TD nº 1

Récurrence - Définitions inductives

1 Récurrence

Exercice 1.1. Prouvez par récurrence que pour tout entier n, $10^n - 1$ est un multiple de 9.

Corrigé. 0n prouve la propriété $P(n)$ suivante :

$$P(n) := 10^n - 1 \text{ est un multiple de } 9.$$

— (Base) $10^0 - 1 = 0$ donc $P(0)$ est vrai ;
— (Induction) Supposons que $P(n)$ est vrai. Il existe donc un entier k tel que $10^n - 1 = 9k$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} 10^{n+1} - 1 & = & 10^n \times 10 - 1 \\ & = & 10^n \times (9+1) - 1 \\ & = & 9 \times 10^n + 10^n - 1 \\ & = & 9 \times 10^n + 9k \\ & = & 9(10^n + k) \end{array}$$

Donc $10^{n+1} - 1$ est un multiple de 9, c'est-à-dire que $P(n+1)$ est vrai.

Exercice 1.2. On rappelle que la suite de Fibonacci $(f_n)_{n\geq 0}$ est définie par $f_0 = 1, f_1 = 1$, et pour tout $n \geq 0$, $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} f_{2i} = f_{2n+1}$;
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} (f_i)^2 = f_n f_{n+1}$;
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, f_{3n-1} est pair.

Corrigé.

1. Pour tout $n \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} f_{2i} = f_{2n+1}$:
   — (Base) $\sum_{i=0}^{0} f_{2i} = f_0 = 1 = f_1$.
   — (Induction) On suppose que $\sum_{i=0}^{n} f_{2i} = f_{2n+1}$:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=0}^{n+1} f_{2i} & = & (\sum_{i=0}^{n} f_{2i}) + f_{2n+2} \\ & = & f_{2n+1} + f_{2n+2} \\ & = & f_{2n+3} = f_{2(n+1)+1} \end{array}$$

2. Pour tout $n \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} f_i^2 = f_n f_{n+1}$
   — (Base) $\sum_{i=0}^{0} (f_i)^2 = 1 = f_0 f_1$.
   — (Induction) On suppose que $\sum_{i=0}^{n} (f_i)^2 = f_n f_{n+1}$

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=0}^{n+1} (f_i)^2 & = & (\sum_{i=0}^{n} (f_i)^2) + (f_{n+1})^2 \\ & = & f_n f_{n+1} + (f_{n+1}^2) \\ & = & f_{n+1}(f_n + f_{n+1}) \\ & = & f_{n+1} f_{n+2}. \end{array}$$

3. Pour tout $n \geq 1$, f_{3n-1} est pair :
   — (Base) $f_2 = f_0 + f_1 = 2$ donc f_2 est pair.
   — (Induction) On suppose que f_{3n-1} est pair : $f_{3n-1} = 2k$;

$$\begin{aligned} f_{3(n+1)-1} &= f_{3n+2} \\ &= f_{3n} + f_{3n+1} \\ &= f_{3n} + f_{3n-1} + f_{3n} \\ &= 2f_{3n} + 2k \\ &= 2(f_{3n+1} + k). \end{aligned}$$

Exercice 1.3. En utilisant le second principe de récurrence, prouvez que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier.

Corrigé. On prouve la propriété $Q(n)$ suivante pour tout $n \geq 2$:

$$Q(n) := n \text{ possède un diviseur premier.}$$

— (Base) $Q(2)$ est vrai car 2 est divisible par lui-même et est premier.
— (Induction) Soit $n \geq 2$. Supposons que $Q(k)$ est vrai pour tout $k \leq n$ et montrons que $Q(n+1)$ est vrai. On a deux cas :
   — soit $n+1$ est premier, dans ce cas $Q(n+1)$ est vrai ;
   — soit il existe entier d tel que $2 \leq d \leq n$ et d est un diviseur de $n+1$. Alors, par hypothèse de récurrence, d possède un diviseur premier, qui est aussi diviseur de $n+1$.

