

## Partiel – 23 octobre 2020

*Durée : 2h – documents interdits*

**Exercice 1.** On considère la formule  $\varphi = ((p \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg q) \wedge r$ .

- 1) Représentez son arbre syntaxique et listez ses sous-formules.
- 2) Calculez tous les modèles de  $\varphi$ , par la méthode de votre choix.
- 3) A-t-on  $\varphi \models p \vee \neg q$ ? (Justifiez votre réponse.)

**Exercice 2.**

- 1) Définissez précisément les notions suivantes :  
(a) littéral; (b) clause; (c) forme normale conjonctive.
- 2) Ecrivez la formule suivante sous forme clausale :

$$\theta = (p \rightarrow ((q \vee r) \wedge s)) \wedge \neg((r \wedge (p \vee s)) \rightarrow q)$$

**Exercice 3.** . Déterminez la satisfaisabilité de l'ensemble de clauses suivant à l'aide de DPLL.

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{lll} \neg a \vee b \vee d, & \neg b \vee c \vee d, & a \vee \neg c \vee d, \\ a \vee \neg b \vee \neg d, & b \vee \neg c \vee \neg d, & \neg a \vee c \vee \neg d, \\ a \vee b \vee c, & \neg a \vee \neg b \vee \neg c & \end{array} \right\}.$$

**Exercice 4.** Prouvez le séquent :  $\neg(p \rightarrow q) \vdash p \wedge \neg q$ .

**Exercice 5.** Dans la perspective d'un repas de fête, on cherche à concevoir un plan de table, c'est-à-dire à prévoir la répartition des invités autour de la table. On dispose de la liste  $F$  des convives féminins et de la liste  $M$  des convives masculins.

Pour modéliser ce problème, on utilise les variables  $p_{x,y}$ , pour  $x, y \in F \cup M$ , exprimant le fait que les personnes  $x$  et  $y$  sont voisines. Puisque cette relation est symétrique, on suppose que la formule suivante est satisfaite :

$$\bigwedge_{x,y \in F \cup M} (p_{x,y} \leftrightarrow p_{y,x}).$$

Vous n'avez donc pas à vous préoccuper des problèmes de symétrie dans les questions qui suivent.

Exprimez par des formules propositionnelles les contraintes suivantes.

- 1) Deux hommes ne sont jamais assis côte à côte.
- 2) Chaque femme est assise à côté d'au moins un homme.
- 3) Personne n'est assis tout seul.
- 4) On ne peut-être assis à côté de soi-même.
- 5) Il existe une femme assise à côté de deux hommes.
- 6) Il existe une femme assise à côté d'au plus un homme.
- 7) Personne n'est assis auprès de plus de deux personnes.

**Exercice 6.** Soient  $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_0$  et  $\varphi \in \mathcal{F}_0$ . Montrez l'équivalence :

$$\Gamma \models \varphi \text{ ssi } \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \models \perp.$$

### Annexe - les règles du calcul des séquents

Axiomes	$\overline{\Gamma, \varphi \vdash \varphi, \Delta}$	
Connecteur	Gauche	Droite
$\perp$	$\frac{}{\Gamma, \perp \vdash \Delta} G_{\perp}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \perp, \Delta} D_{\perp}$
$\top$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \top \vdash \Delta} G_{\top}$	$\frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta} D_{\top}$
$\neg$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma, \neg \varphi \vdash \Delta} G_{\neg}$	$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \varphi, \Delta} D_{\neg}$
$\wedge$	$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta} G_{\wedge}$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \quad \Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi, \Delta} D_{\wedge}$
$\vee$	$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta} G_{\vee}$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Delta} D_{\vee}$
$\rightarrow$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \vdash \Delta} G_{\rightarrow}$	$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi, \Delta} D_{\rightarrow}$