GRAU D'ENGINYERIA INFORMÀTICA

Introducció a la Computació Científica

Semestre Tardor 2018 - Prova parcial de 31 d'octubre

CADA APARTAT VAL 20 PUNTS I ES QUALIFICA SOBRE 100. RESOL ELS 2 EXERCICIS EN FULLS SEPARATS.

Exercici 1 [Errors]

Sigui R el teu NIUB completat amb un nou (9) per l'esquerra.

Exemple: Per al NIUB fictici 12345678, $R = 912345678$.

(a) Escriu R en base 2, troba el valor $\bar{R}$ de la seva representació IEEE amb precisió simple i l'error de la representació $E = R - \bar{R}$. Entre quins dos nombres màquina R_m i R_M es troba R?

(b) Troba fites aproximades de l'error absolut i de l'error relatiu en calcular l'àrea $A = R^2\pi$ de la circumferència de radi R, utilitzant el valor representat $\bar{R}$ i l'aproximació $\pi = 3.14159 \pm 3 \cdot 10^{-6}$: $\bar{A} = \bar{R}^2 \cdot 3.14159$.

(c) Es vol calcular exactament la diferència d'àrees corresponents als radis R_m i R_M

$$A_M - A_m = (R_M^2 - R_m^2)\pi \ .$$

Intenta calcular $R_M^2 - R_m^2$ directament i explica la problemàtica amb què et trobes si no pots fer servir tantes xifres com calen. Fes servir una fórmula millor des del punt de vista numèric per calcular-la, justificant breument perquè és millor.

Exercici 2 [Sistemes lineals i interpolació]

El polinomi interpolador $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ de grau més petit o igual que 3 a la funció $f(x)$ en les nodes x_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ es pot trobar resolent el sistema d'equacions lineal en els coeficients a_0, a_1, a_2, a_3:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0 & + & x_0a_1 & + & x_0^2a_2 & + & x_0^3a_3 & = & f(x_0) \\ a_0 & + & x_1a_1 & + & x_1^2a_2 & + & x_1^3a_3 & = & f(x_1) \\ a_0 & + & x_2a_1 & + & x_2^2a_2 & + & x_2^3a_3 & = & f(x_2) \\ a_0 & + & x_3a_1 & + & x_3^2a_2 & + & x_3^3a_3 & = & f(x_3) \end{array}$$

o bé, mitjançant el mètode de les diferències dividides.

Considera la darrera xifra N del teu NIUB i la funció $f(x) = x^4 + Nx^2$ corresponent en les nodes $x_0 = -3, x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$: $f(x_0) = 81 + 9N, f(x_1) = 1 + N, f(x_2) = 1 + N, f(x_3) = 81 + 9N$.

(a) Escriu el sistema d'equacions lineals que han de complir els coeficients del polinomi interpolador p_3 i troba'n la solució pel mètode LU.

(b) Indica les iteracions a realitzar pel mètode de Jacobi aplicat al sistema anterior i analitza la seva convergència en la mesura que et sigui possible.

(c) Troba el polinomi interpolador pel mètode de les diferències dividides i comprova que és idèntic al trobat en l'apartat a).

Idees per a la solució. **[Errors]**

Es pren, com a exemple, el NIUB fictici 12345678, $R = 912345678$.

(a) En base 2:

$$R = 110110011000010100101001001110_{2)} = 1.10110011000010100101001001110 \cdot 2^{29} = \sigma(1+f)2^{q-1} \ .$$

Signe σ: 0

Mantissa exacta: $f = 0.10110011000010100101001001110_{2)}$.

Mantissa amb 23 bits arrodonits: $\mathrm{fl}_{23}(f) = 0.10110011000010100101001_{2)}$.

Exponent: $e = q - 1 + 127 = 156 = 10011100_{2)}$

Nombre màquina de representació de R (24 bits significatius arrodonits i completats amb zeros):

$$\bar{R} = 110110011000010100101001000000_{2)} = 912345678 - 14.$$

Error absolut exacte: $E = R - \bar{R} = 14$.

