vendredi 1 décembre 2023 09:13

Correction de l'interrogation :

Exercice 1 :

Soit B_i : "la $i^{ème}$ boule tirée est blanche" $i=1,2$

$$B_2 = (B_2 \cap B_1) \cup (B_2 \cap B_1^c).$$

$(B_2 \cap B_1)$ et $(B_2 \cap B_1^c)$ sont disjoints donc

$$P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap B_1^c)$$
$$= P(B_2 \mid B_1) \times P(B_1) + P(B_2 \mid B_1^c) \times P(B_1^c)$$

Or $P(B_1) = \dfrac{n_1}{n_1+n_2}$ et $P(B_1^c) = \dfrac{n_2}{n_1+n_2}$

$P(B_2 \mid B_1) = \dfrac{n_1}{n_1+n_2}$ et $P(B_2 \mid B_1^c) = \dfrac{n_1+a}{n_1+a+n_2-1}$

D'où $P(B_2) = \dfrac{n_1}{n_1+n_2} \times \dfrac{n_1}{n_1+n_2} + \dfrac{n_1+a}{n_1+a+n_2-1} \times \dfrac{n_2}{n_1+n_2}$

$$\iff P(B_2) = \left(\frac{n_1}{n_1+n_2}\right)^2 + \frac{n_2(n_1+a)}{(n_1+a+n_2-1)(n_1+n_2)}.$$

Exercice 2 :

Soient $\begin{cases} T : \text{"le dé est pipé"} \\ S_i : \text{"on obtient 6 aux i premiers lancers"}. \end{cases}$

1) $P(T \mid S_1) = \dfrac{P(T \cap S_1)}{P(S_1)} = \dfrac{P(S_1 \mid T) \times P(T)}{P(S_1)} = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{25}{100}}{P(S_1)}$

Or $S_1 = (S_1 \cap T) \cup (S_1 \cap T^c)$

$\Rightarrow P(S_1) = P(S_1 \cap T) + P(S_1 \cap T^c)$

$$= P(S_1 \mid T) \times P(T) + P(S_1 \mid T^c) \times P(T^c)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{25}{100} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{\cancel{6}_2} \times \frac{\cancel{3}}{4}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{2}{8} \quad \left(= \frac{1}{4} \right).$$

D'où $P(T \mid S_1) = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{2}{8}} = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{8}} = \dfrac{1}{\cancel{8}} \times \dfrac{\cancel{8}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

2) $$P(T \mid S_2) = \frac{P(T \cap S_2)}{P(S_2)}$$

$$= \frac{P(S_2 \mid T) \times P(T)}{P(S_2 \mid T) \times P(T) + P(S_2 \mid T^c) \times P(T^c)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16} + \frac{1}{48}}$$

$$= \frac{\frac{1}{16}}{\frac{4}{48}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{16}} \times \frac{\cancel{48}^{3}}{4}$$

$$= \frac{3}{4}.$$

3) $$P(T \mid S_n) = \frac{P(T \cap S_n)}{P(S_n)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$= \frac{P(S_n \mid T) \times P(T)}{P(S_n \mid T) \times P(T) + P(S_n \mid T^c) \times P(T^c)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \cancel{\frac{1}{4}}}{\cancel{\frac{1}{4}} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{1}{6}\right)^n \right]}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1 + \frac{3\left(\frac{1}{6}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right]}$$

$$= \frac{1}{1 + 3 \times \frac{1}{6^n} \times 2^n}$$

$$= \frac{1}{1 + 3 \times \left(\frac{2}{6}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{1 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} P(T \mid S_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} = \underline{1}.$$

Ce résultat n'est pas étonnant car pour un dé non pipé, il y a équiprobabilité d'obtenir chacune des 6 faces et donc obtenir à chaque lancer le même numéro montre bien que le dé est pipé.

Exercice 3 :

Soient $\begin{cases} M : \text{"la personne est malade"} \\ T : \text{"le test est positif"}. \end{cases}$

1) $$P(M \mid T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{P(T \mid M) \times P(M)}{P(T)}.$$

Or par hypothèse, $P(M) = 0{,}03$, $P(T \mid M) = 0{,}95$ et $P(T \mid M^c) = 0{,}1$.

De plus, $T = (T \cap M) \cup (T \cap M^c)$: 2 événements disjoints

donc
$$\begin{aligned} P(T) &= P(T \cap M) + P(T \cap M^c) \\ &= P(T \mid M) \times P(M) + P(T \mid M^c) \times P(M^c) \\ &= 0{,}95 \times 0{,}03 + 0{,}1 \times (1 - 0{,}03) \\ &= 0{,}1255. \end{aligned}$$

D'où $P(M \mid T) = \dfrac{0{,}95 \times 0{,}03}{0{,}1255}$

$\Leftrightarrow P(M \mid T) \simeq 0{,}227$ soit $\simeq 22{,}7\ \%$.

2) $$\begin{aligned} P(M^c \mid T) &= 1 - P(M \mid T) \\ &\simeq 1 - 0{,}227 \\ &= 0{,}773 \text{ soit } 77{,}3\ \%. \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} P(M \mid T^c) &= \frac{P(M \cap T^c)}{P(T^c)} \\ &= \frac{P(T^c \mid M) \times P(M)}{1 - P(T)} \\ &= \frac{(1 - 0{,}95) \times 0{,}03}{1 - 0{,}1255} \\ &\simeq 0{,}0017 \text{ soit } 0{,}17\ \%. \end{aligned}$$

4) $P(M^c \mid T^c) = 1 - P(M \mid T^c)$

$\simeq 1 - 0,0017$

$= 0,9983$ soit $\simeq 99,83\,\%$.