4.5.6 La conséquence logique (d'un ensemble de formules)

Les formules propositionnelles peuvent être vues comme des contraintes sur les propositions atomiques. Par exemple, $p \wedge q$ contraint p et q à être vraies, ou $p \Rightarrow q$ contraint q à être vraie toute fois que p est vraie. Il est donc très courant de considérer des ensembles de formules propositionnelles pour modéliser des problèmes de satisfaction de contraintes. Une valuation satisfaisant toute formule de l'ensemble pourra donc se considérer comme une solution du problème.

On étend les définitions vues précédemment aux ensembles de formules.

Définition 4.51. Soit Γ un ensemble de formules.

1. Un **modèle** de Γ est une valuation v telle que $v(\varphi) = 1$ pour tout $\varphi \in \Gamma$.
2. On note $\mathsf{mod}(\Gamma)$ l'ensemble des modèles de Γ.
3. On dit que Γ est **satisfaisable** (ou **consistant**, ou **cohérent**) si $\mathsf{mod}(\Gamma) \neq \varnothing$;
4. On dit que Γ est **insatisfaisable** (ou **contradictoire**, ou **inconsistant**) si $\mathsf{mod}(\Gamma) = \varnothing$.
5. Une formule φ est conséquence logique de Γ si et seulement si $\mathsf{mod}(\Gamma) \subseteq \mathsf{mod}(\varphi)$, on note alors $\Gamma \models \varphi$.

Voici des relations élémentaires entre les notions que nous venons de présenter.

Proposition 4.52. *Soit Γ, Σ deux ensembles de formules et φ une formule*

1. $\Gamma \models \varphi$ *ssi* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *est contradictoire.*
2. Γ *est contradictoire ssi* $\Gamma \models \perp$.
3. $\mathsf{mod}(\Sigma \cup \Gamma) = \mathsf{mod}(\Sigma) \cap \mathsf{mod}(\Gamma)$.
4. *Si* $\Sigma \subseteq \Gamma$ *alors* $\mathsf{mod}(\Gamma) \subseteq \mathsf{mod}(\Sigma)$

Démonstration. On prouve les points 1 et 3, les autres sont laissés en exercice.

1. On montre que $\Gamma \not\models \varphi$ ssi $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est satisfaisable.
$$\begin{array}{lll} \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ est satisfaisable} & \text{ssi} & \text{il existe } v \text{ tel que } v \in \mathsf{mod}(\Gamma) \text{ et } v(\neg\varphi) = 1 \\ & \text{ssi} & \text{il existe } v \text{ tel que } v \in \mathsf{mod}(\Gamma) \text{ et } v(\varphi) = 0 \\ & \text{ssi} & \text{il existe } v \text{ tel que } v \in \mathsf{mod}(\Gamma) \text{ et } v \notin \mathsf{mod}(\varphi) \\ & \text{ssi} & \Gamma \not\models \varphi. \end{array}$$
3. Cette propriété se comprend bien si on voit un ensemble de formules comme un ensemble de contraintes sur les variables propositionnelles. Plus on ajoute de contraintes, et moins il reste de possibilités pour résoudre ces contraintes. Voici la preuve :
Pour toute valuation v :
$$\begin{array}{lll} v \in \mathsf{mod}(\Sigma \cup \Gamma) & \text{ssi} & \text{pour tout } \varphi \in \Sigma \cup \Gamma, v(\varphi) = 1 \\ & \text{ssi} & \text{pour tout } \varphi \in \Sigma, v(\varphi) = 1 \text{ et pour tout } \psi \in \Gamma,\ v(\psi) = 1 \\ & \text{ssi} & v \in \mathsf{mod}(\Sigma) \text{ et } v \in \mathsf{mod}(\Gamma) \\ & \text{ssi} & v \in \mathsf{mod}(\Sigma) \cap \mathsf{mod}(\Gamma). \end{array}$$
□

4.5.6.1 Compacité

Le théorème de compacité sert à caractériser la conséquence logique dans les cas où l'ensemble des formules est infini en ne considérant que des sous-ensembles finis.

Le théorème de compacité.

