TD n° 3

CP : formes normales, Quine, DPLL

Exercice 1. Soient Γ, Σ deux ensembles de formules et φ une formule. On rappelle ces deux résultats importants du cours :

(a) $\Gamma \models \varphi$ ssi $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est contradictoire ; (b) $\mathsf{mod}(\Sigma \cup \Gamma) = \mathsf{mod}(\Sigma) \cap \mathsf{mod}(\Gamma)$.

Démontrez les propriétés suivantes :

1) Γ est contradictoire ssi $\Gamma \models \bot$.

✎ *$\Gamma \models \bot$ ssi $\mathsf{mod}(\Gamma) \subseteq \mathsf{mod}(\bot)$ ssi $\mathsf{mod}(\Gamma) = \varnothing$ (car $\mathsf{mod}(\bot) = \varnothing$) ssi Γ est contradictoire.*

2) Si $\Sigma \subseteq \Gamma$, alors $\mathsf{mod}(\Gamma) \subseteq \mathsf{mod}(\Sigma)$.

✎ *De $\Sigma \subseteq \Gamma$ on tire $\Sigma \cup \Gamma = \Gamma$ et donc, par (b) : $\mathsf{mod}(\Sigma) \cap \mathsf{mod}(\Gamma) = \mathsf{mod}(\Gamma)$. Ceci entraîne bien : $\mathsf{mod}(\Gamma) \subseteq \mathsf{mod}(\Sigma)$.*

3) Si $\Sigma \subseteq \Gamma$ et $\Sigma \models \varphi$, alors $\Gamma \models \varphi$.

✎ *Si $\Sigma \subseteq \Gamma$, alors $\mathsf{mod}(\Gamma) \subseteq \mathsf{mod}(\Sigma)$ (voir question 2). De $\Sigma \models \varphi$ on tire par ailleurs $\mathsf{mod}(\Sigma) \subseteq \mathsf{mod}(\varphi)$. Donc $\Gamma \models \varphi$.*

4) $\mathsf{mod}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}) = \mathsf{mod}(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$.

✎ *Une évaluation satisfait $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ ssi elle satisfait chaque φ_i ssi elle satisfait $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Ainsi, la formule $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ et l'ensemble de formules $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ont les mêmes modèles. C'est le résultat annoncé.*

5) $\Gamma \models \varphi$ ssi $\mathsf{mod}(\Gamma) = \mathsf{mod}(\Gamma \cup \{\varphi\})$.

✎ *On a $\mathsf{mod}(\Gamma \cup \{\varphi\}) = \mathsf{mod}(\Gamma) \cap \mathsf{mod}(\{\varphi\})$. Donc $\mathsf{mod}(\Gamma) = \mathsf{mod}(\Gamma \cup \{\varphi\})$ ssi $\mathsf{mod}(\Gamma) \subseteq \mathsf{mod}(\varphi)$ ssi $\Gamma \models \varphi$.*

Exercice 2. Reliez les propositions logiquement équivalentes.

1. $\neg(p \wedge q)$	3. $p \to \neg q$	5. $\neg p \wedge \neg q$	7. $\neg p \vee \neg q$
2. $\neg(p \vee q)$	4. $\neg(p \to q)$	6. $q \to \neg p$	8. $p \wedge \neg q$

✎ *On a :* $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \equiv p \to \neg q \equiv q \to \neg p$; $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$; $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$.

Exercice 3 (*Mise sous forme clausale*)**.** Écrivez ces formules sous FNC.

1) $(c \to ((b \vee a) \wedge d)) \vee f$.

✎
$$\begin{aligned} \varphi_1 = \;& (c \to ((b \vee a) \wedge d)) \vee f \\ \equiv \;& \neg c \vee ((b \vee a) \wedge d) \vee f \\ \equiv \;& (\neg c \vee f) \vee ((b \vee a) \wedge d) \\ \equiv \;& (\neg c \vee f \vee b \vee a) \wedge (\neg c \vee f \vee d). \end{aligned}$$

2) $(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge f)$.