Exercice 1.4. (Approfondissement)
Montrez que le programme suivant calcule bien le pgcd de deux nombres a et b par récurrence sur la somme $a+b$.

```
def euclide (a,b) :
   if b > a : return euclide(b,a)
   if  a==0: return b
     else :  return euclide(a-b,b)
```

Corrigé.
— (Base) si $a+b=0$, alors $a=b=0$. On a dans ce cas `euclide`$(a,b)=0$, qui est bien le pgcd de a et b.
— (Induction) Soit $n \geq 0$, on suppose que pour tous a,b tels que $a+b \leq n$, `euclide`(a,b) est égal au pgcd de a et b.
   Soient a et b tels que $a+b = n+1$.
   — if $a=0$ ou $b=0$ alors `euclide`$(a,b)=0$, qui est bien le pgcd de a et b.
   — sinon, si $a \geq b$, alors `euclide`$(a,b) =$ `euclide`$(a-b,b)$. Par hypothèse de récurrence, `euclide`$(a-b,b)$ est le pgcd de $a-b$ et b.
     Il suffit donc vérifier que si x est le pgcd de $a-b$ et b, c'est aussi le pgcd de a et b.
     — Montrons que x est un diviseur de a :
       Puisque x un diviseur de $a-b$ et b, il existe m_1, m_2 tels que $a-b = m_1x$ et $b = m_2x$. Alors, $a = a-b+b = m_1x + m_2x = (m_1+m_2)x$.
       On en conclue que x est un diviseur de a et b.
     — Montrons que tout diviseur de a et b est aussi un diviseur de $a-b$ et b :
       Soit y un diviseur de a et b, il existe m_1, m_2 tels que $a = m_1y$ et $b = m_2y$. Alors, $a-b = (m_1-m_2)y$.
     — Conclusion : x est le pgcd de a et b.
   — sinon, si $a < b$, alors `euclide`$(a,b) =$ `euclide`$(b-a,a)$ qui est le pgcd de a, b, par le même raisonnement que ci-dessus.

2 Définitions inductives

Exercice 1.5. Donner une définition inductive de l'ensembles des palindromes sur l'alphabet Σ, c'est à dire l'ensemble des mots qui se lisent pareil de gauche à droite et de droite à gauche : $u = a_1 \cdots a_n$ est un palindrome ssi $u = a_n \cdots a_1$.

Votre définition est-elle ambigüe ? Donnez l'arbre de dérivation du mot *ressasser*.

Corrigé. L'ensemble des palindromes est donné par la définition suivante.

$$\frac{}{\varepsilon} \qquad \frac{}{a}\ \text{pour tout } a \in \Sigma \qquad \frac{u}{aua}\ \text{pour tout } a \in \Sigma$$

Cette définition est clairement non-ambiguë : les axiomes ne peuvent pas être générés par la règle puisqu'elle n'engendre que des mots de taille supérieure à 2 et la règle $u \mapsto aua$ est injective.

Voici l'arbre de dérivation du mot *ressasser* :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{a}}{sas}}{ssass}}{essasse}}{ressasser}$$

Exercice 1.6. Considérez les deux définitions inductives de $\mathbb{N}^2$. Déterminez si elles sont non-ambiguës. Argumentez votre réponse.

1. Définition 1 :

$$\frac{}{(0,0)} \qquad \frac{(n,m)}{(n+1,m)} \qquad \frac{(n,m)}{(n,m+1)}$$

2. Définition 2 :

$$\frac{}{(0,0)} \qquad \frac{\text{(n,m)}}{(n,m+1)} \qquad \frac{\text{(n, 0)}}{(n+1,0)}$$

Corrigé.

1. Elle est ambiguë car il y a deux dérivations possible de la paire $(1,1)$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{(0,0)}}{(1,0)}}{(1,1)} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{}{(0,0)}}{(0,1)}}{(1,1)}$$

2. Elle est non ambiguë car :
   — l'axiome $(0,0)$ ne peut pas être produit une des règles ;
   — un couple produit par la seconde règle a sa seconde coordonnée nulle, alors qu'un couple produit par la première règle a sa seconde coordonnée non nulle, donc un couple produit par l'une des règles ne pas l'être par l'autre ;
   — les règles sont données par les fonctions $(n,m) \mapsto (n,m+1)$ et $(n,0) \mapsto (n+1,0)$ qui sont clairement injectives.

Exercice 1.7. Donnez une définition inductive non ambiguë pour l'ensemble des mots binaires ne comportant pas deux zéros consécutifs.

Corrigé.

$$\frac{}{\varepsilon} \qquad \frac{}{0} \qquad \frac{u}{u1} \qquad \frac{u}{u10}$$