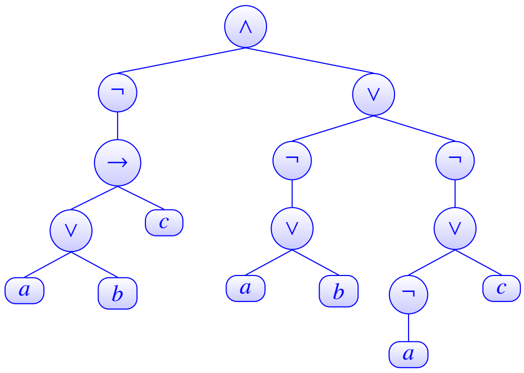
Partiel – 22 octobre 2021

Durée : 2h – documents interdits

Exercice 1. On considère la formule $\varphi = \big(\neg((a \vee b) \to c) \;\wedge\; (\neg(a \vee b) \vee \neg(\neg a \vee c))\big)$.

1) Représentez son arbre syntaxique et listez ses sous-formules.

✎



Les sous-formules de φ correspondent aux sommets de l'arbre syntaxique. On les énumère ici dans l'ordre obtenu par le parcours en profondeur de cet arbre, en évitant de répéter des sous-formules qui apparaissent plusieurs fois.

$$SF(\varphi) = \left\{ \begin{array}{c} a, \quad b, \quad a \vee b, \quad c, \quad (a \vee b) \to c, \quad \neg((a \vee b) \to c), \\ \neg(a \vee b), \quad \neg a, \quad \neg a \vee c, \quad \neg(\neg a \vee c), \quad \neg(a \vee b) \vee \neg(\neg a \vee c) \\ \neg\big((a \vee b) \to c\big) \wedge \big(\neg(a \vee b) \vee \neg(\neg a \vee c)\big) \end{array} \right\}$$

2) Calculez tous ses modèles et représentez-les sous forme de tableau.

✎ *Il y avait plusieurs manières de calculer les modèles — table de vérité, algorithme de Quine, … On trouve les deux modèles suivants :*

a	b	c
1	0	0
1	1	0

3) Cette formule est-elle satisfaisable ? Est-elle tautologique ? Est-elle contingente ?

✎ *La formule φ est satisfaisable (puisqu'elle a un modèle), non tautologique (puisque certaines valuations ne la satisfont pas) et donc contingente.*

4) Calculez sa forme clausale.

✎
$$\begin{aligned} \varphi &= \neg((a \vee b) \to c) \;\wedge\; (\neg(a \vee b) \vee \neg(\neg a \vee c)) \\ &\equiv ((a \vee b) \wedge \neg c) \;\wedge\; ((\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge \neg c)) \\ &\equiv (a \vee b) \wedge \neg c \;\wedge\; ((\neg a \vee a) \wedge (\neg a \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee a) \wedge (\neg b \vee \neg c)) \\ &\equiv (a \vee b) \wedge \neg c \wedge (\neg a \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee a) \wedge (\neg b \vee \neg c) \\ &\equiv (a \vee b) \wedge \neg c \wedge (\neg b \vee a) \end{aligned}$$

La dernière équivalence est obtenue en supprimant les clauses $(\neg a \lor \neg c)$ et $(\neg b \lor \neg c)$ qui sont subsumées par la clause $\neg c$. De plus, on peut encore simplifier cette forme clausale en remarquant que la conjonction $(a \lor b) \land (\neg b \lor a)$ est équivalente à la clause a, d'où l'on tire finalement :

$$\varphi \equiv a \land \neg c.$$

Exercice 2. On pose : $\Sigma = \{b \lor \neg d,\ \neg c \lor d,\ c \lor \neg e,\ \neg b \lor e,\quad b \lor c \lor d \lor e,\ \neg b \lor \neg c \lor \neg d \lor \neg e\}$.

Prouvez par résolution que $\Sigma \models \bot$.

Exercice 3. Déterminez la satisfaisabilité de l'ensemble de clauses ci-dessous à l'aide de l'algorithme DPLL.

