TEMA 1: ERRORS

$13_{10} = 1101_2 = 8+4+1 = 2^3+2^2+2^0$

$357 = 256+64+32+4+1 = 2^8+2^6+2^5+2^2+2^0 = 101100101_2$

$X = d_n.d_{n-1}\dots d_2 d_1 d_0 = d_n.10^n + d_{n-1}.10^{n-1} + \dots + d_2.10^2 + d_1.10^1 + d_0.10^0 =$

$= b_N 2^N + b_{N-1} 2^{N-1} + \dots + b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0 2^0 =$

$= (b_N 2^{N-1} + b_{N-1}.2^{N-2} + \dots + b_2.2 + b_1).2 + b_0.$

Exercici: 1.T1 Respon:

a) Quina és la representació en punt flotant dels nombres:

- 0'2345: $2.10^{-1} + 3.10^{-2} + 4.10^{-3} + 5.10^{-4} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{5}{10^4}$

$= \frac{b_{-1}}{2} + \frac{b_{-2}}{2^2} + \frac{b_{-3}}{2^3} + \dots$

$b_{-1}.2 = \dots$

0'2345 → 0'4690 → 0'9380 →
$\boxed{1}$'8760 → $\boxed{1}$'7520 → $\boxed{1}$'5040 →
$\boxed{1}$'0080 → 0'0160 → 0'0320 →

0'00111100

$0'111100 . 10^{-2} = 0'2345.$

- 34222'1: 34222 = 1000010110101110
  0'1 = 0'0$\overline{0011}$

n	n' = [n/2]	r = n-2[n/2]
34222	17111	0
17111	8555	1
8555	4277	1
4277	2138	1
2138	1068	0
1068	534	1
534	267	0
267	133	1
133	66	1
66	33	0
33	16	1
16	8	0
8	4	0
4	2	0
2	1	0 — 1

n	n' = 2n - [2n]	
0'1	0'2	0
0'2	0'4	0
0'4	0'8	0
0'8	1'6	1
0'6	1'2	1
0'2	0'4	0 ...

$\underbrace{0'1000010110101110000\overline{0011}}_{\text{mantissa}} . 2^{16}$

b) Quins son els nombres positius mes gran i més petit representables exactament?

IEEE Simple

0	e_2	m_2
signe (31)	exponent (30 … 23)	mantissa (22 … 0)

(a partir del 1° 1.)

4 bytes = 32 bits.

$x = \pm m \cdot 2^q$

$\frac{1}{2} = 0'1_2 \leq m < 1$

$e = q + 126 \overset{256}{\rangle} \; e \geq 0$

la q més petita posible és −126

$X_{min} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-126} = 2^{-127}$

$X_{max} = (1 - 2^{-24}) \cdot 2^{255-126}$

*

c) Quin és el nombre representable exactament que segueix a 256?

$256 = 0'1000\ldots0 \cdot 2^9 \Rightarrow 256 = \frac{1}{2} \cdot 2^9 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\frac{1}{2} + 2^{-24}) \cdot 2^9 = 2^8 + 2^{-15}$

Exemple *

0011...

0	10010000	0000010 1101 01111 0000 11010
31	30 … 23	22 … 0

arrodon

$q = 16 \quad e = 16 + 126 = 142 \quad e = 10010000$

$e_{max} = 255 = 11111111$. mantisa mes gran $1 - 2^{-24}$

142 | 2
0, 72 | 2
0, 36 ...

(2.Ti) Feu els càlculs, en ordres diferents: Usant A. decimal de punt flotant amb sis dígits. Calculeu valor exacte. En quin dels dos ordres són més evidents els efectes de cancel·lació? Perquè?

P. ICC (2)

• $(2'43875 \cdot 10^6 + 4'12642 \cdot 10^1) - 2'43826 \cdot 10^6 =$

$(0'243875 \cdot 10^7 + 0'00000412642 \cdot 10^7) - 2'43826 \cdot 10^6 =$

$fl_6(0'24387912642 \cdot 10^7) - 2'43826 \cdot 10^6 =$

$0'243879 \cdot 10^7 - 0'243826 \cdot 10^7 = 0'000053 \cdot 10^7$

$= 0'53 \cdot 10^3$

$= 5'3 \cdot 10^2$

Aquí es noten més, per que fais el 'truncament' dels 6 digits abans.

