GRAU D'ENGINYERIA INFORMÀTICA

Introducció a la Computació Científica

Semestre Tardor 2017 - Prova parcial del 2 de novembre

CADA APARTAT VAL 30 PUNTS I ES QUALIFICA SOBRE 100. RESOL ELS 2 EXERCICIS EN FULLS SEPARATS.

Exercici 1 [Errors]

Escriu el teu NIUB completat a 9 xifres afegint-li un 9 al final: $N =$ ________________.

(a) Escriu N en base 2 i troba els nombres de màquina N_m, N_M de la seva representació IEEE amb precisió simple entre els que es troba. Digues per quin dels dos nombres es representa usant arrodoniment. Indica els intervals de nombres enters que són representats pel nombres màquina N_m i N_M, respectivament.

(b) Es vol fer el càlcul de la diferència D entre els inversos dels nombres màquina N_m, N_M:

$$D = \frac{1}{N_m} - \frac{1}{N_M} \ .$$

Troba amb la calculadora els inversos de N_m, N_M donant el resultat amb 10 xifres significatives. Calcula D directament i amb una fórmula que propagui menys els errors. Si l'error relatiu en el càlcul dels inversos és menor que $\frac{1}{2}10^{-9}$, troba fites de l'error relatiu en D per a les dues formes de calcular-lo: fent la resta directament i fent servir la fórmula millorada. Escriu, en cada cas, D amb els dígits correctes atenent a les fites d'error.

Exercici 2 [Sistemes lineals]

El polinomi interpolador $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ de grau més petit o igual que 2 a la funció $f(x)$ en els nodes x_k $(k = 0, 1, 2)$ es pot trobar resolent el sistema d'equacions lineals $p_2(x_k) = f(x_k)$ $(k = 0, 1, 2)$ que compleixen els coeficients a_0, a_1, a_2:

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & + & x_0 a_1 & + & x_0^2 a_2 & = & f(x_0) \\ a_0 & + & x_1 a_1 & + & x_1^2 a_2 & = & f(x_1) \\ a_0 & + & x_2 a_1 & + & x_2^2 a_2 & = & f(x_2) \end{array}$$

Considera el darrer dígit d del teu NIUB i la funció $f(x) = \frac{d}{x}$ corresponent.

Es vol trobar de les dues maneres el polinomi interpolador a $f(x)$ en les nodes $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4$, on $f(x_0) = d, f(x_1) = \frac{d}{2}, f(x_2) = \frac{d}{4}$.

El sistema d'equacions lineals que compleixen els coeficients a_0, a_1, a_2, a_3 de $p_2(x)$ és:

$$Aa = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ \frac{1}{2}d \\ \frac{1}{4}d \end{pmatrix} = b \ .$$

(a) Troba la solució dels sistema d'equacions $Aa = b$ pel mètode de Gauss i escriu el polinomi interpolador $p_2(x)$.

(b) Calcula la matriu inversa A^{-1} de la matriu A pel mètode de Gauss-Jordan i comprova que la solució trobada del sistema anterior és $a = A^{-1}b$.

Idees per a la solució. **[Errors]**

Es pren, com a exemple, el NIUB 12345678, $N = 123456789$.

(a) En base 2:

$$N = 111010110111100110100010101_{2)} = 1.11010110111100110100010101 \cdot 2^{26} = \sigma(1+f)2^{q-1} \ .$$

Els nombres màquina només tenen 24 xifres significatives i el nombre N a representar se situa entre 2 valors N_m i N_M; el nombre màquina anterior es troba tallant a la xifra 24 i el nombre màquina següent sumant 1 a la xifra 24 del nombre anterior.

Nombre màquina anterior (5 unitats més petit): $N_m = 111010110111100110100010000_{2)} = 123456784$.

Nombre màquina posterior (3 unitats més gran): $N_M = 11010110111100110100011000_{2)} = 123456792$.

Diferència: $N_M - N_m = 8$.

Els nombres enters representats per $N_m = 123456785$ són els de l'interval $[123456780, 123456787]$.

