L3 Informatique – AMU — Logique
2020/21 — SIN5U06L

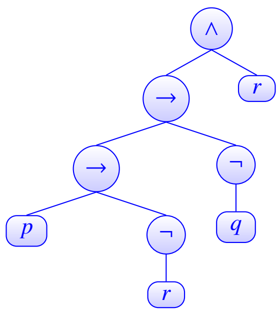
Partiel – 23 octobre 2020

Durée : 2h – documents interdits

Exercice 1. On considère la formule $\varphi = ((p \to \neg r) \to \neg q) \wedge r$.

1) Représentez son arbre syntaxique et listez ses sous-formules.

✎



Les sous-formules de φ correspondent aux sommets de l'arbre syntaxique. On les énumère ici dans l'ordre obtenu par le parcours en profondeur de cet arbre, en évitant de répéter des sous-formules qui apparaissent plusieurs fois.

$$SF(\varphi) = \left\{ p,\ r,\ \neg r,\ p \to \neg r,\ q,\ \neg q,\ (p \to \neg r) \to \neg q,\ r,\ ((p \to \neg r) \to \neg q) \wedge r \right\}.$$

2) Calculez tous les modèles de φ, par la méthode de votre choix.

✎ *Modèles de φ :*

p	q	r
0	0	1
1	0	1
1	1	1

3) A-t-on $\varphi \models p \vee \neg q$? (Justifiez votre réponse.)

✎ *Rappelons que $\varphi \models p \vee \neg q$ signifie que tout modèle de φ est un modèle de $p \vee \neg q$. Or on vérifie facilement que chacune des trois valuations listées plus haut satisfait p ou contredit q, et donc, est un modèle de $p \vee \neg q$. Ainsi, $\varphi \models p \vee \neg q$.*

Exercice 2.

1) Définissez précisément les notions suivantes :

   (a) littéral ; (b) clause ; (c) forme normale conjonctive.

2) Ecrivez la formule suivante sous forme clausale :

$$\theta = \big(p \to ((q \vee r) \wedge s)\big) \wedge \neg\big((r \wedge (p \vee s)) \to q\big)$$

✎

$$\begin{aligned}
\theta &\equiv \big(\neg p \vee ((q \vee r) \wedge s)\big) \wedge \big((r \wedge (p \vee s)) \wedge \neg q\big) \\
&\equiv \big((\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee s)\big) \wedge \big(r \wedge (p \vee s) \wedge \neg q\big) \\
&\equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee s) \wedge r \wedge (p \vee s) \wedge \neg q
\end{aligned}$$

Exercice 3. Déterminez la satisfaisabilité de l'ensemble de clauses suivant à l'aide de l'algorithme DPLL.

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{lll} \neg a \vee b \vee d, & \neg b \vee c \vee d, & a \vee \neg c \vee d, \\ a \vee \neg b \vee \neg d, & b \vee \neg c \vee \neg d, & \neg a \vee c \vee \neg d, \\ a \vee b \vee c, & \neg a \vee \neg b \vee \neg c & \end{array} \right\}.$$

✎ *L'exécution de DPLL, représentée sur la Figure 3, permet de conclure que Σ n'est pas satisfaisable.*

