

## Interrogation de Probabilités

**Exercice 1.** On considère une urne contenant  $n_1$  boules blanches et  $n_2$  boules noires. On tire une boule de cette urne, si elle est blanche, on la remet dans l'urne, si elle est noire, on la remplace par  $a$  boules blanches prises dans une réserve auxiliaire ( $a \in \mathbb{N}$ ). On tire alors une deuxième boule de l'urne. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche?

**Exercice 2.** On prend un dé au hasard parmi un lot de 100 dés dont on sait que 25 sont pipés. Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 est  $\frac{1}{2}$ . On lance le dé choisi et on obtient 6. On notera par  $T$  l'événement "le dé est pipé" et par  $S_i$  l'événement "on obtient 6 au  $i$  premiers lancers".

- 1) Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé?
- 2) On relance alors ce dé et on obtient à nouveau 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé?
- 3) Plus généralement, montrer à l'aide de la formule de Bayes que 
$$P(T \mid S_n) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T \mid S_n)$ . Est-ce étonnant?

**Exercice 3.** On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite. On dispose de tests de dépistage de la maladie:

Si la personne est malade alors le test est positif avec une probabilité de 95%.

Si la personne est saine alors le test est positif avec une probabilité de 10%.

- 1) Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif?
- 2) Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif?
- 3) Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif?
- 4) Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif?