TD n° 6

Logique du premier ordre 1

1 Syntaxe

Exercice 6.1. On considère le langage $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}}, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ où $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(c,0),(f,1),(g,2)\}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{(r,2),(p,1),(q,3)\}$

1. Donnez trois termes de ce langage et utilisez les pour construire trois formules atomiques.
2. Donnez quelques formules du premier ordre de ce langage.

Exercice 6.2. On considère l'ensemble de variables $X = \{x,y,z\}$ et les formules suivantes :

$\varphi_1 = \; (\forall x \exists z f(x,z)) \Rightarrow (\exists x \forall y r(x,y,z))$

$\varphi_2 = \; (\forall x p(x) \wedge \forall x f(x)) \Rightarrow \forall x(p(x) \wedge f(x))$

$\varphi_3 = \; \forall x((\exists x\, g(f(x),a) \vee h(x,x)) \wedge (\forall y \exists x q(x,y) \vee \exists z p(z,y)))$

Pour chacune des formules $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

1. inférez le langage (i.e. le couple des signatures $\mathscr{S}_{\mathtt{f}}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{r}}$) sur laquelle la formule est écrite ;
2. listez les termes et les formules atomiques apparaissant dans la formule.

Exercice 6.3. Pour chacune des formules suivantes, déterminer les occurrences liées et libres de chaque variable, puis renommer les occurrences de variables **liées** pour obtenir une formule équivalente polie.

$\varphi_1 \equiv \; \forall x \exists z r(x,z) \Rightarrow \exists x \forall y s(x,y,z)$

$\varphi_2 \equiv \; \forall x p(x) \wedge \forall x q(x) \Rightarrow \forall x(p(x) \wedge q(x))$

$\varphi_3 \equiv \; \forall x((\exists x p(f(x),a) \vee q(x,x)) \wedge (\forall y \exists x q(x,y) \vee \exists z p(z,y)))$

2 Evaluation

Exercice 6.4. Soit $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}}, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ le langage tel que $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(a,0),(b,0),(c,0)\}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{(P,1),(R,1),(Q,1)\}$.
Soit $\mathscr{M}$ la $\mathscr{S}$-structure définit par :

$$D_{\mathscr{M}} = \{1,2,3\}, \qquad a^{\mathscr{M}} = 1, \qquad b^{\mathscr{M}} = 2, \qquad c^{\mathscr{M}} = 3$$
$$P^{\mathscr{M}} = \{1,3\}, \qquad Q^{\mathscr{M}} = \{1,2,3\}, \qquad R^{M} = \varnothing.$$

Dites si $\mathscr{M}$ est un modèle des formules suivantes :

1. $P(a)$
2. $Q(c)$
3. $R(b)$
4. $\exists x Q(x)$
5. $\forall x P(x)$
6. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$
7. $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$
8. $\exists x(Q(x) \wedge \neg P(x))$
9. $\neg(\exists x R(x))$

Exercice 6.5. Considérons le langage $\mathscr{S}$ avec un symbole de relation R binaire et un symbole de fonction f unaire, et la $\mathscr{S}$-structure suivante :

$$D_{\mathscr{M}} = \{\, a,b,c,d \,\}, \qquad R^{\mathscr{M}} = \{\, (a,b),(b,c),(c,d),(d,a) \,\},$$
$$f^{\mathscr{M}}(a) = c, \qquad f^{\mathscr{M}}(c) = a, \qquad f^{\mathscr{M}}(b) = d, \qquad f^{\mathscr{M}}(d) = b.$$

1. Représentez la structure $\mathscr{M}$ sous la forme de graphe étiqueté (des arcs étiquetés par R et des arcs étiquetés par f).
2. En regardant le (dessin du) graphe, évaluez les formules suivantes (utilisez votre intuition) :

$\varphi_1 \equiv \ \forall x \exists y (R(x,y) \wedge R(f(y),x))$
$\varphi_2 \equiv \ \exists x \forall y (R(x,y) \vee R(f(y),x))$
$\varphi_3 \equiv \ \forall x \exists y (R(x,y) \Rightarrow \exists z R(f(z),x))$

3. Évaluez ces formules dans $\mathscr{M}$, en utilisant maintenant la définition formelle de l'évaluation : appliquez, une par une, toutes les étapes.

Exercice 6.6. Soient A et B deux symboles de relation unaires.

1. Déterminer les modèles de formules suivantes :

$$\exists x A(x), \qquad \forall x A(x), \qquad A(x) \wedge B(x), \qquad A(x) \vee B(x), \qquad \forall x (A(x) \Rightarrow B(x)).$$

2. Déterminer si les paires de formules suivantes sont equivalentes, ou si une est conséquence de l'autre :
   (a) $\varphi_1 := \exists x (A(x) \wedge B(x))$ et $\varphi_2 := \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$
   (b) $\varphi_1 := \exists x (A(x) \vee B(x))$ et $\varphi_2 := \exists x A(x) \vee \exists x B(x))$
   (c) $\varphi_1 := \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ et $\varphi_2 := \forall x (A(x) \wedge B(x))$
   (d) $\varphi_1 := \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ et $\varphi_2 := \forall x (A(x) \vee B(x))$

Exercice 6.7. On considère un langage contenant une relation unaire A.

