NOM : **PRÉNOM :** **GROUPE :**

Espaces Euclidiens

45 minutes - Contrôle continu numéro 2 - 23 Avril 2025

__Important__ : **Documents et calculatrices interdits. Dictionnaires et traducteurs interdits. La qualité de la rédaction ainsi que vos commentaires influenceront grandement la note finale. Faire les questions dans l'ordre. La plupart des questions sont indépendantes. Le barème sur 30 points est provisoire mais vous donne une idée du poids de chaque question dans la note finale.**
Répondre uniquement dans les cases prévues à cet effet.

__Cours__ : **6 points**

Soit f une forme bilinéaire symétrique. Soit u un endomorphisme de E. Soit u^* l'endomorphisme adjoint de u relativement à f, une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Montrer que u^* est unique.

Supposons que l'endomorphisme u admet deux adjoints u_1 et u_2.
Alors on a $f(u(x), y) = f(x, u_1(y)) = f(x, u_2(y)) \qquad \forall (x,y) \in E^2$
Alors $f(x, u_1(x) - u_2(x)) = 0 \quad \forall (x,y) \in F^2$ donc $u_1(x) - u_2(x) \in \ker(f) \quad \forall y \in E$
Or f est non dégénérée donc $\ker(f) = \{0_E\}$
D'où $u_1(y) - u_2(y) = 0 \quad \forall y \in E$ d'où $u_1 = u_2$ et donc
l'adjoint de u est unique.

__Exercice 1__ : **17 points**

Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit q la forme quadratique définie sur E par :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \ \ q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 16x_3^2 - 8x_1x_3$$

1. Déterminer rapidement la forme polaire f de q. Attention, bien vérifier ! 1 point

Par définition :
$f(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right]$ donc
$f(x,y) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 16x_3y_3 - 4x_1y_3 - 4x_3y_1 \quad \forall (x,y) \in E^2$

2. Donner la matrice de q dans la base canonique de E, et le rang de q. 1+1 points

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de E. $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} f((1,0,0),(1,0,0)) & f((0,1,0),(1,0,0)) & \dots \\ \dots & f((0,1,0),(0,1,0)) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$\det(M_{\mathcal{B}}(f) = 0$ donc f est dégénérée et $\text{rang}(q) \leq 2$ (On voit aussi que $C_3 = -4C_1$)
les colonnes 1 et 2 sont linéairement indépendantes
donc $\text{rang}(f) \geq 2$. Conclusion : $\text{rang}(q) = 2$ et $\dim(\ker(q)) = 3 - 2 = 1$

3. Donner la définition du noyau d'une forme quadratique. Déterminer le noyau de q. 1+3 points

$\ker(q) = \{x \in E, f(x,y) = 0, \forall y \in E\}$ est la définition.
Calcul pour cet exercice :

$$\begin{aligned} f(x,y) = 0 \quad \forall y &\Leftrightarrow (x_1 - 4x_3)y_1 + 4x_2y_2 + (6x_3 - 4x_1)y_3 = 0 \quad \forall y_i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 4x_3 & = 0 \\ 4x_2 & = 0 \\ -4x_1 + 16x_3 & = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 4x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (4x_3, 0, x_3) = x_3(4,0,1) \\ \text{Donc} \quad \ker(q) &= \text{vect}\{(4,0,1)\} \end{aligned}$$

4. Écrire q sous la forme d'une somme de carrés de formes linéaires indépendantes en effectuant une décomposition de Gauss. En déduire la signature de q. 3+1 points

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + 4x_2^2 + 16x_3^2 - 8x_1x_3 \\ &= (x_1 - 4x_3)^2 - 16x_3^2 + 16x_3^2 + 4x_2^2 \\ &= (x_1 - 4x_3)^2 + 4x_2^2 = \ell_1^2(x) + 4\ell_2^2(x) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \ell_1(x) = x_1 - 4x_3 \\ \ell_2(x) = x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc on obtient des résultats cohérents avec ce qui précède
$\text{rang}(q) = 2$.
De plus on constate que $q(x) \geq 0 \quad \forall x$ et donc q est positive.
La signature de q est $\sigma(q) = (2,0)$.

