TD n° 5

CP : modélisation

Exercice 1. Xavier appelle la police pour signaler un cambriolage. Après son témoignage, la police a établi les faits suivant :

(a) Il y a 3 suspects. Chacun des trois collègues de Xavier — Albert, Bertrand et Charles — sont entrés dans le bureau le jour du vol et personne d'autre ne peut être coupable.

(b) Si Albert est coupable, alors il a un et un seul complice.

(c) Si Bertrand est innocent alors Charles l'est aussi.

(d) S'il y a deux coupables (et deux seulement), alors Albert est l'un d'entre eux.

(e) Si Charles est innocent alors Bertrand l'est aussi.

1) Proposez des variables propositionnelles pour représenter le problème (vous expliciterez ce que modélise chaque variable).

✎ *On introduit trois variables A, B, C avec les interprétation suivantes :*

A : Albert est coupable ; B : Bertrand est coupable ; C : Charles est coupable.

2) Représenter les différents faits du problème à l'aide de formules propositionnelles.

✎ $\varphi_a : A \vee B \vee C$;

$\varphi_b : A \to \neg(B \leftrightarrow C)$;

$\varphi_c : \neg B \to \neg C$;

$\varphi_d : ((A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (C \wedge A)) \to A$;

$\varphi_e : \neg C \to \neg B$.

3) Donner la représentation clausale (CNF) du problème.

✎ *Mettons les formules précédentes sous forme clausale.*

$\varphi_a \equiv A \vee B \vee C$

$$\begin{aligned}
\varphi_b \equiv\ & \neg A \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C) \\
\equiv\ & ((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee (\neg B \wedge C) \\
\equiv\ & ((\neg A \vee B \vee (\neg B \wedge C)) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee (\neg B \wedge C))) \\
\equiv\ & (\neg A \vee B \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee C) \\
\equiv\ & (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee \neg B).
\end{aligned}$$

$\varphi_c \equiv B \vee \neg C$

$$\begin{aligned}
\varphi_d \equiv\ & ((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg C \vee \neg A)) \vee A \\
\equiv\ & (\neg A \vee \neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee A) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee A)) \\
\equiv\ & (\neg B \vee \neg C \vee A).
\end{aligned}$$

$\varphi_e \equiv C \vee \neg B$

4) Quelle question faudrait-il poser pour savoir si Albert est coupable ? Pour savoir s'il est innocent ?

✎ *Si le témoignage de Xavier (modélisé par les formules $\varphi_a, \dots, \varphi_e$) est fiable, alors Albert est :*

coupable si $\{\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \varphi_d, \varphi_e\} \models A$; *innocent si* $\{\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \varphi_d, \varphi_e\} \models \neg A$.

5) L'ensemble de clause est-il consistant ? Qu'en déduisez vous ?

✎ *Soit* $\Gamma = \{A \lor B \lor C,\ \neg A \lor B \lor C,\ \neg A \lor \neg C \lor \neg B,\ B \lor \neg C,\ \neg B \lor \neg C \lor A,\ C \lor \neg B\}$.
On teste la consistance de Γ *par résolution :*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \lor B \lor C \qquad \neg A \lor B \lor C}{B \lor C} \qquad C \lor \neg B}{C} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg B \lor \neg C \lor A \qquad \neg A \lor \neg C \lor \neg B}{\neg B \lor \neg C} \qquad B \lor \neg C}{\neg C}}{\perp}$$

L'ensemble est inconsistant, donc le témoignage de Xavier est faux, c'est certainement lui le coupable.

On aurait aussi pu tester la consistance de Γ *avec DPLL (présenté linéairement)*

— $(B \mapsto \perp)$: $\{A \lor C,\ \neg A \lor C,\ \neg C\}$
  — $(C \mapsto \perp)$: $\{A, \neg A\} \equiv \{\perp\}$
— $(B \mapsto \top)$: $\{\neg A \lor \neg C,\ \neg C \lor A,\ C\}$
  — $(C \mapsto \top)$: $\{\neg A, A\} \equiv \{\perp\}$

Exercice 2. On dispose de n variables propositionnelles $x_1, \dots x_n$. Chaque x_i modélise le fait que la personne i ment. Représentez les assertions suivantes par des formules propositionnelles.

