T6. Señales, transferencia y respuesta de sistemas

departament d' Electrònica
Universitat de Barcelona

Señales, transferencia y respuesta de sistemas

- Objetivos.
- Introducción.
- Tipos de señales.
- Transformada de Laplace.
- Resolución de circuitos en el espacio frecuencial.
- Función de transferencia y diagrama de Bode.

Objetivos

- **Para circuitos con variaciones temporales, poder trabajar en el espacio de las frecuencias.**
- **Resolver circuitos en el espacio de las frecuencias.**
- **Interpretar las funciones de transferencia de los sistemas.**
- **Saber representar un diagrama de Bode de la respuesta frecuencial de un circuito.**

Introducción

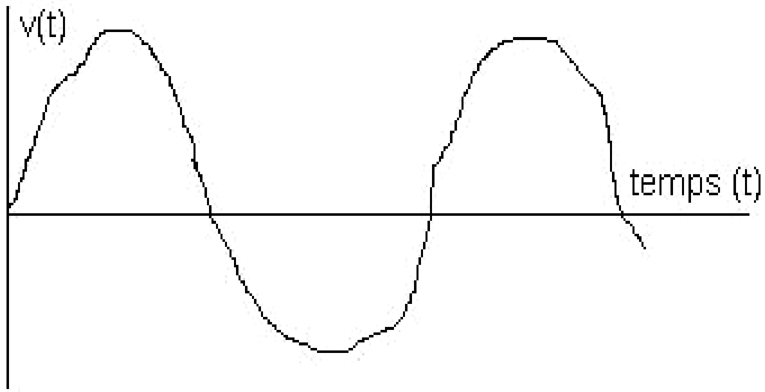
- **Resolver circuitos con señales alternas directamente es generalmente complicado:**
  - » **C y L incluyen derivadas o integrales en leyes de Kirchhoff.**
  - » **Las fuentes pueden tener variaciones temporales complicadas.**
  - » **Dependen de las condiciones iniciales (carga en C y corriente en L).**
- **¿Cómo conocer la respuesta de un circuito desconocido o complejo?:**
  - » **Un método, a través de la respuesta en frecuencia → Función de transferencia.**

Introducción

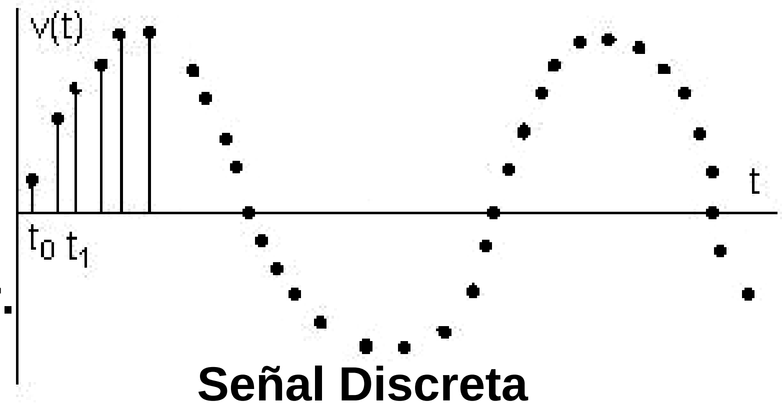
- **Pensar en señales compuesta por frecuencias (sinusoidales) es habitual:**
  - **Sonidos: Ondas acústicas compuestas por ondas (de presión en este caso) sinusoidales.**
  - **Sonidos agudos: alta frecuencia.**
  - **Sonidos graves: baja frecuencia.**
  - **Todos los sonidos son combinaciones de ondas de diferentes frecuencias.**
  - **Existen métodos para mejorar la calidad del sonido eliminando (o atenuando) ondas de ciertas frecuencias.**
    - **Ej: Eliminando altas frecuencias para eliminar sonidos tales como chirridos, etc. El dispositivo que lo hace se dice que es un sistema pasa-bajos.**

Tipos de señales

- **Las señales se pueden clasificar como:**
  - » **Analógicas:**
    - **Ej: Señal proporcionada por un sensor de temperatura.**
  - » **Discretas:**
    - **Ej: medidas tomadas con un instrumento cada intervalo de tiempo.**
  - » **Digitales:**
    - **Ej: Señal medida por ordenador.**



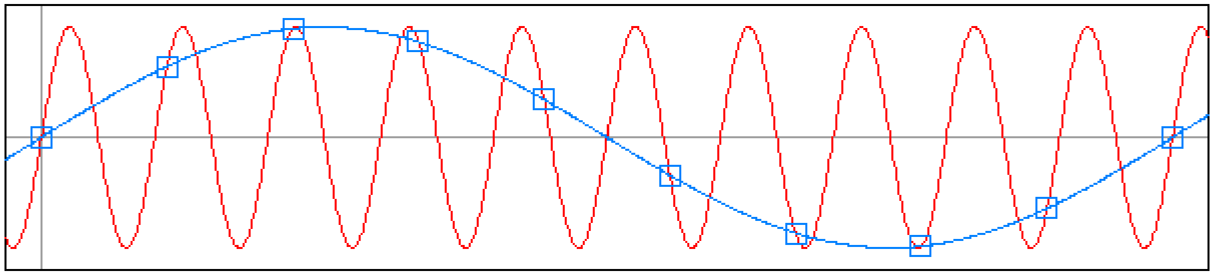
Señal Analógica



Señal Discreta

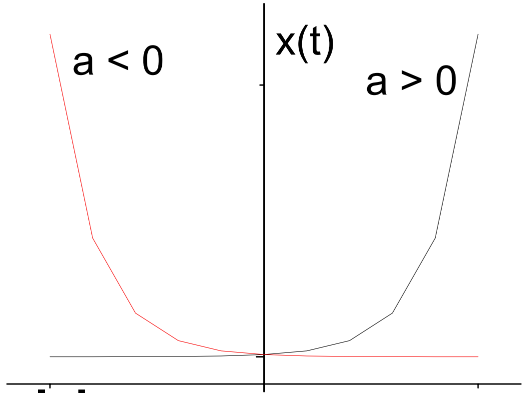
Tipos de señales

- **Señales alternas más comunes:**
  - **Sinusoidal:** $x(t) = A \cdot \sin(w \cdot t)$
    - **w: Frecuencia angular (=2·π·f). Unidades: rad/s.**
      - **Cada 2·π de w·t es un ciclo completo.**
    - **A: Amplitud. Tiene las unidades de x.**
    - **f: Frecuencia. Unidades: 1/s = Hz. (número de oscilaciones por segundo).**
    - **Valor rms: A/√2.**



