5. Déduire de la question précédente une base $\mathcal{E}$, orthogonale pour q. 2 points

Il suffit de trouver 3 vecteurs ε_j tels que $\ell_i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}$. Cependant, il nous manque une $3^{ème}$ forme linéaire indépendante linéairement des deux autres pour pouvoir faire ce calcul. Choisissons ℓ_3 telle que $\ell_3(x) = x_3$.

ε_1 vérifie : $\begin{cases} x_1 - 4x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ donc $\varepsilon_1 = (1,0,0)$

ε_2 vérifie $\begin{cases} x_1 - 4x_3 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ donc $\varepsilon_2 = (0,1,0)$

ε_3 vérifie $\begin{cases} x_1 - 4x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ donc $\varepsilon_3 = (4,0,1)$ On note que $\varepsilon_3 \in \ker(f)$

$\mathcal{E} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est une base orthogonale pour q.