INTEGRALES

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \;;\; n \neq -1$

3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

6. $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$

8. $\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$

9. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

10. $\int \sec x \operatorname{tg} x dx = \sec x + C$

11. $\int \csc x \cot dx = -\csc x + C$

12. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$

13. $\int \cot x dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$

14. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$

15. $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot gx| + C$

16. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

17. $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

18. $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

Integración por partes

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Integración de funciones Trigonométricas

Senos y cosenos

Potencia IMPAR

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x &= 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x &= 1 - \operatorname{sen}^2 x \end{aligned}}$$

Potencia PAR

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \end{aligned}}$$

Productos de senos y cosenos

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x\right]$$

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = -\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\right]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]$$

Sustitución Trigonométrica

$$\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a \operatorname{sen} t$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow x = a \operatorname{tg} t$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow x = a \sec t$$

Fracciones Parciales

$$\frac{p(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \cdots$$

$$\frac{p(x)}{(x-x_1)(x-x_2)^2\cdots} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{(x-x_2)^2}\cdots$$

$$\frac{p(x)}{(x-x_1)(ax^2+bx+c)\cdots} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c} + \cdots$$

Sustitución universal

$$\operatorname{tg}\tfrac{x}{2} = t \quad \boxed{\begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2} dt \end{cases}}$$

$$\operatorname{tg} x = t \quad \boxed{\begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{cases}}$$

Diferencias Divididas

La información de la tabla siguiente se obtuvo del polinomio:

$$y = x^3 - 2x^2 - 2$$

Puntos	0	1	2	3	4	5
x	-2	-1	0	2	3	6
f(x)	-18	-5	-2	-2	7	142

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-2	$\boxed{-18}$	$\boxed{13}$	$\boxed{-10/2 = -5}$	$\boxed{4/4 = 1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$
-1	-5	3	$-3/3 = -1$	$4/4 = 1$	0	
0	-2	0	$9/3 = 3$	$6/6 = 1$		
2	-2	9	$36/4 = 9$			
3	7	45				
6	142					

$x = x_0 \qquad y = x_1$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$a_0 = f[x_0] \qquad a_1 = f[x_0, x_1]$

$a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$

$a_n = f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$

$$P_3(x) = -18 + 13(x+2) - 5(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)x$$
$$= x^3 - 2x^2 - 2$$

Diferencias Divididas

Puntos	0	1	2	...	n
x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
f(x)	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad x_0 < x < x_1$$

Diferencias Divididas

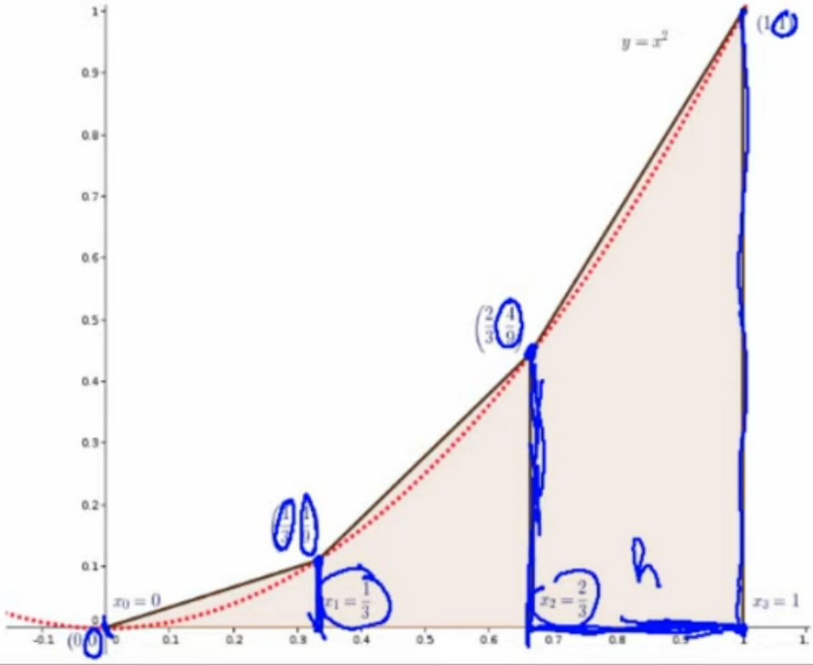
Puntos	*0*	*1*	*2*	...	*n*
x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$$

