TD n° 4

Calcul propositionnel 4

SYSTÈMES DE PREUVE

1 La résolution

Exercice 4.1. Une clause C_0 subsume une clause C_1 quand tout littéral de C_0 est aussi un littéral de C_1. On écrit alors $C_0 \sqsubseteq C_1$.

— Montrez $C_0 \sqsubseteq C_1$ implique $C_0 \models C_1$.
— Montrez que l'ensemble des modèles de $\mathscr{C}$ n'est pas modifié si on retire de $\mathscr{C}$ toute clause C_1 telle qu'il existe une clause $C_0 \in \mathscr{C}$ telle que $C_0 \sqsubseteq C_1$.

Exercice 4.2. *(Principe de résolution).* Soient θ, φ, ψ trois formules propositionnelles. Montrer que si $\Gamma = \{\theta \vee \varphi, \neg\theta \vee \psi\}$, alors $\mathsf{mod}(\Gamma) = \mathsf{mod}(\Gamma \cup \{\varphi \vee \psi\})$.

Exercice 4.3. Utiliser la résolution pour prouver ou infirmer les affirmations suivantes.

1. $\models p \Rightarrow p$
2. $\models ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
3. $\models ((s \Rightarrow r) \wedge p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg r \wedge \neg s \wedge p$
4. $\models [(p \wedge q) \vee (r \wedge q)] \Rightarrow (p \vee r)$
5. $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \Rightarrow r$
6. $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \wedge r$
7. $\models (p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((\neg p \Rightarrow r) \wedge (p \wedge q))$.
8. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models p \wedge q \wedge r$.
9. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$.

2 Calcul des Séquents

Exercice 4.4. Donner des preuves des séquents suivants :

1. $\vdash \neg\neg p \Rightarrow p$
2. $p \Rightarrow q \vdash (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$
3. $\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
4. $p \Rightarrow q \vdash (r \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$
5. $(p \wedge q) \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
6. $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
7. $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$

2.1 Le calcul des séquents avec coupure

On rappelle la règle de coupure :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi, \Delta_1 \quad \Gamma_2, \varphi \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \quad (C)$$

Exercice 4.5 (Introduction de la règle de coupure)**.**

1. Montrez que la règle de coupure est correcte. Est-elle inversible ?
2. La propriété de la sous-formule est-elle toujours satisfaite dans le calcul des séquents avec coupure ?

Exercice 4.6. En utilisant la règle de coupure, montrez que si il existe une preuve du séquent $\Gamma \vdash p \wedge \neg p$ alors il existe une preuve du séquent $\Gamma \vdash \varphi$, pour toute formule φ.

Exercice 4.7. Démontrez le séquent $p \Rightarrow q, p \Rightarrow r, q \wedge r \Rightarrow s \vdash p \Rightarrow s$. Pour cela, vous démontrerez d'abord les séquents $p \Rightarrow q, p \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow q \wedge r$ et $p \Rightarrow q \wedge r, q \wedge r \Rightarrow s \vdash p \Rightarrow s$