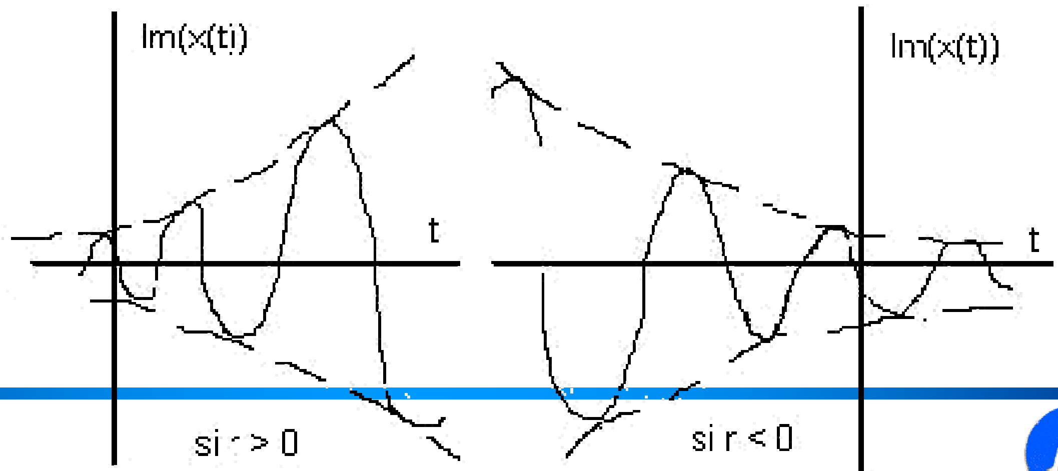
Tipos de señales

- **Señales alternas más comunes: (cont.)**
  - **Exponencial:** $x(t) = C \cdot e^{a \cdot t}$
    - **'a' número real:**
    - **'a' número complejo: a = r + j·w**
      - **Suma de dos números: real y complejo.**
      - **Complejo: número real multiplicado por j ($\sqrt{-1}$)**



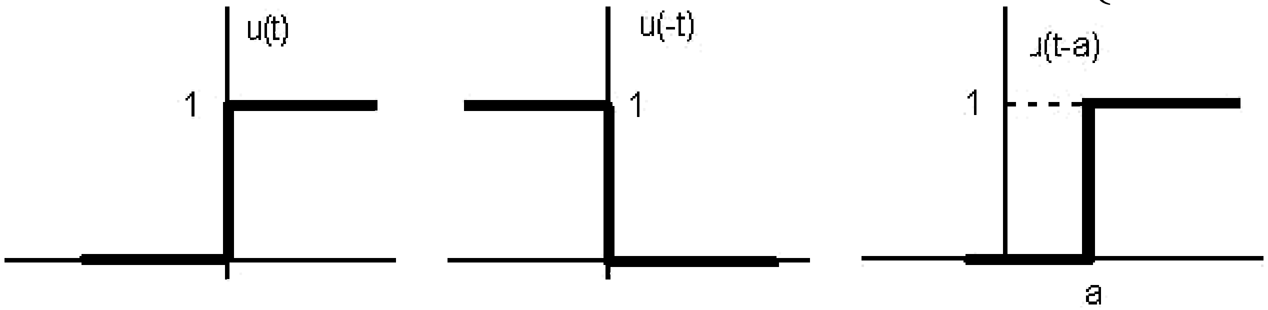
$$x(t) = C \cdot e^{(r+jw)\cdot t} = C \cdot e^{r\cdot t} \cdot e^{(r+jw)\cdot t} = C \cdot e^{r\cdot t} \cdot (\cos(w \cdot t) + j \sin(w \cdot t)) =$$

$$= C \cdot e^{r\cdot t} \cdot \cos wt + j \cdot C \cdot e^{r\cdot t} \cdot \sin(wt)$$



Tipos de señales

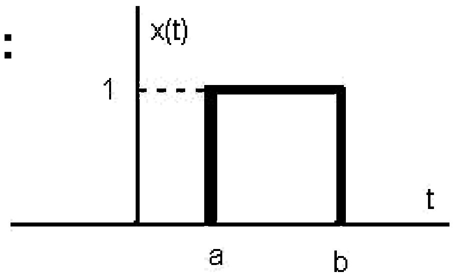
- **Señales alternas más comunes: (cont.)**
  - » **Señal escalón unitario (o de Heaviside):** $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$



    - **Propiedad:** $\int_{-\infty}^{\infty} y(t)u(t)dt=\int_{0}^{\infty} y(t)dt$

  - » **Señal cuadrada unitaria:**
    - **Puede obtenerse a partir de la señal escalón:**

u(t-a)-u(t-b)

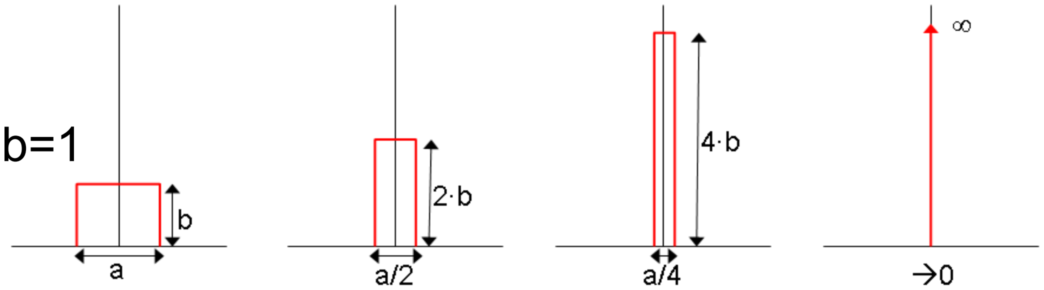


$$x(t)=u(t-a)-u(t-b)$$

Tipos de señales

- **Señales alternas más comunes: (cont.)**
  - **Señal impulso (o delta de Dirac):**

donde a·b=1



- **También puede obtenerse a partir de la señal escalón:**

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

- **Propiedad:** $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$

Sistemas

- **Si tenemos un dispositivo electrónico que no conocemos, ¿cómo saber su comportamiento?:**
  - » **Aplicando distintas señales a la entrada y ver su respuesta en la salida.**
- **Así, el dispositivo se considera un sistema que al aplicarle una entrada, la modifica y origina una salida.**
- **El sistema puede representarse como una 'caja' con entradas y salidas:**

