Grau d'Enginyeria Informàtica

Introducció a la Computació Científica

Semestre Tardor 2016 - Prova parcial del 3 de novembre

Cada apartat val 30 punts i es qualifica sobre 100.

Resol els 2 exercicis en fulls separats.

Exercici 1 [Errors]

Escriu el teu NIUB completat a 9 xifres afegint-li un 9 al final: $N =$ ________________.

(a) Escriu N en base 2 i troba els nombres de màquina N_m, N_M de la seva representació IEEE amb precisió simple entre els que es troba. Representa N_m i N_M en aquest format.

(b) Es vol fer el càlcul de la diferència D entre les arrels quadrades de N_m, N_M: $D = \sqrt{N_M} - \sqrt{N_m}$.

Troba amb la calculadora les arrels quadrades de de N_m, N_M donant el resultat amb 9 xifres significatives. Calcula D, directament i amb una fórmula que propagui menys els errors. Si l'error relatiu en el càlcul de les arrels quadrades és menor que $\frac{1}{2}10^{-9}$, troba fites de l'error relatiu en D per a les dues formes de calcular-lo: fent la resta directament i fent servir la fórmula millorada. Escriu, en cada cas, D amb els dígits correctes atenent a les fites d'error.

Exercici 2 [Sistemes lineals i interpolació]

El polinomi interpolador $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ de grau més petit o igual que 3 a la funció $f(x)$ en els nodes x_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ es pot trobar resolent el sistema d'equacions lineal que compleixen els coeficients a_0, a_1, a_2, a_3:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0 & + & x_0a_1 & + & x_0^2a_2 & + & x_0^3a_3 & = & f(x_0) \\ a_0 & + & x_1a_1 & + & x_1^2a_2 & + & x_1^3a_3 & = & f(x_1) \\ a_0 & + & x_2a_1 & + & x_2^2a_2 & + & x_2^3a_3 & = & f(x_2) \\ a_0 & + & x_3a_1 & + & x_3^2a_2 & + & x_3^3a_3 & = & f(x_3) \end{array}$$

i mitjançant el mètode de les diferències dividides.

Considera el darrer dígit d del teu NIUB i la funció $f(x) = x^4 + dx^2$ corresponent.

Es vol trobar de les dues maneres el polinomi interpolador a $f(x)$ en les nodes $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$, on $f(x_0) = 16 + 4d, f(x_1) = 1 + d, f(x_2) = 1 + d, f(x_3) = 16 + 4d$.

(a) Escriu el sistema d'equacions lineals que compleixen els coeficients a_0, a_1, a_2, a_3 de $p_3(x)$, troba'n la solució pel mètode de Gauss i escriu el polinomi interpolador $p_3(x)$.

(b) Troba el polinomi interpolador pel mètode de les diferències dividides i comprova que és idèntic a l'anterior.

Idees per a la solució. **[Errors]**

Es pren, com a exemple, el NIUB 12345678, $N = 123456789$.

(a) En base 2:

$$N = 111010110111100110100010101_{2)} = 1.11010110111100110100010101 \cdot 2^{26} = \sigma(1+f)2^{q-1} \ .$$

Signe σ: 0

Exponent: $e = q - 1 + 127 = 153 = 10011001_{2)}$

Mantissa exacta: $f = 0.11010110111100110100010101_{2)}$.

Mantissa amb 23 bits anterior: $0.11010110111100110100010_{2)}$.

Mantissa amb 23 bits posterior: $0.11010110111100110100011_{2)}$.

Representació IEEE simple de N_m: $|0|10011001|11010110111100110100010|$.

Representació IEEE simple de N_M: $|0|10011001|11010110111100110100011|$.

Nombre màquina anterior (5 unitats més petit): $N_m = 111010110111100110100010000_{2)} = 123456784$.

Nombre màquina posterior (3 unitats més gran): $N_M = 111010110111100110100011000_{2)} = 123456792$.

Diferència: $N_M - N_m = 8$.

