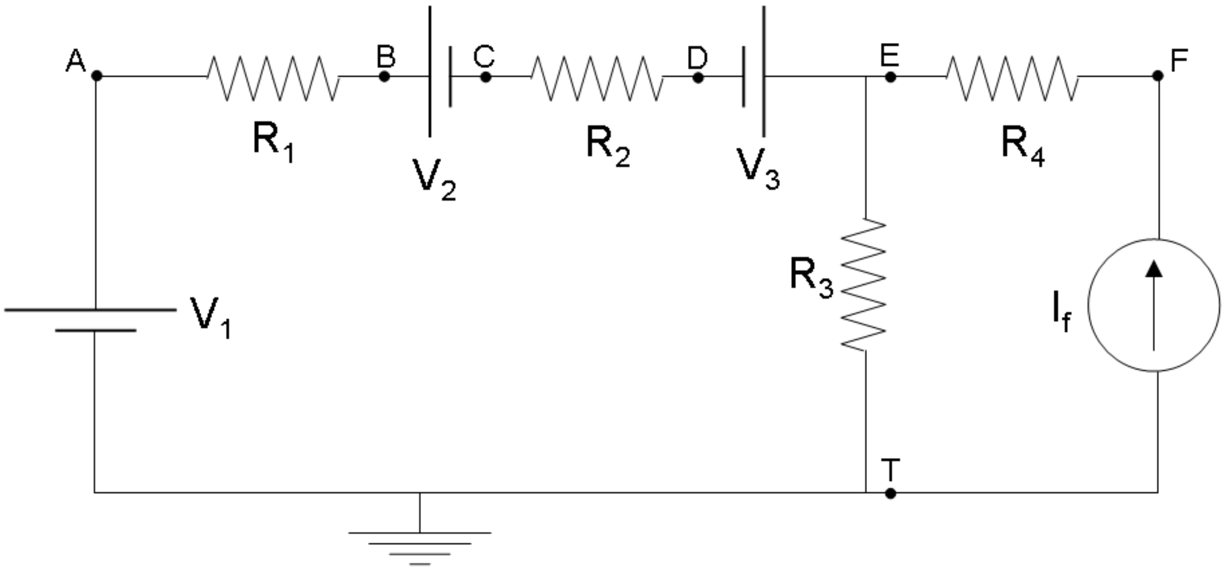
Problema resolt del tema 1

PR_T1:

Amb el circuit de la figura:

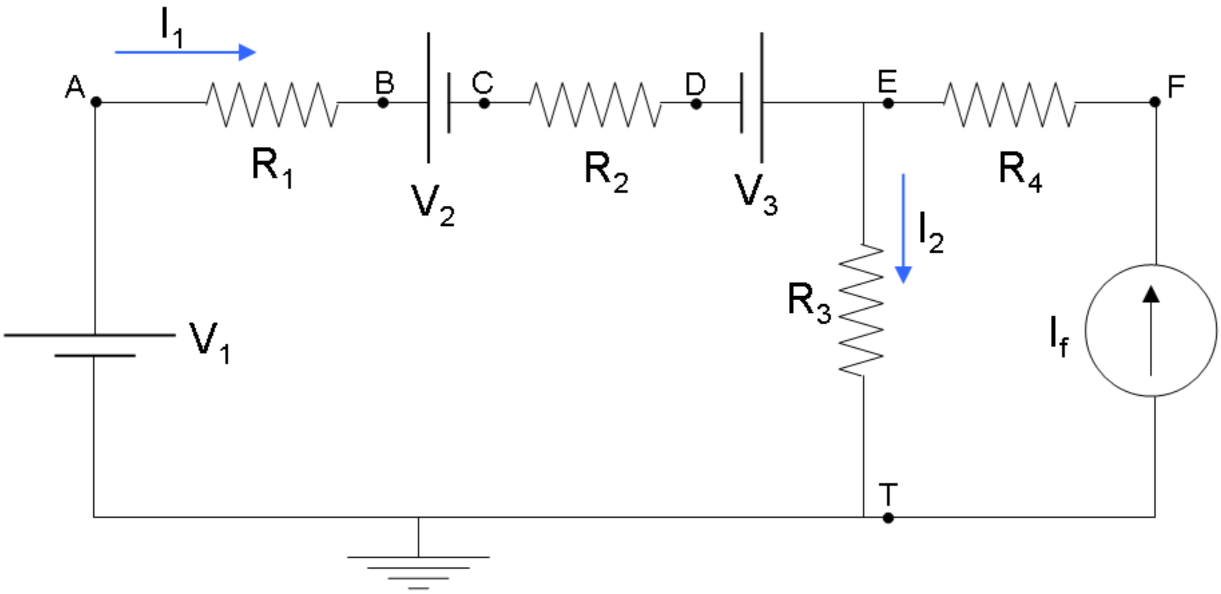
a) Resol el circuit (obtenir tots els corrents i totes les tensions) aplicant les lleis de Kirchhoff.
b) Obtenir les diferències de tensió següents, partint del punt de referència fins a arribar al punt final: V_{AC}, V_{CD}, V_{CE}, V_{CF}.
c) Sense utilitzar res del fet abans, ressoleu el circuit fent ús del principi de superposició per obtenir V_E.
d) Sense utilitzar res del fet abans, apliqueu l'equivalent Thévenin de la part esquerra del circuit, entre els punts E i T. Utilitzeu això per resoldre el circuit complet original per obtenir V_E.



