Note ~~5.5~~

Université Sorbonne Paris Nord

UFR Sciences économiques et gestion

Année d'Etudes : 2024 - 2025

Date de l'Epreuve : 16 / 12 / 2024

Epreuve de : PROBABILITÉ Finance

Sujet traité :

Nom : Sidibe

Nom de jeune fille suivi du nom du mari

Prénom : Amadou

N° de la Carte d'Etudiant : 12420477

3
1

Question de cours

① Une opportunité d'arbitrage dans un modèle à N dates est une stratégie de θ autofinançante telle que :

$P(V_0(\theta) = 0) = 1$

$P(V_N(\theta) \geq 0) = 1$

$P(V_N(\theta) > 0) > 0$

et $V_N(\theta)$ est la valeur du portefeuille à la date N et P la probabilité

Cela signifie qu'un investisseur peut obtenir un gain positif à la date initiale sans investissement. En effet, l'investisseur ne prend aucun risque de perdre aux dates futures autrement dit, il termine en N avec un capital positif sur l'ensemble des mesures strictement positives.

②

On fait l'hypothèse que ces opportunités n'existent pas sur le marché,

Parce que les arbitragistes sont à l'affût de l'écart entre le prix du marché et le prix d'équilibre ce qui contredit l'hypothèse. De plus, l'hypothèse de l'AOA (l'absence d'opportunité d'arbitrage) est une théorie qui reflète à un marché en concurrence pure et parfait, alors que dans la réalité le marché n'est pas parfait et présente des inefficiences.

non car le caractère éphémère des opportunités d'arbitrage qui permet de prendre cette hypothèse

③ $V_n(\theta) = V_{n-1}(\theta) + \sum_{j=0}^{d} \theta_n^j \Delta S_n^j$

avec $\Delta S_n^j = S_n^j - S_{n-1}^j$

ce résultat signifie que la valeur du portefeuille à la date n correspond à la valeur du portefeuille à la date n-1 à laquelle on ajoute les variations des prix sur la dernière période pondérées par les parts investies dans le portefeuille.

on sait que : $V_{n-1}(\theta) = \sum_{j=0}^{d} \theta_{n-1}^j S_{n-1}^j$

et que $V_N(\theta) = \sum_{j=0}^{d} \theta_m^j S_m^j$

comme !

on ne sait pas c'est ce qu'on cherche à montrer

$$V_N(\theta) = V_{N-1}(\theta) + \sum_{j=0}^{d} \theta_m^j \Delta S_m^j$$

$$= \sum_{j=0}^{d} \theta_{m-1}^j S_{m-1}^j + \sum_{j=0}^{d} \theta_m^d \Delta S_m^j$$

je me suis trompé sur ΔS_m

on remplace ΔS_m par sa valeur

avec $\Delta S_m^j = S_m^j - S_{m-1}^j$

$$\Rightarrow S_{m-1}^j = S_m^j - \Delta S_m^j$$

$$\cancel{V_N(\theta) = V_{N-1}(\theta) + \sum_{j=0}^{d} \theta_m^j (S_m^j - \Delta S_m^j)}$$

$$\cancel{V_N(\theta) = V_{N-1}(\theta) + \underbrace{\sum_{j=0}^{d} \theta_m^j S_m^j}_{} - \sum_{j=0}^{d} \theta^j \Delta S_m^j}$$

je remplace ΔS_m^j par sa valeur dans $V_N(\theta)$ initial

$$V_N(\theta) = V_{N-1}(\theta) + \sum \theta_m^j (S_m^j - S_{m-1}^j)$$

$$= V_{N-1}(\theta) + \underbrace{\sum_{j=0}^{d} \theta_m^j S_m^j}_{V_N(\theta)} - \sum_{j=0}^{d} \theta_m^j S_{m-1}^j$$

$$V_N(\theta) = V_{N-1}(\theta) + V_N(\theta) - \sum_{j=0}^{d} \theta_m^j S_{m-1}^j$$

$$\boxed{\text{or } S_{m-1}^j = S_m^j - \Delta S_m^j}$$

$$\cancel{V_N}(\theta) - \cancel{V_N}(\theta) = V_{N-1}(\theta) - \sum_{j=1}^{d} \theta_m^j \left(S_m^j - \Delta S_m^j\right)$$

$$0 = V_{N-1}(\theta) - \underbrace{\sum_{j=1}^{d} \theta_m^j S_m^j}_{V_N(\theta)} + \sum_{j=1}^{d} \theta_m^j \Delta S_m^j$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V_N(\theta) = V_{N-1}(\theta) + \sum_{j=1}^{d} \theta_m^j \Delta S_m^j}$$

④ Voir fiche.

