L3 Informatique – Luminy | Logique
2021/22 | SIN5U06L

Partiel – 10 décembre 2021

Durée : 2h – documents interdits

Exercice 1. On considère la formule du premier-ordre suivante :

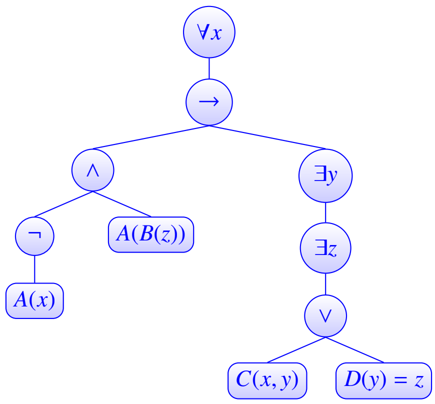
$$\varphi = \forall x \Big((\neg A(x) \wedge A(B(z)) \to \exists y \exists z\, (C(x,y) \vee D(y) = z) \Big)$$

1) Préciser sa signature en indiquant bien la nature de chaque symbole.

✎ *$\mathcal{S} = \{A, B, C, D\}$ où A, C sont des symboles de relation d'arités respectives 1 et 2, et B, D sont des symboles de fonction d'arités 1. Autrement dit :* $\boxed{\mathcal{S}_R = \{(A,1),(C,2)\} \text{ et } \mathcal{S}_F = \{(B,1),(D,1)\}.}$

2) Dessinez l'arbre syntaxique de φ.

✎



3) Quelles sont les variables libres et les variables liées de la formule ?

✎ *Toutes les occurrences des variables x et y sont sous la portée d'un quantificateur, donc sont liées. Par conséquent, x et y sont des variables liées. En revanche, la variable z a une occurence libre (la première) et une occurence liée. La variable z est donc libre. On a colorié ci-dessous d'une même couleur chaque occurence de variable et la quantification correspondante :*

$$\varphi = \forall x \Big((\neg A(x) \wedge A(B(z)) \to \exists y \exists z\, (C(x,y) \vee D(y) = z) \Big).$$

Exercice 2.

1) Déterminez une forme prénexe de la formule

$$\alpha = \forall x P(x) \to \neg \exists y \forall z \Big(R(x,z) \vee \big(\exists x Q(y,x) \vee \exists z Q(x,z) \big) \Big).$$

✎ *Il est crucial de renommer les variables, de sorte que toutes les occurrences d'une même variable soient sous la portée d'un unique quantificateur. On commence par visualiser la portée de chaque quantificateur :*

$$\alpha = \forall x P(x) \to \neg\exists y \forall z \big(R(x,z) \vee (\,\exists x Q(y,x) \vee \exists z Q(x,z)\,)\big)$$

On constate au passage que la troisième et la dernière occurence de x sont libres : x est donc une variable libre (et c'est la seule). Le renommage des variables donne alors :

$$\forall a P(a) \to \neg\exists y \forall z \big(R(x,z) \vee (\,\exists u Q(y,u) \vee \exists v Q(x,v)\,)\big)$$

Puis α se réécrit successivement :

$$\forall a P(a) \to \neg\exists y \forall z \big(R(x,z) \vee \exists u \exists v(\,Q(y,u) \vee Q(x,v)\,)\big)$$
$$\forall a P(a) \to \neg\exists y \forall z \exists u \exists v \big(R(x,z) \vee (\,Q(y,u) \vee Q(x,v)\,)\big)$$
$$\forall a P(a) \to \forall y \exists z \forall u \forall v\, \neg\big(R(x,z) \vee Q(y,u) \vee Q(x,v)\big)$$
$$\forall a P(a) \to \forall y \exists z \forall u \forall v \big(\neg R(x,z) \wedge \neg Q(y,u) \wedge \neg Q(x,v)\big)$$
$$\exists a \,\Big(\, P(a) \to \forall y \exists z \forall u \forall v \big(\neg R(x,z) \wedge \neg Q(y,u) \wedge \neg Q(x,v)\big)\,\Big)$$

Et finalement :

$$\boxed{\exists a \forall y \exists z \forall u \forall v \,\Big(\, P(a) \to \big(\neg R(x,z) \wedge \neg Q(y,u) \wedge \neg Q(x,v)\big)\,\Big)}$$

