TD n° 1

Récurrence - Définitions inductives

1 Récurrence

Exercice 1.1. Prouvez par récurrence que pour tout entier n, $10^n - 1$ est un multiple de 9.

Exercice 1.2. On rappelle que la suite de Fibonacci $(f_n)_{n\geq 0}$ est définie par $f_0 = 1, f_1 = 1$, et pour tout $n \geq 0$, $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} f_{2i} = f_{2n+1}$;
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} (f_i)^2 = f_n f_{n+1}$;
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, f_{3n-1} est pair.

Exercice 1.3. En utilisant le second principe de récurrence, prouvez que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier.

Exercice 1.4. Montrez que le programme suivant calcule bien le pgcd de deux nombres a et b par récurrence sur la somme $a + b$.

```
def euclide (a,b) :
   if b > a : return euclide(b,a)
   if  a==0: return b
     else :  return euclide(a-b,b)
```

2 Définitions inductives

Rappels :

Définition 1 (Définition inductive)**.** *Soit E un ensemble. Une définition inductive d'une partie de E est une paire (B,R) telle que :*

— *$B \subseteq E$ est un ensemble non vide , appelé* ensemble de base *(ou d'*axiomes*);*

— *R est un ensemble de fonctions (éventuellement partielles) de E appelées* règles d'induction. *Une règle r peut être d'arité (nombre d'arguments) quelconque, donc de type $E^n \to E$, pour $n \geq 1$.*

Définition 2. *Un ensemble X est* clos *par la définition inductive (B,F) si*

— *(Base) $B \subseteq X$;*

— *(Induction) pour toute règle $r \in R$ d'arité n, et tous éléments $x_1, \ldots, x_n \in E$,*

$$\text{si } x_1, \ldots, x_n \in X \text{ alors } r(x_1, \ldots, x_n) \in X.$$

Définition 3. *Soit (B,R) une définition inductive sur un ensemble E, et $X \subseteq E$. On dit que (B,R) est une définition inductive de X (ou que X est défini inductivement par (B,R)) si X est le plus petit ensemble clos par (B,R).*

Notez que cette définition est cohérente grâce au Théorème du point fixe (voir cours) qui affirme que pour toute définition inductive, il existe bien un plus petit ensemble clos par cette définition (car il pourrait exister plusieurs ensemble mimimaux).

Il est très courant de présenter une définition inductive (B,R) sous forme de règles d'inférence :

pour chaque $b \in B$ et chaque $r \in R$ d'arité n :

$$\frac{}{b} \qquad \frac{x_1 \qquad \dots \qquad x_n}{r(x_1, \dots, x_n)}$$

Prenons par exemple l'exemple des mots de Dyck : il s'agit de l'ensemble des mots bien parenthésés écrits sur l'alphabet $\{(,)\}$ Avec cette notation, l'ensemble des mots de Dyck est défini inductivement par

$$\frac{}{\varepsilon} \qquad r_1 : \frac{u}{(u)} \qquad r_2 : \frac{u \qquad v}{uv}\ u \neq \varepsilon, v \neq \varepsilon$$

Etant donné la définition inductive (B,R) d'un ensemble X et $x \in X$. Un arbre de dérivation (ou arbre de preuve, ou preuve) de x est une trace de la construction de x. C'est donc une preuve de l'appartenance de x à X. Contrairement aux arbres usuels, les arbres de preuve sont représentés avec la racine en bas. La racine d'une preuve de $x \in X$ est x, les feuilles sont des éléments de B et chaque nœud interne est une instance d'une règle de R (c'est-à-dire une règle de R appliquée à des valeurs particulières). Si un nœud interne est étiqueté par $r(x_1, \dots, x_n)$, alors il admet n fils étiquetés respectivement par $x_1, \dots, x_n$.

Traditionnellement, on représente plutôt cet arbre comme un enchaînement de règles d'inférence, voici par exemple un arbre de dérivation du mot de Dyck $(()())()$.

$$r_2\,\dfrac{r_1\,\dfrac{r_2\,\dfrac{r_1\,\dfrac{\overline{\varepsilon}}{()} \quad r_1\,\dfrac{\overline{\varepsilon}}{()}}{()()}}{(()())} \qquad r_1\,\dfrac{\overline{\varepsilon}}{()}}{(()())()}$$

Définition 4. *Une définition inductive de X est* non ambiguë *si chaque $x \in X$ admet un unique arbre de dérivation.*

La définition donnée ci-dessus pour les mots de Dyck est ambiguë alors que celle ci-dessous ne l'est pas.

$$\frac{}{\varepsilon} \qquad \frac{u \qquad v}{(u)v}$$

Exercice 1.5. Donner une définition inductive de l'ensembles des palindromes sur l'alphabet Σ, c'est-à-dire l'ensemble des mots qui se lisent pareil de gauche à droite et de droite à gauche : $u = a_1 \cdots a_n$ est un palindrome ssi $u = a_n \cdots a_1$.