Intercalaire N° : 01

Sidibe Amadou

2,5 / 3

$\begin{cases} S_0^0 = 1 & \text{à la date } 0 \\ S_0^1 = S\,€ & \text{à la date } 0 \text{ et } S_h \text{ ou } S_b \text{ à } t=1 \end{cases}$

$f(S_1) = \begin{cases} \frac{S_1}{2} & \text{si } S_1 \geq K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$S_b < K < S_h$

① Un portefeuille de couverture a la même valeur que l'option à la date 1, on dit qu'il duplique l'option

Attention aux écritures mathématiques erronées

$\begin{cases} (1+r)\alpha + \beta S_h = \varphi(S_h) \\ (1+r)\alpha + \beta S_b = \varphi(S_b) \end{cases}$

Comme $K < S_h$ ce qui implique

pas de sens

$\varphi(S_1 - K)^+ = \frac{S_h}{2}$ et on dit qu'il est de 0 pour $f(S_b)$ car $S_b < K$

∼

donc :

$\begin{cases} (1+r)\alpha + \beta S_h = \frac{S_h}{2} \\ (1+r)\alpha + \beta S_b = 0 \end{cases}$

② Le prix de l'option à la date 0 :

$C = \alpha^* + \beta^* S$

cherchons α^* et β^*

$$\begin{cases} (1+n)\alpha + \beta S_h = \dfrac{S_h}{2} & ① \\ (1+n)\alpha + \beta S_b = 0 & ② \end{cases}$$

on fixe ① = ②

$$\cancel{(1+n)}\alpha + \beta S_h - \frac{S_h}{2} = \cancel{(1+n)}\alpha + \beta S_b$$

$$\beta(S_h - S_b) = \frac{S_h}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta^* = \frac{S_h}{2(S_h - S_b)}}$$

eq ② : $(1+n)\alpha + \beta S_b = 0$

$$(1+n)\alpha + \frac{S_h}{2(S_h - S_b)} \times S_b = 0$$

$$(1+n)\alpha = -\frac{S_b S_h}{2(S_h - S_b)}$$

$$\alpha^* = \boxed{\frac{-S_b S_h}{2(S_h - S_b)(1+n)}}$$

$$C = \frac{-S_b S_h}{2(1+n)(S_h - S_b)} + \frac{S_h S}{2(S_h - S_b)}$$

$$C = \frac{S_h}{2(S_h - S_b)}\left[S - \frac{S_b}{1+n}\right]$$

Intercalaire Ex 1) suite

Sidie Amadou

3) Avec la probabilité risque neutre notée π

$$\pi = \frac{(1+r)S - S_b}{S_h - S_b}$$

On sait que le prix du call :

$$C^{call} = E_Q\left[\frac{f(S_1)}{1+r}\right]$$

$$C^{call} = \frac{1}{1+r} \times \left[\pi\left(\frac{S_h}{2}\right) + (1-\pi)\underbrace{\left(\frac{S_b}{2}\right)}_{=0}\right]$$

car $S_b < K$ il s'agit du call (l'option d'achat).

$$C^{call} = \frac{1}{1+r} \times \frac{\pi S_h}{2}$$

on remplace π par sa valeur

$$C^{call} = \frac{1}{1+r}\left[\left(\frac{(1+r)S - S_b}{S_h - S_b}\right)\frac{S_h}{2}\right]$$

$$= \frac{S_h}{2(S_h - S_b)}\left[\frac{(1+r)S - S_b}{1+r}\right]$$

on factorise par $\frac{S_h}{2(S_h-S_b)}$

$$\boxed{C^{call} = \frac{S_h}{2(S_h - S_b)}\left[S - \frac{S_b}{1+r}\right]}$$

ie

Intercalaire N° EXO 2

Sidibe
Amadou

$\begin{cases} S^1, S^2 \text{ et } S^3 \\ \text{tous valant } 1 \text{ à } t = 0 \end{cases}$

à la date 1.