2) Skolémisez la formule

$$\beta = \forall u \exists x \forall y \exists z \forall v \forall w \forall t \,\Big(\, \neg R(u) \wedge (\,(\,R(x) \to \neg P(f(y), f(z))\,) \vee (\,P(w,t) \to R(v)\,)\,)\,\Big)$$

✎ *La formule ne comporte aucune variable libre. Chaque variable existentiellement quantifiée est remplacée par un terme dépendant uniquement des variables universellement quantifiées qui la précèdent dans le préfixe. Par conséquent, x et z sont remplacées respectivement par une fonction de u et par une fonction de u et y. On obtient facilement la forme de Skolem suivante :*

$$\boxed{\varphi_S = \forall u \forall y \forall v \forall w \forall t \,\Big(\, \neg R(u) \wedge (\,(\,R(h(u)) \to \neg P(f(y), f(g(u,y)))\,) \vee (\,P(w,t) \to R(v)\,)\,)\,\Big)}$$

puis calculez sa forme clausale.

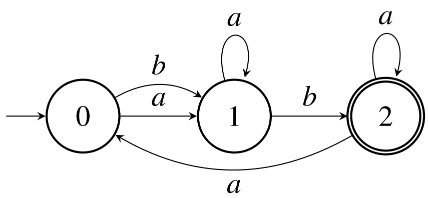
✎ *Comme c'est l'usage, on écrit la forme clausale comme un ensemble de clauses, en omettant les quantifications universelles.*

$$\boxed{\Gamma = \Big\{\ \neg R(u), \quad \neg R(h(u)) \vee \neg P(f(y), f(g(u,y))) \vee \neg P(w,t) \vee R(v)\ \Big\}}$$

Exercice 3. Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_F, \mathcal{S}_R)$ la signature définie par $\mathcal{S}_F = \{(q_0, 0)\}$ et $\mathcal{S}_R = \{(D_a, 2), (D_b, 2), (F, 1)\}$. On définit la $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M} = \langle D^{\mathcal{M}}, q_0^{\mathcal{M}}, D_a^{\mathcal{M}}, D_b^{\mathcal{M}}, F^{\mathcal{M}}\rangle$ de domaine $D^{\mathcal{M}} = \{0,1,2\}$ dans laquelle les symbole de $\mathcal{S}$ sont interprétés comme suit :

$$q_0^{\mathcal{M}} = 0, \qquad D_a^{\mathcal{M}} = \{(0,1),(1,1),(2,2),(2,0)\}, \qquad D_b^{\mathcal{M}} = \{(0,1),(1,2)\}, \qquad F^{\mathcal{M}} = \{2\}.$$

On peut représenter cette structure par le graphe suivant (la constante $q_0^{\mathcal{M}}$ est désignée par une flèche entrante et les éléments de $F^{\mathcal{M}}$ sont doublement cerclés) :



Pour chacune des formules qui suivent, dites si elle est satisfaite par $\mathcal{M}$ en justifiant brièvement votre réponse.

1) $\varphi_1 = \exists x_f \exists x_1 \exists x_2 \Big(D_a(q_0, x_1) \wedge D_a(x_1, x_2) \wedge \big(D_a(x_2, x_f) \vee D_b(x_2, x_f) \big) \wedge F(x_f) \Big)$.

✎ $\boxed{\mathcal{M} \models \varphi_1}$ *puisque pour la valuation $\mathcal{V}$ définie par $\mathcal{V}(x_f) = 3$ et $\mathcal{V}(x_1) = \mathcal{V}(x_2) = 1$, on a :*

$\underline{\mathcal{M}, \mathcal{V} \models D_a(q_0, x_1)}$ *puisque* $(q_0^{\mathcal{M}}, \mathcal{V}(x_1)) = (0, 1)$ *et* $(0, 1) \in D_a^{\mathcal{M}}$.
(Il y a un arc étiqueté par a entre 0 *et* 1.*)*

$\underline{\mathcal{M}, \mathcal{V} \models D_a(x_1, x_2)}$ *puisque* $(\mathcal{V}(x_1), \mathcal{V}(x_2)) = (1, 1)$ *et* $(1, 1) \in D_a^{\mathcal{M}}$.
(Il y a une boucle étiquetée par a sur 1.*)*

$\underline{\mathcal{M}, \mathcal{V} \models D_b(x_2, x_f)}$ *puisque* $(\mathcal{V}(x_2), \mathcal{V}(x_f)) = (1, 2)$ *et* $(1, 2) \in D_b^{\mathcal{M}}$.
(Il y a un arc étiqueté par b entre 1 *et* 2.*) A fortiori,* $\underline{\mathcal{M}, \mathcal{V} \models D_a(x_2, x_f) \vee D_b(x_2, x_f)}$.