- **¿Cómo puede obtenerse la función del sistema?**

Transformada de Laplace

- **Se puede demostrar que la 'función' de un sistema (lineal) queda determinada por su respuesta a señales sinusoidales en todo el rango de frecuencias (de operación).**
- **Por tanto, sería conveniente trabajar en el espacio de las frecuencias (sinusoidales: s) en lugar del espacio temporal (t).**
- **Este cambio se puede obtener mediante la <u>transformada de Laplace</u> (TL):**

$$L\left(x(t)\right) = X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt$$

  - **Así se ha transformado de la variable 't' a la variable 's'.**
  - **'s' es la frecuencia (en general, un número complejo).**
  - **X(s) representa la <u>amplitud</u> de la señal sinusoidal de frecuencia s. (X(s) es un nº complejo: también da la <u>fase</u>).**

Transformada de Laplace

- **Ejemplos de aplicación de la TL:**
  - **Transformada de la función escalón unitario:**

$$L(u(t)) = \int_{0^-}^{\infty} u(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_{0^-}^{\infty} 1 \cdot e^{-st} \cdot dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s}\left(e^{-s\infty} - e^{-s0}\right) = -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

  - **Exponencial:** e^{-at}

$$L\left(e^{-at}\right) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+a)\cdot t} \cdot dt = -\frac{1}{s+a} e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

Transformada de Laplace

- **Propiedades de la TL:**

Propiedad	Función v(t)	Transformada X(s)
Linealidad	$Ax_1(t)+Bx_2(t)$	$AX_1(s)+BX_2(s)$
Integración	$\int_0^t x(t)dt$	$\frac{X(s)}{s}$
Derivación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)-x(0^-)$
	$\frac{d^2x(t)}{dt^2}$	$s^2X(s)-s\cdot x(0^-)-x'(0^-)$

Transformada de Laplace

Propiedades de la TL: (cont.)

Propiedad	Función x(t)	Transformada X(s)
Derivación	$t \cdot x(t)$	$-\dfrac{dX(s)}{ds}$
Desplazamiento	$e^{-at} \cdot x(t)$	$X(s-a)$

Transformada de Laplace

Tabla de transformadas :

Nom funció	Funció v(t)	Transformada V(s)
Impuls	δ(t)	1
Esglaó	U(t)	1 / s
Constant	K	K / s
Rampa	t u(t)	$1 / s^2$
Exponencial	e^{-at}	1 / (s + a)
Rampa esmorteïda	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
Sinus	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$
Cosinus	$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$
Sinus esmorteït	$e^{-at} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2}$
Cosinus esmorteït	$e^{-at} \cos \beta t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2}$

Transformada de Laplace

- **Polos y ceros:**
  - **De la tabla anterior se observa que la funciones transformadas tienen la forma:**

$$X(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s^1 + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s^1 + a_0}$$

    - **polinomios en s en numerador y denominador.**
  - **El numerador tiene m soluciones y el denominador n.**
    - **Por tanto puede ponerse como:**

$$X(s)=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

  - **z_i son los <u>ceros</u> de V(s) (ya que hacen V(z_i) = 0, i=1…m).**
  - **p_i son los <u>polos</u> de V(s) (ya que hacen V(p_i) = ∞, i=1…n).**
  - **zeros y polos son en general números complejos.**

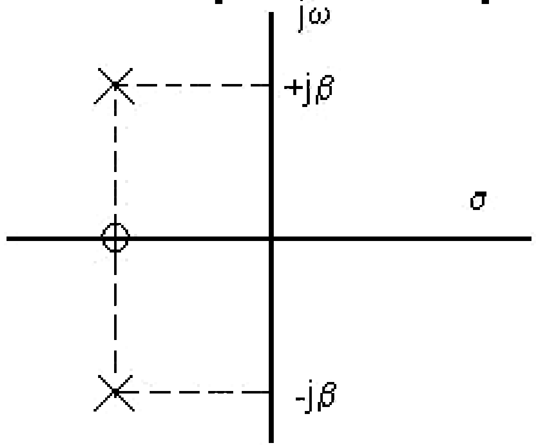
Transformada de Laplace

Polos y ceros: (cont.)

» **Ejemplo:** $x(t) = e^{-at} \cdot \cos \beta t \quad \rightarrow \quad X(s) = \dfrac{s+a}{(s+a)^2 + \beta^2}$

- **Zeros:** $s + a = 0 \quad \rightarrow \quad z_1 = -a$
- **Polos:** $(s+a)^2 + \beta^2 = 0 \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = -a \pm j \cdot \beta$

- **Representación en el plano complejo:**



Transformada de Laplace

- **Transformada inversa:**
  - **Paso inverso a la transformada de Laplace.**
    - **Es decir, conociendo X(s), obtener x(t).**

$$Si\ x(t) \xrightarrow{L} X(s) \qquad X(s) \xrightarrow{L^{-1}} x(t)\cdot u(t)$$

  - **Aunque existen métodos numéricos para hacer L^{-1}, nosotros utilizaremos las tablas vistas anteriormente.**
  - **Ejemplo:**

$$X(s) = \frac{10}{s+2} \quad \rightarrow \quad x(t) = 10 \cdot e^{-2t} \cdot u(t)$$

Transformada de Laplace

- **Transformada inversa: (cont.)**
  - **Caso general:**
    - **Sabemos:**

$$X(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s^1 + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s^1 + a_0} \longrightarrow X(s)=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

    - **Esta función siempre puede ponerse como:**

$$X(s)=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{k_n}{s-p_n}$$

    - **Por tanto, la solución será del tipo:**

$$x(t)=u(t)\cdot\left(k_1\cdot e^{p_1 t}+k_2\cdot e^{p_2 t}+\cdots+k_n\cdot e^{p_n t}\right)$$

      - **En general, k_i y p_i son números complejos.**

Transformada de Laplace

- **Transformada inversa: (cont.)**
  - **Caso general: (cont)**
    - **Para obtener k_i utilizamos la siguiente expresión:**

$$k_i = \left[(s - p_i)\cdot X(s)\right]_{s=p_i}$$

- donde en X(s) utilizamos la versión conocida de X(s).

