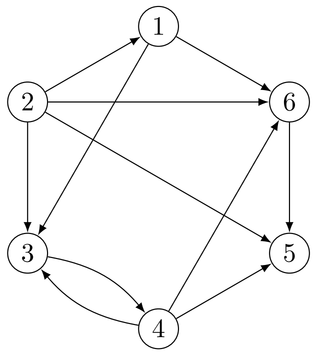
Aix*Marseille université	Domaine Sciences et Technologies LICENCE 3 INFORMATIQUE **Algorithmique 2 : TD 1** **Code UE : SIN5U03C**
Année 2018-19	**Graphes, représentation et parcours**

Exercice 1 (Représentation d'un graphe)

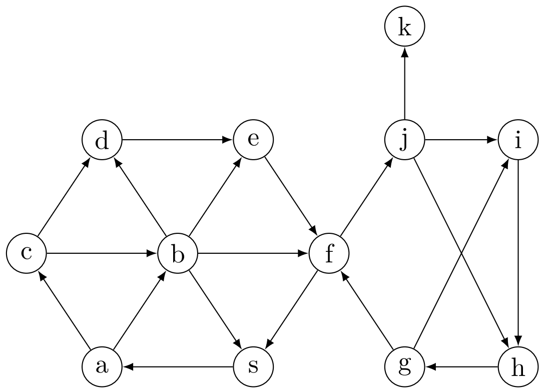
Décrivez picturalement la représentation du graphe suivant, selon un codage par liste d'incidence ou par matrice d'adjacence.



Exercice 2 (Le loup, le bouc, et le chou) Un passeur se trouve sur le bord d'un fleuve. Il doit faire passer de l'autre côté un loup, un bouc et un choux, mais ne peut transporter qu'un seul des trois à chaque traversée. Peut-il y arriver, sachant qu'il ne peut pas laisser seuls ensemble ni le loup et le bouc, ni le bouc et le chou ? Si oui, comment procéder de la façon la plus rapide ? Modéliser le problème comme un problème de plus court chemin dans un graphe orienté.

Exercice 3 (Parcours en largeur et en profondeur)

Trouver les arborescences des parcours en largeur et en profondeur (ainsi que les dates de début et les dates de fin) depuis le sommet s dans le graphe G suivant. (Pour traiter les cas d'égalité, on considère les listes d'adjacences triées alphabétiquement).



Trouver les composantes fortement connexes du graphe G.

Exercice 4 (Tri topologique)

Étant donné un graphe orienté acyclique G (*i.e.* qui ne possède pas de cycle), on veut trouver un ordre linéaire total des sommets de G (autrement dit, on veut numéroter les sommets de 1 à n, ce qui définit une relation d'ordre total, $u < v$ si l'indice de u est plus petit que l'indice de v), tel que cet ordre vérifie la propriété :

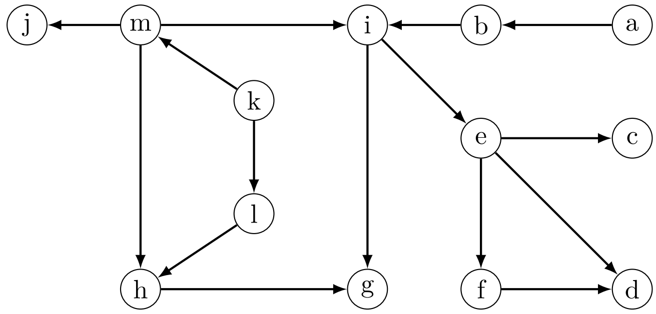
$$\text{pour tout arc } e = (u, v) \text{ de } G,\ u < v$$

Ce tri permet d'ordonnancer des tâches à effectuer en présence de contrainte de précédence, du type la tâche A doit être faite avant la tâche B. C'est typiquement le cas lors de la compilation de projets avec plusieurs fichiers qui dépendent les uns des autres, `make` par exemple utilise un tri topologique pour décider de l'ordre de compilation.

L'algorithme utilisé est un simple parcours en profondeur. On utilise une liste pour contenir les sommets triés, initialement vide. Chaque sommet u est inséré en tête de la liste dès que tous les appels récursifs sur les arcs sortants de u sont terminés. De manière équivalente u est inséré dès que u a été visité et que tous ses voisins sortants sont insérés. S'il reste à la fin un sommet non-parcouru, on relance le parcours en profondeur depuis ce sommet, jusqu'à ce que tous les sommets soient parcourus. La liste finale donne l'ordre.

(a) Montrer que si le graphe comporte un cycle, un tel ordre n'existe pas.

(b) Ordonner le graphe suivant.



(c) Donner en pseudocode la fonction tri_topologique.

(d) Quelle est la complexité de cet algorithme ?

(e) Que peut-on dire de l'ordre topologique, par rapport à l'arbre du parcours en profondeur ?

Exercice 5 (Nombre de tris topologiques) Soit C le graphe orienté de sommets $\{a, b, c, d, e\}$ et d'arcs $\{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{be}, \overrightarrow{cd}, \overrightarrow{de}\}$. Enumérer tous les tris topologiques de ce graphe.

Exercice 6 (Plus longs chemins dans un graphe acyclique) On veut calculer la longueur d'un plus long chemin orienté dans un graphe orienté acyclique G. Supposons que pour tout sommet v on a pas seulement la liste $\mathrm{Adj}[v]$ des arcs sortants mais aussi la liste $\mathrm{Pred}[v]$ des arcs entrants. Soit $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un tri topologique des sommets de G. Pour tout sommet v_i soit $l(v_i)$ la longueur d'un plus long chemin arrivant en v_i et soit $\pi(v_i)$ le voisin de v_i sur ce chemin.

