Correction de l'interrogation M1 Informatique

11/04/2025

Exercice 1 :

- Soit A : "l'article tiré fonctionne sans défaillance pendant un temps T".
- Soit U_i : "l'article tiré appartient à l'usine U_i" $\forall i = 1,2,3$.
- $P(A) = P\left((A \cap U_1) \cup (A \cap U_2) \cup (A \cap U_3)\right)$

$$= \sum_{i=1}^{3} P(A \cap U_i) \text{ car les évènements sont 2 à 2 disjoints}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} P(A \mid U_i) \times P(U_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} p_i \times \frac{n_i}{n}$$

$$= \frac{p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3}{n}.$$

Exercice 2 :

Soit p_i = la probabilité que le consommateur i préfère B.
donc p_i^c = la probabilité que le consommateur i préfère A.

Ici $p_i = \frac{1}{2}$ donc $p_i^c = \frac{1}{2} (= 1 - p_i)$ $\forall i = 1,2,3,4$.

1/ Posons A_1 : "Au moins 2 consommateurs préfèrent B"

donc A_1^c : "Au plus 1 consommateur préfère B"
= "Aucun ne préfère B" $\cup$ "1 seul préfère B"

$$P(\text{"Aucun ne préfère } B\text{"}) = C_4^0 \times p_1^c \times p_2^c \times p_3^c \times p_4^c$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$= \frac{1}{16}.$$

$P(\text{"1 seul préfère B"}) = C_4^1 \times p \times (p^c)^3$
$$= 4 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$= 4 \times \frac{1}{16}$$
$$= \frac{4}{16} \quad \left(= \frac{1}{4}\right).$$

D'où $P(A_1^c) = P(\text{"Aucun ne préfère B"}) + P(\text{"1 seul préfère B"})$
$$= \frac{1}{16} + \frac{4}{16}$$
$$= \frac{5}{16}.$$

D'où $P(A_1) = 1 - P(A_1^c) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}.$

2/ Posons : A_2 : "Au plus 2 consommateurs préfèrent B"
$= A_1^c \cup$ "2 consommateurs exactement préfèrent B".

Or $P(\text{"2 consommateurs exactement préfèrent B"}) = C_4^2 \times p^2 \times (p^c)^2$
$$= \frac{4!}{2!\,2!} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$$
$$= \frac{\cancel{4}^{2} \times 3 \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times \cancel{2}} \times \frac{1}{16}$$
$$= \frac{6}{16}$$

D'où $P(A_2) = P(A_1^c) + \frac{6}{16} = \frac{5}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}.$

3/ Posons: A_3 : "Plus de 2 consommateurs préfèrent A"

$=$ "Au plus 1 consommateur préfère B"

$= A_1^c$.

3/5

D'où $P(A_3) = P(A_1^c) = \frac{5}{16}$ d'après 1/.

4/ A_4 := "Les 2 premiers consommateurs ont donné des avis contraires".

= "Le 1^{er} préfère B et le $2^{ème}$ préfère A" $\cup$ "Le 1^{er} préfère A et le $2^{ème}$ préfère B".

Or P("le 1^{er} préfère B et le $2^{ème}$ préfère A")

$$= P_1 \times P_2^c \times \underbrace{C_2^1 \times \begin{cases} P_3 \\ P_3^c \end{cases}}_{3^{ème} \text{ consommateur}} \times \underbrace{C_2^1 \times \begin{cases} P_4 \\ P_4^c \end{cases}}_{4^{ème} \text{ consommateur}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}.$$

De même, P("le 1^{er} préfère A et le $2^{ème}$ préfère B") $= \frac{1}{4}$

D'où $P(A_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

5/ A_5 : "Au moins 2 consommateurs ont donné des avis contraires".

Donc A_5^c : "Tous les consommateurs sont du même avis"

= "Tous préfèrent A" $\cup$ "Tous préfèrent B".

Or P("Tous préfèrent A") = P("Aucun préfère B")

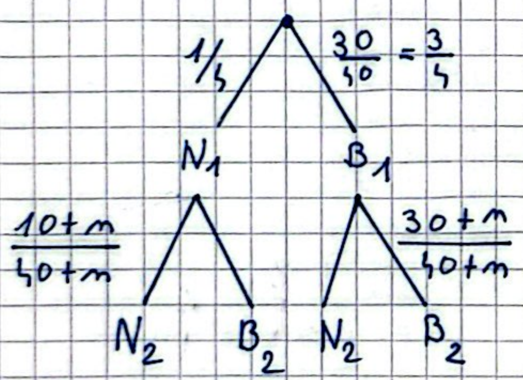
$$= C_4^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$= \frac{1}{16}$.

De même, $P(\text{"Tous préfèrent B"}) = P(\text{"Aucun préfère A"})$
$= \frac{1}{16}$.

D'où $P(A_5^c) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ et donc
$P(A_5) = 1 - P(A_5^c) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Exercice 3 :



1/ $P(B_1 \mid B_2) = \dfrac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \dfrac{\frac{30+m}{40+m} \times \frac{3}{4}}{P\left((B_2 \cap B_1) \cup (B_2 \cap B_1^c)\right)}$

$$= \dfrac{\frac{90+3m}{4(40+m)}}{P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap N_1)}$$

$$= \dfrac{\frac{90+3m}{4(40+m)}}{\frac{90+3m}{4(40+m)} + \left(1 - \frac{10+m}{40+m}\right) \times \frac{1}{4}}$$

$$= \dfrac{\frac{90+3m}{4(40+m)}}{\frac{90+3m}{4(40+m)} + \frac{1}{4} + \frac{-10-m}{4(40+m)}}$$

$$= \dfrac{\frac{90+3m}{4(40+m)}}{\frac{80+2m+40+m}{4(40+m)}}$$

$$= \frac{\frac{90+3n}{4(40+n)}}{\frac{120+3n}{4(40+n)}}$$

$$= \frac{90+3n}{\cancel{4(40+n)}} \times \frac{\cancel{4(40+n)}}{120+3n}$$

$$= \frac{90+3n}{120+3n}$$

$$= \frac{30+n}{40+n}.$$

2/ $P(A) = P((B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2))$

$$= P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2)$$

$$= P(N_2 | B_1) \times P(B_1) + P(B_2 | N_1) \times P(N_1)$$

$$= \left(1 - \frac{30+n}{40+n}\right) \times \frac{3}{4} + \left(1 - \frac{10+n}{40+n}\right) \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{40+\cancel{n}-30-\cancel{n}}{40+n} \times \frac{3}{4} + \frac{40+\cancel{n}-10-\cancel{n}}{40+n} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{30}{4(40+n)} + \frac{30}{4(40+n)}$$

$$= \frac{60}{4(40+n)}$$

$$= \frac{15}{40+n}.$$

$P(A) = \frac{1}{4} \iff \frac{15}{40+n} = \frac{1}{4} \iff 40+n = 60$

$\iff n = 60 - 40 \iff n = 20.$

Il existe donc $n = 20 \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(A) = \frac{1}{4}$.