• $(2'43875 \cdot 10^6 - 2'43826 \cdot 10^6) + 4'12642 \cdot 10^1 =$

$(0'00049 \cdot 10^6) + 0'0000412642 \cdot 10^6 =$

$0'0005312642 \cdot 10^6 = fl_6(0'5312642 \cdot 10^3) =$

$= 0'531264 \cdot 10^3 = 5'312642 \cdot 10^2$

(7.Ti) Calculeu la solució més petita de l'equació $x^2 - 40x + 1 = 0$ utilitzant l'expressió aproximada $\sqrt{399} \approx 19'97498$. Per fer-ho useu la formula directa i l'expresió de la solució donada per $\frac{1}{20+\sqrt{399}}$. Compareu errors.

$$x = \frac{40 \pm \sqrt{1600-4}}{2} = \begin{cases} 0 + \sqrt{399} = 0'02503 \simeq 19'97498 \\ 20 - \sqrt{399} \Rightarrow \frac{1}{20+\sqrt{399}} = 0'02 \end{cases}$$

$x = \sqrt{399} \approx \bar{x}$ $\quad f_1(x) = 20 - x$

$f_2(x) = \frac{1}{20+x} = (20+x)^{-1}$

$|f_1'(\bar{x})| = 1$

$|f_2'(\bar{x})| = \left| -\frac{1}{(20+\bar{x})^2} \right| = \frac{1}{1600}$

6.T1) Volem calcular $a=(7-4\sqrt{3})^4$ utilitzant el valor aproximat $1'73205$ per $\sqrt{3}$. Trieu entre les formules equivalents següents la millor des del punt de vista numeric

(1) $\dfrac{1}{(7+4\sqrt{3})^4}$ (2) $(97-56\sqrt{3})^2$ (3) $\dfrac{1}{(97+56\sqrt{3})^2}$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

a) $(7-4\sqrt{3})^4 = \dfrac{1}{(7+4\sqrt{3})^4}$ $f(x)=(7+4\sqrt{3})^{-4}$

b) $(7-4\sqrt{3})^4 = \left(\underbrace{(7-4\sqrt{3})^2}_{49-56\sqrt{3}+48}\right)^2$ $f_2(x)=(97-56\sqrt{3})^2$

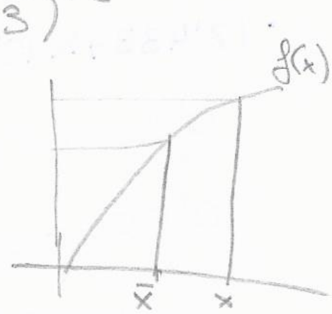
c) $(7-4\sqrt{3})^4 = \dfrac{1}{(97+56\sqrt{3})^2}$ $f_3(x)=(97-56\sqrt{3})^{-2}$

$\sqrt{3} \simeq 1'73205$

$x = \bar{x}$

$|e_a(x)| \leq \frac{1}{2}10^{-5} = \mathcal{E}_a(x)$

$x = \bar{x} + \mathcal{E}_a(x)$



$f(x) = f(\bar{x} + e_a(x)) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x}).e_a(x)$

$|e_a f(x)| = |f(x) - f(\bar{x})| = |f'(x)|.|e_a(x)|$

$\mathcal{E}_a(f(x)) \leq |f'(x)|.\mathcal{E}_a(x)$

$f_1'(\bar{x}) = (-4)(7+4\bar{x})^{-4-1} = \dfrac{16}{(7+4\bar{x})^5} \doteq 3.10^{-5}$

$f_2'(\bar{x}) = 2(97-56\bar{x})(-56) = -112(97-56\bar{x}) = 13$

$f_3'(\bar{x}) = -2(97+56\bar{x})^{-2-1}.56 = \dfrac{-112}{(97+56\bar{x})^3} = 1'5.10^{-5}$