✎ $\varphi_2 = (a \wedge b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge f)$
$\equiv (((a \wedge b) \vee c) \wedge ((a \wedge b) \vee d)) \vee (e \wedge f)$
$\equiv ((a \vee c) \wedge (b \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee d)) \vee (e \wedge f)$
$\equiv (a \vee c \vee (e \wedge f)) \wedge (b \vee c \vee (e \wedge f)) \wedge (a \vee d \vee (e \wedge f)) \wedge (b \vee d \wedge (e \wedge f))$
$\equiv (a \vee c \vee e) \wedge (a \vee c \vee f) \wedge (b \vee c \vee e) \wedge (b \vee c \vee f) \wedge (a \vee d \vee e) \wedge (a \vee d \vee f) \wedge (b \vee d \wedge e) \wedge (b \vee d \wedge f)$

3) $(p \wedge \neg((q \vee r) \rightarrow p)) \vee s$.

✎ $\varphi_3 = (p \wedge \neg((q \vee r) \rightarrow p)) \vee s$
$\equiv (p \wedge \neg(\neg(q \vee r) \vee p)) \vee s$
$\equiv (p \wedge ((q \vee r) \wedge \neg p)) \vee s$
$\equiv (p \vee s) \wedge (q \vee r \vee s) \wedge (\neg p \vee s)$

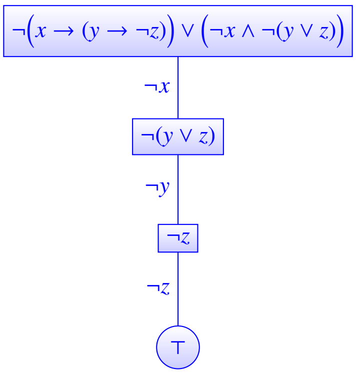
4) $\neg((p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s))$.

✎ $\varphi_4 = \neg((p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s))$
$\equiv \neg(\neg(p \leftrightarrow q) \vee (r \rightarrow s))$
$\equiv (p \leftrightarrow q) \wedge \neg(r \rightarrow s)$
$\equiv ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \wedge \neg(r \rightarrow s)$
$\equiv ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \wedge \neg(\neg r \vee s)$
$\equiv ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \wedge r \wedge \neg s$

Exercice 4. Appliquez l'algorithme de Quine pour déterminer la satisfaisabilité des formules suivantes. Donnez le modèle éventuellement trouvé.

1) $\neg\big(x \rightarrow (y \rightarrow \neg z)\big) \vee \big(\neg x \wedge \neg(y \vee z)\big)$.

✎



L'algorithme est stoppé ici dès que la satisfaisabilité est établie, mais il permet déjà de constater l'existence de deux modèles :

x	y	z
1	0	0

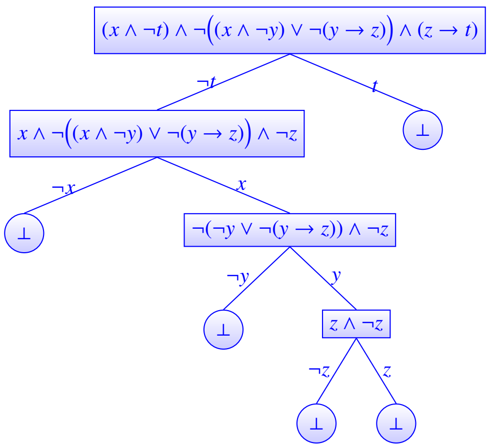
et

x	y	z
1	0	1

.

