5.5 Le calcul des séquents du premier ordre

5.5.1 Le système

Nous reprenons le système des séquents introduit pour le calcul propositionnel, et on l'enrichie des règles permettant de traiter les quantificateurs à droite et à gauche d'un séquent.

Un sequent est donc maintenant un objet de la forme $\Gamma \vdash \Delta$ où Γ et Δ sont des multi-ensembles de formules du premier ordre.

L'ensemble des règles est le suivant :

— Axiomes :

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi, \Delta}$$

— Règles logiques : il y a deux règles par connecteur, une à gauche, une à droite :

Connecteur	Gauche	Droite
$\bot$	$\dfrac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\, G_\bot$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \bot, \Delta}\, D_\bot$
$\top$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \top \vdash \Delta}\, G_\top$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\, D_\top$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}\, G_\neg$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\varphi, \Delta}\, D_\neg$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}\, G_\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi, \Delta}\, D_\wedge$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}\, G_\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Delta}\, D_\vee$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi \vdash \Delta}\, G_\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi, \Delta}\, D_\Rightarrow$
$\forall$	$\dfrac{\Gamma, \varphi_{[x\leftarrow t]}, \forall x\, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\, \varphi \vdash \Delta}\, G_\forall$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x\, \varphi, \Delta}\, D_\forall$ x non libre dans Γ, Δ
$\exists$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\, \varphi \vdash \Delta}\, G_\exists$ x non libre dans Γ, Δ	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_{[x\leftarrow t]}, \exists x\, \varphi, \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\, \varphi, \Delta}\, D_\exists$

Notez la définition de la substitution utilisée dans les règles $G_\forall$ et $D_\exists$:

Définition 5.58. Soit φ une formule, x une formule et t un terme. On note $\varphi_{[x\leftarrow t]}$ la formule obtenu en remplaçant dans φ toutes les occurrences libres de x par t, après un renommage éventuel des occurrences libres de variables liées de φ qui apparaissent libres dans t.

Le renommage a pour but d'éviter la capture de variables. Par exemple, si $\varphi := \exists y R(x, y)$ et $t = f(y)$, le résultat de la substitution de x par t ne peut pas être $\exists y R(f(y), y)$ car on changerait totalement le sens de la formule. Il faut donc préalablement renommer les occurences de y. On obtient donc $\varphi_{[x\leftarrow t]} = \exists z R(f(y), z)$.

On ajoute également la règle de coupure qui est souvent utile, mais pas nécessaire à la complétude du système :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi, \Delta_1 \qquad \Gamma_2, \varphi \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\, Cut$$

De même, nous ajoutons des règles structurelles qui ne sont pas nécessaires à la complétude du système, mais qui seront indispensables à l'ajout de nouvelles régles dérivées.

Règles structurelles : il s'agit de deux règles d'affaiblissement, et de deux règles de contraction : une à gauche, et une à droite.

$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi, \vdash \Delta} \ (G_{Contr}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi} \ (D_{Contr})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta} \ (G_{Aff}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi} \ (D_{Aff})$$

Théorème 5.59 (Théorème de correction et complétude)**.** *Il existe une preuve de $\Gamma \vdash \Delta$ dans le calcul des séquents du premier ordre (avec ou sans la règle de coupure et les règles structurelles) ssi $\Gamma \models \Delta$.*

Voici un exemple simple de preuve :

Exemple 5.60.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A(x) \vdash A(x), \forall x \neg A(x)}}{A(x) \vdash \exists x A(x), \forall x \neg A(x)} D_\exists}{\neg \exists x A(x), A(x) \vdash \forall x \neg A(x)} G_\neg}{\neg \exists x A(x) \vdash \neg A(x), \forall x \neg A(x)} D_\neg}{\neg \exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)} D_\forall$$

Notez que la condition x libre dans Γ, Δ des règles $D_\forall$ et $G_\exists$ doit toujours être respectée, sans quoi il est possible de dériver des séquents faux, comme dans l'exemple suivant :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A(x) \vdash A(x)} Ax}{\exists x A(x) \vdash A(x)} G_\exists \text{!!! non applicable car } x \text{ est libre}}{\exists x A(x) \vdash \forall x A(x)} D_\forall$$

Souvenez vous, les preuves du calcul des séquents propositionnel sont assez simples : il suffit d'éliminer un par un les connecteurs apparaissant dans le séquent à démontrer : le processus terminera forcément, et si les feuilles sont des axiomes, le séquent est prouvé ; dans le cas contraire, c'est que le séquent n'est pas valide.

Les preuves du calcul des séquents du premier ordre ne sont malheureusement pas si simples : il est possible de ne jamais aboutir, soit parceque le séquent n'est pas valide, soit parcequ'on on a fait des mauvais choix lors des substitutions dans l'application les règles $G_\forall$ et $D_\exists$, ou lors des renommages.

