TEMA 3: APROX. i INTERPOLACIÓ

15.T3 Donada la taula de valors següents:

x_k	3'2	2'7	1
$f(x_k)$	22'0 (f_0)	17'8 (f_1)	14'2 (f_2)

a) Trobeu el polinomi interpolador per aquests valors usant el mètode de les diferències dividides i fent els càlculs amb 3 decimals. * Stef *

$P_2(x) = a_0 + a_1 \cdot + a_2 x^2$

$P_2(x_0) = f_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2$

$P_2(x_1) = f_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2$

$P_2(x_2) = f_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & x_0 & x_0^2 & f_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & f_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & f_2 \end{array}\right)$$

x_k	$f(x_k) = f_k$	$f[x_k, x_{k+1}]$
$x_0 = 3'2$	$f_0 = 22'0$	$f[x_0, x_1] = f_{01} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{17'8 - 22'0}{2'7 - 3'2} = \frac{-4'2}{-0'5} = 8'4$
$x_1 = 2'7$	$f_1 = 17'8$	$f[x_1, x_2] = f_{12} = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{14'2 - 17'8}{1'0 - 2'7} = 2'118$
$x_2 = 1$	$f_2 = 14'2$	

$f[x_0, x_1, x_2] = f_{012} = \frac{f_{12} - f_{01}}{x_2 - x_0} = 2'855$

$P_2(x) = f_0 + f_{01}(x - x_0) + f_{012}(x - x_0)(x - x_1) =$

$= 22'0 + 8'4(x - 3'2) + 2'855(x - 3'2)(x - 2'7)$

alternativament:

$P_2(x) = 14'2 + 2'118(x-1'0) + 2'855(x-1'0)(x-2'7)$

b) Trobeu el polinomi interpolador si a la taula anterior afegim la dada $f(4'8) = 38'3$

	x_k	$f[x_k]=f_k$	$f[x_k, x_{k+1}]$
-1	4'8	38'3	
0	3'2	22'0	
1	2'7	17'8	
2	1'0	14'2	

$f[x_{-1}, x_0] = f_{-10} = \frac{f_0 - f_{-1}}{x_0 - x_{-1}} = \frac{22'0 - 38'3}{3'2 - 4'8} = 10'19$

$f_{01} = 8'4$

$f_{12} = 2'118$

$f[x_0, x_1, x_2] = f_{012} = 2'855$

$f[x_{-1}, x_0, x_1] = f_{-101} = \frac{f_{01} - f_{-10}}{x_1 - x_{-1}} = \frac{8'4 - 10'19}{2'7 - 4'8} = 0'851$

$f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2] = f_{-1012} = \frac{f_{012} - f_{-101}}{x_2 - x_{-1}} = \frac{2'855 - 0'851}{1'0 - 4'8} = -0'527$

$P_3(x) = P_2(x) - 0'527(x-1'0)(x-2'7)(x-3'2)$

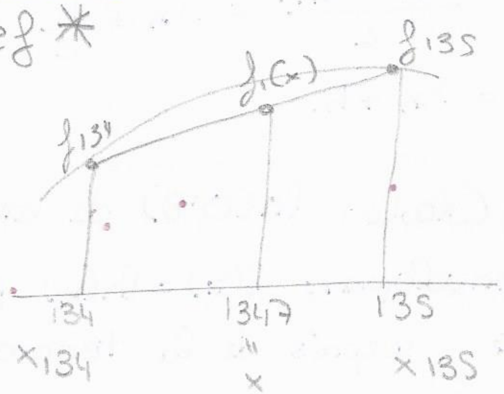
(17.T3) Volem construir una taula de valors de la funció $f(x) = e^{-x} - x$ en punts equidistants dins l'interval $[0,1]$, $x_k = \frac{k}{m}$ per a $k = 0, 1, \ldots, m$. Pretenem usar aquesta taula per aproximar la funció f mitjançant interpolació lineal: donat $z \in [0,1]$, aproximarem $f(z)$ per $P_1(z)$, on P_1 és el polinomi interpolador (de grau $n=1$) de f en les dues abscisses de la taula més properes a z.

