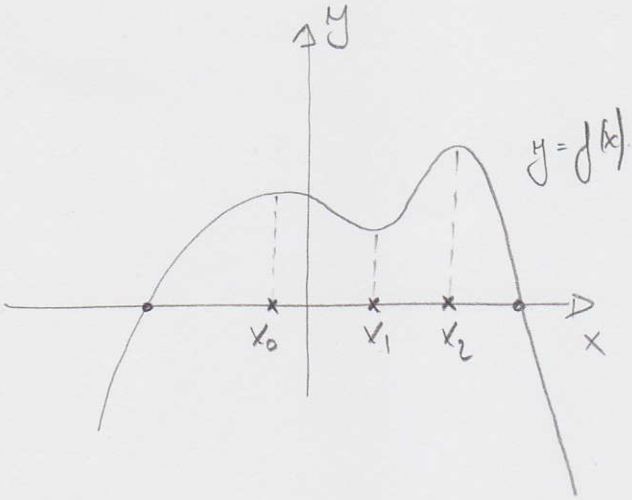
(10) Anem a treballar suposant primer qe hem provat qe la gràfica de

$f(x) = x^3 - e^x + 3$ és



Per tant suposem qe hem vist qe $f(x) = 0$ té dues arrels, una positiva i una negativa. Usem el teorema de Bolzano per localitzar-les:

$f(0) = 3 - 1 > 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = -1 - 1/e + 3 > 0 \\ f(-2) = -8 - 1/e^2 + 3 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists!\ \text{arrel a } (-2, 0)$$

$f(2) = 8 - e^2 + 3 > 0$

$f(4) = 4^3 - e^3 + 3 > 0$

$f(5) = 5^3 - e^5 + 3 < 0 \rightarrow \exists!$ arrel a $(4,5)$

Anem a localitzar la positiva, per exemple, amb una tolerància de 10^{-6}.

REGULA-FALSI

$p_0 = 4$

$p_1 = 5$

$p_2 = 4'37793224$

$p_3 = 4'54072563$

$\vdots$

$p_{12} = 4'62311432$

$p_{13} = 4'62311566$

$p_{14} = 4'62311607$

$|p_{14} - p_{13}| < 10^{-6} \Rightarrow \alpha \approx \underbrace{4'623116}_{6 \text{ decimals}}$

Podem assegurar qe $\varepsilon_a(\alpha) < 10^{-6}$?

$\tilde{\alpha} = 4'623116$

$$\left.\begin{array}{l} f(\tilde{\alpha} + 10^{-6}) = -0'28 \times 10^{-5} < 0 \\ f(\tilde{\alpha} - 10^{-6}) = 0'47 \times 10^{-5} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\text{Si}}$$

SECANT

$p_0 = 4$

$p_1 = 5$

$p_2 = 4'37793224$

$\vdots$

$p_7 = 4'62311634$

$p_8 = 4'62311625$ $\quad |p_8 - p_7| < 10^{-6} \Rightarrow \alpha \approx 4'623116$

NEWTON

$p_0 = 4'5$

$p_1 = 4'64035775$

$p_2 = 4'62340290$

$p_3 = 4'62311633$

$p_4 = 4'62311624$ $\quad |p_4 - p_3| < 10^{-6} \Rightarrow \alpha \approx 4'623116$

BISECCIÓ

$p_0 = 4$

$p_1 = 5$

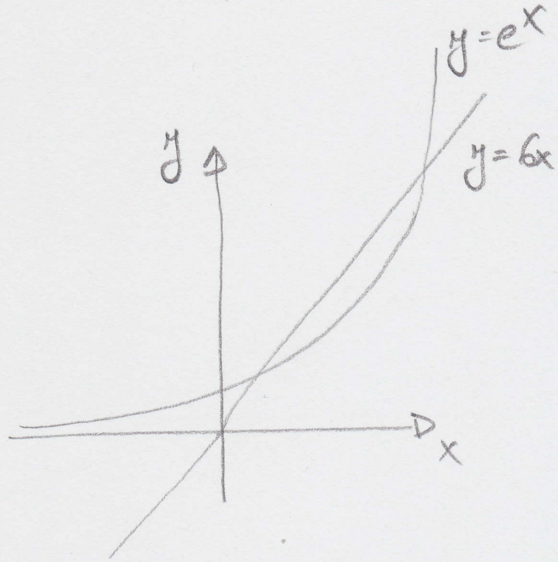
$\vdots$

$2^{-19} = 0'2 \times 10^{-5}$

$2^{-20} = 0'9 \times 10^{-6}$

$p_{20} = 4'62311649$ $\quad |p_{20} - p_{19}| < 10^{-6} \Rightarrow \alpha = 4'623116$