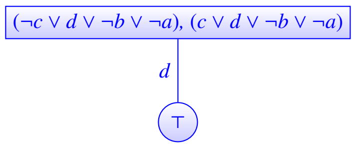
2) $(x \wedge \neg t) \wedge \neg\big((x \wedge \neg y) \vee \neg(y \rightarrow z)\big) \wedge (z \rightarrow t)$

✎ *L'exécution de Quine (ci-dessous) prouve que cette formule est insatisfaisable (c'est une antilogie).*

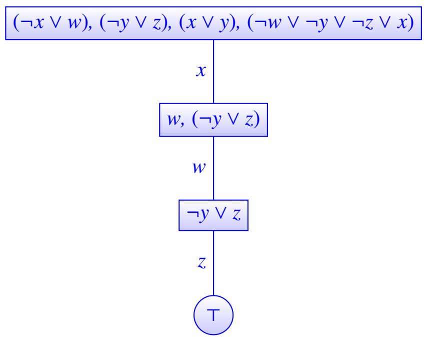


Exercice 5. Exécutez la procédure DPLL sur les formules suivantes. Lorsqu'aucune heuristique ne s'applique, choisissez les variables dans l'ordre alphabétique.

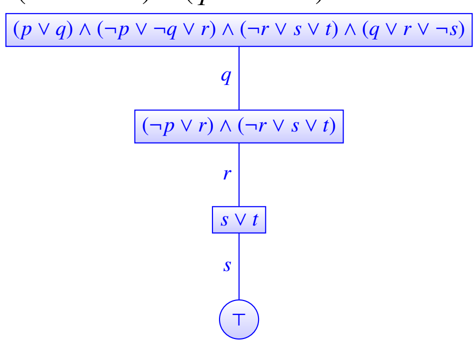
1) $(\neg c \vee d \vee \neg b \vee \neg a) \wedge (c \vee d \vee \neg b \vee \neg a)$.



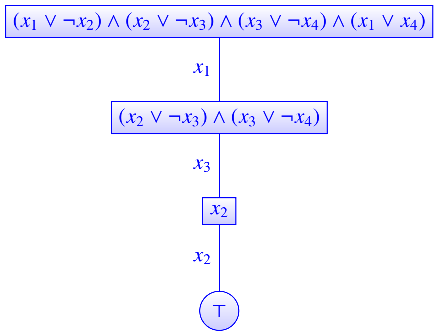
2) $(\neg x \vee w) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (x \vee y) \wedge (\neg w \vee \neg y \vee \neg z \vee x)$.



3) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee s \vee t) \wedge (q \vee r \vee \neg s)$.



4) $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee x_4)$



✎

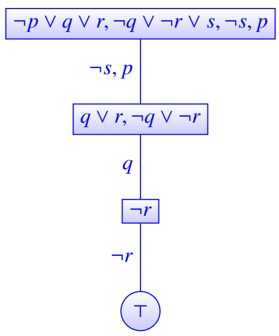
Exercice 6. Utilisez l'algorithme DPLL pour décider si l'affirmation suivante est vraie :

$$\{p \to (q \vee r),\ q \to (r \to s),\ \neg s\} \models \neg p.$$

✎ *On sait que* $\{p \to (q \vee r),\ q \to (r \to s),\ \neg s\} \models \neg p$ *ssi* $\Gamma = \{p \to (q \vee r),\ q \to (r \to s),\ \neg s, p\}$ *est inconsistant. Nous écrivons* Γ *sous forme d'un ensemble de clauses :*

$$\Gamma \equiv \{\neg p \vee q \vee r, \neg q \vee \neg r \vee s, \neg s, p\},$$

puis nous testons sa consistance avec DPLL :

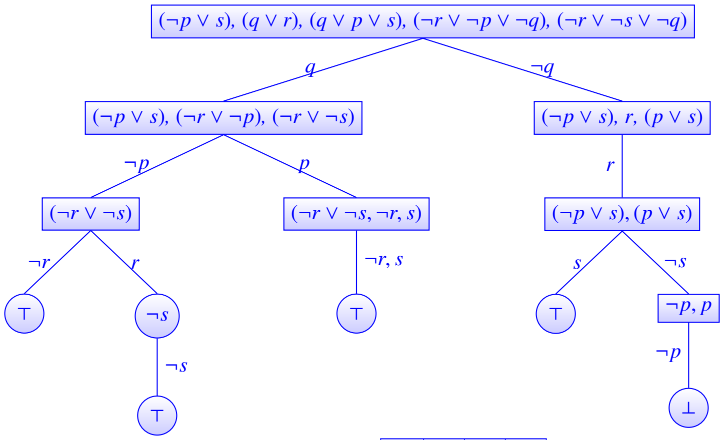


Donc Γ *est consistant et par suite,* $\{p \to (q \vee r),\ q \to (r \to s),\ \neg s\} \not\models \neg p$.