Théorème 4.53 (Compacité). *Un ensemble de formules propositionnelles Γ est satisfaisable ssi tout sous-ensemble fini de Γ est satisfaisable.*

Par contraposée, le Théorème de compacité peut s'énoncer de la façon suivante :

Théorème 4.54 (Compacité). *Un ensemble de formules propositionnelles Γ est contradictoire si, et seulement si, il existe un sous-ensemble fini de Γ contradictoire.*

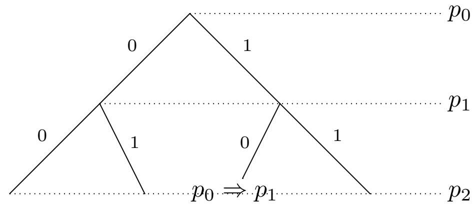

FIGURE 4.5 – Début de l'arbre sémantique pour $\Gamma = \{ p_0 \wedge \neg p_1, p_0 \Rightarrow p_1, \dots \}$ avec le noeud d'échec 10 étiqueté

Remarquons que l'implication « si un sous-ensemble fini de Γ est contradictoire, alors Γ est contradictoire » est trivialement vraie. Nous nous limiterons à prouver l'implication inverse.

Démonstration (du Théorème 4.54). On fait la preuve dans le cas où $\text{PROP} = \{p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ est un ensemble dénombrable.

On commence par construire l'arbre sémantique : c'est un arbre binaire infini dont toutes les arêtes à gauches sont étiquetées par 0 (le « faux ») et celles à droites sont étiquetées par 1 (le « vrai »). Chaque niveau de l'arbre est associé à un symbole propositionnel. La racine (le niveau 0) est associé à p_0 : chaque fois que l'on descend d'un noeud de niveau i, ceci revient à poser p_i faux si l'on descend à gauche, et p_i vrai si l'on descend à droite. Remarquons que :

1. chaque chemin infini π partant de la racine correspond à une valuation v_π de l'ensemble des propositions ;
2. chaque noeud e à profondeur n correspond à une valuation v_e des variables $\{p_0, \dots p_{n-1}\}$.

Un noeud e de l'arbre est appelé *noeud d'échec* s'il existe une formule $\varphi_e \in \Gamma$ telle que $\text{PROP}(\varphi_e) \subseteq \{ p_0, \dots p_{n-1} \}$ et $v_e(\varphi_e) = 0$, où n est la profondeur du noeud e. (Voir Figure 4.5).

On suppose que Γ est inconsistante et on montre qu'il existe un sous-ensemble $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ fini et inconsistant.

On commence par remarquer que chaque branche contient un noeud d'échec. En effet, si une branche n'en contient pas, elle définit un modèle de Γ, ce qui est contradictoire à l'hypothèse.

On peut donc faire la construction suivante : prenons le premier noeud d'échec de chaque branche et étiquetons ce noeud par une formule de Γ fausse sur ce noeud, puis coupons l'arbre au niveau du noeud d'échec. (Plus formellement : si π est une branche de l'arbre sémantique, dénotons par $e(\pi)$ le premier noeud d'échec sur cette branche, et choisissons $\varphi_{e(\pi)} \in \Gamma$ tel que $v_{e(\pi)}(\varphi_{e(\pi)}) = 0$; ensuite, coupons l'arbre de façon que les noeuds $e(\pi)$ deviennent des feuilles de l'arbre.)

L'arbre obtenu en tronquant ainsi toutes les branches est un arbre binaire dont les branches sont finies, et donc admet un nombre fini de sommets (Lemme de König). Le sous-ensemble $\Gamma_0 = \{ \varphi_{e(\pi)} \mid \pi \text{ une branche de l'arbre sémantique} \}$ des formules de Γ étiquetant les feuilles de l'arbre est donc fini. Or toutes les feuilles de l'arbre sont des noeuds d'échec et donc chacune des valuations rend fausse au moins une des formules de Γ_0. (Si $v \in \mathsf{Val}$, alors $v = v_\pi$ pour une branche π de l'arbre, et donc $v(\varphi_{e(\pi)}) = v_\pi(\varphi_{e(\pi)}) = v_{e(\pi)}(\varphi_{e(\pi)}) = 0$.) L'ensemble $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ est donc fini et inconsistant. $\square$

Corollaire 4.55. *Une formule φ est conséquence d'un ensemble de formules Γ si et seulement s'il existe un sous-ensemble fini Γ_{fini} de Γ tel que $\Gamma_{fini} \models \varphi$.*

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
\Gamma \models \varphi \text{ ssi } & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ est contradictoire} && \text{par la Proposition 4.52} \\
\text{ssi } & \text{il existe } \Gamma_f \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ fini et contradictoire} && \text{par le Théorème de compacité} \\
\text{ssi } & \text{il existe } \Gamma_f \subseteq \Gamma \text{ fini tel que } \Gamma_f \cup \{\neg\varphi\} \text{ est contradictoire} && \\
\text{ssi } & \text{il existe un sous-ensemble fini } \Gamma_f \subseteq \Gamma \text{ tel que } \Gamma_f \models \varphi \,. && \square
\end{aligned}
$$