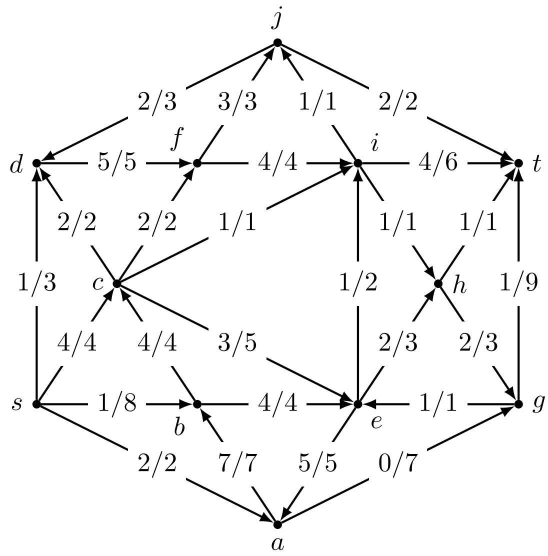
Domaine Sciences et Technologies
LICENCE 3 INFORMATIQUE

Algorithmique 2 : Devoir 1
Code UE : SIN5U03C

Année 2020-2021

Parcours et flots

Exercice 1 (Flot maximum) Calculer un flot maximum et une (s, t)-coupe de capacité minimum à partir du (s, t)-flot suivant.



Exercice 2 (Recette des spaghettis à la bolognaise)

On se propose de cuisiner des spaghettis à la bolognaise, dont voici un exemple de recette.

1. Couper en petits morceaux l'oignon et l'ail (10 minutes)
2. Faire chauffer l'huile dans une poêle à feu vif (3 minutes)
3. Déposer l'oignon et l'ail coupés dans l'huile chaude et les faire revenir (3 minutes)
4. Décongeler la viande hachée (15 minutes)
5. Ajouter la viande hachée décongelée avec l'oignon et l'ail coupés et poursuivre la cuisson pendant 3 minutes
6. Mélanger quelques tomates pelées, un peu de sucre et quelques herbes (1 minute)
7. Ajouter le mélange précédent dans la poêle avec le reste ainsi que du sel et poivre et laisser mijoter à feu doux (30 minutes)
8. Porter une casserole d'eau salée à ébullition (10 minutes)
9. Mettre les spaghettis dans la casserole d'eau bouillante jusqu'à ce qu'elles soient al dente (10 minutes)
10. Lorsque les spaghettis sont cuits, les mettre à égoutter (3 minutes)
11. Mélanger la sauce et les pâtes, rectifier l'assaisonnement et servir (2 minutes).

Question 1 Construisez le graphe de dépendances entre les tâches sans oublier de préciser la pondération des arcs.

Question 2 Quelle est la durée minimale de préparation de la recette ? Justifiez.

Question 3 On vous propose de changer le modèle de vos spaghettis contre un nouveau modèle, plus cher, mais qui cuit en 5 minutes, en affirmant que cela vous aidera à préparer votre recette plus vite. Êtes-vous d'accord avec cette affirmation ? Justifiez.

Exercice 3 (Modélisation et flots)

Vous êtes impliqué dans une expérience scientifique nécessitant des relevés de mesures atmosphériques à large échelle. L'expérience nécessite de connaître précisément un ensemble $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ de n propriétés atmosphériques (telles que le niveau d'ozone et de dioxyde de carbone à différents endroits). Vous avez à votre disposition un ensemble de m ballons que vous pouvez lancer pour faire ces mesures. Une fois lancé, chaque ballon peut mesurer seulement au plus deux propriétés. De plus, il y a des ballons de plusieurs types, chacun ne pouvant mesurer qu'un sous-ensemble des propriétés : pour chaque $i \in \{1, \ldots, m\}$, le ballon i ne peut mesurer que les propriétés $P_i \subseteq P$. Enfin, pour permettre d'obtenir des mesures plus fiables, on souhaite que chaque propriété p_i soit mesurée par au moins k ballons (évidemment, un ballon ne peut pas effectuer deux fois la même mesure).

Considérons un exemple avec $k = 2$, $n = 4$ propriétés p_1, p_2, p_3, p_4 et $m = 4$ ballons tels que les ballons 1 et 2 peuvent mesurer les propriétés $P_1 = P_2 = \{p_1, p_2, p_3\}$ et les ballons 3 et 4 peuvent mesurer les propriétés $P_3 = P_4 = \{p_1, p_3, p_4\}$. Une façon de faire en sorte que chaque propriété soit mesurée par au moins $k = 2$ ballons est la répartition suivante :

— le ballon 1 mesure les propriétés p_1 et p_2 ;
— le ballon 2 mesure les propriétés p_2 et p_3 ;
— le ballon 3 mesure les propriétés p_3 et p_4 ;
— le ballon 4 mesure les propriétés p_1 et p_4.