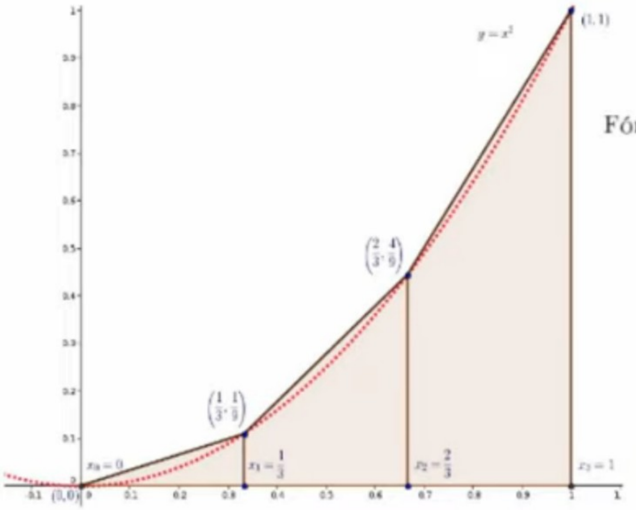
$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2,x_3] - f[x_1,x_2]}{x_3 - x_1}$$

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) & & & & \\
x_1 & f(x_1) & f[x_0,x_1] & & & \\
x_2 & f(x_2) & f[x_1,x_2] & \rightarrow f[x_0,x_1,x_2] & & \\
x_3 & f(x_3) & f[x_2,x_3] & \rightarrow f[x_1,x_2,x_3] & \rightarrow & f[x_0,x_1,x_2,x_3]
\end{array}$$

Calcule el error al aproximar $\int_0^1 x^2 dx$ por la Regla de Trapecios (n=3):



Calcule el error al aproximar $\int_0^1 x^2 dx$ por la Regla de Trapecios (n=3):

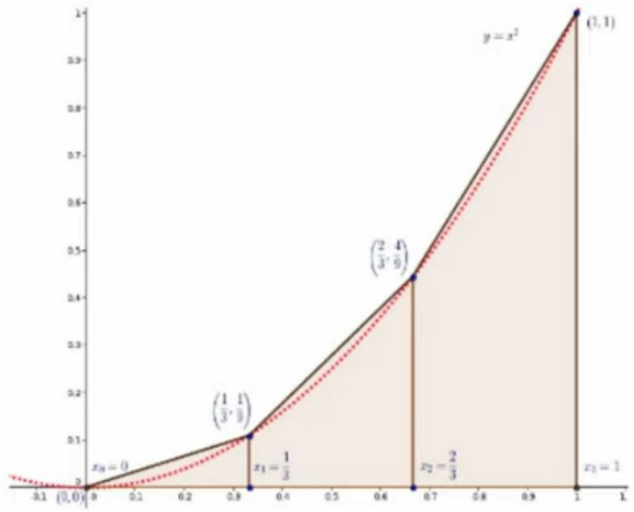


Fórmula general Regla de los Trapecios (Compuesta):

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left(f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + f(b)\right)$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Calcule el error al aproximar $\int_0^1 x^2 dx$ **por la Regla de Trapecios (n=3):**



Fórmula general Regla de los Trapecios (Compuesta):

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left(f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+\ldots+f(b)\right)$$

$$h = \frac{1-0}{3} = \frac{1}{3} \qquad a = 0$$

$$a+h = 0+\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$a+2h = \frac{2}{3}$$

$$a+3h = b = 1$$

$$\int_0^1 x^2\,dx \simeq \frac{1/3}{2}\left(0^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1^2\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}+\frac{8}{9}+1\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{19}{9}\right) = \frac{19}{54}$$