  - **Ejemplo:** $X(s) = \dfrac{k(s-z_1)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)} \Rightarrow X(s) = \dfrac{k_1}{s-p_1} + \dfrac{k_2}{s-p_2} + \dfrac{k_3}{s-p_3}$

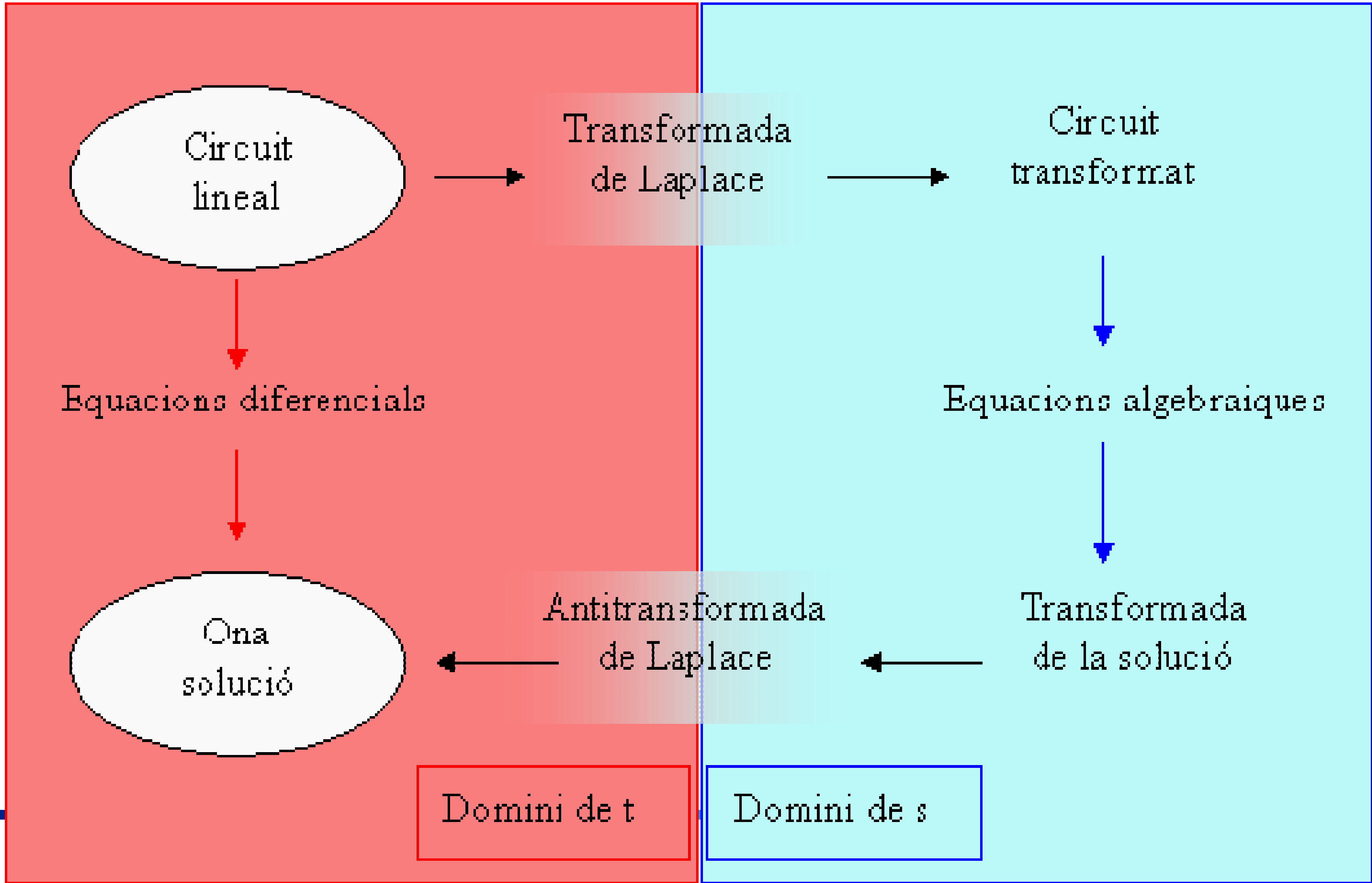
$$k_1 = \left[(s-p_1)\cdot X(s)\right]_{s=p_1} = \left.\frac{k(s-z_1)}{(s-p_2)(s-p_3)}\right|_{s=p1} = \frac{k(p_1-z_1)}{(p_1-p_2)(p_1-p_3)}$$

- **Igualmente:** $k_2 = \left[(s-p_2)\cdot X(s)\right]_{s=p_2}$ $\quad k_3 = \left[(s-p_3)\cdot X(s)\right]_{s=p_3}$

- **El resultado final será:** $x(t) = \left(k_1 \cdot e^{p_1 t} + k_2 \cdot e^{p_2 t} + k_3 \cdot e^{p_3 t}\right)\cdot u(t)$

Resolución de circuitos

- **Proceso de transformación de circuitos:**



Resolución de circuitos

- **Proceso de transformación de circuitos: (cont.)**
  - **Hemos de transformar todo:**
    - **Dispositivos: R, L, C, etc.**
    - **Fuentes: de tensión y de corriente.**
    - **Las tensiones del circuito serán V(s) (es la transformada de v(t)) y la corrientes I(s) (transformada de i(t)).**
  - **Resolvemos el circuito aplicando las leyes de Kirchhoff, pero en el espacio de Laplace:**
    - **También se cumplen las leyes en el espacio transformado.**
  - **Finalmente antitransformamos para obtener la señal “real”.**