Els nombres enters representats per $N_M = 123456792$ són els de l'interval $[123456788, 123456795]$.

(b) Directament:

$$D = \frac{1}{N_m} - \frac{1}{N_M} = \frac{1}{123456784} - \frac{1}{123456792} = 8.100000402 \cdot 10^{-9} - 8.099999877 \cdot 10^{-9} = 5.25 \cdot 10^{-16} \ .$$

Amb una millor fórmula que evita les cancel·lacions:

$$D = \frac{N_M - N_m}{N_m N_M} = 8 \frac{1}{123456784} \frac{1}{123456792} = 8 \cdot 8.100000402 \cdot 10^{-9} \cdot 8.099999877 \cdot 10^{-9} = 5.24880018 \cdot 10^{-16} \ ,$$

es poden conèixer més xifres de D.

Considerem la fita $\epsilon = \frac{1}{2} 10^{-9}$ de l'error relatiu en els inversos.

L'error absolut en la primera fórmula és fitat per la suma dels errors absoluts:

$$\frac{1}{N_m}\epsilon + \frac{1}{N_M}\epsilon \approx 0.8 \cdot 10^{-17} \ .$$

La fita de l'error relatiu seria així:

$$\frac{\frac{1}{N_m}\epsilon + \frac{1}{N_M}\epsilon}{D} \approx 0.016 \ ,$$

la qual cosa només garanteix 2 xifres significatives correctes en el resultat:

$$D = 5.2 \cdot 10^{-16} \ .$$

Amb la fórmula millorada, com que D es troba com el producte dels inversos per una constant, l'error relatiu en la segona fórmula és fitat aproximadament per la suma dels errors relatius en els inversos, això és per $2\epsilon = 10^{-9}$ que garanteix almenys 8 xifres significatives en el resultat i ens permet escriure amb molta més precisió:

$$D = 5.2488002 \cdot 10^{-16} \ .$$

Idees per a la solució. **[Sistemes lineals]**

(a) El sistema lineal resultant s'expressa en la matriu ampliada següent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & d \\ 1 & 2 & 4 & \frac{1}{2}d \\ 1 & 4 & 16 & \frac{1}{4}d \end{array}\right) .$$

Aplicant el mètode de Gauss, es troben els sistemes lineals equivalents:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & d \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{2}d \\ 0 & 3 & 15 & -\frac{3}{4}d \end{array}\right) . \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & d \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{2}d \\ 0 & 0 & 6 & \frac{3}{4}d \end{array}\right) ,$$

La solució del sistema lineal triangular superior resultant es troba per substitució enrera:

$$a_2 = \frac{1}{8}d \, , \quad a_1 = -\frac{7}{8}d \, , \quad a_0 = \frac{7}{4}d \, .$$

El polinomi interpolador és llavors:

$$p_2(x) = \frac{1}{8}dx^2 - \frac{7}{8}dx + \frac{7}{4}d \, .$$

(b) Es parteix del sistema matricial $AX = I$, en què la solució buscada X correspon a la inversa A^{-1} i es va transformant fins a obtenir un sistema $(I|X)$ que conté en la part estesa $X = A^{-1}$.

S'escriuen els sistemes lineals corresponents en la matriu estesa

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Aplicant el mètode de Gauss, es troben els sistemes lineals equivalents:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 15 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) , \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) ,$$

Es divideix cada filera per la diagonal.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array}\right) ,$$

Aplicant el mètode d'eliminació gaussiana en els elements superiors a la diagonal es té:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array}\right) , \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{8}{3} & -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array}\right) .$$

El sistema equivalent final és de la forma $(I|X)$, la solució del qual és la matriu inversa buscada:

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -2 & \frac{1}{3} \\ -2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} .$$

Es pot comprovar ara que la solució del sistema lineal trobada a l'apartat a) és:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -2 & \frac{1}{3} \\ -2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ \frac{1}{2}d \\ \frac{1}{4}d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4}d \\ -\frac{7}{8}d \\ \frac{1}{8}d \end{pmatrix} .$$