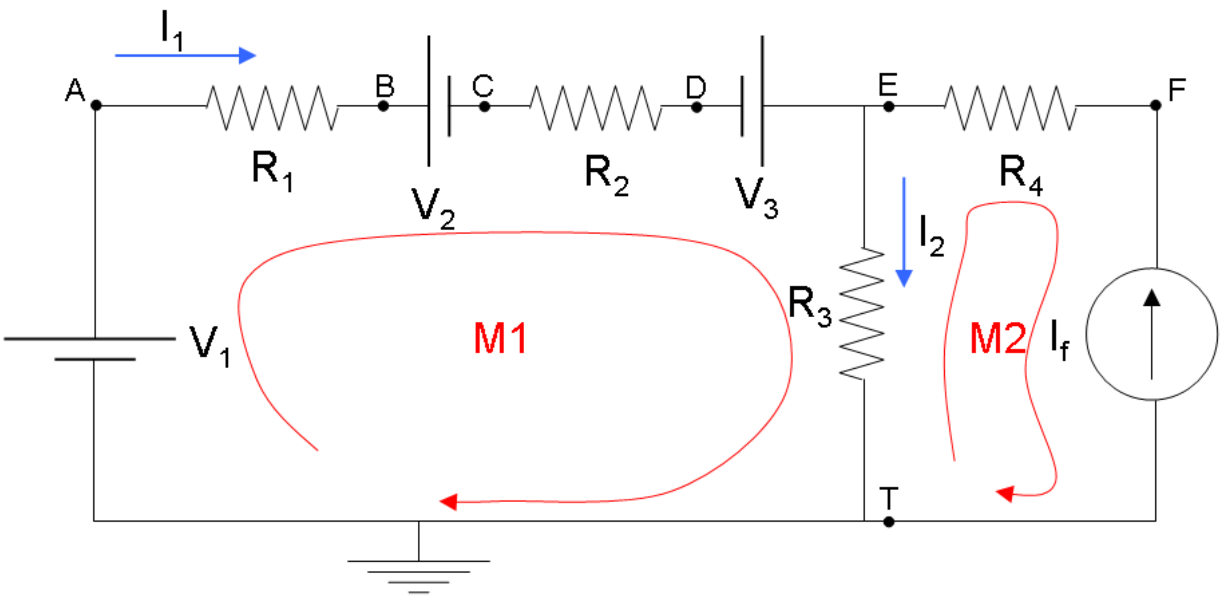
Resolució:

a) Resol el circuit (obtenir tots els corrents i totes les tensions) aplicant les lleis de Kirchhoff.