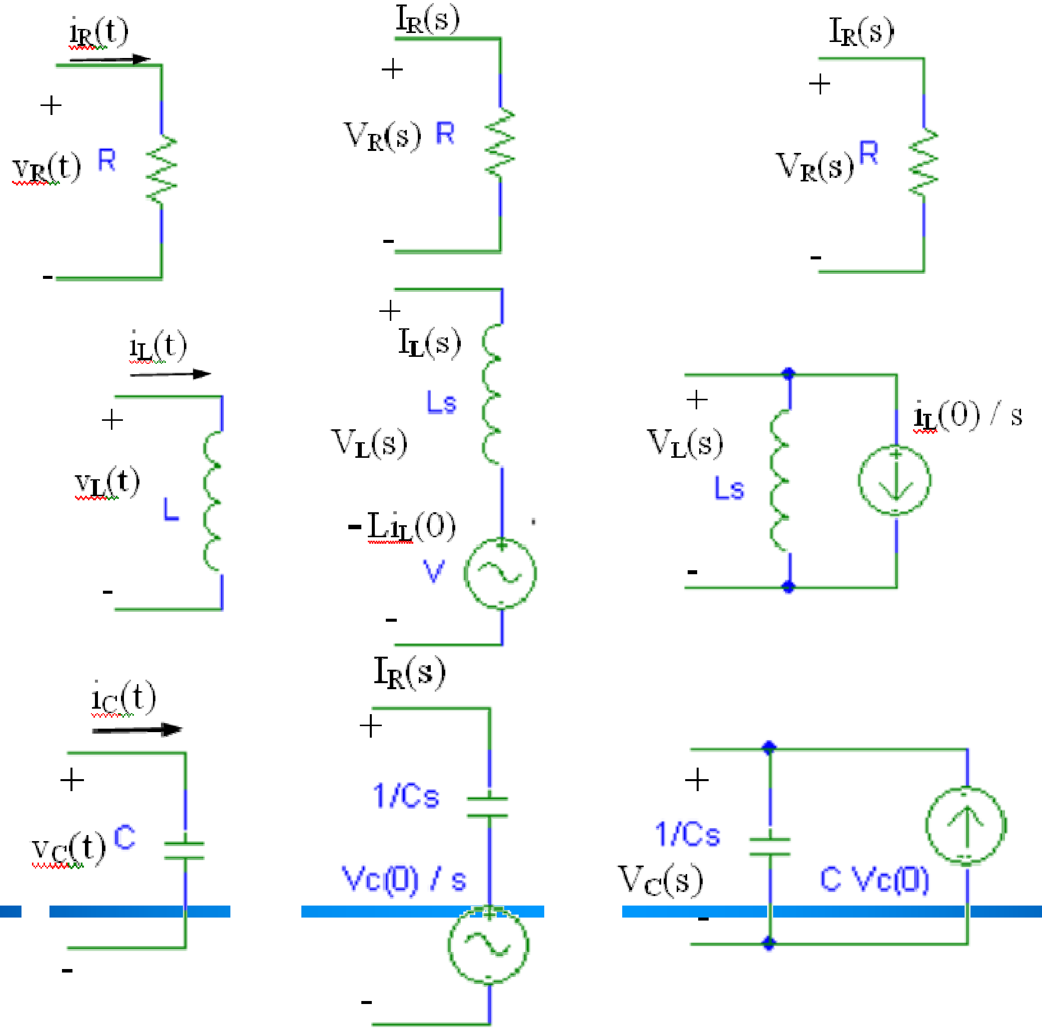
Resolución de circuitos

- **Proceso de transformación de circuitos:**
  - **Transformación de los dispositivos:**
    - **Resistencia:** $v_R(t) = Ri_R(t) \quad \rightarrow \quad V_R(s) = RI_R(s)$
    - **L:** $v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad V_L(s) = LsI_L(s) - Li_L(0)$
    - **C:** $v_C(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_C(t)dt + v_c(0) \quad \rightarrow \quad V_C(s) = \dfrac{I_C(s)}{Cs} + \dfrac{1}{s}v_C(0)$
  - **La relación V(s)/I(s), con cond. inic. nulas se le llama la impedancia Z(s):**
    - **Equivale a la resistencia (en el dominio temporal).**
    - **Para una resistencia (R): $Z_R(s) = R$**
    - **Para una inductancia (L): $Z_L(s) = L \cdot s$**
    - **Para una capacidad (C): $Z_C(s) = 1/(C \cdot s)$**

Resolución de circuitos

$$R \rightarrow \quad V_R(s) = RI_R(s)$$
$$L \rightarrow \quad V_L(s) = LsI_L(s) - Li_L(0)$$
$$C \rightarrow \quad V_C(s) = \frac{I_C(s)}{Cs} + \frac{1}{s}v_C(0)$$

$$I_R(s) = \frac{1}{R}V_R(s)$$
$$I_L(s) = \frac{1}{Ls}V_L(s) + \frac{1}{s}i_L(0)$$
$$I_C(s) = CsV_C(s) - Cv_C(0)$$

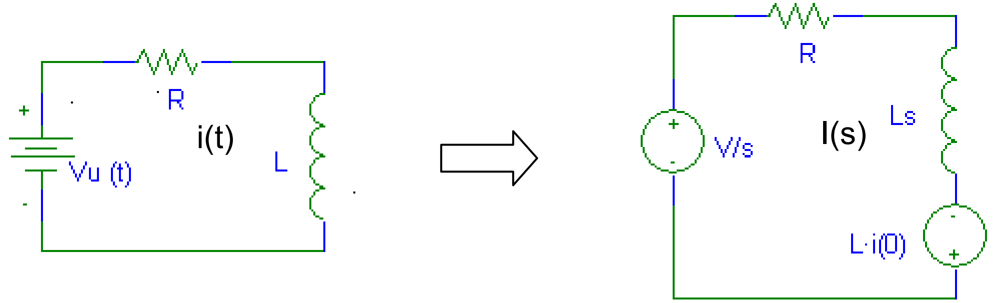


Resolución de circuitos

- **Con condiciones iniciales nulas, al resolver el circuito transformado se pueden tratar L y C como si fuesen resistencias de valor L·s y 1/(C·s) respectivamente.**

Resolución de circuitos

- **Ejemplo: Queremos conocer i(t) en circuito:**



Kirchhoff: $$\frac{V}{s} - RI(s) - I(s)Ls + Li_L(0) = 0$$

$$\Rightarrow (Ls + R)I(s) = \frac{V}{s} + Li_L(0)$$

$$\Rightarrow I(s) = \frac{V/L}{s(s + R/L)} + \frac{i_L(0)}{s + R/L} = \frac{V/R}{s} - \frac{V/R}{s + R/L} + \frac{i_L(0)}{s + R/L}$$

I efectuant la transformació inversa:

$$i(t) = \frac{V}{R} + \left[i_L(0) - \frac{V}{R} \right] e^{-R \cdot t / L} \qquad (per\ t > 0)$$

Función de transferencia

- **Definición: Relación entre variable de salida y variable de entrada en el espacio de Laplace para <u>condiciones iniciales nulas</u>:**

$$Función\ de\ transferencia = \left.\frac{Transformada\ de\ la\ señal\ de\ salida}{Transformada\ de\ la\ señal\ de\ entrada}\right|_{CI=0} = T(s)$$

