Introducció a la Computació Científica

Semestre Tardor 2017 - Segona prova parcial de 18 de gener

Cada apartat compta 2 punts sobre 10. Escriu cada exercici en fulls separats.

Considera en tota la prova la funció $f(x) = x^3 - 9$ a l'interval $[2, 3]$

Exercici 1 (a) Troba el polinomi $H_2(x)$ d'interpolació d'Hermite generalitzada de grau 2 a la funció $f(x)$ en $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ i a la seva derivada $f'(x)$ en $x_0 = 2$, això és, que interpola la taula següent:

x	2	3
$f(x)$	-1	18
$f'(x)$	12	

.

i demostra que l'error d'aproximació és $e(x) = f(x) - H_2(x) = (x-2)^2(x-3)$.

(b) Aproxima la derivada $f'(3)$ per $H_2'(3)$ i calcula l'error comès.

Troba una fórmula de derivació per a $f'(a+h)$ basada en la derivació en $a+h$ del polinomi $H_2(x)$ que interpola la funció $f(x)$ en $x_0 = a$, $x_1 = a+h$ i la seva derivada $f'(x)$ en $x_0 = a$.

Comprova que aquesta fórmula dóna l'aproximació anterior usant la taula per a $h = 1$.

Exercici 2 (a) Aproxima la integral de la funció error $e(x)$ de l'Exercici 1:

$$I = \int_2^3 (x-2)^2(x-3)dx = -\frac{1}{12}$$

per la regla (fórmula composta) de trapezis $T(h)$ amb passos $h = 1, \frac{1}{2}$ i troba l'error comès en cada aproximació, comparant-la amb el valor exacte I de la integral i observa que l'error és proporcional a h^2.

(b) Sabent que l'error de $T(h)$ és de la forma

$$T(h) - I = a_0 h^2 \ (a_0 \neq 0) \ ,$$

extrapola els resultats anteriors $T(1), T(\frac{1}{2})$. Això és, troba $T(1, \frac{1}{2})$ i el seu error, i explica el resultat obtingut.

Es recomana fer aquest exercici usant fraccions.

Exercici 3 (a) Demostra que la funció f té un únic zero real α i que α es troba a l'interval $[2, 3]$.

(b) Troba els 5 primers iterats del mètode de Newton aplicat a f per aproximar α a partir de l'aproximació inicial $x_0 = 2$ i estudia el comportament dels errors $\varepsilon_k = |x_k - \alpha|$.

Exercici 1

Idees per a la solució.

(a) La taula de diferències dividides associada a la interpolació d'Hermite generalitzada de $f(x) = x^3 - 9$ en $2, 3$ és:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & f(2) = -1 & & & \\ & & f'(1) = 12 & & \\ 1 & f(2) = -1 & & 7 & \\ & & 19 & & \\ 2 & f(3) = 18 & & & \end{array}$$

El polinomi interpolador és llavors:

$$H_2(x) = -1 + 12(x-2) + 7(x-2)^2 = 3 - 16x + 7x^2 \ .$$

L'error en la interpolació és

$$e(x) = f(x) - H_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-2)^2(x-3)^2 dx = (x-2)^2(x-3) \ ,$$

atenent que $f^{(3)}(x) = 3!$.

(b) La derivada $f'(3) = 27$ seria aproximada per $H_2'(3) = -16 + 14 \cdot 3 = 26$, amb un error d'1.

La taula de diferències dividides generalitzades associada és:

$$\begin{array}{c|cccc} a & f(a) & & \\ & & f'(a) & \\ a & f(a) & & \frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h^2} \\ & & \frac{f(a+h)-f(a)}{h} & \\ a+h & f(a+h) & & \end{array}$$

El polinomi interpolador s'escriu així:

$$H_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h^2}(x-a)^2$$

i la seva derivada en $a + h$ resulta ser:

$$H_2'(a+h) = f'(a) + \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h^2} 2h = 2\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \ .$$

La fórmula de derivació cercada és doncs:

$$f'(a+h) \simeq 2\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \ .$$

Es comprova l'aproximació anterior

$$f'(3) = 27 \simeq 2 \cdot 19 - 12 = 26 \ .$$

Exercici 2

Idees per a la solució.

Considerem la taula de la funció error $e(x)$ amb pas $\frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{c|ccc} x & 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ \hline e(x) & 0 & -\frac{1}{8} & 0 \end{array} .$$

La integral es pot calcular analíticament i val $I = -\frac{1}{12}$.

(a) Les regles de trapezis amb passos $1, \frac{1}{2}$ donen:

$$T(1) = \frac{1}{2}(0+0) = 0\ ,\ \ T(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(0 - 2\frac{1}{8} + 0) = -\frac{1}{16}\ ,$$

amb errors

$$T(1) - I = \frac{1}{12}\ ,\ \ T(\frac{1}{2}) - I = -\frac{1}{16} + \frac{1}{12} = -\frac{1}{48}\ .$$

L'error és exactament 4 cops més petit quan s'ha dividit el pas per 2; l'error és exactament d'ordre h^2

(b) La fórmula extrapolada, amb $q = 2$ i $p_0 = 2$, dóna:

$$T(\frac{1}{2}, 1) = T(\frac{1}{2}) + \frac{T(\frac{1}{2}) - T(1)}{2^2 - 1} = T(\frac{1}{2}) + \frac{T(\frac{1}{2}) - T(1)}{15} = -\frac{1}{16} + \frac{-\frac{1}{16} - 0}{3} = -\frac{1}{12}\ ,$$

sense error.

La fórmula extrapolada ha eliminat completament els errors perquè eren exactament d'ordre h^2.

Exercici 3

Idees per a la solució.

(a) La funció f és creixent i canvia de signe a l'interval $[2, 3]$ té doncs un únic zero real, que es troba en aquest interval.

(b) El mètode de Newton s'escriu així:

$$x_0 = 2 \ , \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - 9}{3x_k^2} = \frac{2x_k^3 + 9}{3x_k^2} \ .$$

Els 5 primers iterats amb els seus errors aproximats resulten ser:

k	x_k	ε_k
1	2.083333333333333	$0.32 \cdot 10^{-2}$
2	2.080888888888889	$0.51 \cdot 10^{-5}$
3	2.080083823064241	$0.12 \cdot 10^{-9}$
4	2.080083823051904	$< 10^{16}$
5	2.080083823051904	

El comportament dels errors és quadràtic.