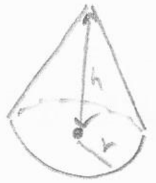
(3.T1) El volum d'un con ve donat per la fórmula $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$, on h és l'alçada i r és el radi de la base. Useu la formula de propagació de l'error absolut per calcular una fita de l'error absolut comès en el càlcul del volum d'un con si $h \approx 1'23$, $r \approx 0'98$ i $\pi \approx 3'1416$. *Stef*

$$f(x) = f(\bar{x} + ea(x)) \simeq f(\bar{x}) + f(\bar{x})\, ea(x)$$

$$x = \bar{x} + ea(x) \qquad |ea(x)| \leq \mathcal{E}a(x)$$

$$|f(x) - f(\bar{x})| \simeq |f'(\bar{x})|\,|ea(x)| \leq |f'(x)| \cdot \mathcal{E}a(x)$$

$$\mathcal{E}a(f(x)) \simeq |f'(x)|\, \mathcal{E}a(x)$$



$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \qquad \begin{array}{l} \pi \simeq 3'1416 = \bar{\pi} \\ r \simeq 0'98 = \bar{r} \\ h \simeq 1'23 = \bar{h} \end{array}$$

$$\pi \in [3'14155,\ 3'14165] \quad \mathcal{E}a(\pi) = \tfrac{1}{2} \cdot 10^{-4}$$

$$r \in [0'975,\ 0'985] \quad \mathcal{E}a(r) = \tfrac{1}{2} \cdot 10^{-2} \qquad 0'005 = \tfrac{1}{2} \cdot 10^{-2}$$

$$h \in [1'225,\ 1'235] \quad \mathcal{E}a(h) = \tfrac{1}{2} \cdot 10^{-2}$$

$$V = \bar{V} = \frac{\bar{\pi} \cdot \bar{r}^2 \cdot \bar{h}}{3} \qquad V(\pi, r, h) \simeq \bar{V}(\bar{\pi}, \bar{r}, \bar{h})$$

$$\mathcal{E}a(V(\pi, r, h)) \simeq \left| \frac{\partial V}{\partial \pi} \cdot (\bar{\pi}, \bar{r}, \bar{h}) \right| \cdot \mathcal{E}a(\pi) +$$

$$+ \left| \frac{\partial V}{\partial r} \cdot (\bar{\pi}, \bar{r}, \bar{h}) \right| \cdot \mathcal{E}a(r) +$$

$$+ \left| \frac{\partial V}{\partial h} \cdot (\bar{\pi}, \bar{r}, \bar{h}) \right| \cdot \mathcal{E}a(h)$$

(4.Ti) Doneu una fita aprox. de l'error absolut propagat en calcular $A = \dfrac{\pi}{\pi - 2/3}$ si arrodonim π i $2/3$ per 3'14 i 0'67 resp.

Stef

$$A(p,q) = \frac{p}{p-q}$$

$$\varepsilon_a(A(p,q)) \simeq \left|\frac{\partial A}{\partial p}(\bar{p},\bar{q})\right| \varepsilon_a(p) + \left|\frac{\partial A}{\partial q}(\bar{p},\bar{q})\right| \cdot \varepsilon_a(q)$$

derivada de A respecte p.

$$\left|\frac{1}{\bar{p}-\bar{q}} - \frac{\bar{p}}{(\bar{p}-\bar{q})}\right| \varepsilon_a(p) + \left|\frac{\bar{p}}{(\bar{p}-\bar{q})^2}\right| \varepsilon_a(q) = 0'01956$$

$A = 1'271255 \pm 0'01956 \Rightarrow A = 1'3$ error del arrodoniment

$p = 3'14 \pm 0'0016 = \varepsilon_a(p)$

$q = 0'67 \pm 0'0034 = \varepsilon_a(q)$

$(1'3 - 1'271255) =$

$= 0'028745 + 0'01556 =$

$= 0'048305$ mes petit que $\frac{1}{2}$

$$A = 1'3 \pm \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$$

(8.Ti) Usant un mètode recurrent, calculeu el valor de les integrals.

$I_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^k}{x+10}\,dx$ per $k = 1, 2, \ldots, 20$. Estudieu l'estabilitat del mètode ~~est~~ trobat.

