en funció dels costos de les arestes.

Algorismes sobre grafs

- **Algorisme de Dijkstra: exemple graf dirigit**



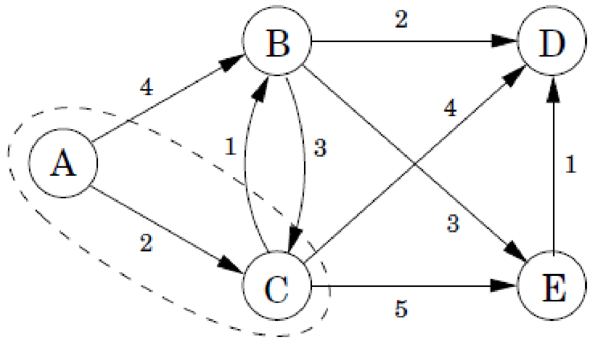




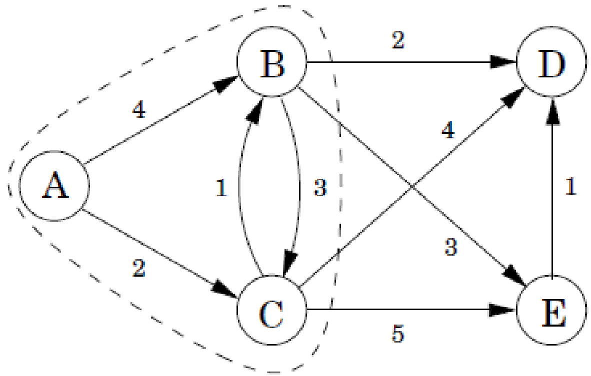
A: 0	D: ∞
B: 4	E: ∞
C: 2	

Algorismes sobre grafs

- **Algorisme de Dijkstra: exemple graf dirigit**



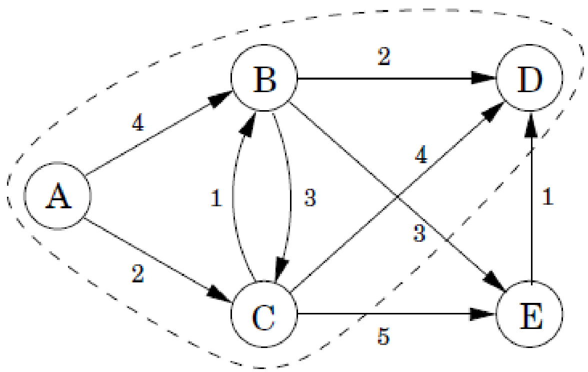
A: 0	D: 6
B: 3	E: 7
C: 2	



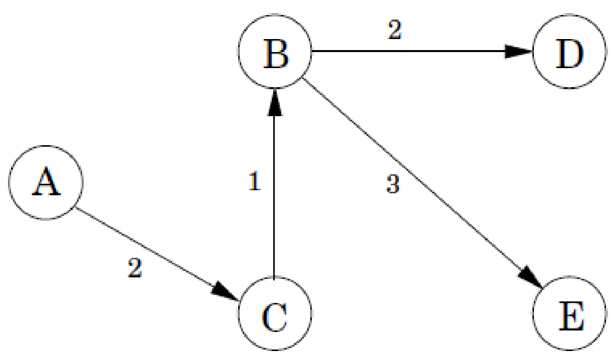
A: 0	D: 5
B: 3	E: 6
C: 2	

Algorismes sobre grafs

- **Algorisme de Dijkstra: exemple graf dirigit**

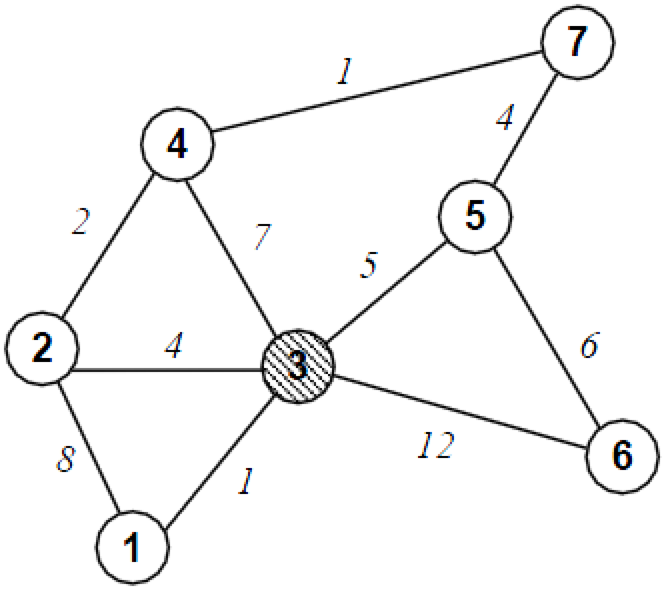


A: 0	D: 5
B: 3	E: 6
C: 2	



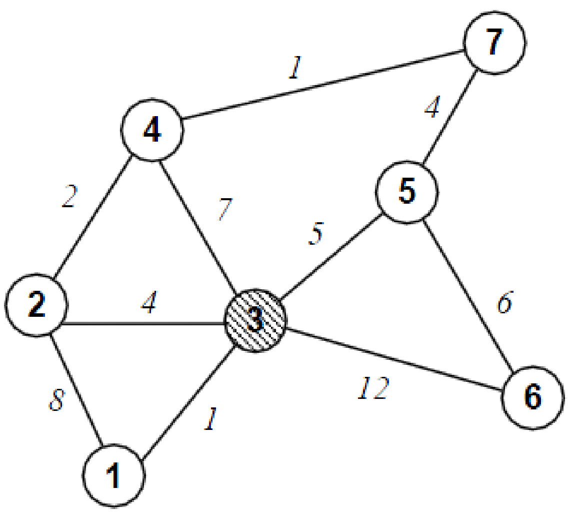
Algorismes sobre grafs

- **Algorisme de Dijkstra: exemple graf no dirigit**



Node inclòs

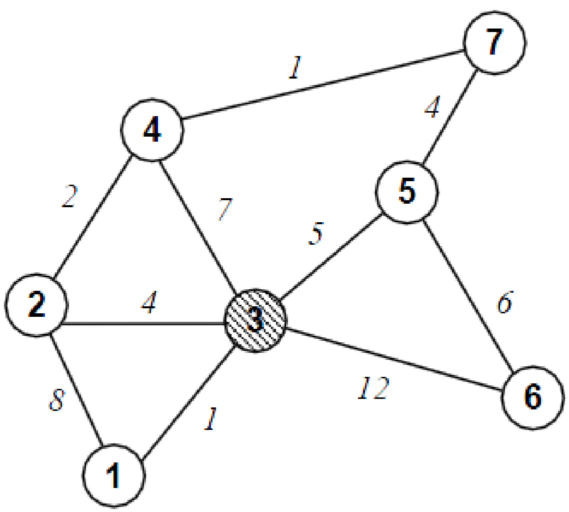
Conjunt de nodes inclosos



Iteración	*u*	Vectores	1	2	3	4	5	6	7	S
Inicial	---	D:	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	[ ]
		P:	-	-	-	-	-	-	-	
1	3	D:								[3]
		P:								
2		D:								
		P:								
3		D:								
		P:								
4		D:								
		P:								
5		D:								
		P:								
6		D:								
		P:								
7		D:								
		P:								

Cost actual del node

Node anterior



Iteración	*u*	Vectores	1	2	3	4	5	6	7	S
Inicial	---	D:	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	[ ]
		P:	-	-	-	-	-	-	-	
1	3	D:	1	4	0	7	5	12	∞	[3]
		P:	3	3	-	3	3	3	-	
2		D:								
		P:								
3		D:								
		P:								
4		D:								
		P:								
5		D:								
		P:								
6		D:								
		P:								
7		D:								
		P:								

Algorismes sobre grafs

- Veiem la complexitat d'implementar les cues amb prioritat per fer l'algorisme de **Dijkstra.**