Question 1 Proposer une modélisation du problème en terme de flot en précisant les sommets et les arêtes du réseau, ainsi que les capacités des arêtes. Quel algorithme vu en cours permet alors de résoudre le problème ? Illustrer la modélisation sur l'exemple précédent.

Vous montrez la solution que vous avez obtenue à l'aide de votre algorithme à votre supérieur hiérarchique, mais il ne la trouve pas satisfaisante. En effet, le cahier des charges ne mentionnait pas une requête supplémentaire que la répartition des ballons doit satisfaire. Chaque ballon est construit par une des trois sociétés qui construisent de tels ballons atmosphériques. La requête supplémentaire à satisfaire est de faire en sorte qu'aucune propriété n'est mesurée uniquement (c'est-à-dire les k mesures) par des ballons du même constructeur.

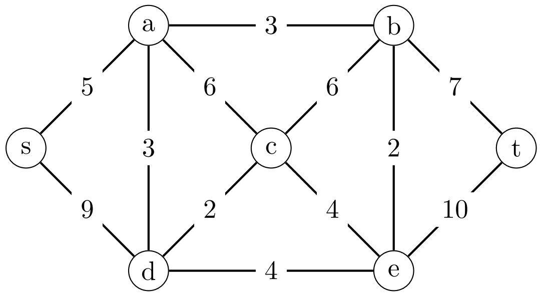
Dans l'exemple précédent, supposons que le ballon 1 provienne du premier constructeur, les ballons 2 et 3 du second constructeur et le ballon 4 du troisième constructeur. Alors, la répartition proposée n'est plus correcte puisque la propriété p_3 n'est réalisée que par des ballons du second constructeur. Cependant, on pourrait utiliser les ballons 1 et 2 pour mesurer les propriétés p_1 et p_2, et les ballons 3 et 4 pour mesurer les propriétés p_3 et p_4.

Question 2 Expliquer comment modifier votre modélisation afin de résoudre le problème avec cette nouvelle contrainte.

Exercice 4 (Trouver un plus large chemin)

Soit $N = (V, A, s, t, c)$ un réseau de transport non-orienté avec n sommets, m arêtes, ou $c(u, v)$ peut être interprété comme la bande passante de l'arête uv. La *largeur* $\alpha(P)$ d'un (s,t)-chemin $P = (s = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1} = t)$ est le minimum des capacités de ses arêtes : $\alpha(P) = \min\{c(v_i, v_{i+1}) : i = 0, \ldots, k\}$. Un *plus large* (s,t)*-chemin* est un (s,t)-chemin de largeur maximum. Notons par α^* la largeur d'un plus large (s,t)-chemin : $\alpha^* = \max\{\alpha(P) : P \text{ chemin entre } s \text{ et } t\}$.

(1) Calculer α^* ainsi qu'un plus large chemin P^* pour le réseau suivant :



Pour une (s,t)-coupe $(S,\overline{S})$ soit $A(S,\overline{S})$ son ensemble d'âretes. La *finesse* $\beta(S,\overline{S})$ d'une (s,t)-coupe $(S,\overline{S})$ est le maximum des capacités de ses arêtes : $\beta(S,\overline{S}) = \max\{c(uv) : uv \in A(S,\overline{S})\}$. Une *plus fine* (s,t)*-coupe* est une (s,t)-coupe de finesse minimale. Notons par β^* la finesse d'une plus fine (s,t)-coupe : $\beta^* = \min\{\beta(S,\overline{S}) : (S,\overline{S}) \text{ coupe entre } s \text{ et } t\}$.

(b) Calculer β^* ainsi qu'une coupe la plus fine $(S^*,\overline{S^*})$ pour le réseau d'avant.

(c) Montrez que pour tout (s,t)-chemin P et pour toute (s,t)-coupe $(S,\overline{S})$, l'inégalité suivante est vrai : $\alpha(P) \leq \beta(S,\overline{S})$. Déduire l'inégalité $\alpha^* \leq \beta^*$.

(d) Pour démontrer l'inégalité inverse, décrire un algorithme pour calculer un (s,t)-chemin P^* et une (s,t)-coupe $(S^*,\overline{S^*})$ tels que $\alpha(P^*) = \beta(S^*,\overline{S^*})$. Conclure que $\alpha^* = \beta^*$.

(e) Quelle est la complexité de cet algorithme ?