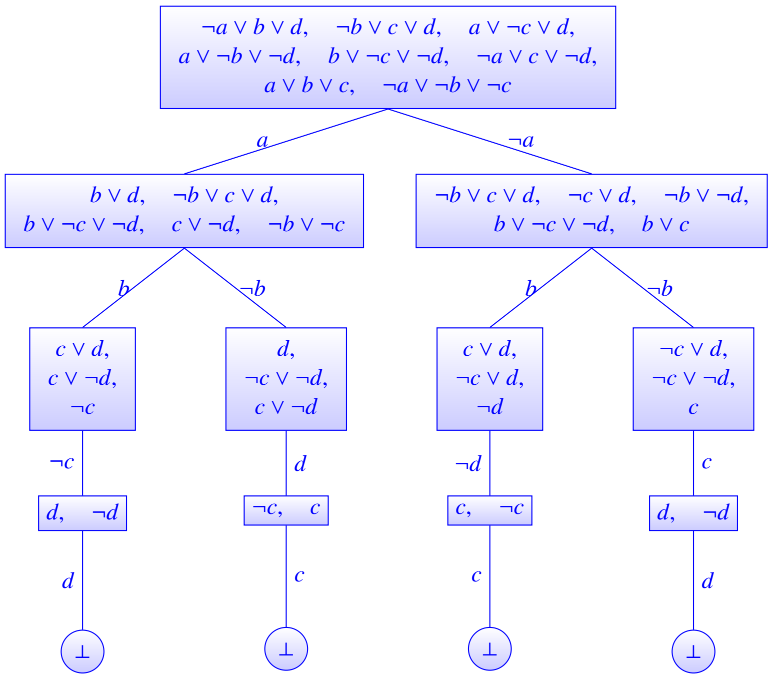


Figure 3 – DPLL sur Σ

Exercice 4. Prouvez le séquent : $\neg(p \to q) \vdash p \wedge \neg q$.

✎

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash q, p}\,Ax}{\vdash p \to q, p}\,D_\to}{\neg(p \to q) \vdash p}\,G_\neg \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, q \vdash q}\,Ax}{p \vdash q, \neg q}\,D_\neg}{\vdash p \to q, \neg q}\,D_\to}{\neg(p \to q) \vdash \neg q}\,G_\neg}{\neg(p \to q) \vdash p \wedge \neg q}\,D_\wedge$$

Exercice 5. Dans la perspective d'un repas de fête, on cherche à concevoir un plan de table, c'est-à-dire à prévoir la répartition des invités autour de la table. On dispose de la liste F des convives féminins et de la liste M des convives masculins.

Pour modéliser ce problème, on utilise les variables $p_{x,y}$, pour $x, y \in F \cup M$, exprimant le fait que les personnes x et y sont voisines. Puisque cette relation est symétrique, on suppose que la formule suivante est satisfaite :

$$\bigwedge_{x,y\in F\cup M} \left(p_{x,y} \leftrightarrow p_{y,x}\right).$$

Vous n'avez donc pas à vous préoccuper des problèmes de symétrie dans les questions qui suivent.

Exprimez par des formules propositionnelles les contraintes suivantes.

1) Deux hommes ne sont jamais assis côte à côte.

✎ $\bigwedge_{x,y\in M} \neg p_{x,y}$.

2) Chaque femme est assise à côté d'au moins un homme.

✎ $\bigwedge_{x\in F} \bigvee_{y\in M} p_{x,y}$.

3) Personne n'est assis tout seul.

✎ $\bigwedge_{x\in F\cup M} \bigvee_{y\in F\cup M} p_{x,y}$.

4) On ne peut-être assis à côté de soi-même.

✎ $\bigwedge_{x\in F\cup M} \neg p_{x,x}$.

5) Il existe une femme assise à côté de deux hommes.

✎ $\bigvee_{x\in F} \bigvee_{\substack{y,z\in M\\ y\neq z}} \left(p_{x,y} \wedge p_{x,z}\right)$.

6) Il existe une femme assise à côté d'au plus un homme.

✎ $$\bigvee_{x\in F, y\in H} \left(p_{x,y} \wedge \bigwedge_{\substack{z\in H\\ z\neq y}} \neg p_{x,z} \right).$$

7) Personne n'est assis auprès de plus de deux personnes.

✎ $$\bigwedge_{x\in F\cup M} \bigwedge_{\substack{y,z\in F\cup M\\ y\neq z}} \left(\left(p_{x,y} \wedge p_{x,z}\right) \to \bigwedge_{\substack{t\in F\cup M\\ t\neq y, t\neq z}} \neg p_{x,t} \right).$$

Exercice 6. Soient $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_0$ et $\varphi \in \mathcal{F}_0$. Montrez l'équivalence :

$$\Gamma \models \varphi \ \text{ ssi } \ \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \models \bot\ .$$

✎ *Si $\Sigma \models \varphi$, alors tout modèle de Σ est modèle de φ et donc n'est pas modèle de $\neg\varphi$. Par conséquent $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ n'a pas de modèle, ce qui s'écrit bien : $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \models \bot$.*

Réciproquement, $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \models \bot$ signifie que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ n'a pas de modèle et donc que toute valuation qui satisfait Σ invalide $\neg\varphi$. En d'autres termes : tout modèle de Σ est un modèle de φ, ce qui s'écrit $\Sigma \models \varphi$.