Implementation	deletemin	insert/ decreasekey	$\lvert V\rvert \times$ deletemin $+$ $(\lvert V\rvert + \lvert E\rvert) \times$ insert
Array	$O(\lvert V\rvert)$	$O(1)$	$O(\lvert V\rvert^2)$
Binary heap	$O(\log \lvert V\rvert)$	$O(\log \lvert V\rvert)$	$O((\lvert V\rvert + \lvert E\rvert) \log \lvert V\rvert)$

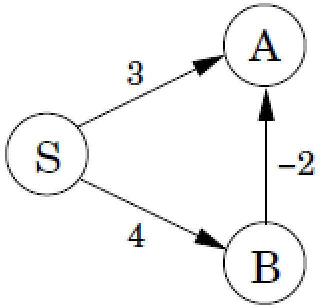
Algorismes sobre grafs

- Ejemplo práctico → GEOCUT

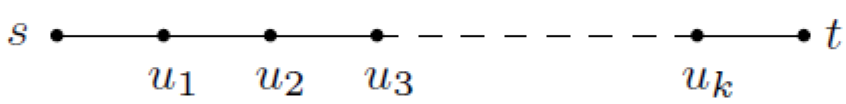
Algorismes sobre grafs

- **Dijkstra** amb pesos negatius

procedure update$((u,v) \in E)$
$\texttt{dist}(v) = \min\{\texttt{dist}(v), \texttt{dist}(u) + l(u,v)\}$



- Amb Dijkstra sempre arribem de s a t amb camí mínim independentment de l'ordre dels pesos de les arestes si aquests són positius. **No amb negatius!**



Algorismes sobre grafs

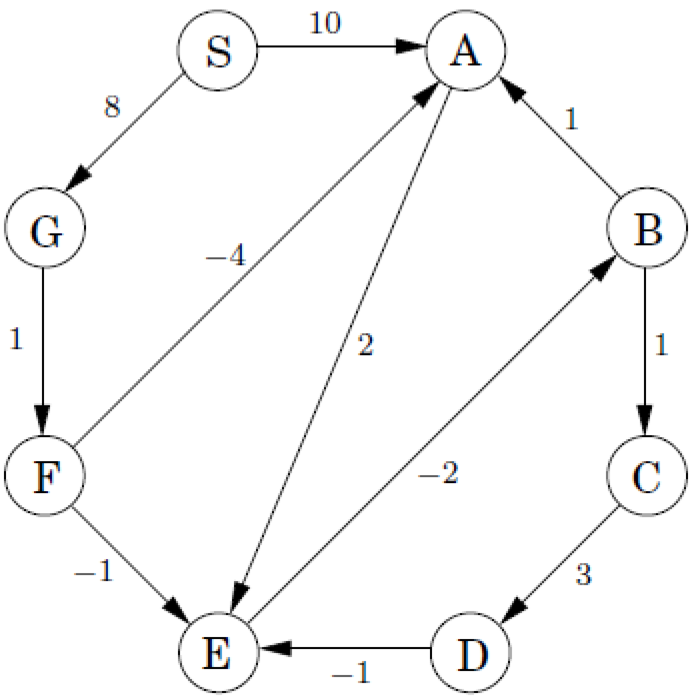
- Solució? Canviem l'algorisme perquè es calculin les distàncies simultàneament → actualitzar totes les arestes |V|-1 vegades (O(|V|·|E|))
  - Bellman-Ford

```
procedure shortest-paths(G, l, s)
Input:    Directed graph G = (V, E);
          edge lengths {l_e : e ∈ E} with no negative cycles;
          vertex s ∈ V
Output:   For all vertices u reachable from s, dist(u) is set
          to the distance from s to u.

for all u ∈ V:
   dist(u) = ∞
   prev(u) = nil

dist(s) = 0
repeat |V| − 1 times:
   for all e ∈ E:
      update(e)
```

```
procedure update((u, v) ∈ E)
dist(v) = min{dist(v), dist(u) + l(u, v)}
```