$\underline{\mathcal{M}, \mathcal{V} \models F(x_f)}$ *puisque* $x_f = 2$ *et* $2 \in F^{\mathcal{M}}$.
(Le sommet étiqueté par 2 *est doublement cerclé.)*

Ainsi, nous avons pu exhiber une valuation $\mathcal{V}$ pour laquelle

$$\mathcal{M}, \mathcal{V} \models \Big(D_a(q_0, x_1) \wedge D_a(x_1, x_2) \wedge \big(D_a(x_2, x_f) \vee D_b(x_2, x_f) \big) \wedge F(x_f) \Big).$$

Il s'ensuit $\mathcal{M} \models \exists x_f \exists x_1 \exists x_2 \Big(D_a(q_0, x_1) \wedge D_a(x_1, x_2) \wedge \big(D_a(x_2, x_f) \vee D_b(x_2, x_f) \big) \wedge F(x_f) \Big)$, *c'est-à-dire* $\mathcal{M} \models \varphi_1$.

2) $\varphi_2 = \forall x \forall y \forall z \Big(\big((D_a(x, y) \wedge D_a(x, z)) \to y = z \big) \wedge \big((D_b(x, y) \wedge D_b(x, z)) \to y = z \big) \Big)$.

✎ $\boxed{\mathcal{M} \not\models \varphi_2}$ *puisque pour la valuation $\mathcal{V}$ définie par $\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}(y) = 2$ et $\mathcal{V}(z) = 0$, on a :*

$\underline{\mathcal{M}, \mathcal{V} \models \neg(D_a(x, y) \wedge D_a(x, z)) \to y = z)}$ *puisque* $(\mathcal{V}(x), \mathcal{V}(y)) = (2, 2) \in D_a^{\mathcal{M}}$ *et* $(\mathcal{V}(x), \mathcal{V}(z)) = (2, 0) \in D_a^{\mathcal{M}}$, *mais* $\mathcal{V}(y) = 2 \neq 0 = \mathcal{V}(z)$.

Ainsi, il existe une valuation $\mathcal{V}$ ne satisfaisant pas

$$\mathcal{M}, \mathcal{V} \models \Big(\big((D_a(x, y) \wedge D_a(x, z)) \to y = z \big) \wedge \big((D_b(x, y) \wedge D_b(x, z)) \to y = z \big) \Big).$$

Il s'ensuit $\mathcal{M} \not\models \forall x \forall y \forall z \Big(\big((D_a(x, y) \wedge D_a(x, z)) \to y = z \big) \wedge \big((D_b(x, y) \wedge D_b(x, z)) \to y = z \big) \Big)$, *c'est-à-dire* $\mathcal{M} \not\models \varphi_2$.

3) $\varphi_3 = \exists x_1 \exists x_2 \forall y \Big(F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge \big(F(y) \to (y = x_1 \vee y = x_2) \big) \Big)$.

✎ $\boxed{\mathcal{M} \models \varphi_3}$ *puisque pour la valuation $\mathcal{V}$ définie par $\mathcal{V}(x_1) = \mathcal{V}(x_2) = 2$ et $\mathcal{V}(y) = 0$, on a :*
$\mathcal{M}, \mathcal{V} \models F(x_1) \wedge F(x_2)$ *puisque* $\mathcal{V}(x_1) = \mathcal{V}(x_2) = 2 \in F^{\mathcal{M}}$, *et*
$\mathcal{M}, \mathcal{V} \models F(y) \to (y = x_1 \vee y = x_2)$ *puisque* $\mathcal{V}(y) = 0 \notin F^{\mathcal{M}}$.
Par conséquent, $\underline{\mathcal{M}, \mathcal{V} \models \Big(F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge \big(F(y) \to (y = x_1 \vee y = x_2) \big) \Big)}$.

Mais on a de même $\mathcal{M}, \mathcal{V}(y/1) \models F(y) \to (y = x_1 \vee y = x_2)$ *puisque* $\mathcal{V}(y/1)(y) = 1 \notin F^{\mathcal{M}}$ *et*
$\mathcal{M}, \mathcal{V}(y/2) \models F(y) \to (y = x_1 \vee y = x_2)$ *puisque* $\mathcal{V}(y/2)(y) = 2 = \mathcal{V}(y/2)(x_1)$.