Trobeu el mínim valor de m que ens asseguri que l'error d'interpolació sigui menor que 10^{-8} per a qualsevol $z \in [0,1]$. (La distància entre dues abscisses consecutives de la taula és $1/m$). * Stef *

P. ICC (8)

x	$f(x)$
x_0	f_0
$x_1 = x_0 + h$	f_1
$x_2 = x_0 + 2h$	f_2
	$\vdots$
	f_{k+1}

$x_0 = 0 \quad h = 0'01$



$f(1347) =$

$x_{134} = 134 \quad f_{134} \qquad \dfrac{f_{135} - f_{134}}{0'01}$

$x_{135} = 135 \quad f_{135}$

$f(x) \simeq f_1(x) = f_{134} + \dfrac{f_{135} + f_{134}}{0'01}(x - 134) = 0'007 \qquad f(x) = e^{-x} - x$

h^3 $\quad |f(x) - f_1(x)| \leq 10^{-2}$

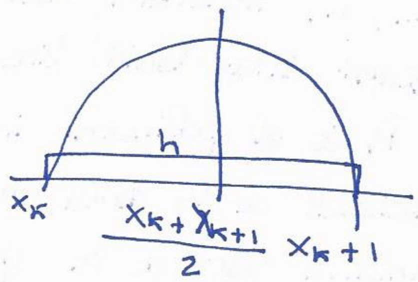
$x \in [0,1] \quad f(x) = e^{-x} - x \qquad f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b]) \qquad a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)|$$

M_{n+1} f del valor absolut de $f^{(n+1)}$

$\leq \sum_1 \frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{2}$

$$\begin{array}{c|c} x_k & f_k \\ x_k + h = x_{k+1} & f_{k+1} \end{array} \qquad P_2(x) = f_k + \frac{f_{k+1} - f_k}{h}(x - x_k)$$



$$\begin{array}{l} x_0 \equiv x_k \\ x_1 \equiv x_{k+1} \end{array} \quad \left| (x - x_k)(x - x_{k+1}) \right|$$

$x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$x_k \quad \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = x_k + \frac{h}{2}$$

$$x_{k+1} = x_k + h.$$

16.T3 Calculeu $\ln(0'6)$ de les maneres següents:

a) Desenvolupant $f(x) = \ln(x)$ per Taylor al voltant de $x_0 = 0'5$ i truncant després de la tercera derivada. $\ln(0'6) = -0'510826$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x - x_0)^n$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

$f(x) = \ln(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f''(x) = -x^{-2}$

$f'''(x) = 2x^{-3}$

$f^{IV}(x) = -6x^{-4}$

$$\text{Taylor } f(x) = \ln(0'5) + (0'5)^{-1}\cdot(x - 0'5) + \frac{-(0'5)^{-2}}{2!}\cdot(x - 0'5)^2 + \frac{2(0'5)^{-3}}{3!}(x - 0'5)^3 \pm \left| \frac{-6(0'5)^{-4}}{4!} \right| (x - 0'5)^4 =$$

$$\boxed{x = 0'6}$$

$$= \ln(0'5) + \frac{1}{5} - \frac{1}{50} + \frac{1}{375} \pm \frac{1}{2500} =$$

$$= -0'5104805 \pm 4.10^{-4}$$

[$\xi \in [0'5, 0'6]$
per tenir una fita sustitueixo per $0'5$.]

16.T3 Calculeu $\ln(0'6)$ de les maneres següents: PICC 9

b) Utilitzant el polinomi interpolador construït a partir de la taula següent:

x	$f(x)$
0'4	-0'916291
0'5	-0'693147
0'6	
0'7	-0'356675
0'8	-0'223144

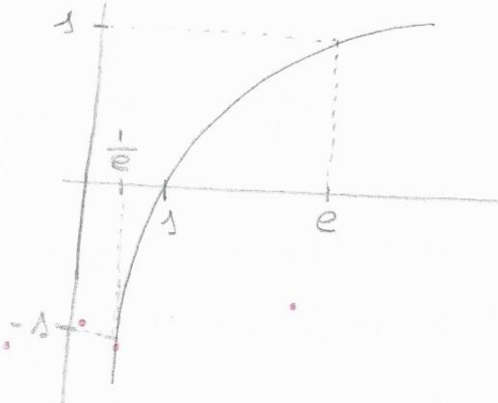
$$f(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n)$$

$e^{\ln x} = x$

$e^0 = 1 \longrightarrow \ln 1 = 0$

$e^1 = e \qquad e^{-1} = \frac{1}{e}$

$f^{IV}(x) = -6x^{-4}$



$\ln(0'5) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$

$f'(x) = \frac{1}{x_0} \qquad f''(x) = \frac{1}{x_0^2} \qquad f'''(x) = \frac{2}{x_0^3}$

$f(x) = x^{-1} \qquad f''(x) = -x^{-2} \qquad f'''(x) = 2x^{-3}$

$$f(x) = -0'916291 + 2'23144(x-0'4) - 1'832067(x-0'4)(x-0'5) + 1'685384(x-0'4)(x-0'5)(x-0'7) \pm 4.1(x-0'4)(x-0'5)(x-0'7)(x-0'8)$$

$\boxed{x = 0'6}$ — 0'2, 0'1, 0'1, 0'2 valors absoluts.