$I_k = \frac{1}{k} - 10 I_{k-1}$

$I_0 = \ln 1 . 1$

$I_k \geq 0$

$I_1 = 1 - 10 I_0 = 0'0153\ldots$

$I_k \downarrow$

$I_2 = \frac{1}{2} - 10 I_1 = 0'04689\ldots$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= x^{\alpha} \\ f'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} \\ f(x) &= \frac{1}{N+1} x^{N+1} \end{aligned}}$$

$I_{k-1} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{k} - I_k\right)$

$I_N \simeq 0 = \bar{I}_N$

$I_{N-1} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{N} - I_N\right)$

$I_{N-2} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{N-1} - I_{N-1}\right)$

$$e_N = I_N = \int_0^1 \frac{x^N}{x+10}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^N}{10}\,dx = \frac{1}{10}\int_0^1 x^N dx = \frac{1}{10} \cdot \left.\frac{x^{N+1}}{N+1}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{10(N+1)} \cdot \varepsilon_N$$

$N?$ $\quad \varepsilon_{20} \leq \frac{1}{2} 10^{-16}$

$N = 35$

$I_{35} = 0$

$I_{34} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{35} - I_{35}\right)$

$\varepsilon_{N-1} = \frac{1}{10}\varepsilon_N$

$\varepsilon_{N-2} = \frac{1}{10^2}\varepsilon_N = \frac{1}{10}\varepsilon_{N-1}$

$N - k = 20$

$35 - k = 20$

$K = 15$ $\quad N?$

$k + 1 = 16$

$$\varepsilon_{N-k} = \frac{1}{10^k}\varepsilon_N = \frac{1}{10^{k+1}(N-1)}$$

TEMA 2: ÀLGEBRA LINEAL NUMÈRICA

(9.T2) Considereu el sistema d'equacions lineals $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 10000 & 1 & 20000 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 20000 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Resoleu-lo pel mètode d'eliminació gaussiana usant aritmètica decimal de punt flotant amb 4 dígits ($t=4$).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 10000 & 1 & 20000 & 20000 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 10000 & 10000 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 10000 & 10000 \\ 0 & 0 & -10000 & -10001 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow x_1 = -0'0001 \\ \rightarrow x_2 = -1 \\ \rightarrow x_3 = 1'0001 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ amb 4 xifres sense pivotatge.

b) Resoleu-lo pel mètode d'eliminació gaussiana amb pivotatge maximal per columnes usant aritmètica decimal de punt flotant amb 4 dígits. té que ser dif. ∅ si no es pot, th. Roch (no té solució).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0'0001 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{primera columna}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0'0001 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$f_2 \rightarrow f_2 - \frac{1}{1} f_1$ ← fila pivot

$f_3 \rightarrow f_3 - \frac{1}{1} f_1$

element que vull matar

element del diagonal

$f_3 \rightarrow f_3 \frac{1}{0'0001} f_2$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0'0001 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10^4 & -10^4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow x_1 = 0 \\ \rightarrow x_2 = 0 \\ \rightarrow x_3 = 1 \end{array}$$

b) Resoleu-lo exactament i compareu totes les solucions.

(10.T2) Considereu el sistema d'equacions lineals $Ax = b$ amb

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$ a) Usant aritmètica de punt flotant de 3 dígits, resoleu el sistema per eliminació gaussiana amb i sense pivotatge. * Stef *

$4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$
$2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5$
$x_1 + x_2 - 3x_3 = -9$

$-1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = -2$ $\quad -3 - \frac{1}{4} \cdot 2 = -\frac{14}{4}$

$-5 - \frac{1}{2} \cdot 9 = -\frac{19}{2}$

$\frac{3}{4} - x \cdot \frac{7}{2} = 0$ $\quad x = \frac{3}{14}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 & -9 \end{array}\right) \longrightarrow (A_2 | b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 7/2 & -2 & -19/2 \\ 0 & 3/4 & -\frac{14}{4} & -45/4 \end{array}\right) \longrightarrow$ $-\frac{14}{4} - \frac{3}{14} \cdot -2 = -\frac{43}{14}$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 7/2 & -2 & -19/2 \\ 0 & 0 & -\frac{43}{14} & -\frac{129}{14} \end{array}\right)$ $\quad \frac{7}{2}x^2 - 2x_3 = \frac{-19}{2} \Rightarrow \boxed{x_2 = -1}$