Regardez l'exemple suivant, qui est très similaire à l'exemple 5.60 :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A(y) \vdash A(x), \forall y \neg A(y)}{A(y) \vdash \exists x A(x), \forall x \neg A(y)} D_\exists}{\neg \exists x A(x), A(y) \vdash \forall y \neg A(y)} G_\neg}{\neg \exists x A(x) \vdash \neg A(y), \forall y \neg A(y)} D_\neg}{\neg \exists x A(x) \vdash \forall y \neg A(y)} D_\forall$$

Nous avons appliqué la même preuve que dans l'exemple 5.60, avec les même substitutions, et nous n'aboutissons pas à un axiome. Evidemment, il est tout de même possible de continuer la preuve en tentant un autre choix de substitution, mais rien n'empêche que nous fassions infiniment des mauvais choix.

Il n'existe en fait pas d'algorithme permettant de construire une preuve d'un séquent valide. Ce problème n'est pas dû à un mauvais choix du système de preuve, il est inhérent à la logique du premier ordre, comme l'énonce le théorème suivant.

Théorème 5.61. *La logique du premier ordre est indécidable, i.e., il n'existe pas d'algorithme permettant de décider si une formule est valide.*

Voici un autre exemple, où on effectue une réalphabétisation pour pouvoir appliquer la dernière règle $D_\forall$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{R(z), R(y) \vdash R(x), R(z)}}{R(z) \vdash R(x), R(y) \Rightarrow R(z)}\,D_{\Rightarrow}}{R(z) \vdash R(x), \forall y(R(y) \Rightarrow R(z))}\,D_{\forall}}{R(z) \vdash R(x), \exists x\forall y(R(y) \Rightarrow R(x))}\,D_{\exists} + D_{Aff}}{\vdash R(z) \Rightarrow R(x), \exists x\forall y(R(y) \Rightarrow R(x))}\,D_{\Rightarrow}}{\vdash \forall z(R(z) \Rightarrow R(x)), \exists x\forall y(R(y) \Rightarrow R(x))}\,D_{\forall}}{\vdash \exists x\forall y(R(y) \Rightarrow R(x))}\,D_{\exists}$$

5.5.2 Règles dérivées

Puisqu'on a un système de preuve correct et complet, on peut l'enrichir sans l'altérer par l'ajout de règles correctes (donc démontrables).

On pourra donc ajouter comme axiome toute séquent valide s (donc dont on sait construire une preuve), nous noterons ce nouvel axiome dérivé

$$\begin{array}{c} \hline\hline s \end{array}$$

De même, si il existe une dérivation d'un séquent s dont les feuilles qui ne sont pas des axiomes sont $s_1, \ldots, s_n$, alors on peut introduire la nouvelle règle dérivée

$$\begin{array}{c} s_1 \qquad \cdots \qquad s_n \\ \hline\hline s \end{array}$$

Par exemple, on peut introduire la règle du Modus Ponens (MP), qui est très proche de la règle de coupure :

$$\begin{array}{c} \Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi \\ \hline\hline \Gamma \vdash \psi \end{array}\,MP$$

Puisque nous savons produire la dérivation suivante

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi, \psi}\,D_{Aff} \qquad \dfrac{}{\Gamma, \psi \vdash \psi}\,Ax}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi \vdash \psi}\,G_{\Rightarrow}}{\Gamma \vdash \psi}\,C$$

On peut aussi présenter le modus ponens comme un axiome :

$$\begin{array}{c} \hline\hline \Gamma, \varphi, \varphi \Rightarrow \psi \vdash \psi \end{array}\,MP'$$

La preuve est laissée en exercice.

Une autre règle fréquemment utilisée en mathématique est la contraposition : pour montrer que $\varphi \Rightarrow \psi$, on démontre que $\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$.

Cela correspond à la règle suivante :

$$\begin{array}{c} \Gamma \vdash \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi \\ \hline\hline \Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \end{array}\,Contr$$

dont la démonstration est laissée en exercice.

5.5.3 Calcul des séquents égalitaire

L'ajout des règles dérivées permet d'obtenir des preuves en calcul des séquents assez proches des preuves mathématiques. Cependant, la démonstration mathématique utilise d'autres arguments que des arguments logiques : elle utilise des connaissances, déjà acquises ou supposées vraies sur les objets qu'elle manipule.

Prenons l'exemple suivant : on souhaite prouver que si $P(c_0)$ et $\forall x(P(x) \Rightarrow x = c_1)$ alors $c_0 = c_1$. En voici la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{}{P(c_0), (P(c_0) \Rightarrow c_0 = c_1) \vdash c_0 = c_1}\,MP'}{P(c_0), \forall x(P(x) \Rightarrow x = c_1) \vdash c_0 = c_1}\,G_\forall + Aff$$

Remarquez la similitude avec la preuve mathématique de cet énoncé :

supposons que $P(c_0)$ et $\forall x(P(x) \Rightarrow x = c_1)$. On a en particulier $P(c_0)$ et si $P(c_0)$ alors $c_0 = c_1$. Donc $c_0 = c_1$.