1) il existe un menteur.
✎ $\bigvee_{i \in [1,n]} x_i$

2) tout le monde ment.
✎ $\bigwedge_{i \in [1,n]} x_i$

3) personne ne ment.
✎ $\bigwedge_{i \in [1,n]} \neg x_i$

4) il y a exactement un menteur.
✎ $\bigvee_{i \in [1,n]} (x_i \land \bigwedge_{j \in [1,n], j \neq i} \neg x_j)$

5) au moins deux personnes mentent.
✎ $\bigvee_{i,j \in [1,n], i \neq j} (x_i \land x_j)$

6) exactement deux personnes mentent.
✎ $\bigvee_{i,j \in [1,n] i \neq j} (x_i \land x_j \land \bigwedge_{k \in [1,n], k \neq i,j} \neg x_k)$

Exercice 3. Le principe des tiroirs de Dirichlet (*the pigeonhole principle* en anglais) dit que si n chaussettes (pigeons) occupent m tiroirs (nichoirs) et si $n > m$, alors au moins un tiroir (nichoir) contient plus d'une chaussette (pigeon). Écrire une formule propositionnelle en CNF pour le principe des tiroirs qui dit : chaque chaussette se retrouve dans un tiroir et chaque tiroir contient au plus une chaussette (on sait alors que la formule est non-satisfaisable.)

✎ *On définit des variables* $x_{i,j}$ *pour* $1 \leq i \leq n$ *et* $1 \leq j \leq m$ *avec l'interprétation attendue suivante :* $x_{i,j}$ *est vraie si* la chaussette i est dans le tiroir j. *Le principe de Dirichlet se formalise alors comme suit :*

Chaque chaussette est dans un et un seul tiroir :

$$\varphi_1 : \bigwedge_{i \in [1,n]} \bigvee_{j \in [1,m]} \left(x_{i,j} \lor \bigwedge_{k \in [1,m], k \neq j} \neg x_{i,k} \right).$$

Chaque tiroir contient au plus une chaussette :

$$\varphi_2 : \bigwedge_{j\in[1,m]} \left(\bigwedge_{i\in[1,n]} \left(x_{i,j} \to \bigwedge_{k\in[1,n],k\neq i} \neg x_{k,j} \right)\right).$$

Exercice 4. Alain, Bernard, Chloé et Didier occupent les quatre premières places d'un concours sans ex-aequo. On cherche la place exacte de chacun, sachant que :

i) Alain n'est pas premier ; *ii*) Bernard est deux places derrière Chloé ; *iii*) Didier est derrière Alain.

1) Modéliser le problème par un ensemble de formules propositionnelles (attention aux contraintes cachées).

✎ *Pour chaque $x \in \{A, B, C, D\}$ et chaque $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ on crée une variable propositionnelle i_x avec l'interprétation suivante : i_x est vraie si x est arrivé en position i. Les contraintes du problème se traduisent alors par :*

i) $\neg 1_A$ *ii)* $(1_C \wedge 3_B) \vee (2_C \wedge 4_B)$ *iii)* $(1_A \to (2_D \vee 3_D \vee 4_D)) \wedge (2_A \to (3_D \vee 4_D)) \wedge (3_A \to 4_D) \wedge \neg 4_A$

*Il faut aussi traiter la contrainte « il n'y a pas d'*ex-aequo*», que nous pouvons traduire : pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, il existe une personne en position i, et pour toute personne x, si x est en position i, alors toute personne $y \neq x$ n'est pas en position i :*

$$\varphi : \bigwedge_{i\in\{1,2,3,4\}} \left[(i_A \vee i_B \vee i_C \vee i_D) \wedge \bigwedge_{x\in\{A,B,C,D\}} (i_x \to \bigwedge_{y\in\{A,B,C,D\}-\{x\}} \neg i_y) \right]$$

2) Écrire ces formules sous forme clausale.

✎ *i)* $\neg 1_A$

ii) $(1_C \vee 2_C) \wedge (1_C \vee 4_B) \wedge (3_B \vee 2_C) \wedge (3_B \vee 4_B)$

iii) $(\neg 1_A \vee 2_D \vee 3_D \vee 4_D) \wedge (\neg 2_A \vee 3_D \vee 4_D) \wedge (\neg 3_A \vee 4_D) \wedge \neg 4_A$

Pour la formule φ, la seule partie à mettre sous forme clausale est $i_x \to \bigwedge_{y\in\{A,B,C,D\}-\{x\}} \neg i_y$:

$$i_x \to \bigwedge_{y\in\{A,B,C,D\}-\{x\}} \neg i_y \equiv \neg i_x \vee \bigwedge_{y\in\{A,B,C,D\}-\{x\}} \neg i_y \equiv \bigwedge_{y\in\{A,B,C,D\}-\{x\}} (\neg i_x \vee \neg i_y)$$

Une forme clausale de φ est donc :

$$\varphi' : \bigwedge_{i\in\{1,2,3,4\}} [(i_A \vee i_B \vee i_C \vee i_D) \wedge \bigwedge_{x,y\in\{A,B,C,D\},x\neq y} (\neg i_x \vee \neg i_y)]$$

Exercice 5 (*Modélisation d'un concours de danse*)**.** Six personnes souhaitent faire un concours de tango : trois hommes : Albert, Bruno, Clément ; trois femmes : Delphine, Eva, Frida. Ces personnes ont les affinités suivantes :

a) Albert apprécie Delphine et Frida

b) Bruno apprécie Eva

c) Clément apprécie Delphine et Eva

d) Delphine apprécie Bruno et Clément

e) Eva apprécie Albert et Bruno

f) Frida apprécie Albert et Clément

Le Tango se danse en couple mixte : un homme et une femme. Le but est de savoir si il est possible de composer 3 couples pour un concours de tango de façon à ce que chacun(e) danse avec une personne qu'il (qu'elle) aime bien. Vous allez donc devoir construire un ensemble de formule Γ satisfaisable ssi le concours est possible.