Per aplicar les lleis de Kirchhoff, primer de tot assignem corrents (nom i direcció) a les diferents branques (el sentit l'escollim de forma arbitrària; en aquest problema agafem les indicades a la gràfica, però es poden agafar com es vulgui):



No fa falta assignar cap corrent a la branca que conté R_4 ja que tenim una font de corrent que fixa el corrent per aquesta branca (I_f).
Seguidament, escollim les malles. Aquí és evident que necessitarem dues malles per resoldre el circuit ja que és necessari per passar per totes les branques del circuit. Aquí també existeixen diferents alternatives, però nosaltres agafem les indicades a la següent gràfica. A la vegada, indiquem en quin sentit recorrem les malles quan apliquem la llei de les malles de Kirchhoff:



Apliquem la llei dels corrents. Només fa falta aplicar-ho a un node ('E'), que és a on coincideixen més de dues rames i, a més, no és terra (o qualsevol altre referència seleccionada del circuit).

$$I_2 = I_1 + I_f$$

Només tenim dues incògnites de corrents al circuit (I_1, I_2), ja que I_f és conegut. Amb aquesta equació, només ens queda una incògnita de corrent.
Apliquem ara la llei de malles a les dues malles del circuit. Amb les fonts de tensió, si la tensió puja o baixa segons el sentit de la malla és evident, mentre que per la font de corrent la podem agafar com volem; nosaltres l'agafem com un augment de tensió segons el sentit del corrent. A les resistències (com a tots els elements passius), ja sabem que la tensió baixa en el sentit del corrent, i puja en l'invers. Per totes dues malles, partim des del punt de terra, seguint el sentit de la malla. Llavors:

$$M1:\ +V_1 - I_1 \cdot R_1 - V_2 - I_1 \cdot R_2 + V_3 - I_2 \cdot R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 - V_2 + V_3 - I_1 \cdot (R_1 + R_2) - I_2 \cdot R_3 = 0$$
$$M2:\ +I_2 \cdot R_3 + I_f \cdot R_4 - V_f = 0$$

És a dir, que tenim tres equacions, amb tres incògnites (I_1, I_2 i V_f). Així, ja hem plantejat el problema (el més important de tot) i només manca resoldre'l. Primer agafem la primera equació i substituïm totes les I_2 que apareixen en la segona equació:

$$V_1 - V_2 + V_3 - I_1 \cdot (R_1 + R_2) - (I_1 + I_f) \cdot R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 - V_2 + V_3 - I_1 \cdot (R_1 + R_2 + R_3) - I_f \cdot R_3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad I_1 = \frac{V_1 - V_2 + V_3 - I_f \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Com ja hem resolt I_1, podem obtenir I_2 amb la primera equació:

$$I_2 = I_1 + I_f = \frac{V_1 - V_2 + V_3 - I_f \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + I_f = \frac{V_1 - V_2 + V_3 + I_f \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Només manca obtenir V_f, que la podem obtenir de la tercera equació:

$$V_f = I_2 \cdot R_3 + I_f \cdot R_4 = \frac{V_1 - V_2 + V_3 + I_f \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot R_3 + I_f \cdot R_4$$

Amb la solució de l'aplicació de les lleis de Kirchhoff, ja podem obtenir totes les tensions del circuit (respecte la referència del circuit que és el terra):
$V_A = V_1$

$V_B = V_1 - I_1 \cdot R_1$

$V_C = V_1 - I_1 \cdot R_1 - V_1 - V_2$

$V_D = I_2 \cdot R_3 - V_3$

$V_E = I_2 \cdot R_3$

$V_F = V_f$

Hi han formes alternatives per obtenir aquestes tensions. Alguns exemples són:

$$V_C = I_2 \cdot R_3 - V_3 + I_1 \cdot R_2$$
$$V_E = V_f - I_f \cdot R_4$$
$$V_F = I_2 \cdot R_3 + I_f \cdot R_4$$

Normalment sempre s'intenten obtenir les tensions de la forma més senzilla seguint el camí més curt.

b) Obtenir les diferències de tensió següents, partint del punt de referència fins a arribar al punt final: V_{AC}, V_{CD}, V_{CE}, V_{CF}.