Par conséquent, $\underline{\mathcal{M}, \mathcal{V}(y/i) \models \Big(F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge \big(F(y) \to (y = x_1 \vee y = x_2) \big) \Big)}$ *pour tout* $i \in D^{\mathcal{M}}$*, ce qui signifie bien :*

$$\mathcal{M} \models \exists x_1 \exists x_2 \forall y \Big(F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge \big(F(y) \to (y = x_1 \vee y = x_2) \big) \Big), \text{ c'est-à-dire } \mathcal{M} \not\models \varphi_3.$$

4) $\varphi_4 = \exists x \forall y \Big(D_a(x, y) \to D_b(y, x) \Big)$.

✎ $\boxed{\mathcal{M} \not\models \varphi_4}$ *puisque pour toute valeur associée à* x*, on peut associer une valeur à* y *de sorte que la valuation* $\mathcal{V}$ *ainsi définie satisfasse :* $(\mathcal{V}(x), \mathcal{V}(y)) \in D_a^{\mathcal{M}}$ *et* $(\mathcal{V}(y), \mathcal{V}(x)) \notin D_b^{\mathcal{M}}$*, c'est-à-dire*

$$\mathcal{M}, \mathcal{V} \not\models D_a(x, y) \to D_b(y, x).$$

Par conséquent, $\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y \Big(D_a(x, y) \to D_b(y, x) \Big)$.

Exercice 4. Dans cet exercice, on souhaite exprimer des propriétés sur des graphes orientés dont certains sommets sont coloriés en rouge ou en vert. Pour cela on considère la signature $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_F, \mathcal{S}_R)$ définie par

$$\mathcal{S}_F = \varnothing \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_R = \{(P, 2), (V, 1), (R, 1)\}.$$

Sur l'ensemble des sommets d'un graphe, on interprète les symboles de $\mathcal{S}$ de la façon suivante :

$P(x, y)$: x pointe vers y (il y a un arc allant de x à y)

$V(x)$: x est colorié en vert

$R(x)$: x est colorié en rouge

1) Exprimez les phrases suivantes par des formules du premier ordre sur le langage $\mathcal{S}$:

(a) Les sommets verts pointent tous vers des sommets rouges.

✎ $\forall x \Big(V(x) \to \exists y \, (R(y) \wedge P(x, y)) \Big)$.

(b) Aucun sommet vert ne pointe vers tous les sommets rouges.

✎ $\forall x \Big(V(x) \to \exists y \, (R(y) \wedge \neg P(x, y)) \Big)$.

(c) Certains sommets rouges ne sont pointés par aucun sommet vert.

✎ $\exists x \Big(R(x) \wedge \forall y \, (V(y) \to \neg P(y, x)) \Big)$.

(d) Tout sommet rouge pointe vers lui-même ou vers un sommet vert.

✎ $\forall x \Big(R(x) \to \; (P(x, x) \vee \exists y (V(y) \wedge P(x, y))) \Big)$.

(e) Il y a exactement 3 sommets verts.

✎ $\exists x \exists y \exists z \Big(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \forall u \, (V(u) \leftrightarrow (u = x \vee u = y \vee u = z)) \Big)$.

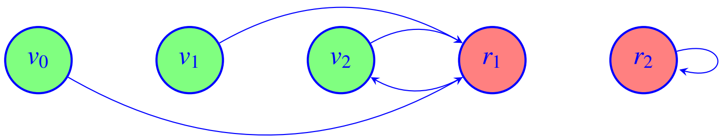
(f) Il existe un sommet rouge appartenant à un cycle de longueur 2

✎ $\exists x \exists y \Big(R(x) \wedge x \neq y \wedge P(x, y) \wedge P(y, x) \Big)$.

2) Donnez un modèle et un contre modèle de l'ensemble des formules obtenues à la question précédente (vous pouvez répondre à cette question même si vous n'avez pas réussi à écrire les formules)

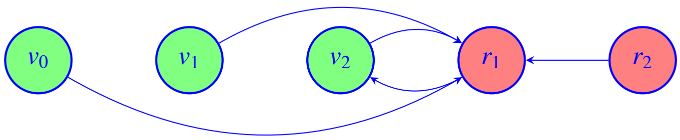
✎ *Un modèle :* $\mathcal{M}_1 = \langle D_1, V_1, R_1, P_1\rangle$, *avec* $D_1 = \{v_0, v_1, v_2, r_1, r_2\}$ *et*

$$V_1 = \{v_0, v_1, v_2\}, \quad R_1 = \{r_1, r_2\}, \quad P_1 = \{(v_0, r_1), (v_1, r_1), (v_2, r_1), (r_1, v_2), (r_2, r_2)\}.$$