Exercice 7. En étendant la procédure DPLL, énumérez tous les modèles des formules suivantes. Lorsqu'aucune heuristique ne s'applique, choisissez les variables dans l'ordre alphabétique.

1) $(\neg p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee p \vee s) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg s \vee \neg q)$.

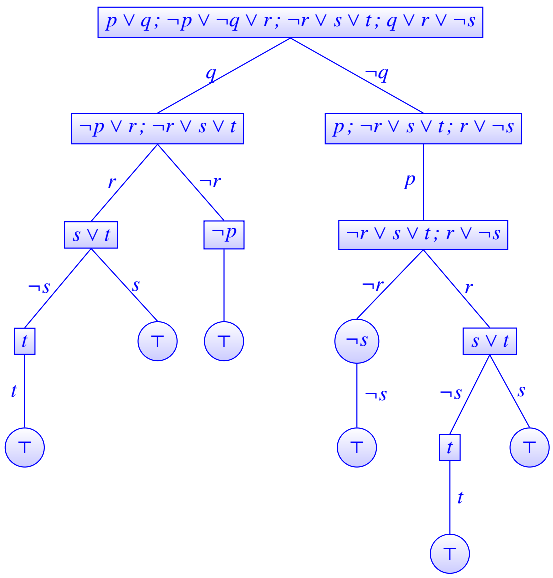
✎



Les modèles sont :

p	q	r	s
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	1	0	1
0	0	1	1
1	0	1	1

2) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee s \vee t) \wedge (q \vee r \vee \neg s)$.



p	q	r	s	t
0	1	1	1	0
0	1	1	1	1
1	1	1	1	0
1	1	1	1	1
0	1	1	1	0
0	1	1	0	1
1	1	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	0	1

Exercice 8. On considère cinq affirmations :

(1) Jules n'est jamais en vacances quand il lit le journal.

(2) Pour que Jules soit à la mer, il suffit qu'on soit en été.

(3) Si Jules est à la mer mais qu'il n'est pas en forme alors il lit le journal.

(4) Il est impossible qu'on ne soit pas en été et que Jules ne soit pas à la mer.

(5) Quand Jules n'est pas en vacances alors il ne lit pas le journal.

1) Modélisez ces assertions en logique des propositions.

✎ *On utilise les variables propositionnelles suivantes :* v *: Jules est en vacances ;* m *: Jules est à la mer ;* f *: Jules est en forme ;* j *: Jules lit le journal ;* e *: on est en été.*

Les affirmations de l'énoncé s'expriment alors :

(1) $j \to \neg v$; (2) $e \to m$; (3) $(m \wedge \neg f) \to j$; (4) $\neg(\neg e \wedge \neg m)$; (5) $\neg v \to \neg j$.

2) À l'aide de la méthode DPLL, montrez que l'assertion « Jules est en forme » est une conséquence logique de l'ensemble des hypothèses précédentes.

✎ *Il faut donc montrer que* $\{j \to \neg v, e \to m, (m \wedge \neg f) \to j, \neg(\neg e \wedge \neg m), \neg v \to \neg j, \neg f\}$ *est inconsistant. On met l'ensemble sous forme clausale, et on applique DPLL :*

$$\{\neg j \vee \neg v, \neg e \vee m, \neg m \vee f \vee j, e \vee m, v \vee \neg j, \neg f\}$$

— $\neg f$:
  $\{\neg j \vee \neg v, \neg e \vee m, \neg m \vee j, e \vee m, v \vee \neg j\}$
  — $\neg j, \neg m$:
    $\{\neg e, e\} \models \perp$
  — j :
    $\{\neg v, \neg e \vee m, e \vee m, v\} \models \perp$

Exercice 9. Soit le règlement suivant d'un club écossais.

a) Tout membre non écossais porte des chaussettes orange ;

b) Tout membre porte une jupe ou ne porte pas de chaussettes orange ;

c) Les membres mariés ne sortent pas le dimanche ;

d) Un membre sort le dimanche si et seulement si il est écossais ;

e) Tout membre qui porte une jupe est écossais et marié ;

f) Tout membre écossais porte une jupe.