$= -0'5100755 \pm 4.4.10^{-4}$

l'error del polinomi d'interpolació és 4 vegads més gran

19.T3 Utilitzant el mètode d'Hermite generalitzat, trobeu un polinomi de grau 4 que interpoli la taula: Trobeu ara un polinomi de grau 5 que interpoli els valors anteriors i $f(3) = 2$

$P_2(x) = 2 - 6x + 27x(x-1)$ tinc 5 dades P (grau 4)

x	$f(x)$					
0 (x_0)	2 $f(x_0)$					
0 (x_0+h)	2 $f(x_0+h)$	$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -9$				
1 x_1	-4 $f(x_1)$	$f_{10} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = -6$	3			
1 (x_1+h)	-4 $f(x_1+h)$	$f'(x_1) = \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} = 4$	10	7		
2 x_2	44 $f(x_2)$	$f_{21} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 48$	44	17	5	
3 x_3	2 $f(x_3)$	$f_{32} = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = -42$	-90	-67	-28	-11

$$P_4(x) = 2 - 9(x-0) + 3(x-0)^2 + 7(x-0)^2.(x-1) + 5(x-0)^2(x-1)^2$$

$$P_5(x) = P_4(x) - 11.(x-0)^2(x-1)^2(x-2)$$

20.T3 Construïu l'spline cúbic natural per a la funció $f(x) = x.\ln x$ en els nodes $x_0=1$, $x_1=2$ i $x_3=2'5$. Useu-lo per aproximar $f(1'35)$ i $f(2'15)$ i compareu el resultat amb el valor exacte.

$f(x) = x\ln x$

$S_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \overset{(x_0)}{\Rightarrow} S_1(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \;①\; = f_0$

$\overset{(x_1)}{\Rightarrow} S_1(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 \;②\; = f_1$

$S_2(x) = a_4 + a_5x + a_6x^2 + a_7x^3 \overset{(x_1)}{\Rightarrow} S_2(2) = a_4 + 2a_5 + 4a_6 + 8a_7 \;③\; = f_1$

$\overset{(x_2)}{\Rightarrow} S_2(2'5) = a_4 + 2'5a_5 + 6'25a_6 + 15'625a_7 = f_2 \;④$

$S_1'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \;//\; S_2'(x) = a_5 + 2a_6x + 3a_7x$

$S_1'(x_1) - S_2'(x_1) = S_1'(2) - S_2'(2) = a_1 + 4a_2 + 12a_3 - a_5 - 4a_6 - 12a_7 = 0 \;⑤$

$S_1''(x_1) - S_2''(x_1) = S_1''(2) - S_2''(2) = 2a_2 + 12a_3 - a_6 - 12a_7 = 0 \;⑥$

$S_1''(x_0) = 2a_2 + 6a_3 = 0 \;⑦$

$S_2''(x_2) = 2a_6 + 6a_7 = 0 \;⑧$

Colocar les equacions ①-⑧ en forma matriu i calcular *

EXAMEN 7/11/2014

Exercici 1 a) Considera el nombre n format amb les dues darreres xifres del DNI. Treballant amb el format IEEE simple per a la representació de nombres en punt flotant, digues quin nombre representable exactament segueix al nombre $x = 2^n$.

$x = 2^n = 0'\underbrace{1\ldots\ldots}_{m}{}_{2)} \cdot 2^e$ $\qquad (x = 2^8 = 256)^{fe\epsilon} = \frac{1}{2} \cdot 2^9$

$\frac{1}{2} \leq m < 1$ $\qquad$ | s | $(e+126)_{2)}$ | $m_{2)}$ |

$x = 2^n = 0'\underbrace{1\ldots\ldots0}_{23}{}_{2)} \cdot 2^{n+1}$ $\qquad x_{seg} = 0'\underbrace{10\ldots01}_{23}{}_{2)}\, 2^{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{24}}\right) \cdot 2^{n+1} = 2^n + 2^{n-23}$

$x = 2^{75}$ $\qquad x = 1 = \frac{1}{2} \cdot 2^1$ $\qquad x_s = 0'\underline{10\ldots1} \cdot 2$

$x_s = 2^{75} + 2^{52}$ $\qquad x = 0'\underline{10\ldots0} \cdot 2$ $\qquad x_s = \frac{1}{2}(2^1 + 2^{-24}) = 1 + 2^{-23}$

b) Considera el nombre a format amb les 3 darreres xifres del teu DNI. L'equació de segon grau $x^2 - 2ax + 1 = 0$ té dues solucions que es poden escriure:

$x_1 = a + \sqrt{a^2 - 1}$ ó $x_1 = \dfrac{1}{a - \sqrt{a^2-1}}$; $x_2 = a - \sqrt{a^2-1}$ ó $x_2 = \dfrac{1}{a + \sqrt{a^2-1}}$.

Calcula x_1 i x_2 amb dues fórmules i digues quina expressió és millor per calcular x_1 i quina és millor per calcular x_2, justifica resposta.