(a) Donner une formule de récurrence pour calculer $l(v_i)$ et $\pi(v_i)$?

(b) Donner en pseudo-code l'algorithme de calcul d'un plus long chemin ?

(c) Quelle est sa complexité ?

(d) Comment faire si seulement les listes $\mathrm{Adj}[v]$ sont disponibles (donc pas des listes $\mathrm{Pred}[v]$) ?

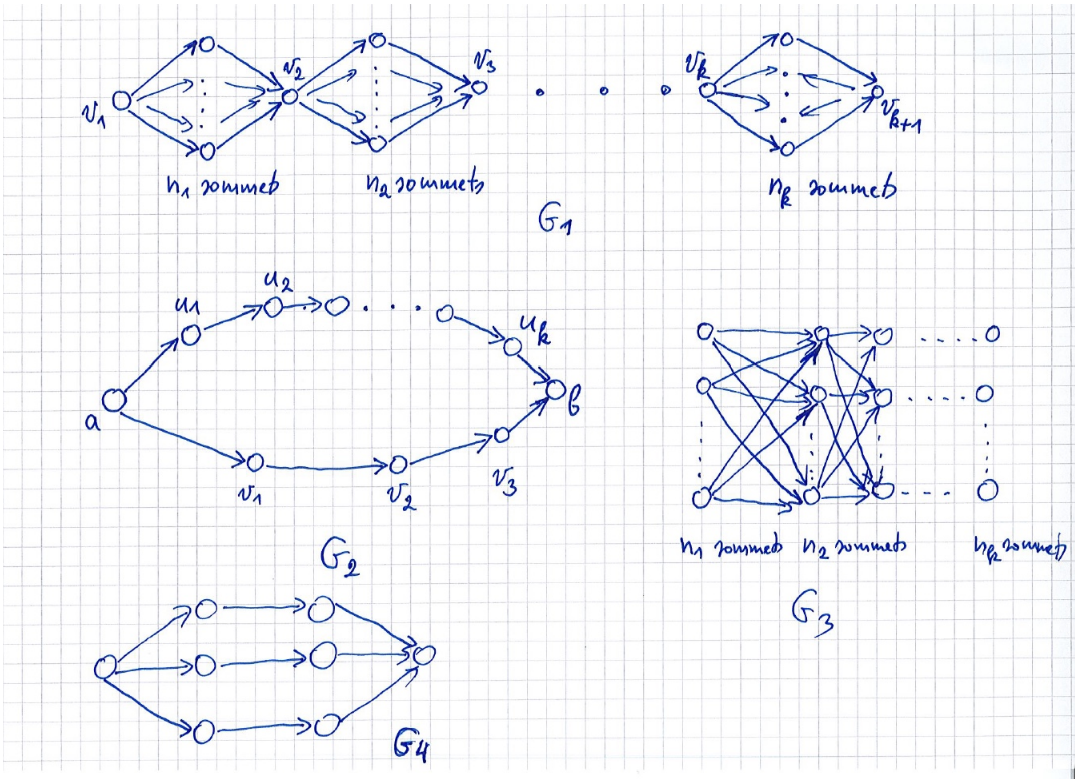
Exercice 7 (Planification de travaux) Pour rénover une maison, il est prévu de refaire l'installation électrique (3 jours), de réaménager (5 jours) et de carreler (2 jours) la salle de bains, de refaire le parquet de la salle de séjour (6 jours) et de repeindre les chambres (3 jours). La peinture et le carrelage ne devant être faits qu'après la réfection de l'installation électrique. Aussi, le carrelage doit être fait après le réaménagement de la salle de bain.

(a) Définir le graphe des dépendences des travaux et définir la ponderation des arcs.

(b) Supposons que la rénovation est faite par une entreprise et que chacune des tâches est accomplie par un employé différent. Quelle est la durée minimale des travaux ? Justifier.

(c) Comment calculer la durée minimale des travaux pour un projet de réaménagement quelconque (disons, pour le plan Campus de Luminy) ?

Exercice 8 (Nombre de tris topologiques, la suite ...) Compter le nombre de tris topologiques des graphes G_1, G_2, G_3 et G_4 dessinés sur la figure suivante :



Exercice 9 (Recette du Tiramisu) Pour cuisiner un tiramisu, on doit réaliser les tâches suivantes : (i) séparer les blancs des jaunes d'oeufs. (2 minutes) (ii) mélanger les jaunes avec le sucre roux et le sucre vanillé (1 minutes) ; (iii) ajouter le mascarpone au fouet (1 minutes) ; (iv) monter les blancs en neige (2 minutes) ; (v) incorporer les blancs au mélange précédent et réserver (3 minutes) ; (vi) mouiller les biscuits dans le café rapidement avant d'en tapisser le fond du plat (3 minutes) ; (vii) recouvrir d'une couche de crème au mascarpone puis répéter l'opération en alternant couche de biscuits et couche de crème en terminant par cette dernière (4 minutes) ; (viii) saupoudrer de cacao (15 secondes) ; (ix) mettre au réfrigérateur (4 heures).

(a) Définir (grâce à vos talents de cuisinier ou à votre bon sens) le graphe de dépendances entre les tâches et définir la pondération des arcs.

(b) Supposons que la recette est faite par un seul cuisinier. Quelle est la durée minimale de préparation ? Justifier.

(c) Comment calculer la durée minimale de réalisation de la recette dans le cas où l'on dispose d'une brigade de cuisiniers suffisamment grande pour pouvoir paralléliser le travail autant que possible ?