Un contre-modèle : $\mathcal{M}_1 = \langle D_1, V_1, R_1, P_1\rangle$, *avec* $D_1 = \{v_0, v_1, v_2, r_1, r_2\}$ *et*

$$V_1 = \{v_0, v_1, v_2\}, \quad R_1 = \{r_1, r_2\}, \quad P_1 = \{(v_0, r_1), (v_1, r_1), (v_2, r_1), (r_1, v_2), (r_2, r_1)\}.$$



Exercice 5. Démontrez le séquent : $E(0), \forall x(E(x) \to E(s(x))) \vdash \exists y E(s(s(y)))$.

✎ *Pour des raisons de mise en page, on a*

— *scindé la dérivation en deux dérivations ;*

— *omis les parenthèses autour des arguments de fonctions — on a noté par exemple* sx, $s0$ *et* $ss(y)$ *plutôt que* $s(x)$, $s(0)$ *et* $s(s(y))$ *;*

— *omis la formule universelle dans les hypothèses lorsqu'on ne voulait plus la réutiliser. Par exemple, dans l'application de la règle* $G_\forall$ *de la dérivation* $(*)$*, on a écrit*

$$\frac{E(0),\ E(s0) \to E(ss0),\ E(s0) \ \vdash\ E(ss0)}{E(0),\ \forall x(E(x) \to E(sx)),\ E(s0) \ \vdash\ E(ss0)}\, G_\forall$$

plutôt que

$$\frac{E(0),\ \forall x(E(x) \to E(sx)),\ E(s0) \to E(ss0),\ E(s0) \ \vdash\ E(ss0)}{E(0),\ \forall x(E(x) \to E(sx)),\ E(s0) \ \vdash\ E(ss0)}\, G_\forall$$

Voici une dérivation possible du séquent proposé.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(*)}{E(0),\ \forall x(E(x) \to E(sx)),\ E(s0) \ \vdash\ E(ss0)} \qquad \dfrac{}{E(0),\ \forall x(E(x) \to E(sx)) \ \vdash\ E(0),\ E(ss0)}\, Ax}{E(0),\ \forall x(E(x) \to E(sx)),\ E(0) \to E(s0) \ \vdash\ E(ss0)}\, G_\to}{E(0),\ \forall x(E(x) \to E(sx)) \ \vdash\ E(ss0)}\, G_\forall}{E(0),\ \forall x(E(x) \to E(sx)) \ \vdash\ \exists y E(ssy)}\, D_\exists$$

où $(*)$ *est la dérivation suivante :*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{E(0),\ E(s0) \ \vdash\ E(s0),\ E(ss0)}\, Ax \qquad \dfrac{}{E(0),\ E(ss0),\ E(s0) \ \vdash\ E(ss0)}\, Ax}{E(0),\ E(s0) \to E(ss0),\ E(s0) \ \vdash\ E(ss0)}\, G_\to}{E(0),\ \forall x(E(x) \to E(sx)),\ E(s0) \ \vdash\ E(ss0)}\, G_\forall$$

Annexe - règles du calcul des séquents

Axiomes	$\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi, \Delta}\, Ax$	
$\bot$	$\dfrac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\, G_\bot$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \bot, \Delta}\, D_\bot$
$\top$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \top \vdash \Delta}\, G_\top$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\, D_\top$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}\, G_\neg$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\varphi, \Delta}\, D_\neg$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}\, G_\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi, \Delta}\, D_\wedge$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}\, G_\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Delta}\, D_\vee$
$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \vdash \Delta}\, G_\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi, \Delta}\, D_\rightarrow$
$\forall$	$\dfrac{\Gamma, \varphi_{[x \leftarrow t]} \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta}\, G_\forall$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x \varphi, \Delta}\, D_\forall$, x non libre dans Γ, Δ
$\exists$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}\, G_\exists$, x non libre dans Γ, Δ	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_{[x \leftarrow t]}, \Delta}{\Gamma \vdash \exists x \varphi, \Delta}\, D_\exists$
Affaiblissement	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}\, G_{aff}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}\, D_{aff}$
Contraction	$\dfrac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}\, G_{cont}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}\, G_{cont}$