$f_1(r) = a + r \qquad \mathcal{E}_a(f_1(r_1)) = \mathcal{E}_a(r)$

$\tilde{f}_1(r) = \dfrac{1}{a+r} \qquad \mathcal{E}_a(\tilde{f}_1(r_1)) = -\dfrac{1}{(a-r)^2} \cdot \mathcal{E}_a(r)$

$f_2(r) = a - r \qquad \mathcal{E}_a(f_2(r)) = \mathcal{E}_a(r)$

$\tilde{f}_2(r) = \dfrac{1}{a+r} \qquad \mathcal{E}_a(\tilde{f}_2(r)) = \dfrac{1}{(a+r)^2}\, \mathcal{E}_a(r)$

c) Considera el nombre $\bar{R}$ format per les quatre darreres xifres del teu DNI: Troba una aproximació de l'àrea $A = \pi R^2$ d'una circumferència de radi R, si usem $\pi = 3'1416 \pm 0'00001$ i $R = \bar{R} \pm 0'5$ i una fita de l'error relatiu només atenent a les fites indicades dels errors absoluts de π i de R. Escriu el resultat amb les xifres que creus que són correctes.

$A = \pi R^2$ $\quad \pi = \underbrace{3'1416}_{\bar{\pi}} \pm 0'00001 \quad \varepsilon_a(\pi)$

$R = \underbrace{xxxx}_{\bar{R}} \pm 0'5 \quad \varepsilon_a(R)$

$$\varepsilon_a(A) \simeq \bar{R}^2 \cdot \varepsilon_a(\pi) + 2\pi R \cdot \varepsilon_a(R)$$

$$\varepsilon_r(A) \simeq \varepsilon_r(\pi) + 2\varepsilon_r(R)$$

$$\varepsilon_r(A) = \frac{\varepsilon_a(A)}{\bar{A}} = \frac{\varepsilon_a(\pi)}{\bar{\pi}} + 2\frac{\varepsilon_a(R)}{\bar{R}} = \frac{10^{-5}}{3'1416} + 2 \cdot \frac{0'5}{xxxx}$$

Exercici 2 El polinomi interpolador $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ de grau més petit o igual que 2 a la funció $f(x)$ en les abscisses x_k $(k=0,1,2)$ es pot trobar resolent el sistema d'equacions lineal en els coeficients a_0, a_1, a_2:

$$a_0 + x_0 a_1 + x_0^2 a_2 = f(x_0)$$
$$a_0 + x_1 a_1 + x_1^2 a_2 = f(x_1)$$
$$a_0 + x_2 a_1 + x_2^2 a_2 = f(x_2)$$

o bé, mitjançant el mètode de les diferències dividides

Considera la darrera xifra N del teu DNI i la funció $f(x) = x^{N+3}$ corresponent a les abscisses $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$.

$P_2(0) = f(0) \Rightarrow a_0 = 0$

$P_2(1) = f(1) \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 1$

$P_2(2) = f(2) \Rightarrow a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 2^{N+3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2^{N+3} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2^{N+3} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2^{N+3} - 2 \end{array}\right)$$

$\rightarrow a_0 = 0$

$\rightarrow a_1 = 1 - a_2 = -(2^{N+2} - 2)$

$\rightarrow a_2 = 2^{N+2} - 1$

$$P_2(x) = 0 - (2^{N+2} - 2)x + (2^{N+2} - 1)x^2$$

$N=5 \quad P_2(x) = 127x^2 - 126x \qquad N=9 \quad P_2(x) = 4095x^2 - 4094x$

2.b) Escriu les iteracions a realitzar pel mètode de Jacobi aplicat al sistema anterior i analitza la seva convergència.

$$a_0^{(k+1)} = 0$$

$$a_1^{(k+1)} = 1 - a_0 - a_2$$

$$a_2^{(k+1)} = \frac{2^{N+3} - a_0 - 2a_1}{4} = 2^{N+1} - \frac{1}{4}a_0 - \frac{1}{2}a_1$$

$$M_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1/4 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (\|M_J\|_\infty < 1) = 2 \\ (\|M_J\|_1 < 1) = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1/4 & -1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda = (-\lambda)(\lambda^2 - \frac{1}{2})$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0, \pm\sqrt{1/2}$

$|\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3| < 1$ convergeix

2.c) Troba el polinomi interpolador pel mètode de les diferències dividides de Newton i comprova si és idèntic a l'anterior.

x	g
0	0
1	1
2	2^{N+3}

$$[0,1] = 1 \qquad [1,2] = 2^{N+3} - 1 \qquad [0,1,2] = \frac{2^{N+3} - 2}{2} = 2^{N+2} - 1$$

$$P_2(x) = 0 + x + (2^{N+2} - 1)x(x-1) = \underbrace{(2^{N+2} - 1)}_{a_2}x^2 - \underbrace{(2^{N+2} - 2)}_{a_1}x$$