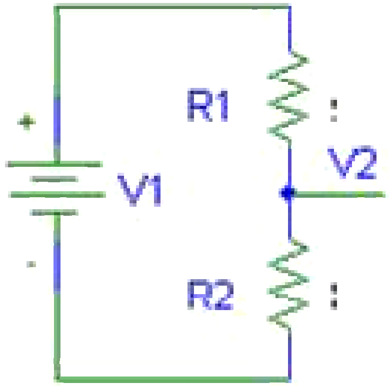
- **Combinaciones posibles:**

$$T(s)=\left.\frac{V_0(s)}{V_I(s)}\right|_{CI=0} \quad ó \quad T(s)=\left.\frac{I_0(s)}{I_I(s)}\right|_{CI=0} \quad ó \quad T(s)=\left.\frac{V_0(s)}{I_I(s)}\right|_{CI=0} \quad ó \quad T(s)=\left.\frac{I_0(s)}{V_I(s)}\right|_{CI=0}$$

- **T(s) define la función del sistema electrónico → si sabemos la entrada, podremos obtener la salida.**
- **Es independiente de la entrada y de la salida.**

Función de transferencia

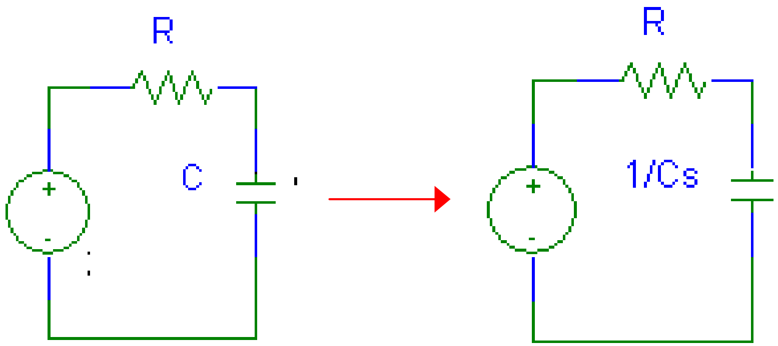
- **Ejemplo 1:**



$$V_2(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1(t) \quad \rightarrow \quad V_2(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1(s)$$

$$T(s) = \frac{V_0(s)}{V_I(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

- **Ejemplo 2:**



$$V_0(s) = V_I(s) \frac{1/Cs}{R + 1/Cs} = V_I(s) \frac{1}{RCs + 1} \quad \rightarrow \quad T(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

Función de transferencia

- Conociendo la función de transferencia de un circuito, podremos obtener la salida del circuito para cualquier entrada: $T(s)=\dfrac{V_0(s)}{V_I(s)} \quad \Rightarrow \quad V_0(s)=T(s)\cdot V_I(s)$

  » **El producto $T(s)\cdot V_I(s)$ será siempre de la forma:**

$$T(s)\cdot V_I(s)=\frac{b_l s^l+b_{l-1}s^{l-1}+\cdots+b_1 s^1+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s^1+a_0}$$

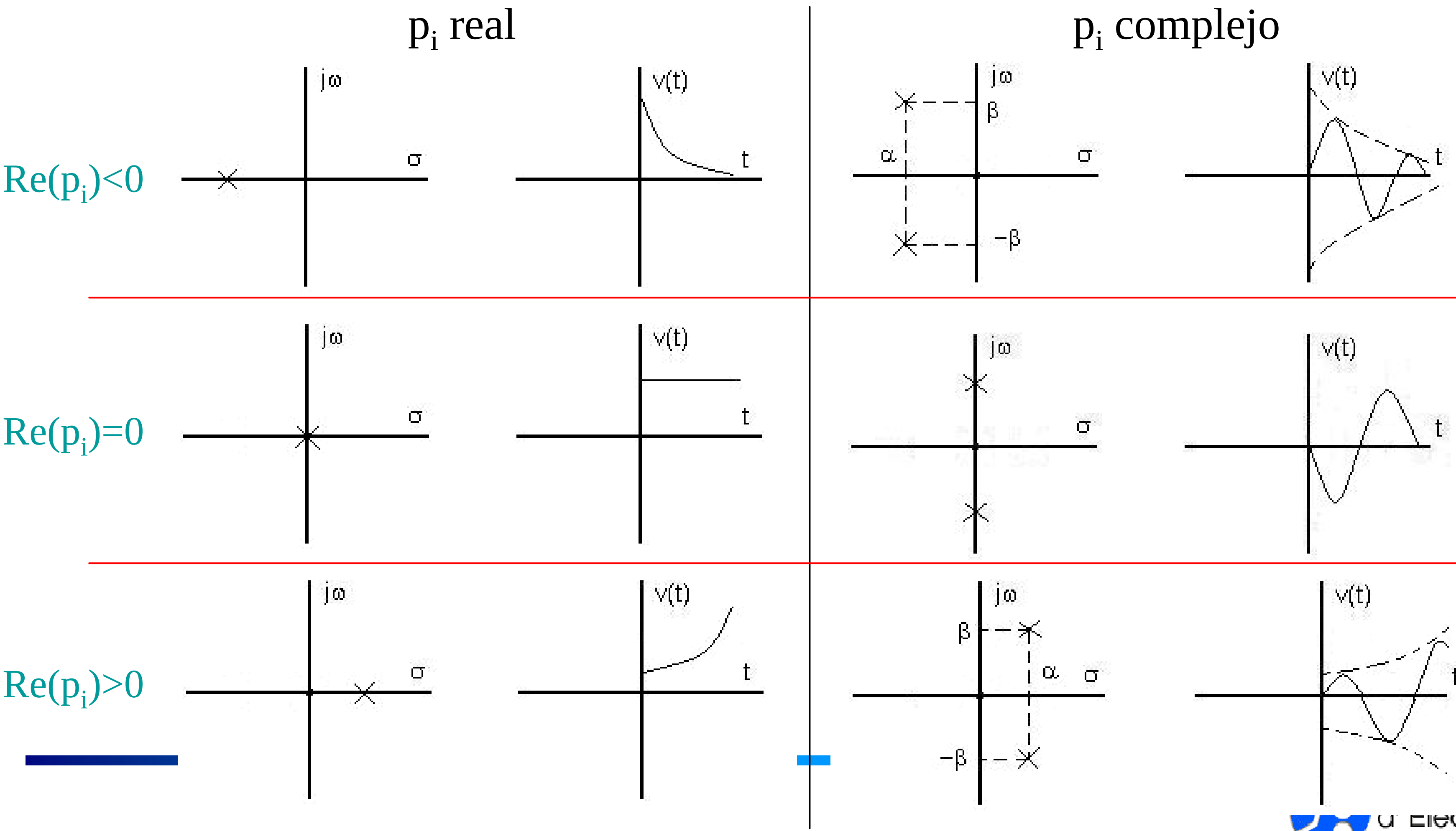
  » **Por tanto, para obtener $V_o(s)$ haremos el mismo procedimiento que hemos visto anteriormente:**

$$V_o(s)=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{k_n}{s-p_n} \longrightarrow v_o(t)=u(t)\cdot\left(k_1\cdot e^{p_1 t}+k_2\cdot e^{p_2 t}+\cdots+k_n\cdot e^{p_n t}\right)$$