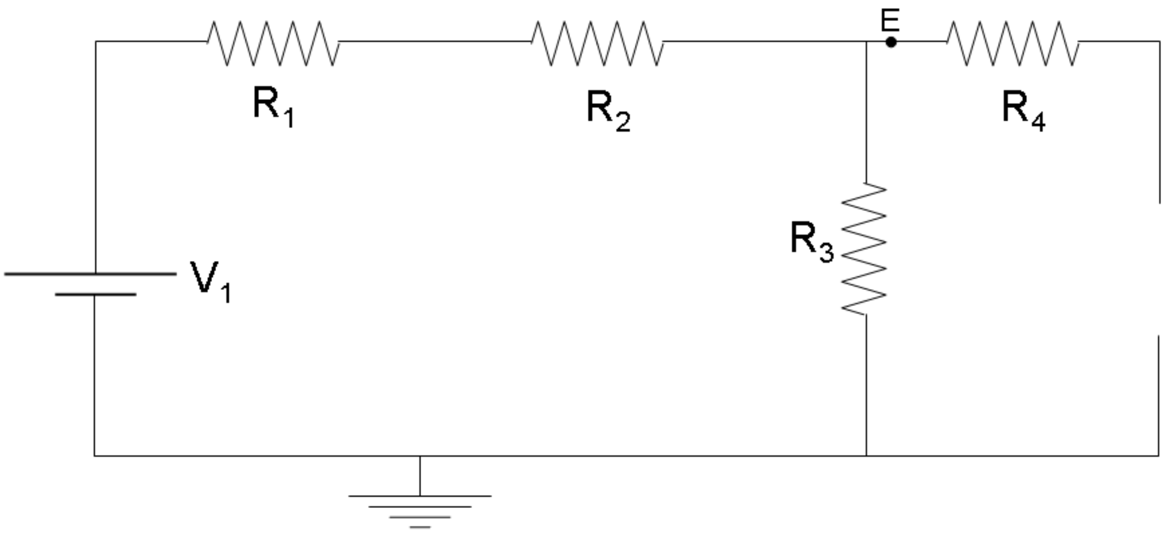
És evident que amb l'apartat anterior ja podem obtenir aquestes tensions. Però aquest apartat ens demanen que no ho fem així.
V_{AC}, vol dir la tensió al punt A respecte el punt C (referència). És a dir, és com si ens demanen la tensió al punt A (la primera lletra), però agafant el punt C com si fos el terra del circuit. Per tant, el millor és partir des del punt C fins a arribar al punt A, sumant totes les tensions. Per tant:

$$V_{AC} = +V_2 + I_1 \cdot R_1$$
$$V_{CD} = +I_1 \cdot R_2$$
$$V_{CE} = -V_3 + I_1 \cdot R_2$$
$$V_{CF} = -I_f \cdot R_4 - V_3 + I_1 \cdot R_2$$

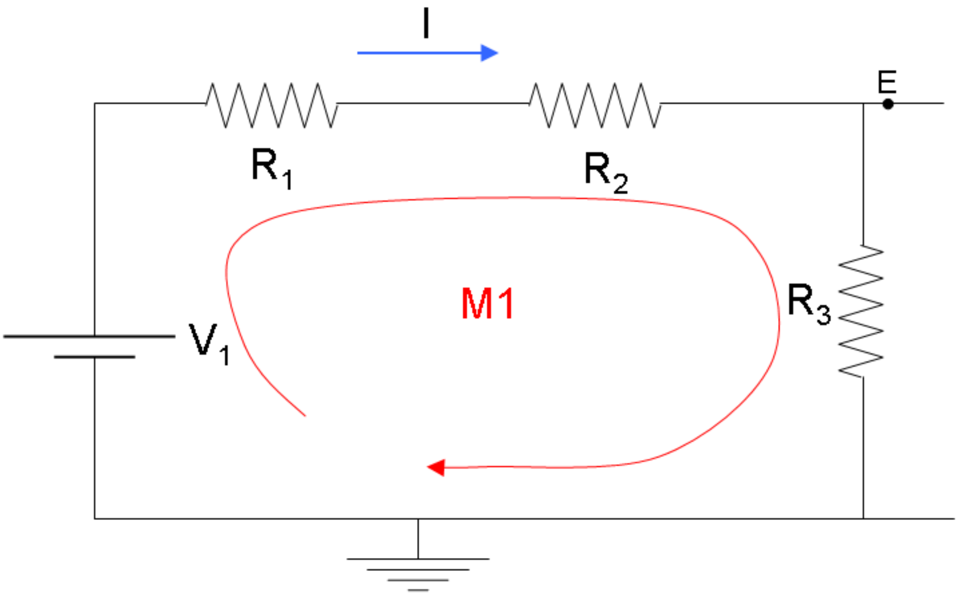
També hi ha diverses alternatives per arribar a un punt des d'un altre. Igualment que abans, normalment busquem el camí més curt perquè és més fàcil de calcular. El resultat numèric ha de ser però sempre el mateix, independentment del camí.

c) Sense utilitzar res del fet abans, ressoleu el circuit fent ús del principi de superposició per obtenir V_E.