$\boxed{x_3 = 3}$

$4x_1 - x_2 + 2x_3 = 9$ $\quad x_1 = \frac{9 - 6 - 1}{4}$

$\boxed{x_1 = \frac{1}{2}}$

b) Resoleu el sistema de forma exacta. Compareu les solucions.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -9 \\ 2 & 4 & -1 & -5 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to f_2 - 2f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 2 & 5 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right) \rightarrow$

$\xrightarrow{f_3 \to f_3 - 4f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 2 & 5 & 13 \\ 0 & -3 & 14 & 45 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to f_3 + 3f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 2 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 5 & 18 \end{array}\right)$

$x \quad y \quad z$

$5z = 18$ $\quad 2y + 5\left(\frac{18}{5}\right) = 13$ $\quad x + \left(\frac{-5}{2}\right) - 3\left(\frac{18}{5}\right) = -9$

$\boxed{z = \frac{18}{5}} = 3'6$ $\quad \boxed{y = \frac{-5}{2}} = -2'5$ $\quad \boxed{x = \frac{43}{10}} = 4'3$

(B. T2) Calculeu la solució aprox. del sistema lineal emprant el mètode de Jacobi i fent els càlculs amb dos decimals fins que $|x_i^{r+1} - x_i^r| < 0'05$ per a totes les variables

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 + 0'24x_2 - 0'08x_3 = 8 \\ 0'09x_1 + 3x_2 - 0'15x_3 = 9 \\ 0'04x_1 - 0'08x_2 + 4x_3 = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cancel{4}x_1 = 2 - 0'06x_2 + 0'02x_3 \\ \cancel{3}x_2 = 3 - 0'03x_1 + 0'05x_3 \\ \cancel{4}x_3 = 5 - 0'01x_1 + 0'02x_2 \end{array}\right.$$

$\boxed{Ax = b}$ $\qquad$ $\boxed{x = d + Mx}$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = 2 - 0'06x_2^{(k)} + 0'02x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 3 - 0'03x_1^{(k)} + 0'05x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 5 - 0'01x_1^{(k)} + 0'02x_2^{(k)} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x_1^{(0)} = 0 \\ x_2^{(0)} = 0 \\ x_3^{(0)} = 0 \end{array}\right\}$$ t'ho inventas, es "igual" el que posis.

$*$ $\boxed{x^{(k+1)} = d + Mx^{(k)}}$ $\qquad$ $\boxed{x^{(0)} = 0}$ inici

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(1)} = 2 \\ x_2^{(1)} = 3 \\ x_3^{(1)} = 5 \end{array}\right\} \text{primer iterat} \qquad \left.\begin{array}{l} x_1^{(2)} = 2 - 0'06 \cdot 3 + 0'02 \cdot 5 = 1'92 \\ x_2^{(2)} = 3 - 0'03 \cdot 2 + 0'05 \cdot 5 = 3'19 \\ x_3^{(2)} = 5 - 0'01 \cdot 2 + 0'02 \cdot 3 = 5'04 \end{array}\right\} \text{segon iterat}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(3)} = 1'9094 \\ x_2^{(3)} = 3'1944 \\ x_3^{(3)} = 5'0446 \end{array}\right\} \text{tercer iterat} \qquad \left.\begin{array}{l} x_1^{(4)} = 1'909228 \\ x_2^{(4)} = 3'194948 \\ x_3^{(4)} = 5'044794 \end{array}\right\} \text{quart iterat}$$

$*$ $x^{(k+1)} = d + Mx^{(k)}$

$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x = d + M_J x^{(k)} - d - M_J x = M_J (x^{(k)} - x) = M_J e^{(k)}$

$e^{(1)} = M_J e^{(0)} \qquad e^{(2)} = M_J e^{(1)} = M_J^2 \cdot e^{(0)}$

$e^{(k)} = M_J^k \cdot e^{(0)} \qquad e^{(k)} \to 0 \Leftrightarrow M_J^k \to 0$

Tota matriu elevada a k és la diagonalitzable

$$\begin{pmatrix} \lambda^k & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \to 0 \Leftrightarrow |\lambda_i| < 1.$$

$\det(M_J - \lambda I) = 0 \qquad \lambda_i$ valors propis (solucions del polinomi carac.)