① l'actif sans risque parmi les trois actifs présentés est S^2 car le prix de l'actif sans risque vaut $1+r$ à la date 1.

② le taux r vaut :

$$(1+r)S_0^0 = S_1^2 \quad \text{car} \quad S_1^0 = S_1^2 \text{ ici et } S_0^2 = 1$$

$$1+r = 1{,}05$$

$$\Rightarrow r = 1{,}05 - 1 = \boxed{5\,\%}$$

③ Une mesure martingale est une mesure Q équivalente à P telle que le vecteur des prix actualisés sont martingales sous Q. On sait que deux mesures équivalent si $\forall A$,

$$P(A) = 0 \iff Q(A) = 0 .$$

④ On rappelle que pour qu'un marché soit viable il faut qu'on arrive à montrer l'existence d'une probabilité risque neutre équivalente à la probabilité initiale telle que le vecteur des prix actualisés soient martingale

$\begin{cases} S_1^1(w_1) = 1{,}15 \,,\; S_1^3(w_1) = 0{,}9 \\ S_1^1(w_2) = 0{,}9 \,,\; S_1^3(w_2) = 1{,}15 \end{cases}$

soit p une probabilité équivalente à Q

$$P(S_1^1 = S_h^1) = \pi \quad \text{et} \quad P(S_1^1 = S_b^1) = 1-\pi$$

$$P(S_1^1 = 1{,}15) = \pi \quad \text{et} \quad P(S_1^1 = 0{,}9) = 1-\pi$$

et $Q(S_1^1 = 1,15) = p$ et $Q(S_1^1 = 0,9) = 1-p$

tel que : $E_Q\left[\frac{S_1}{1+r}\right] = S_0^2$

$$\Rightarrow \frac{\pi \times S_h^1}{1+r} + \frac{(1-\pi) S_b^1}{1+r} = S_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{\pi S_h^1 + (1-\pi) S_b^1}{1+r} = S_0^2$$

$$\Rightarrow \pi S_h^1 + S_b^1 - \pi S_b^1 = (1+r) S_0^2$$

$$\Rightarrow \pi (S_h^1 - S_b^1) = (1+r) S_0^2 - S_b^1$$

avec : $S_0^2 = 1$; $S_h^1 = 1,15$ et $S_b^1 = 0,9$

$r = 0,05$

$$\pi (1,15 - 0,9) = 1,05 - 0,9$$

$$\Rightarrow 0,25 \pi = 0,15 \Rightarrow \pi = \frac{0,15}{0,25} = 0,6$$

donc $\boxed{\pi = 60\%}$

donc le marché est viable.

(5) marché complet si toute la variable X, F_n-mesurable est duplicable. autrement dit : $V_N(\theta) = X$ où $V_N(\theta)$: représente la valeur du portefeuille à la date N.

$V_1(\theta) = \theta_1^0 S_1^0 + \theta_1^1 S_1^1$

on voit que le marché est complet car on a qu'une seule et unique mesure martingale car une seule probabilité $\boxed{\pi = 0,6}$

Bon pour intercalaire   Exercice 02 suite   Amadou Sidibe

7) Un marché viable et complet

Un marché à deux dates et 2 actifs dont un sans risque.

on note S^1 et S^2

- l'actif sans risque S^1 vaut 1 € à la date 0 et S^2 5 € à la date 0.

à la date 1 : il existe 2 états du monde :

- $S_1^0(w_1) = 1,06$ et $S_1^1(w_1) = 8$ €
- $S_1^0(w_2) = 1,06$ et $S_1^1(w_2) = 6$ €

6) • On va refaire la mesure martingale ~~telle~~ que les prix actualisés soient martingales. on pose $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2)$

soit ~~K~~ probabilité équivalente à R :

tel que : $K(S_1^1 = 1) = \Pi_1$; $K(S_1^1 = 0,9) = \Pi_2$

$K(S_1^1 = 1,15) = 1 - \Pi_1 - \Pi_2$

tel que : $E_Q\left(\frac{S_1^1}{1+\Pi}\right) = S_0^1$

$\Rightarrow \Pi_1 S_{h}^1 + (1-\Pi_2) S_b^1 + (1 - \Pi_1 - \Pi_2) S_e^1$

marché incomplet mais viable

e : une va

on a une infinité de solution de Π (probabilité risque neutre), mais il en existe au moins une qui vérifie donc le marché est Viable. Cependant comme il y a une infinité de solution de Π donc ~~les~~ marché