Calcule el error al aproximar $\int_0^1 x^2 dx$ **por la Regla de Trapecios (n=3):**

$$\int_0^1 x^2\,dx \simeq \frac{19}{54}$$

Valor exacto de la integral:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Error:

$$\left|\frac{19}{54}-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{19-18}{54}\right| = \boxed{\frac{1}{54}}$$

Método de Simpson (segundo grado)

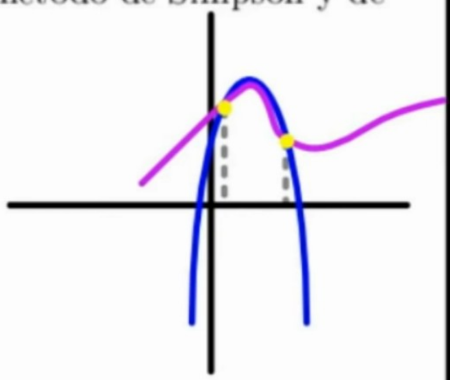
Calcule la integral definida $\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx$ mediante el método de Simpson y de forma exacta

Regla Simpson

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)}$$

$$\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx \simeq \frac{3-1}{6}\left(f(1)+4f\left(\frac{3+1}{2}\right)+f(3)\right) = \frac{2}{6}\left(\frac{5}{6}+4\cdot\frac{7}{14}+\frac{9}{20}\right) = \boxed{1'205555...}$$

Calcule la integral definida $\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx$ mediante el método de Simpson y de forma exacta



Regla Simpson

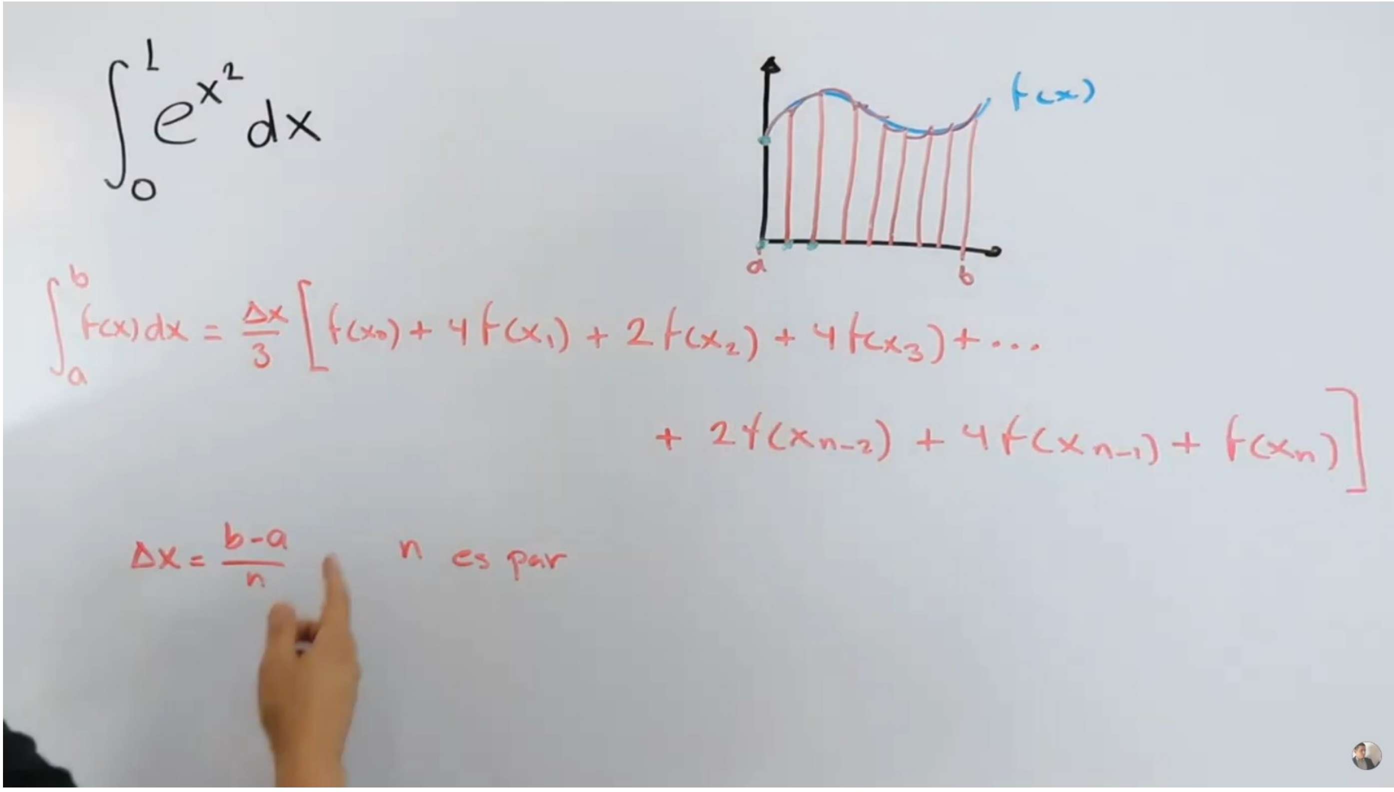
$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