Función de transferencia

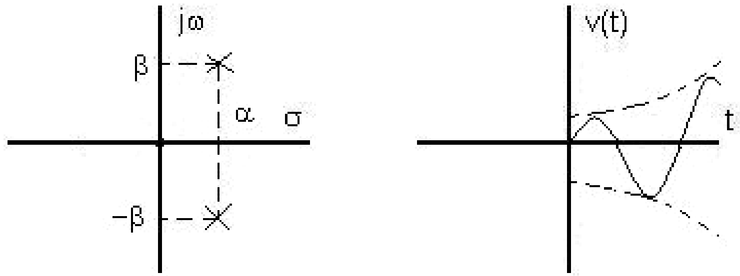
- **Tipos de soluciones en general:**

$$v_o(t) = u(t)\cdot\left(k_1\cdot e^{p_1 t} + k_2\cdot e^{p_2 t} + \cdots + k_n\cdot e^{p_n t}\right)$$

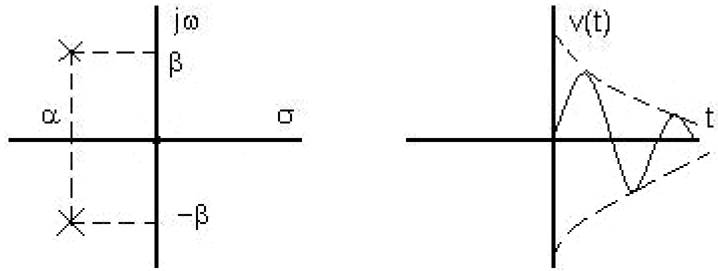


Función de transferencia

- **Conclusiones principales:**
  - **Si la parte real de alguno de los p_i es positiva, el sistema es inestable (la salida se irá a infinito…).**



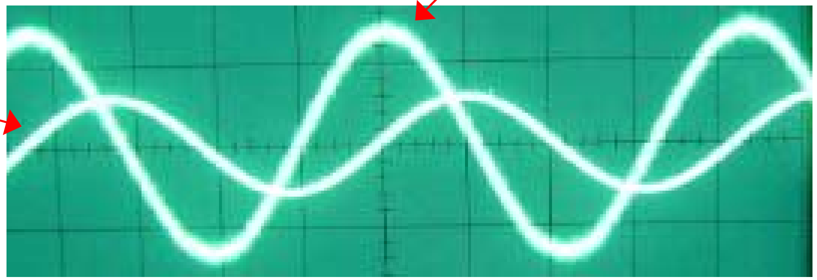
    - Por tanto, sólo consideraremos sistemas con todos los polos con parte real igual a 0 ó negativa.
  - **Si la parte real de p_i es negativa, la respuesta debida a este p_i acabará desvaneciéndose.**



Ganancia y diagrama de Bode

- **En general, si tenemos una entrada sinusoidal (de amplitud A), la salida siempre será sinusoidal de la misma frecuencia (pero con amplitud distinta B y además desfasada).**

$$v_i(t) = A\cdot\cos(w\cdot t) \quad \rightarrow v_0(t) = B\cdot\cos(w\cdot t+\phi)$$



‘w’ es la frecuencia angular (w = 2·π·f) (unidades: rad/s).

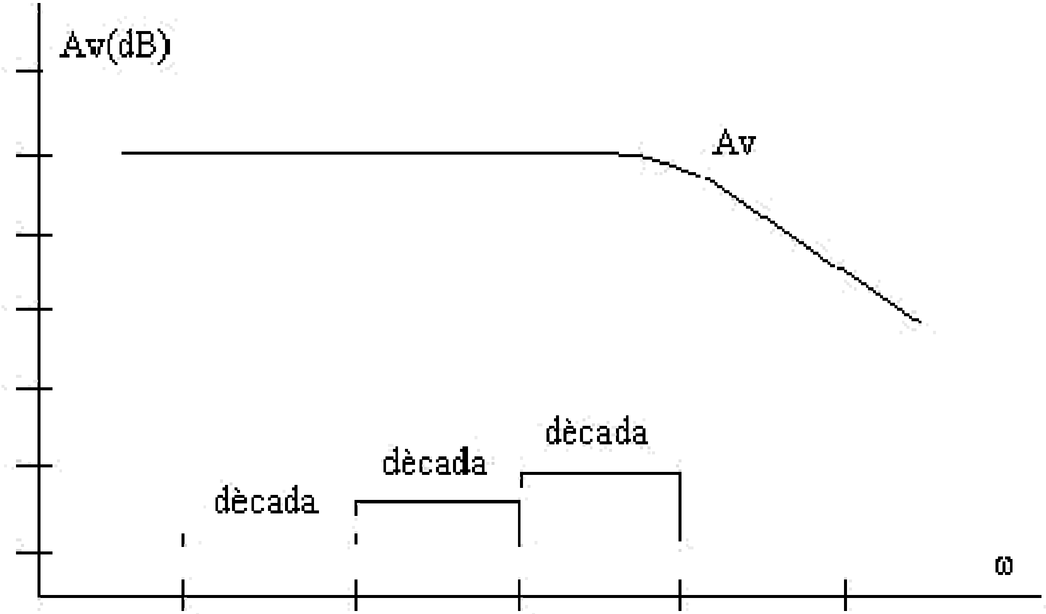
ϕ es el desfase (unidades: rad).