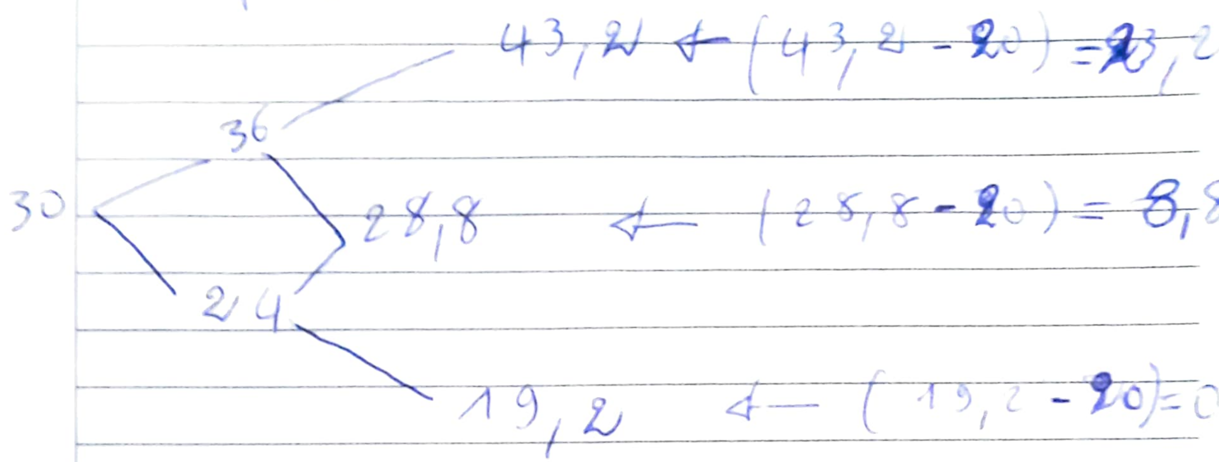
Intercalaire N° Exercice 03 : Exercice 03

Sidibé Amadou

Marché à 3 dates ($n = 0, 1, 2$)

$r = 0{,}05$; $b = 0{,}8$; $h = 1{,}2$ et $S = 30$

① Représentons l'arbre binomial



Partie A

② Probabilité risque neutre :

$$\Pi = \frac{(1+r)S - Sb}{Sh - Sb} = \frac{1+r-b}{h-b}$$

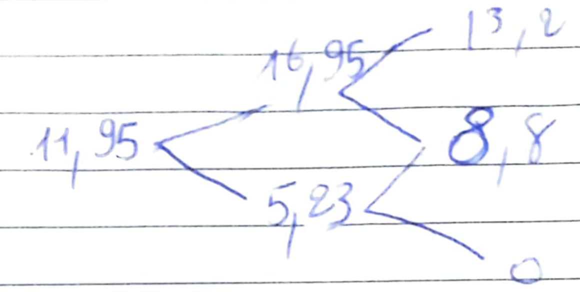
$$\Rightarrow \Pi = \frac{1{,}05 - 0{,}8}{1{,}2 - 0{,}8} = \boxed{0{,}625}$$

③ $K = 20$; $N = 2$

calculons le prix de ce call

Étape 1 : on commence par calculer les payoff associé

Étape 2 : avec probabilité risque neutre on refait l'arbre avec les payoffs.



on actualise
le prix de chaque noeud.