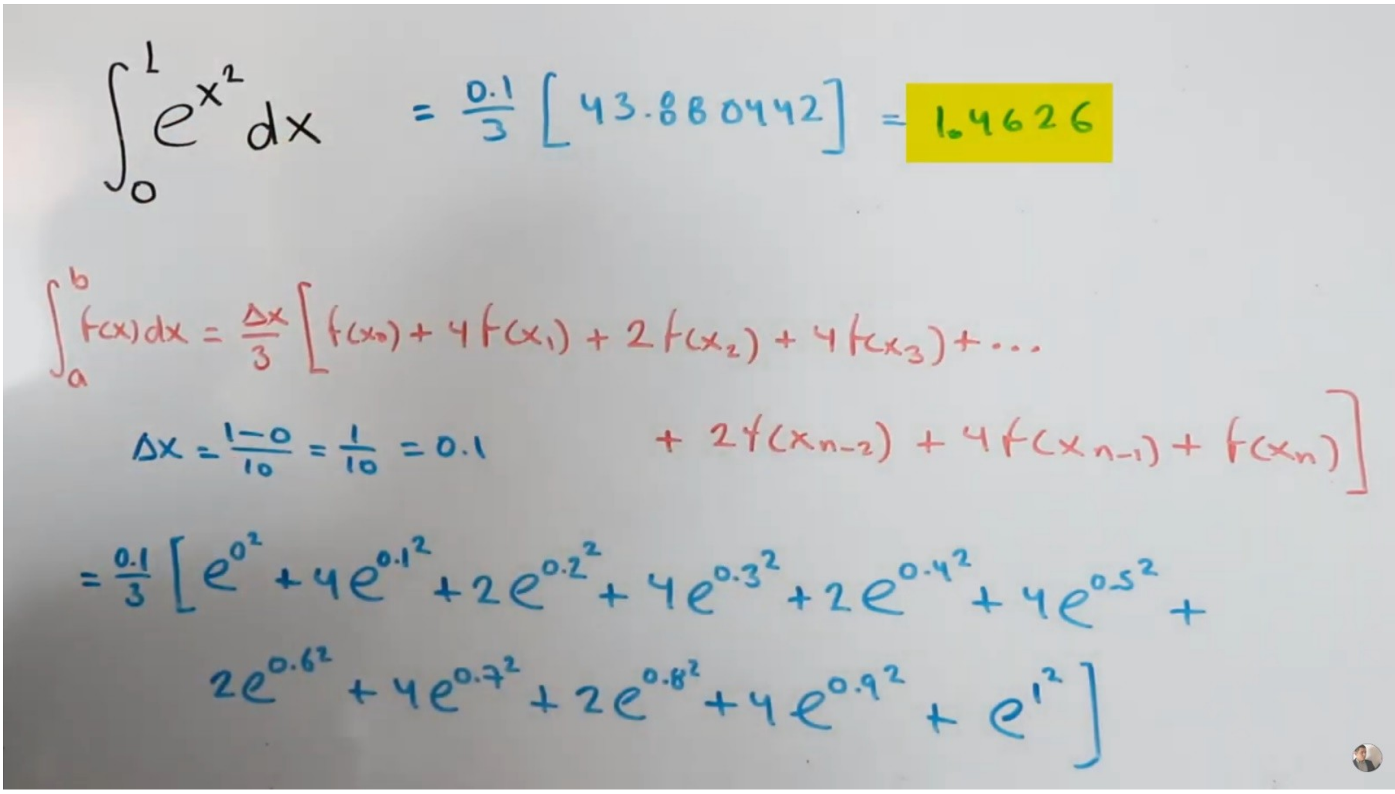
$$\boxed{\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx \simeq 1'205555...}$$