5. Déduire de la question précédente une base $\mathcal{E}$, orthogonale pour q . 2 points

Il suffit de trouver 3 vecteurs $\mathcal{E}_j$ tels que $l_i(\mathcal{E}_j) = d_{ij}$. Cependant, il nous manque une 3ème forme linéaire indépendante linéairement des deux autres pour pouvoir faire ce calcul. Choisissons l_3 telle que $l_3(x) = x_3$.

$$E_1 \text{ vérifie : } \begin{cases} x_1 - 4x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{donc } \mathcal{E}_1 = (1,0,0)$$

$$E_2 \text{ vérifie : } \begin{cases} x_1 - 4x_3 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{donc } \mathcal{E}_2 = (0,1,0)$$

$$E_3 \text{ vérifie : } \begin{cases} x_1 - 4x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \qquad \text{donc } \mathcal{E}_3 = (4,0,1)$$

On remarque que $\mathcal{E}_3 \in \ker(f)$. Ainsi, $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ est une base orthogonale pour q.

6. Donner la matrice de q dans la base $\mathcal{E}$ et vérifier par la méthode de votre choix. 1+2 points

Dans la base $\mathcal{E}$ la matrice de q est obtenue en plaçant sur la diagonale les coefficients de la décomposition de Gauss.

$$M_{\{\mathcal{E}\}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Vérifions maintenant ce résultat :
Soit P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{E}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_{\{\mathcal{E}\}}(q) = {}^tP.M_{\{B\}}(q).P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{résultats validé} \end{aligned}$$

7. Donner l'ensemble des vecteurs isotropes de q. 1 point

Puisque q est positive, l'ensemble des vecteurs isotropes correspond au noyau de q. $\mathcal{I}(q) = \ker(q)$.

D'où $\mathcal{I}(q) = \text{vect}\{(4,0,1)\}$

NOM : **PRÉNOM :** **GROUPE :**

Exercice 2 : **7 points**

Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit q_2 la forme quadratique définie sur E par :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \ \ q_2(x) = x_1^2 + 6x_2^2 + 35x_3^2 - 4x_1x_2 + 16x_2x_3$$

1. Montrer que f_2, la forme polaire associée à q_2, est un produit scalaire. 3 points

Utilisons la décomposition de Gauss

$$\begin{aligned} q_2(x) &= x_1^2 + 6x_2^2 + 35x_3^2 - 4x_1x_2 + 16x_2x_3 \\ &= (x_1 - 2x_2)^2 - 4x_2^2 + 6x_2^2 + 35x_3^2 + 16x_2x_3 \\ &= (x_1 - 2x_2)^2 + 2x_2^2 + 35x_3^2 + 16x_2x_3 \\ &= (x_1 - 2x_2)^2 + 2[x_2^2 + 8x_2x_3] + 35x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_2)^2 + 2[(x_2 + 4x_3)^2 - 16x_3^2] + 35x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_2)^2 + 2(x_2 + 4x_3)^2 + 3x_3^2 \end{aligned}$$

On constate que q est non dégénérée, positive, et donc définie positive. Par conséquent ,f_2 la forme polaire associée à q est un produit scalaire.

2. Que peut-on dire de l'espace E muni de f_2 ? Justifier. 2 points

E muni du produit scalaire f_2 est un espace préhilbertien réel. De plus, E étant de dimension finie (3), alors (E, f_2) est un espace euclidien.

3. Donner le noyau de q_2. 1 point

Puisque q est non dégénérée (voir question 1), alors $\ker(q_2) = \{0_E\}$.

4. Donner l'ensemble des vecteurs isotropes de q_2. 1 point

Puisque q_2 est positive (voir question 1), alors l'ensemble des vecteurs isotropes est le noyau de q_2, c'est à dire $\{0_E\}$ dans cet exercice.