Votre définition est-elle ambigüe ? Donnez l'arbre de dérivation du mot *radar*.

Exercice 1.6. Donnez deux définitions inductives de $\mathbb{N}^2$. Sont-elles ambiguës ? Argumentez votre réponse.

Exercice 1.7. Donnez une définition inductive non ambiguë pour l'ensemble des mots binaires ne comportant pas deux zéros consécutifs.

3 Fonction définie inductivement et preuve par induction structurelle

Une fois un ensemble X défini inductivement, on peut facilement définir des fonctions de domaine X en s'appuyant sur la définition inductive de X, à condition que celle-ci soit non-ambiguë. Ces fonctions seront alors récursives.

Définition 5. *(Fonction définie inductivement) Soit (B,R) une définition inductive* **non ambiguë** *d'un ensemble X. Une définition par induction structurelle d'une fonction f de domaine X est la donnée de :*

— *(Base) la valeur de $f(x)$ pour chacun des éléments $x \in B$;*
— *(Induction) la valeur de $f(r(x_1,\ldots,x_n))$ en fonction de $x_1,\ldots,x_n$ et de $f(x_1),\ldots,f(x_n)$, pour chaque règle $r \in R$ d'arité n.*

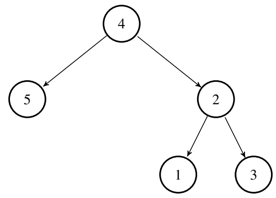
Voici par exemple une fonction f calculant le nombre de paires de parenthèses composant un mot de Dyck :
— (Base) $f(\varepsilon) = 0$;
— (Induction) si $w = (u)v$ alors $f(w) = f(u) + f(v) + 1$.
On peut aussi représenter cette fonction sous forme de règles :

$$\frac{}{\varepsilon\ :0} \qquad \frac{u\ :n_1 \qquad v\ :n_2}{(u)v\ :n_1+n_2+1}$$

Exercice 1.8 (Arbres binaires)**.** On définit l'ensemble $AB(E)$ des arbres binaires (complets) étiquetés sur E de la façon suivante :

$$\frac{}{e}\ e \in E \qquad \frac{A_1 \qquad A_2}{e(A_1,A_2)}\ e \in E$$

Par exemple, $4(5,2(1,3))$ est un arbre binaire étiqueté sur $\mathbb{N}$. On peut le représenter par le graphe orienté suivant :



Question 1.1. Le nombre de sommets d'un arbre binaire est le nombre de sommets de sa représentation graphique. Dans notre exemple, l'arbre a donc 5 sommets.

Donnez une fonction inductive `nb_sommets` : $AB(E) \to \mathbb{N}$ comptant le nombre de sommets d'un arbre binaire.

Question 1.2. Le nombre de feuilles d'un arbre binaire est le nombre de sommets de sa représentation graphique qui n'admettent aucun arc sortant. Dans notre exemple, l'arbre à 3 feuilles étiquetées par 5, 1 et 3. Donnez une fonction inductive `nb_feuilles` : $AB(E) \to \mathbb{N}$ comptant le nombre de feuilles d'un arbre binaire.

Question 1.3. La hauteur d'un arbre binaire est la longueur maximale d'un chemin dans sa représentation graphique. Dans notre exemple, la hauteur est 2 car la longueur maximale d'un chemin est 2 : il y a deux chemins maximaux : le chemin (4,2)(2,1) allant de 4 à 1 et le chemin (4,2)(2,3) allant de 4 à 3.

Donnez une fonction inductive `hauteur` : $AB(E) \to \mathbb{N}$ donnant la hauteur d'un arbre binaire.

La preuve par induction structurelle est une généralisation de la preuve par récurrence aux ensembles définis inductivement.

Théorème 1 (Preuve par induction structurelle)**.** *Soit $X \subseteq E$ un ensemble défini inductivement par (B,R) et $P(x)$ un prédicat exprimant une propriété sur les éléments de E. Considérons les conditions suivantes :*
— *(Base) $P(x)$ est vrai pour chaque $x \in B$;*
— *(Induction) pour chaque $r \in R$ d'arité n, pour tous $x_1,\ldots,x_n \in E$,*
si $P(x_1),\ldots,P(x_n)$ sont vrais, alors $P(r(x_1,\ldots,x_n))$ est vrai.
Si (Base) et (Induction) sont vérifiées, alors $P(x)$ est vraie pour chaque $x \in X$.

Question 1.4. Montrez qu'un arbre binaire de hauteur h admet au moins $2h$ sommets.

Question 1.5. Montrez qu'un arbre binaire de hauteur h admet au plus $2^{h+1} - 1$ sommets et 2^h feuilles.