Amb circuits amb elements lineals, sempre podem fer ús del principi de superposició per resoldre el problema per parts més senzilles de resoldre (només hem de resoldre circuits amb una única font).
En aquest circuit tenim quatre fonts. Per tant, haurem de resoldre 4 circuits. Haurem d'obtenir VE per cadascun d'aquests circuits simplificats i el resultat final total (de tot el circuit original) coincideix amb la suma d'aquests quatre valors.
Per tant, comencem amb la font V_1, eliminant la rest de fonts. Recordem que eliminar fonts de tensió significa curtcircuitar-les (és a dir, eliminem la font i connectem amb un cable conductor els dos terminals del circuit a on es connectava la font). Mentre que eliminar una font de corrent significar treure la font i deixar la branca on era connectada en circuit obert (no circula corrent). Per tant, el circuit queda en aquest cas com:



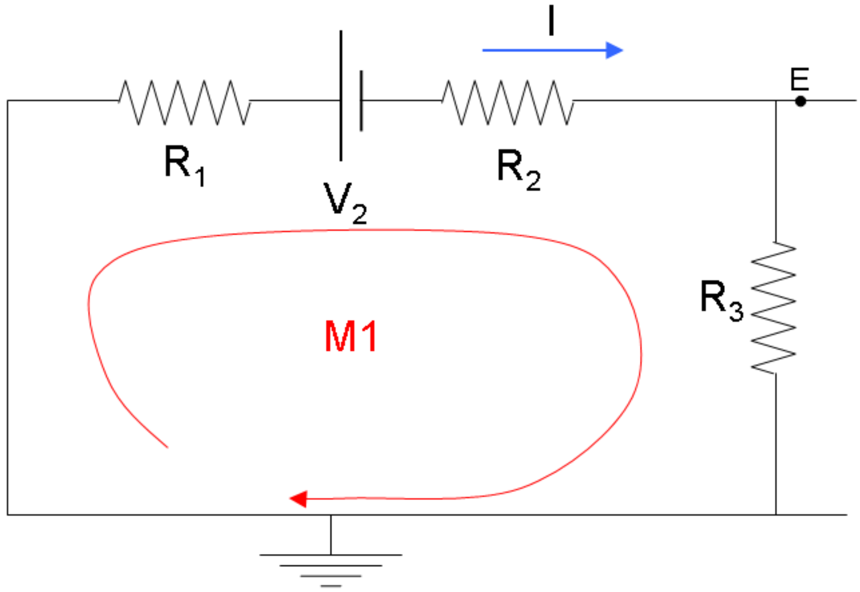
Si no circula corrent per la malla de R_4, no farà falta tenir en compte aquesta branca oberta, ja que no afectarà per res al circuit.
I la resolució és molt més senzilla que abans ja que només tenim una malla:



$$+V_1 - I \cdot R_1 - I \cdot R_2 - I \cdot R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \Rightarrow \quad V_{E1} = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot R_3$$

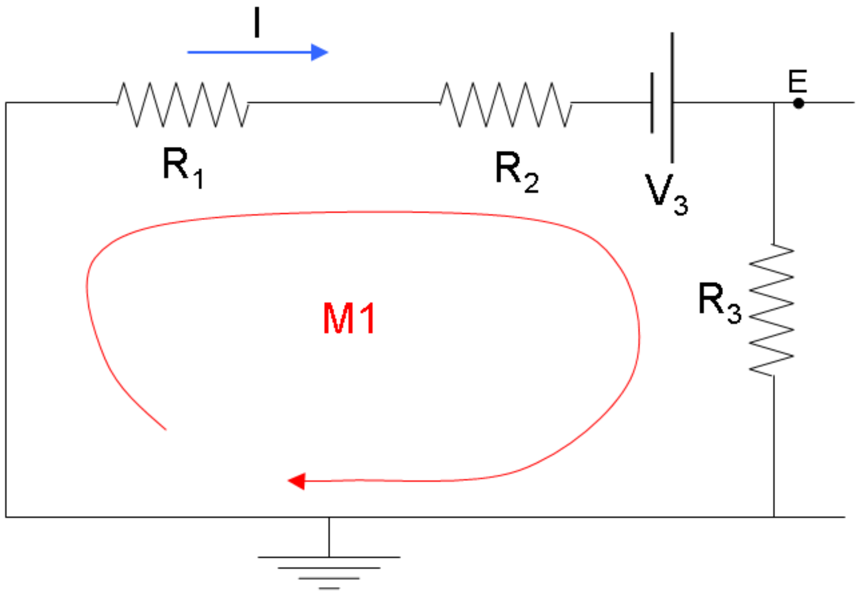
Fem el mateix per V_2 i per V_3.