Peut-il y avoir un membre dans ce club ?

Exercice 10. Vous êtes perdu dans le désert depuis trop longtemps. Vous arrivez à une bifurcation. Les deux pistes peuvent soit conduire à une oasis, soit se perdre dans le désert (au mieux elles mènent toutes deux à une oasis, au pire elles se perdent toutes les deux). Chaque piste est gardée par un sphinx que vous pouvez interroger. Votre but bien sûr est d'atteindre une oasis.

(*i*) L'un des sphinx vous répond que « une au moins des deux pistes conduit à un oasis ».

(*ii*) L'autre sphinx vous répond que « la piste de droite se perd dans le désert ».

(*iii*) De source sûre vous savez que les deux sphinx disent tous les deux la vérité, ou bien mentent tous les deux.

Résoudre l'énigme : peut-on déduire à partir de l'énoncé qu'une piste conduit à une oasis et si oui quelle est-elle ?

✎ *On introduit 4 variables S_1, S_2, G, D avec les sémantiques suivantes :*

S_1 : le premier sphynx dit la vérité ;

S_2 : le second sphynx dit la vérité ;

G : la piste de gauche mène à l'oasis ;

D : la piste de droite mène à l'oasis.

Les affirmations de l'énoncé se formalisent alors :

(*i*) $S_1 \to (G \vee D)$;

(*ii*) $\neg S_1 \to (\neg G \wedge \neg D)$;

(*iii*) $S_2 \to \neg D$;

(*iv*) $\neg S_2 \to D$;

(*v*) $S_1 \to S_2$;

(*vi*) $S_2 \to S_1$.

Exercice 11 (*Evolution sentimentale...*)**.**

1) On interroge un logicien (qui dit toujours la vérité) sur sa vie sentimentale. Il répond par les deux affirmations suivantes :

- J'aime Marie ou j'aime Anne.
- Si j'aime Marie, j'aime Anne.

Que peut-on conclure : aime-t-il Marie ? Anne ? Ou les deux ?

✎ $(M \vee A) \wedge (\neg M \vee A) \models A$. *Donc il aime Anne*

2) Le même logicien est à nouveau interrogé un an plus tard par un autre logicien de la façon suivante : « Est-il vrai que si vous aimez Marie, alors vous aimez Anne ? ». Ce à quoi il répond :

- Si c'est vrai alors j'aime Marie.
- Si j'aime Marie, alors c'est vrai.

Quelles conclusions en tirer : aime-t-il toujours Marie ? Anne ? Les deux ? Ou plus personne ? Modélisez ces deux problèmes en logique des propositions, et précisez quel problème de la logique des propositions vous vous posez ?

✎ $((\neg M \vee A) \rightarrow M) \wedge M \rightarrow ((\neg M \vee A)) \equiv ((\neg M \vee A) \leftrightarrow M) \equiv A \wedge M$.
Donc il aime Anne et Marie.

Exercice 12 (« *L'énigme du masque de fer* »)**.** On a trouvé les inscriptions suivantes dans la cellule de l'homme au masque de fer :

(i) Je ne suis pas le frère jumeau de Louis XIV.

(ii) Une seule de ces deux propositions est vraie.

Que peut-on en déduire ?

✎ *Si* (ii) *est vraie, alors* (i) *est fausse. Si* (ii) *est fausse, alors à nouveau* (i) *est fausse puisque les deux propositions ne peuvent pas être toutes les deux vraies. Ainsi, dans tous les cas la proposition* (i) *est fausse et par conséquent, le masque de fer est le jumeau de Louis XIV.*