Observem qe $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$. Per mostrar qe la gràfica és efectivament com hem dit cal veure qe f' s'anul·la tres cops i qe si $x = x_1$ és el <u>mínim</u> de f llavors $f(x_1) > 0$.



$$f'(x) = 3x^2 - e^x$$

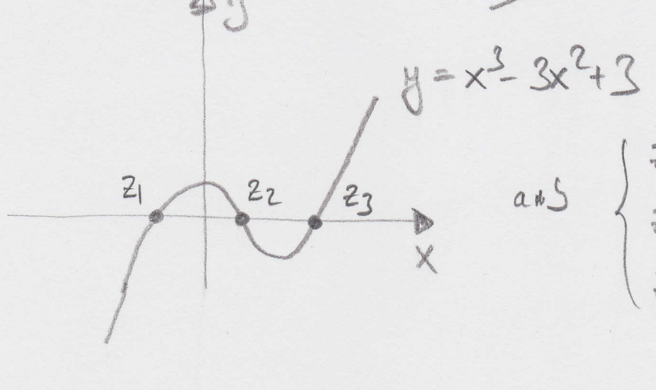
$$f''(x) = 6x - e^x \longrightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 6x$$

Per tant f'' s'anul·la 2 cops i això implica qe f' s'anul·la, com a molt, en tres punts.

Usant el teorema de Bolzano veiem qe efectivament n'hi ha tres i qe són dins dels intervals $(-1,0)$, $(0,1)$ i $(3,4)$. El mínim de f, x_1, és dins de $(0,1)$. (Això és degut a qe no és possible qe hi hagi dos mínims o dos màxims consecutius). Cal veure per acabar qe $f(x_1) > 0$.

$$f'(x_1) = 0 \Leftrightarrow 3x_1^2 - e^{x_1} = 0 \Leftrightarrow e^{x_1} = 3x_1^2$$

Així $f(x_1) = x_1^3 - e^{x_1} + 3 = x_1^3 - 3x_1^2 + 3 > 0$ ja qe $x_1 \in (0,1)$



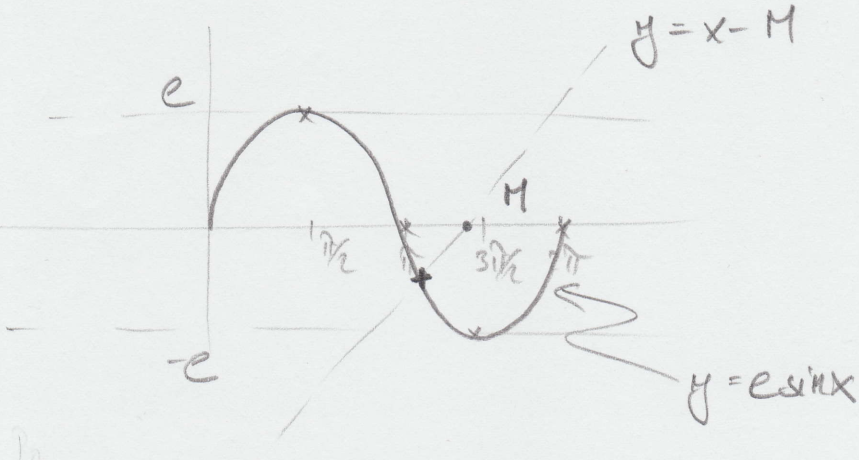
amb $\begin{cases} z_1 = -0'9 \pm 0'1 \\ z_2 = 1'3 \pm 0'1 \\ z_3 = 2'5 \pm 0'1 \end{cases}$ (usant Bolzano)

(12) $x - e\sin x = M \iff \underbrace{x - e\sin x - M}_{\substack{\parallel \\ f(x)}} = 0$

$f'(x) = 1 - e\cos x = 0 \iff \cos x = \frac{1}{e}$ això no es verifica mai ja qe $e \in (0,1)$

Per tant f' no s'anul·la $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rolle}}}{\Rightarrow}$ f té com a molt 1 zero