Nombres màquina anterior i posterior a R:

$$R_m = 110110011000010100101001000000_{2)} = 912345678 - 14 = 912345664 \ ,$$

$$R_M = 110110011000010100101010000000_{2)} = 912345678 + 50 = 912345728 \ .$$

(b) Una fita aproximada de l'error absolut comès en A ve donada per la fórmula de propagació de l'error en dues variables:

$$\epsilon_a(A) \approx \bar{R}^2\epsilon_a(\pi) + 2\pi\bar{R}\epsilon_a(R) = 912345664^2 \cdot 0.000003 + 2\pi \cdot 912345664 \cdot 14 = 2.497 \cdot 10^{12} + 2.555 \cdot 10^{10} = 2.523 \cdot 10^{12} \ .$$

Una fita aproximada de l'error relatiu es pot trobar a partir de l'expressió anterior

$$\epsilon_r(A) \approx \frac{\epsilon_a(A)}{\bar{R}^2\pi} < 0.965 \cdot 10^{-6} \ ,$$

o usant la fita de l'error relatiu del producte:

$$\epsilon_r(A) \approx \epsilon_r(\pi) + 2\epsilon_r(R) = \frac{0.000003}{3.14159} + 2\frac{14}{912345664} = 0.955 \cdot 10^{-6} + 0.307 \cdot 10^{-7} < 0.986 \cdot 10^{-6} \ .$$

(c) Directament, si no es pot treballar amb molts dígits, l'expressió té un problema de cancel·lació que no permet conèixer gaire xifres de la diferència dels quadrats:

$$A_M - A_m = (R_M^2 - R_m^2)\pi \ .$$

Amb una fórmula millor, que evita la cancel·lacions, es podria obtenir:

$$A_M - A_m = ((R_M - R_m)(R_M + R_m))\pi = 64 \cdot 1824691392\pi = 116780249088\pi \ .$$

Idees per a la solució. **[Sistemes lineals i interpolació]**

(a) La matriu del sistema és:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

Aplicant el mètode de LU, es troben les matrius:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 & 27 \\ 1| & 2 & -8 & 26 \\ 1| & 4 & -8 & 28 \\ 1| & 6 & 0 & 54 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1| & 2 & -8 & 26 \\ 1 & 2| & 8 & -24 \\ 1 & 3| & 24 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1| & 2 & -8 & 26 \\ 1 & 2| & 8 & -24 \\ 1 & 3 & 3| & 48 \end{pmatrix}$$

El terme independent té les components:

$$f(x_0) = 81 + 9N, f(x_1) = 1 + N, f(x_2) = 1 + N, f(x_3) = 81 + 9N \ .$$

El sistema triangular inferior

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 81+9N \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1+N \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1+N \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 81+9N \end{array}\right)$$

es resol per substitució endavant:

$$y_0 = 81 + 9N \ , \quad y_1 = -8(10 + N) \ , \quad y_2 = 8(10 + N) \ , \quad y_3 = 0 \ .$$

El sistema triangular superior

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 9 & -27 & 81+9N \\ 0 & 2 & -8 & 26 & -80-8N \\ 0 & 0 & 8 & -24 & 80+8N \\ 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \end{array}\right)$$

es resol per substitució endarrera:

$$a_3 = 0 \ , \quad a_2 = 10 + N \ , \quad a_1 = 0 \ , \quad a_0 = -9 \ .$$

El polinomi interpolador és doncs:

$$p_3(x) = (10 + N)x^2 - 9 \ .$$

(b) Les iteracions del mètode iteratiu s'escriuen matricialment així:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 81+9N \\ -(1+N) \\ 1+N \\ 3+\frac{1}{3}N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 & 9 & -27 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^{(k)} .$$

El mètode de Jacobi no sembla convergent perquè la matriu d'iteracions té elements força grans. Caldria veure que té valors propis amb mòdul més gran que 1.

Una manera de fer-ho seria estudiar el polinomi característic $p_4(\lambda) = \lambda^4 + \cdots$. Pren valors molt grans i positius quan λ és gran. Si $p_4(1) < 0$, voldria dir que la matriu d'iteració té un valor propi més gran que 1 i, per tant, el mètode seria divergent.

Efectivament, fent un pas d'eliminació gaussiana i desenvolupant per la darrera filera:

$$p_4(1) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -9 & 27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{27} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -9 & 27 \\ 0 & 2 & -8 & 26 \\ 0 & -4 & 8 & -28 \\ 0 & -\frac{2}{9} & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} + \frac{2}{9} \begin{vmatrix} -8 & 26 \\ 8 & -28 \end{vmatrix} < 0 .$$

(c) La taula de diferències dividides associada a la interpolació de $f(x) = x^4 + Nx$ en $-3, -1, 1, 3$ és:

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
-3	$81+9N$			
		$-4(10+N)$		
-1	$1+N$		$10+N$	
		0		0
1	$1+N$		$10+N$	
		$4(10+N)$		
3	$81+9N$			

El polinomi interpolador és llavors:

$$p_3(x) = 81 + 9N - 4(10+N)(x+3) + (10+N)(x+3)(x+1) = (10+N)x^2 - 9 ,$$

coincident amb el trobat en l'apartat (a).