# Introducció a la Computació Científica

# Semestre Tardor 2014 - Prova parcial del 16 de desembre

Cada apartat compta 2 punts sobre 10. Escriu cada exercici en fulls separats.

---

**Exercici 1** Es considera la funció $f(x) = x^4$

(a) Troba el polinomi d'interpolació d'Hermite de grau 3 que interpola la funció $f(x) = x^4$ i la seva derivada $f'(x) = 4x^3$ en $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$, això és, que interpola les dades de la taula:

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1 |
| $f'(x)$ | 0 | 4 |

(b) Troba el polinomi de Taylor de grau 3 de la funció $f(x) = x^4$ en $x_1 = 1$ i calcula el seu valor en $x_2 = 2$.

(c) Definim la funció a trossos

$$s(x) = \begin{cases} 2x^3 - x^2 \ , & x \in [0,1] \\ 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 \ , & x \in [1,2] \end{cases}$$

Justifica si es tracta o no d'un spline cúbic (de classe $\mathcal{C}^2$) d'interpolació a $f(x) = x^4$ en els nodes $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$.

---

**Exercici 2** Es considera la funció $f(x) = e^x$ a l'interval $[-1, 1]$.

(a) Es vol aproximar $f'(0)$ mitjançant la fórmula centrada

$$f'(0) \approx F_1(h) = \frac{f(h) - f(-h)}{2h} \ .$$

Troba les aproximacions donades per la fórmula fent servir el passos $h_1 = 0.2$ i $h_2 = 0.4$. Calcula el seus errors comparant-les amb el valor exacte $f'(0)$.

(b) Troba una fita de l'error absolut comès en les aproximacions anteriors a partir de l'expressió de l'error absolut

$$f'(0) - F_1(h) = -\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} h^2 \ , \quad \xi \in [0, h] \ .$$

(c) Fent servir el fet que

$$F_1(h) = f'(0) + a_1 h^2 + \dots \ ,$$

escriu (sense deduir-la) la fórmula d'extrapolació $F_2(h, 2h)$ apropiada i utilitza-la per trobar l'aproximació $F_2(0.2, 0.4)$. Calcula el seu error comparant-la amb el valor exacte $f'(0)$ i digues en quin factor s'ha reduït l'error de $F_1(0.2)$ de l'apartat (a).

(d) Aproxima la integral

$$I = \int_{-1}^{1} e^x dx$$

per la regla (fórmula composta) dels trapezis $T(h)$ amb pas $h = 0.2$ i troba una fita de l'error comès en l'aproximació.

---

**Exercici 1**

**Idees per a la solució.**

(a) La taula de diferències dividides generalitzades resulta ser

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
x_0 = 0 & f(x_0) = 0 & & & & & & \\
 & & f[x_0, x_0] = f'_0 = 0 & & & & & \\
x_0 = 0 & f(x_0) = 0 & & f[x_0, x_0, x_1] = 1 & & & & \\
 & & f[x_0, x_1] = 1 & & f[x_0, x_0, x_1, x_1] = 2 & & & \\
x_1 = 1 & f(x_1) = 1 & & f[x_0, x_1, x_1] = 3 & & & & \\
 & & f[x_1, x_1] = f'_1 = 4 & & & & & \\
x_1 = 1 & f(x_1) = 1 & & & & & &
\end{array}
$$

i permet trobar el polinomi d'interpolació d'Hermite en $x_0 = 0, x_1 = 1$:

$$s_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1) = x^2 + 2x^2(x - 1) \ .$$

Això és,

$$s_1(x) = 2x^3 - x^2 \ .$$

(b) El polinomi de Taylor de grau 3 en $x_1 = 1$ és:

$$s_2(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{1}{2} f''(x_1)(x - x_1)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_1)(x - x_1)^3 = 1 + 4(x - 1) + 6(x - 1)^2 + 4(x - 1)^3 \ .$$

El seu valor en 2 és $s_2(2) = 15$.

(c) La funció a trossos correspon als polinomis de grau 3 trobats als apartats anteriors:

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) \ , & x \in [0, 1] \\ s_2(x) \ , & x \in [1, 2] \ . \end{cases}$$

NO es tracta de l'spline cúbic d'interpolació per dues raons:

- NO és un spline cúbic (de classe $\mathcal{C}^2$)
  Els polinomis $s_1$ i $s_2$ i les seves derivades $s'_1$ i $s'_2$ coincideixen en $x = x_1$.
  Però les derivades segones de $s_1$ i $s_2$ NO coincideixen en $x_1 = 1$:

$$s''_1(1) = 10 \ , \quad s''_2(1) = 12 \ .$$

- NO interpola la funció $f(x) = x^4$ en el darrer node $x_2 = 2$:

$$s_2(2) = 15 \neq f(2) = 16 \ .$$

**Exercici 2**

**Idees per a la solució.**

(a) Aplicació de la fórmula de derivació per als dos passos:

$$F_1(h_1) = F_1(0.2) = \frac{e^{0.2} - e^{-0.2}}{0.4} = 1.0066800 \ , \quad F_1(h_2) = F_1(0.4) = \frac{e^{0.4} - e^{-0.4}}{0.8} = 1.0268808$$

Valor exacte de la derivada $f'(0) = 1$.

Error de $F_1(0.2)$: 1.0066800-1 = 0.0066800. Error de $F_1(0.4)$: 1.0268808-1 = 0.0268808.

(b) Aplicació de la fórmula d'extrapolació:

$$F_2(h_1, h_2) = F_2(h_1, 2h_1) = F_1(0.2) + \frac{F_1(0.2) - F_1(0.4)}{3} = 0.9999464$$

Valor exacte de la derivada $f'(0) = 1$.

Error de $F_2(0.2, 0.4)$ : -0.0000536

Factor de reducció aproximat: 125.

(c) L'expressió

$$f'(0) - F_1(h) = -\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} h^2 \ , \quad \xi \in [0, h] \ .$$

ens permet escriure la fita d'error:

$$\epsilon(h) = \mid f'(0) - F_1(h) \mid = \frac{M_3}{3!} h^2 \ , \quad M_3 = \max_{x \in [0,h]} \mid f'''(x) \mid = e^h \ .$$

Per a $h_1 = 0.2$ i $h_2 = 0.4$ aquestes fites d'error valen

$$\epsilon(0.2) = \frac{e^{0.2}}{6} 0.04 = 0.0082 \ , \quad \epsilon(0.4) = \frac{e^{0.4}}{6} 0.16 = 0.0398 \ .$$

(d) El valor aproximat per la regla dels trapezis és:

$$T(0.2) = \frac{0.2}{2}(e^{-1} + 2e^{-0.8} + 2e^{-0.6} + 2e^{-0.4} + 2e^{-0.2} + 2e^0 + 2e^{0.2} + 2e^{0.4} + 2e^{0.6} + 2e^{0.8} + e^1) = 2.358232 \ .$$

L'expressió d'error per trapezis en el càlcul de la integral de $f$ a $[a, b]$ és pot fitar per

$$\frac{b-a}{12} M_2 h^2 \ ,$$

on $M_2$ és una fita del valor absolut de la segona derivada de $f$ a l'interval $[a, b]$.

En aquest cas $b - a = 2$, $h = 0.2$ i $M_2 = \max_{x \in [-1,1]} e^x = e$ i la fita resulta ser:

$$\frac{e}{6} 0.04 = 0.018...$$

Comprovació:

El valor exacte de la integral és

$$I = e - \frac{1}{e} = 2.350402387...$$

L'error és doncs menor que 0.008 i, per tant, menor que la fita trobada.