Valor exacto

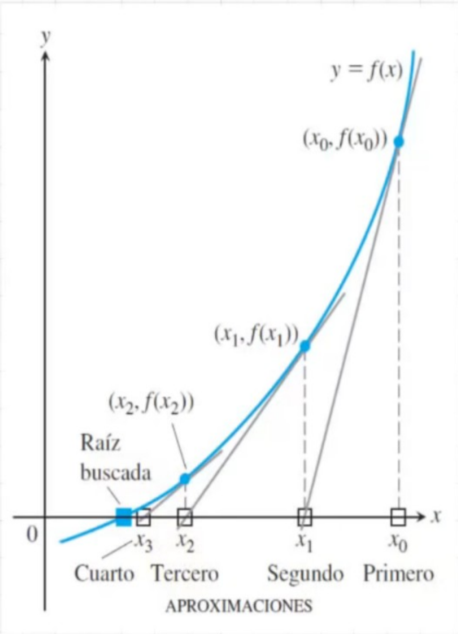
$$\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx = (ln|x^2+3x+2|)_1^3 = ln(20) - ln(6) = \boxed{1'203972...}$$

Regla de Simpson (compuesto)





Metodo de Newton-Raphson



Procedimiento del método de Newton

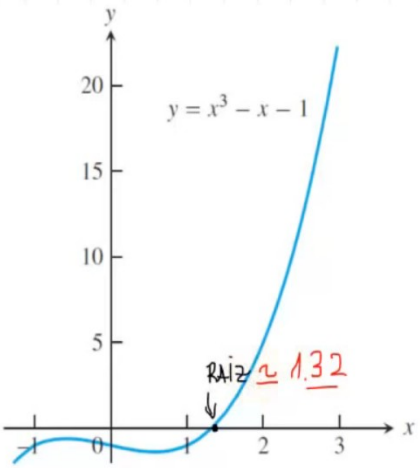
1. Adivine una primera aproximación a la solución de la ecuación $f(x) = 0$. Una gráfica de $y = f(x)$ podría ayudarle a hacerlo.
2. Use la primera aproximación para obtener la segunda, la segunda para obtener la tercera, y así sucesivamente, usando la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \text{si } f'(x_n) \neq 0 \qquad (1)$$

Encontrar una buena aproximación a una raíz de la siguiente función usando el método de Newton-Raphson. Tomar como punto de partida x=1.

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \text{si } f'(x_n) \neq 0$$



$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1^3 - 1 - 1}{3 \cdot 1^2 - 1} = 1.5$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = 1.34782$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1.34782 - \frac{f(1.34782)}{f'(1.34782)} = 1.32520$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = 1.3252 - \frac{f(1.3252)}{f'(1.3252)} = 1.3247$$