$|x_i^{r+1} - x_i^r| < 0'05$ És podria haber parat amb el $x_i^3 - x_i^2$ (en aquest cas).

$|x_1^4 - x_1^3| = 0'000182$

$|x_2^4 - x_2^3| = 0'000548$

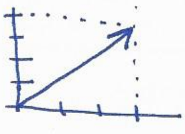
$|x_3^4 - x_3^3| = 0'000114$

$$M_J = \begin{pmatrix} 0 & -0'06 & 0'02 \\ -0'03 & 0 & 0'05 \\ -0'01 & 0'02 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\|M_J\|_\infty = 0'08$ és convergen.

Normes vectorials.

$\mathbb{R}^2$ $(3,4)$



pitagores: vector = 5 llarg.

$(3,4,5) = v$

$\|v\|_2 = \sqrt{3^2+4^2+5^2} = \sqrt{50} = 7'\ldots$

norma

$\|v\|_1 = 3+4+5$

$\|v\|_\infty = \max\{3,4,5\}$

$\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$

$\|v\|_1 = |v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n|$

$\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|\}$

Normes matricials

i fila j columna.

$\|A\| = \max\limits_{v \neq 0} \dfrac{\|Av\|}{\|v\|}$

$\|A\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$ $\quad \|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}|$

ej:

$$\begin{array}{r l} & \|\infty\| \\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \to 8 \\ \to 9 \\ \to 9 \end{array} \\ \|1\| \;\; 7 \;\; 6 \;\; 13 & \end{array}$$

$\|A\|_\infty = 9$ $\quad \|A\|_1 = 13$

$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

$e^{(k)} = M_J^k e^{(0)} \Rightarrow \|e^{(k)}\| \leq \|M\|^k \cdot \|e^{(0)}\|$

norma de l'error inicial

$\|M_J\| < 1 \Rightarrow e^{(k)} \to 0.$

Si en alguna de les dues normes $(1,\infty)$ és < 1. és convergent

Sinò, no ho sabem.

(14.T2) Calculeu una solució aprox. de cadascun dels sistemes lineals següents: és convergent? → fer met iter.

a) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ $\quad \left.\begin{array}{l} \cancel{3}x_1 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = -1 - 3x_1 - 5x_3 \\ x_3 = -1 + x_1 + 3x_2 \end{array}\right\}$

$M_J = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & -1/3 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ hi ha un element més gran de 1 (>1) per tant ja no és convergen. (s'hauria d'assegurar mirant els valors prop. en cara que si intercanviem unes files...:

$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \cancel{3}x_1 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ \cancel{3}x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 \\ \cancel{5}x_3 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \end{array}\right\}$

$M_J = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ 3/5 & -1/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to 2/3 \\ \to 2/3 \\ \to 4/5 \end{array}$ $\quad \|M_J\|_\infty = \max\left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right\} = \frac{4}{5} < 1$ és convergent.

b) $\left.\begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 4 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} :3 \quad x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{1}{3} \\ :6 \quad \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ :7 \quad \frac{3}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + x_3 = \frac{4}{7} \end{array}$

$M_J = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & -1/3 \\ -4/7 & -3/7 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \|M_J\| = \frac{6}{7} < 1$ Convergen.

c) $\left.\begin{array}{l} 4x_1 + 3x_2 = 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30 \\ -x_2 + 4x_3 = -24 \end{array}\right\}$ $\quad M_J = \begin{pmatrix} 0 & -3/4 & 0 \\ -3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 3/4 \\ 1 \\ 1/4 \end{array}$

$\|M_J\|_\infty = 1 \qquad \|M_J\|_1 = 1$ No decideix.

hem de trovar valors propis:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -3/4 & 0 \\ -3/4 & -\lambda & 1/4 \\ 0 & 1/4 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{\det}{=} -\lambda^3 + \frac{9}{16}\lambda + \frac{1}{16}\lambda = -\lambda^3 + \frac{10}{16}\lambda =$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{5}{8}\right) \Rightarrow 0$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0, \pm\sqrt{5/8} \qquad |\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3| < 1.$ convergent