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \neg a \lor b, & \neg c \lor \neg d \lor \neg e \lor \neg f, & \neg b \lor c \lor \neg e, & c \lor d \lor e \lor f, & \neg b \lor \neg c \lor f \\ a \lor \neg f, & \neg a \lor \neg b \lor d \lor \neg f, & a \lor \neg c \lor d, & a \lor b \lor \neg e \lor f, & \neg d \lor e \end{array} \right\}.$$

Exercice 4. Prouvez le séquent : $\quad a \to b,\ c \lor \neg b\ \vdash\ c,\ \neg a.$

(Les règles du calcul des séquents sont en annexe, au dos de la feuille.)

✎

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{c \lor \neg b,\ \neg a\ \vdash\ c,\ \neg a}\,\mathsf{Ax}}{c \lor \neg b\ \vdash\ a,\ c,\ \neg a}\,D_\neg \qquad \dfrac{\dfrac{}{b,\ c\ \vdash\ c,\ \neg a}\,\mathsf{Ax} \quad \dfrac{\dfrac{}{\neg b\ \vdash\ \neg b,\ c,\ \neg a}\,\mathsf{Ax}}{b,\ \neg b\ \vdash\ c,\ \neg a}\,G_\neg}{b,\ c \lor \neg b\ \vdash\ c,\ \neg a}\,G_\lor}{a \to b,\ c \lor \neg b\ \vdash\ c,\ \neg a}\,G_\to$$

Exercice 5. On dispose d'un échiquier à quatre lignes et quatre colonnes. On veut placer quatre reines sur cet échiquier de telle sorte que deux reines distinctes ne soient pas en prise, c'est-à-dire qu'elle ne soient ni sur la même ligne, ni sur la même colonne, ni sur une même diagonale.

On choisit de modéliser ce problème avec 16 variables propositionnelles r_{ij} (avec $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$) interprétées comme suit :

r_{ij} est vraie s'il y a une reine sur la ligne i et la colonne j.

Modélisez le problème « placer quatres reines sur l'échiquier de sorte qu'aucune ne soit en prise » en utilisant ces variables. Pour cela, **exprimez chaque contrainte par une phrase en français puis traduisez-la par une formule de logique propositionnelle.**

Indication : notez que deux reines en positions respectives (i, j) et (i', j') sont sur la même diagonale si et seulement si $|i - i'| = |j - j'|$.

✎ 1. *Une reine sur chaque ligne :*

$$\bigwedge_{i \in [1,4]} \bigvee_{j \in [1,4]} r_{ij}.$$

2. *Au plus une reine par ligne :*

$$\bigwedge_{i \in [1,4]} \bigwedge_{\substack{j, j' \in [1,4] \\ j \neq j'}} r_{ij} \to \neg r_{ij'}.$$

3. *Au plus une reine par colonne :*

$$\bigwedge_{j \in [1,4]} \bigwedge_{\substack{i, i' \in [1,4] \\ i \neq i'}} r_{ij} \to \neg r_{i'j}.$$

4. *Au plus une reine par diagonale :*

$$\bigwedge_{i, j \in [1,4]} \bigwedge_{\substack{i', j' \in [1,4] \\ |i - i'| = |j - j'|}} r_{ij} \to \neg r_{i'j'}.$$

Annexe - les règles du calcul des séquents

Axiomes	$\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi, \Delta}\,Ax$	
Connecteur	Gauche	Droite
$\perp$	$\dfrac{}{\Gamma, \perp \vdash \Delta}\,G_\perp$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \perp, \Delta}\,D_\perp$
$\top$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \top \vdash \Delta}\,G_\top$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\,D_\top$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}\,G_\neg$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\varphi, \Delta}\,D_\neg$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}\,G_\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi, \Delta}\,D_\wedge$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}\,G_\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Delta}\,D_\vee$
$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \vdash \Delta}\,G_\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi, \Delta}\,D_\rightarrow$