$$\frac{1}{1+r} E_Q\{ \pi \times \text{Noeud}_1 + (1-\pi)\, \text{Noeud}_2]$$

$$= \frac{1}{1+r}\left(\pi \times 23,2 + (1-\pi) \times 8,8 \right)$$

$$= \frac{1}{1+0,05}\left(0,625 \times 23,2) + 0,375 \times 8,8 \right)$$

$$= \frac{1}{1,05}\left[17,8 \right] = 16,95$$

• $\frac{1}{1+r}\left(\pi \times 8,8 + (1-\pi) \times 0 \right) = 5,23$

• $\frac{1}{1,05}\left[16,95 \times 0,625 + 5,23 \times 0,375 \right]$

$$\boxed{C^{call} = 11,95}$$

Partie B

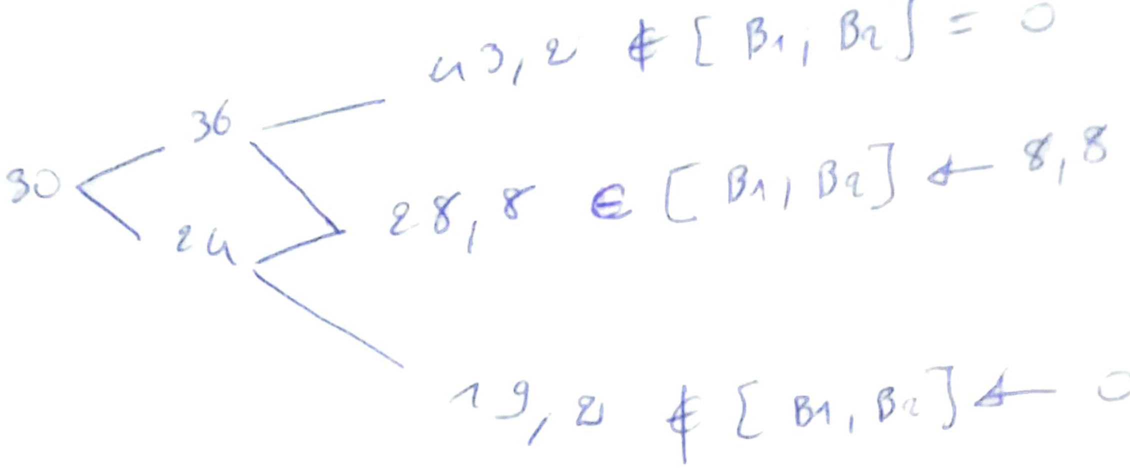
Bon pour intercalaire ! EXO3 Partie B

Sidibe Amadou

$$\begin{cases} (S_2 - K)^+ & \text{si } B_1 < S_n < B_2 \ \forall n \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on voit que $\cancel{K \notin} [B_1, B_2] = K < B_1 < B_2$

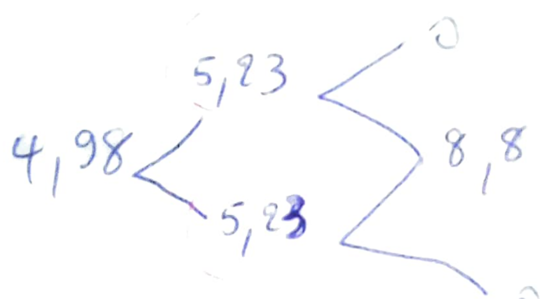
D'après la question ①



donc le prix vaut :

erreur de calcul

il fallait regarder toute la trajectoire



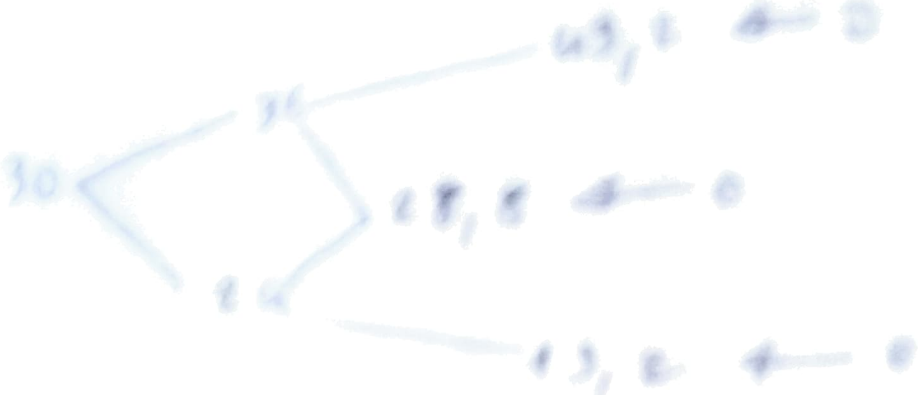
• $C^{call}_{noeud_1} = \frac{1}{1{,}05}(0{,}625 \times 8{,}8 + 0{,}375 \times 0)$

$= 5{,}23$

• $Noeud_2 = \frac{1}{1{,}05} \times 5{,}23$ $\boxed{= 4{,}98}$

5) Si $a_1 = 29$

alors les payoffs deviennent nuls puisque $28,8 \notin [a_1, a_2]$



Dans ce cas on a pas de prime. car $C = 0$.