Introducció a la Computació Científica

Semestre Tardor 2018 - Segona prova parcial de 18 de desembre

CADA APARTAT COMPTA 2 PUNTS SOBRE 10. ESCRIU CADA EXERCICI EN FULLS SEPARATS.

Considera en tota la prova la funció $g(x) = x^4 - 27$ a l'interval $[2, 3]$

Exercici 1 (a) Troba el polinomi $H_3(x)$ d'interpolació d'Hermite generalitzada de grau màxim 3 a la funció $g(x)$ en $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ i a la seva derivada $g'(x)$ en $x_0 = 2$, $x_1 = 3$; això és, que interpola la taula següent:

x	2	3
$g(x)$	-11	54
$g'(x)$	32	108

.

i demostra que l'error d'aproximació és $e(x) = g(x) - H_3(x) = (x-2)^2(x-3)^2$.

(b) Aproxima la derivada $g'(2.5)$ per $H_3'(2.5)$ i calcula l'error comès.

Exercici 2 (a) Aproxima la integral

$$I = \int_2^3 g(x)dx = \frac{76}{5} = 15.2$$

per la regla (fórmula composta) de trapezis $T_0(h)$ amb passos $h = 1, \frac{1}{2}$ i troba l'error comès en cada aproximació, comparant-la amb el valor exacte I de la integral, i observa que l'error és proporcional a h^2.

Aproxima també la integral per la regla de Simpson amb pas $h = \frac{1}{2}$ i troba l'error comès.

(b) Sabent que l'error de $T_0(h)$ és de la forma

$$T_0(h) - I = a_0 h^2 + \cdots \ (a_0 \neq 0) \ ,$$

extrapola els resultats anteriors $T_0(1), T_0(\frac{1}{2})$. Això és, troba $T_1(\frac{1}{2})$ i el seu error, i explica el resultat obtingut.

Es recomana fer aquest exercici usant fraccions.

Exercici 3 (a) Demostra que la funció g té un únic punt fix α a l'interval $[2, 3]$. Esbrina si el mètode iteratiu associat: $x_{k+1} = g(x_k)$ és localment convergent a α.

(b) Troba els 5 primers iterats del mètode de Newton per aproximar α a partir de l'aproximació inicial $x_0 = 2$ i estudia el comportament dels errors $\varepsilon_k = |x_k - \alpha|$.

Exercici 1

Idees per a la solució.

(a) La taula de diferències dividides associada a la interpolació d'Hermite de $g(x) = x^4 - 27$ en $2, 3$ és:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & g(2) = -11 & & & \\ & & g'(2) = 32 & & \\ 2 & g(2) = -11 & & g[2,2,3] = 33 & \\ & & g[2,3] = 65 & & g[2,2,3,3] = 10 \\ 3 & g(3) = 54 & & g[2,3,3] = 43 & \\ & & g'(3) = 108 & & \\ 3 & g(3) = 54 & & & \end{array} .$$

El polinomi interpolador és llavors:

$$H_3(x) = -11 + 32(x-2) + 33(x-2)^2 + 10(x-2)^2(x-3) = 10x^3 - 37^2 + 60x - 63 .$$

L'error en la interpolació és

$$e(x) = g(x) - H_3(x) = \frac{g^{(4)}(\xi)}{4!}(x-2)^2(x-3)^2 dx = (x-2)^2(x-3)^2 ,$$

atenent que $g^{(4)}(x) = 4!$.

Així,

$$H_3(x) = g(x) - e(x) = x^4 - 27 - (x-2)^2(x-3)^2 .$$

(b) La derivada $g'(2.5) = 4 \cdot 2.5^3 = 62.5$ s'aproxima per $H_3'(2.5) = 62.5$, sense error, atenent que la derivada de l'error en 2.5 és zero: $e'(2.5) = 0$.

Exercici 2

Idees per a la solució.

Considerem la taula de la funció g amb pas $\frac{1}{2}$:

x	2	$\frac{5}{2}$	3
$g(x)$	-11	$\frac{193}{16}$	54

.

La integral val $I = \frac{76}{5} = 15.2$.

(a) Les regles de trapezis amb passos $1, \frac{1}{2}$ donen:

$$T_0(1) = \frac{1}{2}(-11+34) = \frac{43}{2} = 21.5 \ , \quad T_0(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(-11+2\frac{193}{16}+54) = \frac{537}{32} = 16.78125 \ ,$$

amb errors

$$T_0(1) - I = 6.3 \ , \quad T_0(\frac{1}{2}) - I = \frac{253}{160} = 1.58125 \ .$$

L'error és aproximadament 4 cops més petit quan s'ha dividit el pas per 2; l'error és d'ordre h^2.

La regla de Simpson amb pas $h = \frac{1}{2}$ dona:

$$S(\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}(-11+4\frac{193}{16}+54) = \frac{365}{24} = 15.2083333 \ .$$

(b) La fórmula extrapolada, amb $q = 2$ i $p_0 = 2$, dóna:

$$T_1(\frac{1}{2}) = T_0(\frac{1}{2}) + \frac{T_0(\frac{1}{2}) - T_0(1)}{2^2-1} = T_0(\frac{1}{2}) + \frac{T_0(\frac{1}{2}) - T_0(1)}{3} = \frac{365}{24} = 15.208333 \ ,$$

amb error

$$T_1(\frac{1}{2}) - I = \frac{1}{120} = 0.083333 \ ,$$

molt més petit.

La fórmula extrapolada ha eliminat els errors d'ordre h^2, li queden errors d'ordre superior. El resultat de l'extrapolació coincideix amb el resultat de la regla de Simpson que té errors d'ordre h^4.

Exercici 3

Idees per a la solució.

(a) La funció $f(x) = g(x) - x = x^4 - 27 - x$ és creixent i canvia de signe a l'interval $[2, 3]$ té doncs un únic zero real α, que es troba en aquest interval i que és un punt fix de g.

Com que $g'(x) = 4x^3$ és més gran que 1 en aquest interval, el mètode iteratiu seria divergent.

(b) El mètode de Newton aplicat a trobar el zero α de f s'escriu així:

$$x_0 = 2 \ , \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^4 - x_k - 27}{4x_k^3 - 1} = \frac{3x_k^4 + 27}{4x_k^3 - 1} \ .$$

En la taula següent es mostren els iterats amb el seus errors i els quocients dels errors amb els quadrats dels errors previs:

k	x_k	ε_k	$\varepsilon_k/\varepsilon_{k-1}^2$
0	2.000000000000000	$3.271122120156202e-01$	
1	2.419354838709677	$9.224262669405725e-02$	$4.947593335139049e-01$
2	2.332347213981426	$5.235001965805619e-03$	$6.891445563348649e-01$
3	2.327130164504508	$1.795248888791789e-05$	$6.595832654437295e-01$
4	2.327112212227563	$2.119429076685719e-10$	$6.576270209192439e-01$
5	2.327112212015620	0	

El punt fix de g trobat és $\alpha = 2.327112212015620$.

La darrera columna mostra la convergència quadràtica del mètode de Newton:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1}^2} = 6.57... \ ,$$