1) Choisissez les variables propositionnelles nécessaires en expliquant leur rôle.

✎ *Pour rappel, les variables propositionnelles sont des éléments qui doivent pouvoir s'évaluer à vrai ou faux. En particulier, Albert n'est pas une variable propositionnelle puisque* Albert est faux *ou* Albert est vrai *n'ont pas de sens logique !*

Un modèle de l'ensemble Γ final doit être une solution au problème posé, donc doit dire qui danse avec qui (et donc aussi qui ne danse pas avec qui). On peut doit donc choisir les variables $d_{x,y}$ signifiant que x danse avec y. Pour simplifier, on va se restreindre tout de suite aux couples possibles en ne considérant que les variables $d_{x,y}$ telles que x est un homme et y est une femme. Notez qu'on pourrait en plus se restreindre aux $d_{x,y}$ tels que x et y s'apprécient.

Soient donc $H = \{A, B, C\}$ l'ensemble des homme et $F = \{D, E, F\}$ l'ensemble des femmes, on pose $Prop = \{d_{x,y}\}_{x\in H, y\in F}$.

2) Décrivez par des phrases en français l'ensemble des contraintes et traduisez chacune des phrases par une formule de la logique propositionnelle. Attention, chaque formule doit correspondre exactement à la phrase énoncée.

✎ *Les contraintes du concours de danse sont les suivantes :*

1. *Chaque homme danse avec une et une seule femme :*
$$\varphi_1 := \bigwedge_{x\in H} \bigvee_{y\in F} d_{x,y} \wedge \bigwedge_{z\in F, z\neq y} \neg d_{x,z}.$$
2. *Chaque femme danse avec un et un seul homme :*
$$\varphi_2 := \bigwedge_{y\in F} \bigvee_{x\in H} d_{x,y} \wedge \bigwedge_{z\in H, z\neq x} \neg d_{z,y}.$$
3. *Une personne ne danse pas avec quelqu'un qu'elle n'apprécie pas*
$$\varphi_3 := \neg d_{A,E} \wedge \neg d_{B,D} \wedge \neg d_{B,F} \wedge \neg d_{C,F} \wedge \neg d_{A,D} \wedge \neg d_{C,E} \wedge \neg d_{B,F}.$$

3) Déduisez-en l'ensemble Γ. Déterminez par la méthode de votre choix si Γ est satisfaisable, et le cas échéant, donnez en un modèle. Il n'est pas nécessaire de justifier votre réponse.

✎ *On pose $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. On peut vérifier facilement que $v : d_{A,F} \mapsto 1, d_{B,E} \mapsto 1, d_{C,D} \mapsto 1$ et $d_{x,y} \mapsto 0$ pour toutes les autres variables, est un modèle de Γ. Ce modèle s'exprime comme : Albert danse avec Frida, et Bruno danse avec Eva, et Clément danse avec Delphine, et aucun autre couple ne danse.*

Exercice 6 . Le père Noël a N jouets : $J_1, \ldots, J_N$ qu'il veut donner à M enfants : $E_1, \ldots, E_M$. De plus, il possède pour chacun des enfants sa liste de vœux. Vous êtes les lutins chargés d'emballer les cadeaux et de choisir les destinataires en vous assurant que tous les enfants seront contents. Un enfant sera content s'il reçoit au moins un cadeau de sa liste. Tous les cadeaux doivent être distribués. Modéliser ce problème en calcul propositionnel. Décrire soigneusement les suppositions faites ainsi que les variables et les clauses introduites.

✎ *On considère les variables $D_{j,e}$, pour $j \in [1, N]$ et $e \in [1, M]$. La variable $D_{j,e}$ est interprétée comme* le jouet J_j est donné à l'enfant E_e. *Ainsi, une valuation correspond à une distribution de jouet.*

On doit pouvoir exprimer le fait qu'un jouet appartient à la liste d'un enfant, aussi, on suppose qu'on dispose de l'ensemble L des paires (j, e) telles le jouet J_j est dans la liste de l'enfant E_e.