Essayons maintenant de compliquer un tout petit peu l'énoncé. Essayez de démontrer le séquent suivant : $P(c_0), \forall x(P(x) \Rightarrow x = c_1), c_1 = c_2 \vdash c_0 = c_2$.

...

Vous n'y arrivez pas. Pourtant le calcul des séquents est complet, on devrait pouvoir démontrer tous les énoncés valides.

Voyons où la preuve bloque :

$$\dfrac{\dfrac{}{P(c_0), \forall x(P(x) \Rightarrow x = c_1) \vdash c_0 = c_1} \qquad c_0 = c_1, c_1 = c_2 \vdash c_0 = c_2}{P(c_0), \forall x(P(x) \Rightarrow x = c_1), c_1 = c_2 \vdash c_0 = c_2}\,cut$$

Il nous reste donc à prouver que $c_0 = c_1, c_1 = c_2 \vdash c_0 = c_2$ est valide, or pour le démontrer, il faudrait avoir connaissance des propriétés de la relation "$=$" , en particulier ici, de la transitivité de l'égalité.

Notez que c'est que qu'on aurait fait dans la preuve mathématique : supposons que $P(c_0)$ et $\forall x(P(x) \Rightarrow x = c_1)$ et $c_1 = c_2$. D'après la démonstration précédente, on a $c_0 = c_1$ et $c_1 = c_2$. Donc **par transitivité** de l'égalité, $c_0 = c_2$.

En conclusion, si nous souhaitons utiliser l'égalité dans nos formules, et pouvoir faire des preuves en calcul des séquents, nous devons ajouter des axiomes et des règles qui rendent le calcul des séquents complet et correct pour la logique du premier ordre égalitaire.

Ajoutons donc les règles suivantes : pour tout termes t, u :

$$\dfrac{}{\Gamma \vdash t = t}\,Ax_= \qquad \dfrac{\Gamma_{[x \leftarrow t]} \vdash \Delta_{[x \leftarrow t]}}{\Gamma_{[x \leftarrow u]}, t = u \vdash \Delta_{[x \leftarrow u]}}\,R_=$$

Ces règles permettent **d'axiomatiser** l'égalité.

On peut maintenant inférer les propriétés de l'égalité telles que la transitivité :

$$\dfrac{}{\Gamma, t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3}\,=_{trans}$$

dont on peut construire la preuve suivante.

$$\dfrac{\dfrac{}{t_1 = t_3 \vdash t_1 = t_3}\,Ax}{t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3}\,R_= \text{ (pour } u = t_2 \text{ et } t = t_3)$$

Nous pouvons terminer maintenant notre preuve inachevée :

$$\dfrac{\dfrac{}{P(c_0), \forall x(P(x) \Rightarrow x = c_1) \vdash c_0 = c_1} \qquad \dfrac{}{c_0 = c_1, c_1 = c_2 \vdash c_0 = c_2}\,=_{trans}}{P(c_0), \forall x(P(x) \Rightarrow x = c_1), c_1 = c_2 \vdash c_0 = c_2}\,cut$$

Résumé des règles :

— **Axiomes :**

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi, \Delta} \qquad + \text{ pour les langages égalitaires } \frac{}{\Gamma \vdash t = t}\, Ax_=$$

— **Règles logiques :**

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\, G_\bot \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \bot, \Delta}\, D_\bot$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \top \vdash \Delta}\, G_\top \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\, D_\top$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}\, G_\neg \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\varphi, \Delta}\, D_\neg$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}\, G_\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi, \Delta}\, D_\wedge$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}\, G_\vee \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Delta}\, D_\vee$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi \vdash \Delta}\, G_\Rightarrow \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi, \Delta}\, D_\Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma, \varphi_{[x\leftarrow t]}, \forall x\, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\, \varphi \vdash \Delta}\, G_\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x\, \varphi, \Delta}\, D_\forall \ x \text{ non libre dans } \Gamma, \Delta$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\, \varphi \vdash \Delta}\, G_\exists \ x \text{ non libre dans } \Gamma, \Delta \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_{[x\leftarrow t]}, \exists x\, \varphi, \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\, \varphi, \Delta}\, D_\exists$$

— **Règle de coupure**

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi, \Delta_1 \qquad \Gamma_2, \varphi \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\, Cut$$

— **Règles structurelles :**

$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi, \vdash \Delta}\ (G_{Contr}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}\ (D_{Contr})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}\ (G_{Aff}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}\ (D_{Aff})$$

— **Règle de l'égalité :**

$$\frac{\Gamma_{[x\leftarrow t]} \vdash \Delta_{[x\leftarrow t]}}{\Gamma_{[x\leftarrow u]}, t = u \vdash \Delta_{[x\leftarrow u]}}\, R_=$$