Grau d'Enginyeria Informàtica

# Introducció a la Computació Científica

## Semestre Tardor 2015 - Prova parcial del 6 de novembre

Cada apartat val 20 punts i es qualifica sobre 100.

Resol els 2 exercicis en fulls separats.

---

**Exercici 1 [Errors]**

Sigui $D$ el número que apareix en teu document d'identitat, completat amb nous (9) per la dreta fins a 9 dígits.

Exemples: Per al número 12345678, $D = 123456789$ i, per al número 123456, $D = 123456999$.

(a) Escriu $D$ en base 2, troba el valor $\bar{D}$ de la seva representació IEEE amb precisió simple i l'error $E = D - \bar{D}$.

(b) Calcula la longitud $L = \pi D$ de la circumferència de diàmetre $D$.
Si s'usa $\pi \approx \bar{\pi} = 3.14159$ i la representació IEEE simple $\bar{D}$ de $D$, troba fites dels errors absolut i relatiu en $L$ atenent només a l'error en $\pi$ i a l'error $E$ en $D$ de la representació $\bar{D}$, trobat en l'apartat a).

(c) Es vol calcular la diferència $d$ entre les arrels quadrades de $D$ i de la seva representació $\bar{D}$.
Fes servir la calculadora per avaluar l'expressió $d=\sqrt{D} - \sqrt{\bar{D}} = \sqrt{\bar{D} + E} - \sqrt{\bar{D}}$ directament.
Troba una fórmula millor per avaluar $d$ i usa-la per trobar una aproximació més acurada de $d$. Justifica breument perquè és millor.

---

---

**Exercici 2 [Sistemes lineals i interpolació]**

El polinomi interpolador $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ de grau més petit o igual que 2 a la funció $f(x)$ en les nodes $x_k$ $(k = 0, 1, 2)$ es pot trobar resolent el sistema d'equacions lineal en els coeficients $a_0, a_1, a_2$:

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & + & x_0 a_1 & + & x_0^2 a_2 & = & f(x_0) \\ a_0 & + & x_1 a_1 & + & x_1^2 a_2 & = & f(x_1) \\ a_0 & + & x_2 a_1 & + & x_2^2 a_2 & = & f(x_2) \end{array}$$

o bé, mitjançant el mètode de les diferències dividides.

Considera la primera xifra $N$ del teu document d'identitat i la funció $f(x) = x^4 + Nx$ corresponent en les nodes $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = -1$: $f(x_0) = 0, f(x_1) = 1 + N, f(x_2) = 1 - N$.

(a) Escriu el sistema d'equacions lineals associat en els coeficients, troba'n la solució pel mètode de Gauss i escriu el polinomi interpolador.

(b) Indica les iteracions a realitzar pel mètode de Jacobi aplicat al sistema anterior i analitza la seva convergència.

(c) Troba el polinomi interpolador pel mètode de les diferències dividides i comprova que és idèntic a l'anterior.

---

**Idees per a la solució**. **[Errors]**

Es pren, com a exemple, el número 12345678, $D = 123456789$.

(a) En base 2:

$$D = 111010110111100110100010101_{2)} = 1.11010110111100110100010101 \cdot 2^{26} = \sigma(1+f)2^{q-1} \ .$$

Signe $\sigma$: 0

Mantissa exacta: $f = 0.11010110111100110100010101_{2)}$.

Mantissa amb 23 bits arrodonits: $\mathrm{fl}_{23}(f) = 0.11010110111100110100011_{2)}$.

Exponent: $e = q - 1 + 127 = 153 = 10011001_{2)}$

Nombre màquina de representació de $D$: $\bar{D} = 111010110111100110100011000_{2)} = 123456792$.

Error absolut exacte: $E = D - \bar{D} = -3$.

(b) La longitud és $L = \pi D = 387850941.35818$.

La longitud aproximada seria $\bar{L} = \bar{\pi}\bar{D} = 387850623.17928$.

L'error comès seria: $L - \bar{L} = 318.1789$.

Una fita aproximada de l'error absolut comès ve donada per la fórmula de propagació de l'error en dues variables:

$$\epsilon_a(L) \approx D\epsilon_a(\pi) + \pi\epsilon_a(D) = 123456789 \cdot 0.0000026536 + \pi \cdot 3 = 337.029713 \ .$$

Una fita aproximada de l'error relatiu es pot trobar a partir de l'expressió anterior o directament a partir de la fita de l'error relatiu del producte:

$$\epsilon_r(L) \approx \epsilon_r(\pi) + \epsilon_r(D) = \frac{0.0000026536}{3.14159} + \frac{3}{123456789} = 8.689671142 \cdot 10^{-7} \ .$$

Comprovació:

$$\epsilon_a(L) \approx L\epsilon_r(L) = 337.029713 \ .$$

(c) Directament:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{D} - \sqrt{\bar{D}} = \sqrt{\bar{D} + E} - \sqrt{\bar{D}} = \sqrt{123456789} - \sqrt{123456792} \\ &= 11111.11106055555 - 11111.11119555555 = -1.3500000 \cdot 10^{-4} \ . \end{aligned}$$

Amb una millor fórmula que evita les cancel·lacions:

$$d = \frac{E}{\sqrt{D} + \sqrt{\bar{D}}} = \frac{-3}{\sqrt{123456789} + \sqrt{123456792}} = -1.3500000002250000 \cdot 10^{-4} \ ,$$

es poden conèixer més xifres de $d$.

**Idees per a la solució**. **[Sistemes lineals i interpolació]**

(a) El sistema lineal resultant s'expressa en la matriu ampliada següent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1+N \\ 1 & -1 & 1 & 1-N \end{array}\right)$$

Aplicant el mètode de Gauss, es troben els sistemes lineals equivalents:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1+N \\ 0 & -1 & 1 & 1-N \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1+N \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

La solució del sistema lineal triangular superior resultant es troba per substitució endarrera:

$$a_2 = 1 \ , \quad a_1 = N \ , \quad a_0 = 0 \ .$$

El polinomi interpolador és doncs:

$$p_2(x) = x^2 + Nx \ .$$

Per a $N = 0$: $p_2(x) = x^2$. Per a $N = 1$: $p_2(x) = x^2 + x$. Per a $N = 2$: $p_2(x) = x^2 + 2x$ ...

(b) Les iteracions del mètode iteratiu s'escriuen matricialment així:

$$\left(\begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{array}\right)^{(k+1)} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1+N \\ 1-N \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{array}\right)^{(k)} .$$

El polinomi característic de la matriu d'iteració és $p_3(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda$. Els seus valors propis són $0, \pm i$. El mètode iteratiu de Jacobi no seria convergent perquè els valors propis no tenen modul més petit petit que 1, estrictament.

(c) La taula de diferències dividides associada a la interpolació de $f(x) = x^4 + Nx$ en $0, 1, -1$ és:

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $f[x_k, x_{k+1}]$ | $f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | | |
| | | $1+N$ | |
| $1$ | $1+N$ | | $1$ |
| | | $N$ | |
| $-1$ | $1-N$ | | |

El polinomi interpolador és llavors:

$$p_2(x) = (1+N)x + x(x-1) = x^2 + Nx \ ,$$

coincident amb el trobat en l'apartat (a).