Ganancia y diagrama de Bode

- **Conociendo la señal sinusoidal de entrada (A y w), se puede obtener B y ϕ a partir de la función de transferencia T(s):**
  - **1º hacemos la sustitución s = jw en T(s) →** $T(jw)$
    - En general es un número complejo: $a+j \cdot b=c \cdot e^{j\alpha}$.
    - Esto representa la <u>ganancia</u> (compleja) para una entrada de tipo sinusoidal (y, por tanto, salida también sinusoidal). → $\frac{V_o(jw)}{V_i(jw)} = T(jw)$
  - **|T(jw)| nos proporciona la ganancia en amplitudes (B/A).**
    - → Sabiendo A y el módulo de T(jw) podemos conocer B.
    - |T(jw)| es $c=\sqrt{a^2+b^2}$.
  - **α nos proporciona el desfase ϕ entre la sinusoidal de salida y la de entrada.**
    - $\alpha = arctg(b/a)$

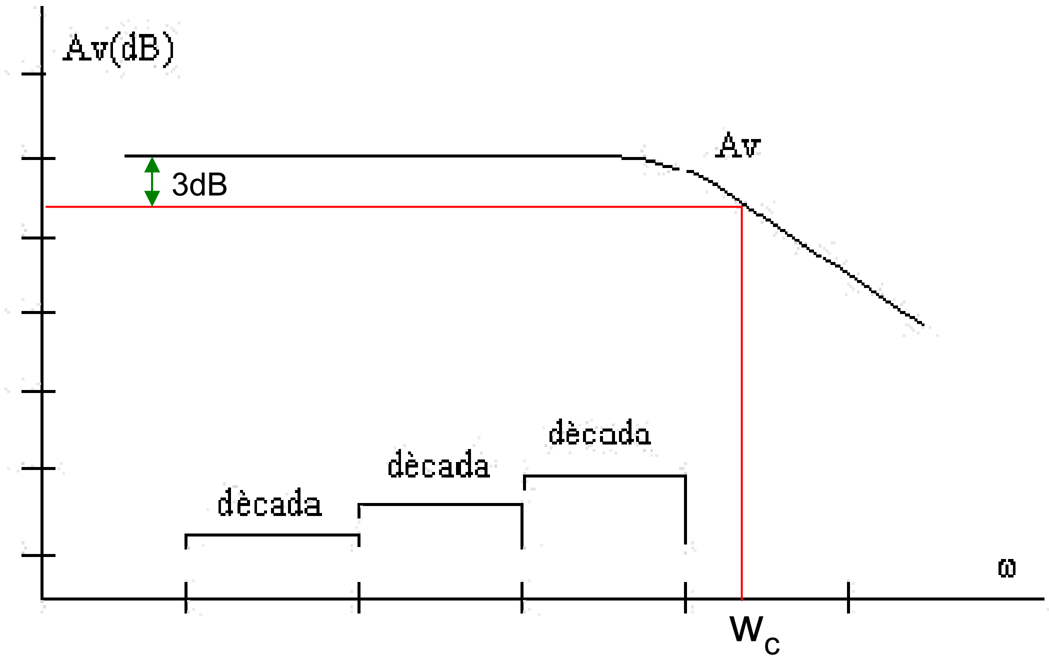
Ganancia y diagrama de Bode

- En general, la ganancia de amplitudes y el desfase dependen de la w (según T(jw)).
  - » La representación de la ganancia de amplitudes y del desfase en función de w es el <u>diagrama de Bode</u>.
  - » La representación se hace con ejes logarítmicos. La ganancia de amplitudes se hace según: $\boxed{A_v(dB)=20\cdot\log_{10}|T(jw)|}$ (decibelios)
    - 20dB corresponde a factor 10.



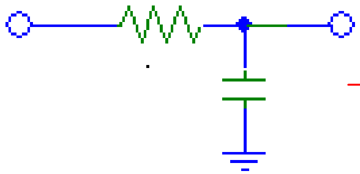
Ganancia y diagrama de Bode

- **Conceptos:**
  - **<u>Frecuencia de corte (w_c)</u>: w a la que la ganancia se reduce 3dB respecto la región de A_v cte. (3dB → $1/\sqrt{2}$)**
  - **<u>Ancho de banda</u>: rango de w limitado por la caída de 3dB.**



Ganancia y diagrama de Bode

- **Ejemplo: Filtro RC pasa bajos**
  - **Señal de salida V_R, señal de entrada V_i.**

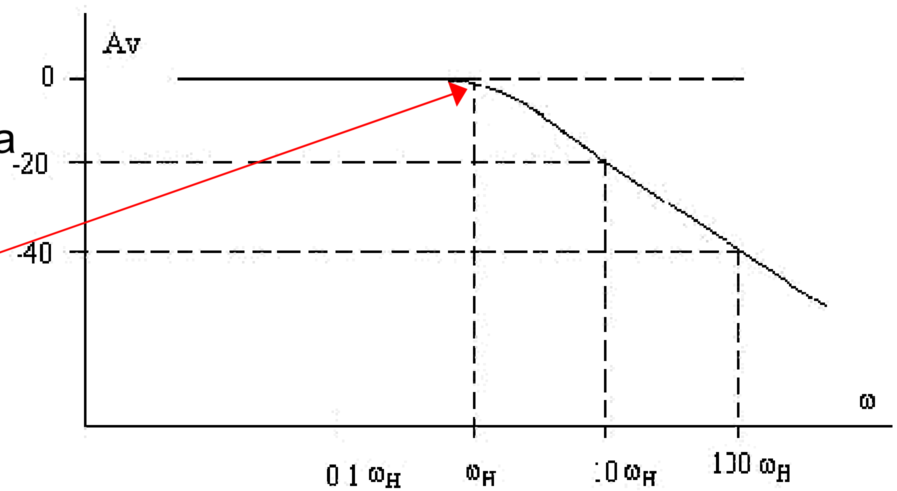


$$T(s)=\frac{1}{RCs+1} \longrightarrow |T(j\omega)|=\sqrt{\frac{1}{1+(RCw)^2}}$$

$$\boxed{A_v(dB)=-20\log\left[\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_H}\right)^2}\right]}$$

$$donde \quad \omega_H=\frac{1}{RC}$$

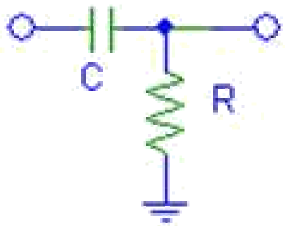
- Caída para $w>w_H$ → 20dB/década



$$Frecuencia\ de\ corte\ en\ \omega=\omega_H=\frac{1}{RC}$$

Ganancia y diagrama de Bode

- **Ejemplo: Filtro RC pasa altos**
  - » **Señal de salida V_R, señal de entrada V_i.**



$$T(s) = \frac{s}{s + {}^{1}\!/_{RC}}$$

$$\left|T(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_H}{\omega}\right)^2}}$$

$$A_v = -20\log\left[\sqrt{1+\left(\frac{\omega_H}{\omega}\right)^2}\right]$$

• Polo en s = -1 / RC = ω_H

• cero en s = 0

w → -∞