L3 Informatique — Logique
2020/21

TD n° 5

CP : modélisation

Exercice 1. Xavier appelle la police pour signaler un cambriolage. Après son témoignage, la police a établi les faits suivant :

(*a*) Il y a 3 suspects. Chacun des trois collègues de Xavier — Albert, Bertrand et Charles — sont entrés dans le bureau le jour du vol et personne d'autre ne peut être coupable.

(*b*) Si Albert est coupable, alors il a un et un seul complice.

(*c*) Si Bertrand est innocent alors Charles l'est aussi.

(*d*) S'il y a deux coupables (et deux seulement), alors Albert est l'un d'entre eux.

(*e*) Si Charles est innocent alors Bertrand l'est aussi.

1) Proposez des variables propositionnelles pour représenter le problème (vous expliciterez ce que modélise chaque variable).

2) Représenter les différents faits du problème à l'aide de formules propositionnelles.

3) Donner la représentation clausale (CNF) du problème.

4) Quelle question faudrait-il poser pour savoir si A est coupable ? Pour savoir si A est innocent ?

5) L'ensemble de clause est-il consistant ? Qu'en déduisez vous ?

Exercice 2. On dispose de n variables propositionnelles $x_1, \ldots x_n$. Chaque x_i modélise le fait que la personne i ment. Représentez les assertions suivantes par des formules propositionnelles.

1) il existe un menteur.

2) tout le monde ment.

3) personne ne ment.

4) il y a exactement un menteur.

5) au moins deux personnes mentent.

6) exactement deux personnes mentent.

Exercice 3. Le principe des tiroirs de Dirichlet (the pigeonhole principle en anglais) dit que si n chaussettes (pigeons) occupent m tiroirs (nichoirs) et $n > m$, alors au moins un tiroir (nichoir) contient plus d'une chaussette (pigeon). Écrire une formule propositionnelle en CNF pour le principe des tiroirs qui dit : chaque chaussette se retrouve dans un tiroir et chaque tiroir contient au plus une chaussette (on sait alors que la formule est non-satisfaisable.)

Exercice 4. Alain, Bernard, Chloé et Didier occupent les quatre premières places d'un concours sans ex-aequo. On cherche la place exacte de chacun, sachant que : *i*) Alain n'est pas premier ; *ii*) Bernard est deux places derrière Chloé ; *iii*) Didier est derrière Alain.

1) Représenter le problème sous forme d'un ensemble de formules propositionnelles (attention aux contraintes cachées).

2) Écrire ces formules sous forme clausale.

Exercice 5 (*Modélisation d'un concours de danse*)**.** Six personnes souhaitent faire un concours de tango : trois hommes : Albert, Bruno, Clément ; trois femmes : Delphine, Eva, Frida. Ces personnes ont les affinités suivantes :

a) Albert apprécie Delphine et Frida

b) Bruno apprécie Eva

c) Clément apprécie Delphine et Eva

d) Delphine apprécie Bruno et Clément

e) Eva apprécie Albert et Bruno

f) Frida apprécie Albert et Clément

Le Tango se danse en couple mixte : un homme et une femme. Le but est de savoir si il est possible de composer 3 couples pour un concours de tango de façon à ce que chacun(e) danse avec une personne qu'il (qu'elle) aime bien. Vous allez donc devoir construire un ensemble de formule Γ satisfaisable ssi le concours est possible.

1) Choisissez les variables propositionnelles nécessaires en expliquant leur rôle.

2) Décrivez par des phrases en français l'ensemble des contraintes et traduisez chacune des phrases par une formule de la logique propositionnelle. Attention, chaque formule doit correspondre exactement à la phrase énoncée.

3) Déduisez-en l'ensemble Γ. Déterminez par la méthode de votre choix si Γ est satisfaisable, et le cas échéant, donnez en un modèle. Il n'est pas nécessaire de justifier votre réponse.

Exercice 6. Le père Noël a N jouets : $J_1, \ldots, J_N$ qu'il veut donner à M enfants : $E_1, \ldots, E_M$. De plus, il possède pour chacun des enfants sa liste de vœux. Vous êtes les lutins chargés d'emballer les cadeaux et de choisir les destinataires en vous assurant que tous les enfants seront contents. Un enfant sera content s'il reçoit au moins un cadeau de sa liste. Tous les cadeaux doivent être distribués. Modéliser ce problème en calcul propositionnel. Décrire soigneusement les suppositions faites ainsi que les variables et les clauses introduites.

Exercice 7 (*Coloration de graphe*)**.** Pour un entier $k \geq 2$, on dit qu'un graphe est k-coloriable si on peut colorier ses sommets avec k couleurs de sorte que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur.

En 1977, Appel et Haken ont prouvé le Théorème des 4 couleurs : « Tout graphe planaire fini est 4-coloriable. »

Le but de l'exercice est de prouver la généralisation de ce théorème aux graphes infinis. Étant donné un graphe planaire $G = (V, E)$, on considère l'ensemble des variables propositionnelles x_i pour $x \in V$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. On interprétera la variable x_i comme « le sommet x est colorié par i ».

1) Ecrire une formule C_x exprimant le fait que le sommet x admet une et une seule couleur.

2) Ecrire une formule $A_{x,y}$ exprimant le fait que les sommets x et y sont de couleur différente.

3) En supposant que G est fini, donnez une formule φ_G telle que (φ_G est satisfaisable ssi G est 4-coloriable).

4) On suppose maintenant que G est infini. Construisez un ensemble Γ_G de formules tel que Γ_G est consistant ssi G est 4-coloriable.

5) Montrez que Γ_G est logiquement équivalent à l'ensemble de formules

$$\Sigma_G = \{\varphi_H \text{ t.q. } H \text{ est un sous-graphe fini de } G\}.$$

6) En utilisant le Théorème des 4 couleurs et le Théorème de compacité, démontrez que tout graphe planaire infini est 4-coloriable.