(b) Directament:

$$D = \sqrt{N_M} - \sqrt{N_m} = \sqrt{123456792} - \sqrt{123456784} = 11111.11120 - 11111.11084 = 3.6 \cdot 10^{-4} \ .$$

Amb una millor fórmula que evita les cancel·lacions:

$$D = \frac{N_M - N_m}{\sqrt{N_M} + \sqrt{N_m}} = \frac{8}{\sqrt{123456792} + \sqrt{123456784}} = 3.60000002952000 \cdot 10^{-4} \ ,$$

es poden conèixer més xifres de D.

(c) L'error relatiu en la primera fórmula és fitat per

$$\frac{\sqrt{N_M}\epsilon + \sqrt{N_m}\epsilon}{\sqrt{N_M} - \sqrt{N_m}} \approx \frac{2.3}{3.6} 10^{-1} \ .$$

L'error absolut seria fitat per aproximadament

$$2.3 \cdot 10^{-5} < \frac{1}{2} 10^{-4} \ ,$$

la qual cosa permetria assegurar només 4 xifres decimals correctes en el resultat

$$D = 0.0004 = 4 \cdot 10^{-4} \ .$$

L'error relatiu en la segona fórmula és fitat per

$$\frac{(N_M - N_m)\sqrt{N_M}\epsilon + \sqrt{N_m}\epsilon)}{(\sqrt{N_M} + \sqrt{N_m})^2(\sqrt{N_M} - \sqrt{N_m})} \approx \frac{8(\sqrt{N_M}\epsilon + \sqrt{N_m}\epsilon)}{4N(\sqrt{N_M} - \sqrt{N_m})} \ .$$

L'error és divideix per aproximadament $\frac{N}{2} > 0.5 \cdot 10^8$ i resulta ser aproximadament de l'ordre de 10^{-9}. L'error absolut seria fitat per aproximadament

$$4.6 \cdot 10^{-13} < \frac{1}{2}10^{-12} \ ,$$

la qual cosa permetria assegurar 12 xifres decimals correctes en el resultat que podríem escriure de forma molt més precisa

$$D = 0.000360000003 = 3.600000003 \cdot 10^{-4} \ .$$

Idees per a la solució. **[Sistemes lineals i interpolació]**

(a) El sistema lineal resultant s'expressa en la matriu ampliada següent:

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & -2 & 4 & -8 & 16+4d \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1+d \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+d \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16+4d \end{array}\right)$$

Aplicant el mètode de Gauss, es troben els sistemes lineals equivalents:

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & -2 & 4 & -8 & 16+4d \\ 0 & 1 & -3 & 7 & -15-3d \\ 0 & 3 & -3 & 9 & -15-3d \\ 0 & 4 & 0 & 16 & 0 \end{array}\right) , \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & -2 & 4 & -8 & 16+4d \\ 0 & 1 & -3 & 7 & -15-3d \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 30+6d \\ 0 & 0 & 12 & -12 & 60+12d \end{array}\right) , \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & -2 & 4 & -8 & 16+4d \\ 0 & 1 & -3 & 7 & -15-3d \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 30+6d \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \end{array}\right)$$

La solució del sistema lineal triangular superior resultant es troba per substitució endarrera:

$$a_3 = 0 \ , \quad a_2 = 5+d \ , \quad a_1 = 0 \ , \quad a_0 = -4 \ .$$

(b) La taula de diferències dividides associada a la interpolació de $f(x) = x^4 + dx^2$ en $-2, -1, 1, 2$ és:

$$\begin{array}{r|ccccccc} -2 & 16+4d & & & & \\ & & -15-3d & & & \\ -1 & 1+d & & 5+d & & \\ & & 0 & & 0 \\ 1 & 1+d & & 5+d & & \\ & & 15+3d & & & \\ 2 & 16+4d & & & & \end{array}$$

El polinomi interpolador és llavors:

$$p_3(x) = 16 + 4d - (15+3d)(x+2) + (5+d)(x+2)(x+1) = -4 + (5+d)x^2 \ ,$$

coincident amb el trobat en l'apartat (a).