V_2:



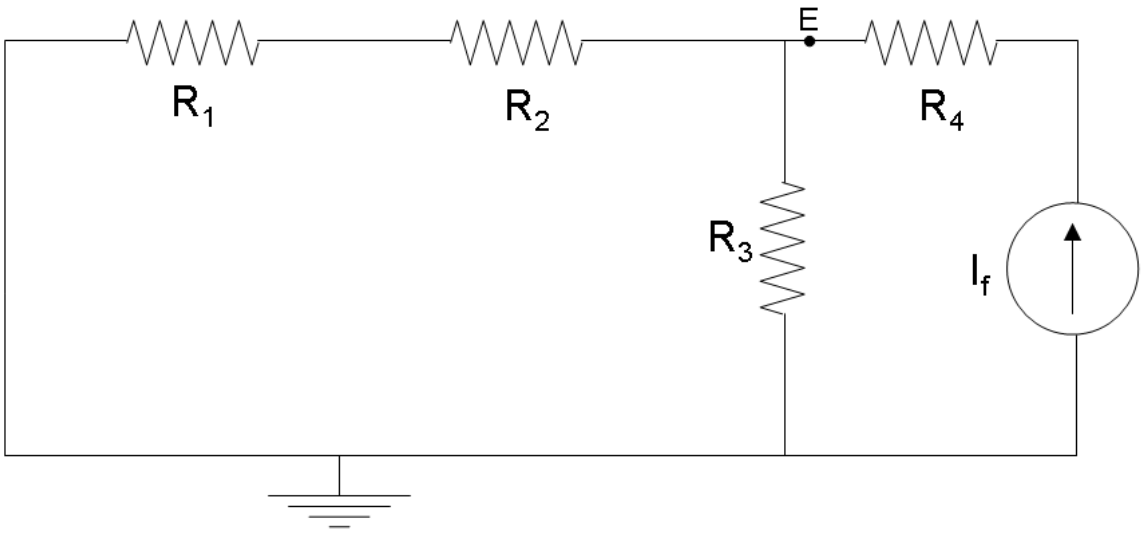
$$-I\cdot R_1 - V_2 - I\cdot R_2 - I\cdot R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{-V_2}{R_1+R_2+R_3} \quad \Rightarrow \quad V_{E2} = \frac{-V_2}{R_1+R_2+R_3}\cdot R_3$$

V_3:

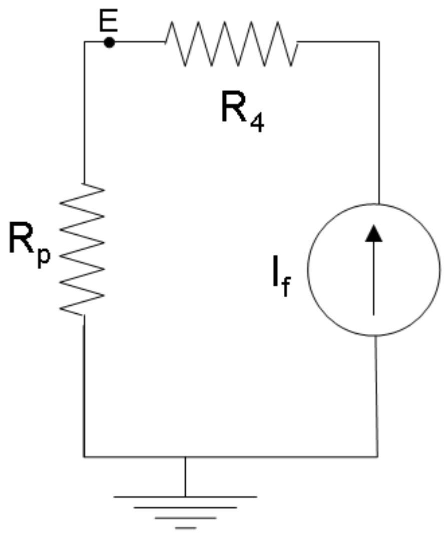


$$-I\cdot R_1 - I\cdot R_2 + V_3 - I\cdot R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V_3}{R_1+R_2+R_3} \quad \Rightarrow \quad V_{E3} = \frac{V_3}{R_1+R_2+R_3}\cdot R_3$$

I per la font de corrent:



Veiem que R_1 està en sèrie amb R_2 (per tant podem substituir-les pel seu equivalent R_1+R_2). La resistència resultant, està en paral·lel amb R_3. Per tant, resolem el circuit simplement com una branca amb la font I_f, R_4 i la resistència equivalent:



$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3}} = \frac{(R_1+R_2)\cdot R_3}{R_1+R_2+R_3}$$

Per tant: $$V_{E4} = I_f \cdot R_p = I_f \cdot \frac{R_3\cdot(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3}$$

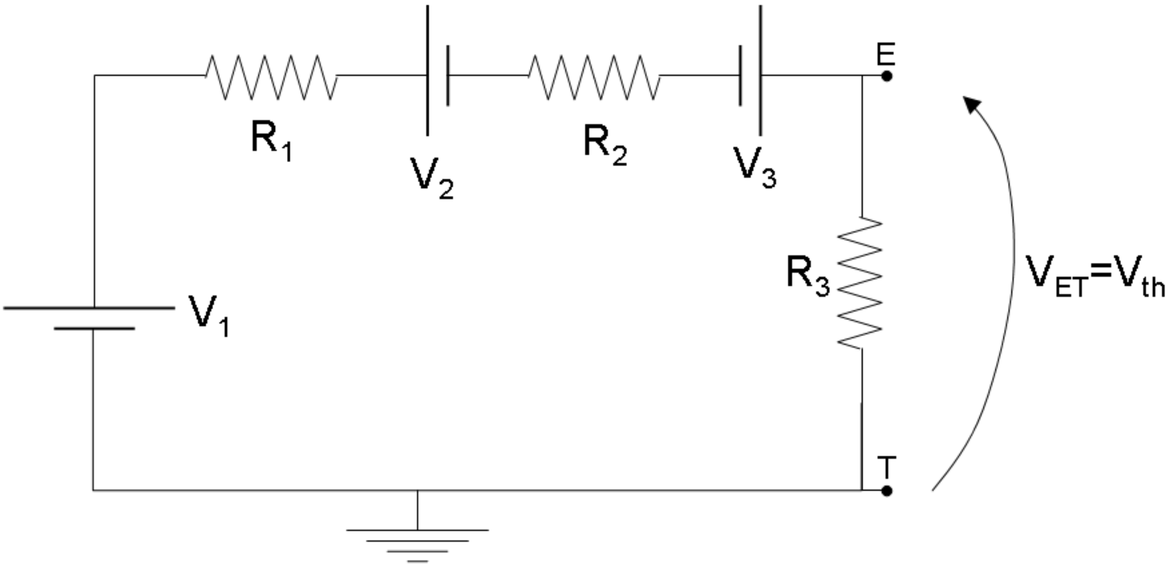
Per tant, el resultat de V_E del circuit original és la suma d'aquestes quatre tensions:

$$V_E = V_{E1}+V_{E2}+V_{E3}+V_{E4} = \frac{V_1-V_2+V_3}{R_1+R_2+R_3}\cdot R_3 + I_f\cdot\frac{R_3\cdot(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3} = \frac{V_1-V_2+V_3+I_f\cdot(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3}\cdot R_3$$

Es pot comprovar que coincideix amb el valor obtingut al primer apartat ($I_2\cdot R_3$).

d) Apliqueu l'equivalent Thévenin de la part esquerra del circuit, entre els punts E i T.

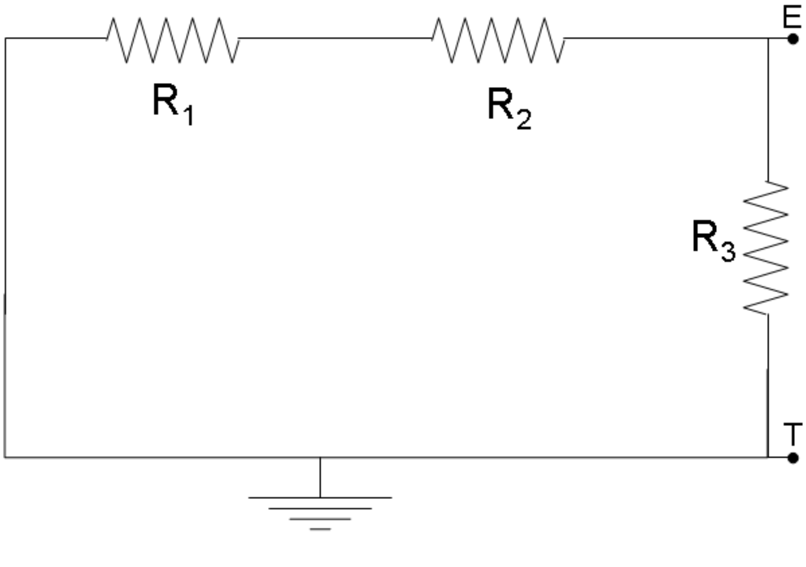
El teorema de Thévenin també ens permet resoldre circuits mitjançant la resolució de "subcircuits" més petits i, per tant, més fàcils de resoldre que el problema original.
Ens demanen fer l'equivalent de la part esquerra, entre els punts E i T. Per tant, per obtenir aquest equivalent Thévenin, eliminem el que hi ha a la part dreta, deixant els terminals (E i T) oberts:



Hem d'obtenir els dos components de l'equivalent Thévenin: la tensió i la resistència. La tensió Thévenin la calculem resolent aquest circuit (és a dir, l'original sense la part dreta i oberts els terminals E i T) i calculant la caiguda de tensió entre E i T (aquesta caiguda de tensió és la tensió Thévenin, tal com s'indica a la figura anterior).
El circuit resultant és senzill. Només hi ha una malla i, per tant, només un corrent. Així donçs:

$$V_1 - I \cdot R_1 - V_2 - I \cdot R_2 + V_3 - I \cdot R_3 = 0 \quad \Rightarrow I = \frac{V_1 - V_2 + V_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \Rightarrow V_{th} = V_{ET} = V_E = \frac{V_1 - V_2 + V_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot R_3$$

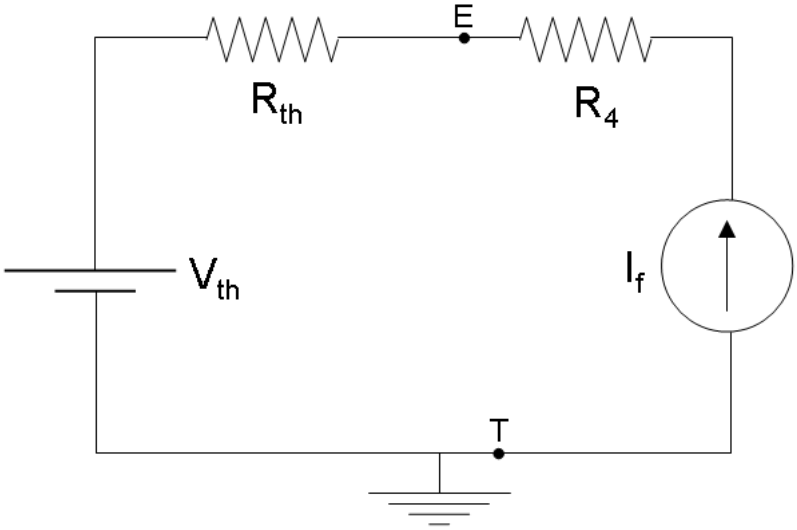
Ara manca la resistència Thévenin. Partint del mateix circuit que abans (l'original sense la part dreta i oberts els terminals T i E, hem d'eliminar les fonts (ara només hi ha de tensió):



Veiem que R_1 i R_2 estan en sèrie. I aquesta resistència equivalent, està en paral·lel amb R_3. Per tant, la resistència equivalent entre els terminals T i E és:

$$R_{th} = \frac{1}{\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Per tant, ja tenim el circuit equivalent Thévenin de la part esquerra del circuit.
Per resoldre tot el circuit només hem d'unir ambdós circuits per reconstruir el circuit original, però aquesta vegada amb l'equivalent Thévenin de la part esquerra:



En principi hauríem de resoldre amb les lleis de Kirchhoff aquest circuit. Però no fa falta ja que ens podem adonar que podem obtenir V_E automàticament amb els valors que coneixem:

$$V_E = V_{th} + I_f \cdot R_{th} = \frac{V_1 - V_2 + V_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot R_3 + I_f \cdot \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{V_1 - V_2 + V_3 + I_f \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot R_3$$

Que també coincideix amb els obtinguts en apartats anteriors.