Les contraintes à respecter sont les suivantes :

— *Chaque jouet est distribué une et une seule fois (le même jouet ne doit pas être attribué à deux enfants !) :*
$$\bigwedge_{j\in[1,N]} \bigvee_{e\in[1,M]} (D_{j,e} \wedge \bigwedge_{e'\in[1,M], e\neq e'} \neg D_{j,e'})$$

— *Chaque enfant reçoit au moins un jouet de sa liste*

$$\bigwedge_{e \in [1,M]} \bigvee_{(j,e) \in L} D_{j,e}$$

Exercice 7 (*Coloration de graphe*)**.** Pour un entier $k \geq 2$, on dit qu'un graphe est k-coloriable si on peut colorier ses sommets avec k couleurs de sorte que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur.

En 1977, Appel et Haken ont prouvé le Théorème des 4 couleurs : « Tout graphe planaire fini est 4-coloriable. »

Le but de l'exercice est de prouver la généralisation de ce théorème aux graphes infinis. Étant donné un graphe planaire $G = (V, E)$, on considère l'ensemble des variables propositionnelles x_i pour $x \in V$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. On interprétera la variable x_i comme « le sommet x est colorié par i ».

1) Ecrire une formule C_x exprimant le fait que le sommet x admet une et une seule couleur.

2) Ecrire une formule $A_{x,y}$ exprimant le fait que les sommets x et y sont de couleur différente.

3) En supposant que G est fini, donnez une formule φ_G telle que (φ_G est satisfaisable ssi G est 4-coloriable).

4) On suppose maintenant que G est infini. Construisez un ensemble Γ_G de formules tel que Γ_G est consistant ssi G est 4-coloriable.

5) Montrez que Γ_G est logiquement équivalent à l'ensemble de formules

$$\Sigma_G = \{\varphi_H \text{ t.q. } H \text{ est un sous-graphe fini de } G\}.$$

6) En utilisant le Théorème des 4 couleurs et le Théorème de compacité, démontrez que tout graphe planaire infini est 4-coloriable.

✎ 1. *Le sommet $x \in V$ admet une et une seule couleur :*

$$C_x = \bigvee_{i \in [1,5]} (x_i \wedge \bigwedge_{j \in [1,4], j \neq i} \neg x_j).$$

2. *Les sommets x, y sont de couleur différente :*

$$A_{(x,y)} = \bigvee_{i \in [1,5]} \neg(x_i \vee y_i).$$

3. *Posons $\varphi_G = \bigwedge_{x \in V} C_x \vee \bigwedge_{e \in E} A_e$.*
   — *pour toute valuation v, si $v \models \varphi_G$, alors v définie une 4-coloration de G : le sommet x est coloré par i ssi $v(x_i) = 1$*
   — *inversement, à toute 4-coloration de G correspond une valuation v qui satisfait φ_G.*

   En conclusion, φ_G est satisfaisable ssi G est 4-coloriable.

4. *Il suffit de prendre*

$$\Gamma_G = \{C_x \mid x \in V\} \cup \{A_e \mid e \in E\}.$$

5.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{mod}(\Sigma_G) &= \bigcap_{G'=(E',V') \textit{sous graphe fini de } G} \mathsf{mod}(\varphi_{G'}) \\
&= \bigcap_{G'=(E',V') \textit{ sous graphe fini de } G} \mathsf{mod}(\bigwedge_{x \in V'} C_x \vee \bigwedge_{e \in E'} A_e) \\
&= \bigcap_{G'=(E',V') \textit{ sous graphe fini de } G} \bigcap_{x \in V'} \mathsf{mod}(C_x) \cap \bigcap_{e \in E'} \mathsf{mod}(A_e) \\
&= \bigcap_{G'=(E',V') \textit{ sous graphe fini de } G} \bigcap_{x \in V'} \mathsf{mod}(C_x) \cap \bigcap_{e \in E'} \mathsf{mod}(A_e) \\
&= \bigcap_{x \in V} \mathsf{mod}(C_x) \cap \bigcap_{e \in E} \mathsf{mod}(A_e) \\
&= \mathsf{mod}(\{C_x \mid x \in V\} \cup \{A_e \mid e \in E\}) \\
&= \mathsf{mod}(\Gamma_G)
\end{aligned}
$$

6. *On a donc :*

G est 4-colorable	*ssi*	Γ_G *est consistant*	*(question 4)*
	ssi	Σ_G *est consistant*	*(question 5)*
	ssi	*tout sous-ensemble fini de* Σ_G *est consistant*	*(compacité)*
	ssi	*pour tout sous graphe* G' *de* G, $\varphi_{G'}$ *est satisfaisable*	*(definition de* Σ_G*)*
	ssi	*tout sous-graphe fini de G est 4-coloriable*	*(question 3)*
	ssi	*vrai*	*(théorème des 4 couleurs).*