1. Donnez une condition nécessaire sur $\mathscr{M}$ pour que $\mathscr{M} \models \forall x (A(x) \wedge \psi)$
2. Donnez une condition suffisante sur $\mathscr{M}$ pour que $\mathscr{M} \models \exists x (A(x) \Rightarrow \psi)$

Exercice 6.8. Considérons le langage $\mathscr{S}$ avec un symbole de relation R binaire, et un symbole de fonction f binaire, et la $\mathscr{S}$-structure suivante :

$$D_{\mathscr{M}} = \mathbb{Z}, \qquad R^{\mathscr{M}} \text{ est la relation } < \qquad f^{\mathscr{M}} \text{ est l'addition.}$$

Pour chacune des formules φ suivantes, donnez une condition nécessaire et suffisante **sur la valuation** $\mathscr{V}$ pour que $\mathscr{M}, \mathscr{V} \models \varphi$.

$\varphi_1 \equiv \ \forall x \exists y (f(z,y) = x)$
$\varphi_2 \equiv \ \exists x (R(x,y) \wedge R(y, f(x,x)))$
$\varphi_3 \equiv \ \forall x (R(x,y) \Rightarrow R(f(x,x),y))$

3 Modélisation

Exercice 6.9. Représenter la phrase

"Tout nombre entier x a un successeur qui est inférieur ou égal à tout entier strictement supérieur à x."

par une formule logique en utilisant le langage suivant :
- entier(x) : "x est un entier
- succ(x, y) : "x est successeur de y"
- inf(x, y) : "x est inférieur ou égal à y".

Exercice 6.10 (Modélisation de l'article "un")**.** Formalisez en logique du premier ordre les formules suivantes : (choisir le langage de façon à ce que chaque "un" soit modélisé par une quantification)

1. Jean suit un cours.
2. Un logicien a été champion du monde de cyclisme.
3. Un entier naturel est pair ou impair.
4. Un enseignant-chercheur a toujours un nouveau sujet à étudier.

Exercice 6.11. On se place dans un langage du premier ordre modélisant les entiers qui utilise les symboles suivants :

— les constantes 0, 1 ;
— les symboles de fonction binaires + et $\times$ qui représentent l'addition et la multiplication et seront notés de manière usuelle $x+y$ et $x \times y$;
— les symboles de prédicats unaires $Pair(x)$ et $Prem(x)$ représentant respectivement le fait que x est un nombre pair et x est un nombre premier.
— les symboles de prédicats binaires $Div(y,x)$ qui représente le fait que y divise x, et $x \leq y$ qui représente que x est inférieur ou égal à y.

1. Formaliser les énoncés suivants :
   (a) Il existe un entier plus petit ou égal à tous les autres.
   (b) Il n'existe pas d'entier plus grand ou égal à tous les autres, mais pour tout entier il en existe un qui est strictement plus grand.
   (c) Tout nombre entier pair est égal à la somme de deux nombres entiers premiers.
   (d) L'ensemble des entiers premiers est non borné.
2. Expliquer par des phrases le sens de chacune des formules suivantes et dire si elles sont vérifiées dans la structure des entiers :
   (a) $\forall x y\,(Pair(x) \wedge Pair(y) \Rightarrow Pair(x+y))$
   (b) $\forall x y \exists z\,(Div(x,z) \wedge Div(z,y))$
3. Pour chacun des prédicats suivants, donner une formule équivalente qui n'utilise que les symboles de constantes 0 et 1, les fonctions + et $\times$ et la relation d'égalité.
   (a) $Pair(x)$
   (b) $Div(y,x)$
   (c) $Prem(x)$ (on pourra utiliser le prédicat Div).

FRANÇAIS ET ARGOT MATHÉMATIQUE

Exercice 6.12. Une relation binaire r est *réflexive* si tout élément est en relation avec lui-même. Elle est *symétrique* si pour tout couple d'éléments x,y si x est en relation avec y alors y est en relation avec x. Elle est *irréflexive* si aucun élément n'est en relation avec lui-même. Elle est *transitive* si si x est en relation avec y, y avec z alors x est en relation avec z.

1. Ecrire les formules du premier ordre correspondant à ces propriétés.
2. Ecrire une formule signifiant qu'une relation symétrique et transitive est réflexive. Cette formule a-t-elle un modèle ? Peut-on donner une interprétation qui la falsifie ?
3. Ecrire une formule signifiant qu'une relation transitive et irréflexive est symétrique. Cette formule a-t-elle un modèle ? Peut-on donner une interprétation qui la falsifie ?

Exercice 6.13. Soit le langage $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}}, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$, où $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(f,1),(g,1)\}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{(p,1),(q,1),(r,2)\}$. Modélisez en logique du premier ordre les propriétés suivantes :

1. La relation r est (le graphe d') une fonction totale ;
2. Le prédicat r contient le produit cartésien de p et q ;
3. le prédicat r est égal au produit cartésien de q et p ;
4. La fonction f est surjective ;
5. La fonction g est injective.

Exercice 6.14. Soit le langage $\mathscr{S} = (\varnothing, \mathscr{S}_r)$, où $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{(\sqsubseteq,2),(S,1)\}$ (vous pouvez écrire $\sqsubseteq(x,y)$ en notation infixe : $x \sqsubseteq y$). Modélisez en logique du premier ordre les propriétés suivantes :

1. Le prédicat $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre partiel (réflexive, transitive et antisymétrique) ;
2. x est une borne inférieure de y et z ;
3. x est la plus grande borne inférieure de y et z ;
4. x est plus grande borne inférieure de S ;
5. S est fermé par le bas pour $\sqsubseteq$.