Algorismes sobre grafs

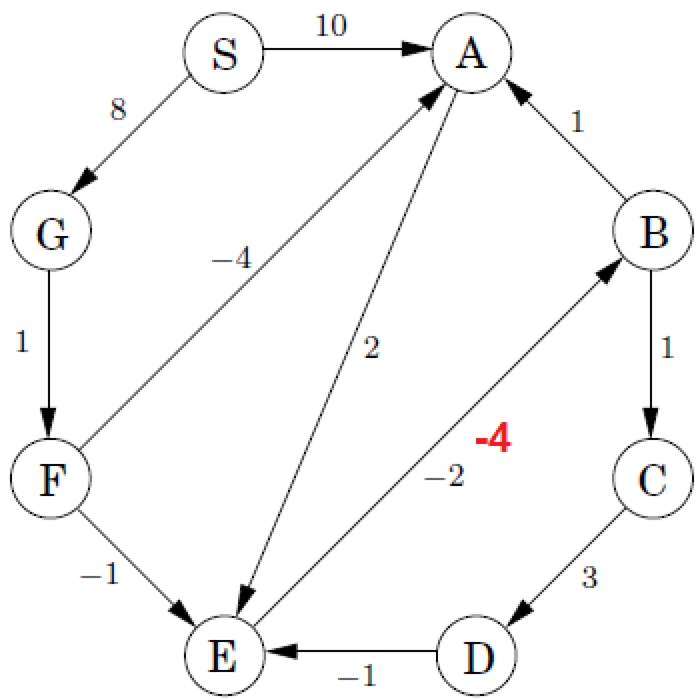
- Implementació: si en una iteració cap aresta *e* s'actualitza → finalitzar



	Iteration							
Node	0	1	2	3	4	5	6	7
S	0	0	0					
A	∞	10	10					
B	∞	∞	∞					
C	∞	∞	∞					
D	∞	∞	∞					
E	∞	∞	12					
F	∞	∞	9					
G	∞	8	8					

Algorismes sobre grafs

- Cicles negatius



$A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A$

Els podem trobar amb l'algorisme Bellman-Ford

El camí mínim té com a màxim longitud |V|-1
Podem detectar cicles si fem una iteració extra |V|

→ Hi ha cicle negatiu si a la iteració |V| alguna aresta és actualitzada

Algorismes sobre grafs

- Cicles negatius
- Hi ha dos tipus de grafs que no tenen cicles negatius: sense pesos negatius i sense cicles
- El primer és directe. Per resoldre el camí mínim en acíclic grafs dirigits negatius:
  - Linealitzar usant DFS
  - Temps lineal!
- Si posem els negatius dels pesos podem trobar els camins de longitud màxima

Algorismes sobre grafs

Linealitzar usant DFS

procedure dag-shortest-paths(G, l, s)

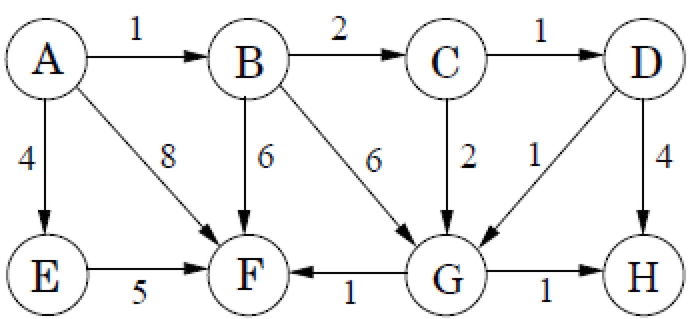
Input: Dag $G = (V, E)$;
edge lengths $\{l_e : e \in E\}$; vertex $s \in V$

Output: For all vertices u reachable from s, dist(u) is set to the distance from s to u.

```
for all u ∈ V:
   dist(u) = ∞
   prev(u) = nil

dist(s) = 0
Linearize G
for each u ∈ V, in linearized order:
   for all edges (u,v) ∈ E:
      update(u,v)
```

Algorismes sobre grafs

- Exercicis: Dijkstra
- Començant a A: dibuixa la taula de distàncies immediates a tots els nodes a cada iteració.
- Mostra l’arbre de camins mínims



Algorismes sobre grafs

- Exercici: el mateix amb Bellman-Ford