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= -M < 0 \\ f(2\pi) &= 2\pi - M > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \exists!\ \text{zero de } f \text{ a } (0, 2\pi)$$



$$P_{n+1} = P_n - \frac{P_n - e\sin P_n - M}{1 - e\cos P_n}$$

* Per $e = 0'2$ i $M = 0'8$ triant, per exemple, $P_0 = 1$ $\qquad$ tol $= 10^{-5}$

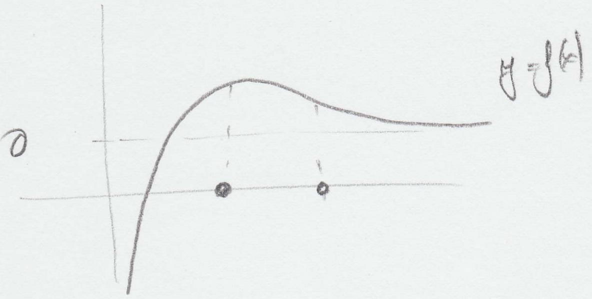
$P_1 = 0'96445297$

$P_2 = 0'96433389$

$P_3 = 0'96433389$ $\qquad f(P_3) = -1 \times 10^{-10}$

$$\left.\begin{aligned} f(P_3 - 10^{-5}) &< 0 \\ f(P_3 + 10^{-5}) &> 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{si faig } \alpha \approx P_3 \text{ llavors } \varepsilon_a(\alpha) < 10^{-5}$$

* $\{e = 0'8,\ M = 1'5\}$ amb $P_0 = 1 \ \ldots \ P_5 = 2'163532$ amb $|P_5 - P_4| < 10^{-5}$



(13) $\bar{x}$ és un màxim local si $f'(\bar{x})=0$ i $f''(\bar{x})<0$

$\bar{x}$ és un punt d'inflexió si $f''(\bar{x})=0$.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\ln x + 1 \;\rightarrow\; f'(x) = \frac{-2}{x^3}\ln x + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x^3}\underbrace{\left(1-2\ln x\right)}_{=0}$$

$$\left(\bar{x} = e^{1/2}\right)$$

$$f''(x) = \frac{-3}{x^4}(1-2\ln x) + \frac{1}{x^3}\,\frac{-2}{x} =$$

$$= \frac{1}{x^4}\left(-3-2+2\ln x\right) = \frac{-1}{x^4}\underbrace{\left(5-2\ln x\right)}_{=0}$$

$$\bar{x} = e^{5/2}$$

el punt d'inflexió el puc trobar com a zero de $g(x) = \ln x - \frac{5}{2}$

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

Newton: $P_{n+1} = P_n - P_n\left(\ln P_n - \frac{5}{2}\right)$

Triant $P_0 = 3$

$P_1 = 7'204163$

$P_2 = 1'098880\times 10^1$

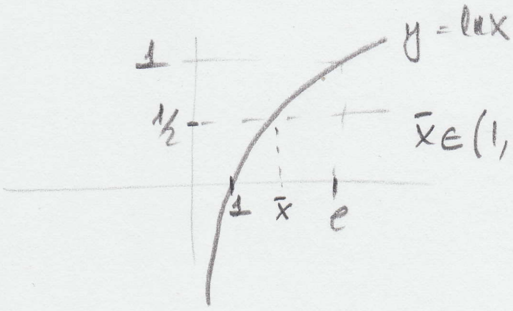
$P_3 = 1'212200\times 10^1$

$P_4 = 1'218234\times 10^1$

$P_5 = 1'218249\times 10^1$

$P_6 = 1'218249\times 10^1$

el màxim el puc trobar com a zero de $g(x) = \ln x - \frac{1}{2}$



$\bar{x} \in (1, e)$

secant

$$P_{n+1} = P_n - \frac{\left(\ln(P_n) - \frac{1}{2}\right)\left(P_n - P_{n-1}\right)}{\ln P_n - \ln P_{n-1}}$$

$$\ln P_n - \ln P_{n-1} = \ln\left(\frac{P_n}{P_{n-1}}\right)$$

Triant $P_0 = 1$ i $P_1 = 2'8$

$P_2 = 1'874109$

$P_3 = 1'578613$

$P_4 = 1'653446$

$P_5 = 1'648822$

$P_6 = 1'648721$

$P_7 = 1'648721$