	Domaine Sciences et Technologies LICENCE 3 INFORMATIQUE
Aix*Marseille université	**Algorithmique 2 : TD 3** **Code UE : SIN5U03C**
Année 2018-19	**Extensions du flot maximum**

Exercice 1 (Plus court chemin comme flot de coût minimum) Modéliser le problème de plus court chemin dans un graphe comme un *problème de flot de coût minimum.*

Exercice 2 (Problème d'affectation) Dans l'Exercice 5 du TD2, nous avons modélisé le problème du couplage maximum dans un graphe biparti comme problème de flot maximum. Considerons maintenant le problème de couplage maximum et de coût minimum dans un graphe biparti.

Supposons que chaque arête ab d'un graphe biparti $G = (A \biguplus B, E)$ a un poids positif $q(a, b)$. Imaginons que A est un ensemble d'agents et B est un ensemble des taches B. Une arête ab avec $a \in A$ et $b \in B$ signifie que l'agent a est capable d'effectuer la tâche b et $q(a, b)$ est le prix démandé par l'agent a pour effectuer la tache b.

Le problème d'affectation consiste à attribuer au mieux des tâches à des agents, i.e., à affecter un nombre maximum des tâches à un coût total minimal. Chaque agent peut réaliser au plus une tache tâche et chaque tâche doit être réalisée par un unique agent. Donc le problème est de trouver dans le graphe biparti $G = (A \biguplus B, E)$ un couplage de taille maximum et de coût minimum.

1. Modeliser le problème de couplage maximum de coût minimum dans un graphe biparti comme un *problème de flot maximum de coût minimum* dans un réseau. Deffinisez l'ensemble de sommets, l'ensemble d'arcs, leur capacités et leur coûts.

Exercice 3 (Couverture par des cycles) Étant donné un graphe dirigé fortement connexe (avec une seule composante fortement connexe) $G = (V, A)$ où chaque arc $(u, v) \in A$ a un coût $q(u, v) > 0$, on souhaite couvrir les sommets de G par un ensemble de circuits $C_1, \ldots, C_k$ sommet-disjoints et de coût total minimum. Le coût d'une couverture $C_1, \ldots, C_k$ est la somme des coûts des arêtes de chaque circuit.

1. Formuler ce problème comme un *problème de couplage de coût minimum dans un graphe biparti non-dirigé*. Quels sont les sommets et les arêtes de ce graphe ?

Exercice 4 Un produit doit être transporté depuis des sources (usines) vers des destinations (dépôts, clients). L'objectif est de déterminer la quantité envoyée de chaque source à chaque destination en minimisant les coûts de transport. Les coûts sont proportionnels aux quantités transportées.

Exemple : Une firme automobile a trois usines à Los Angeles, Detroit et La Nouvelle Orléans, et deux centres de distribution à Denver et Miami. Les capacités des trois usines sont de 1000, 1500 et 1200 voitures respectivement, et les demandes aux centres de distribution sont de 2300 et 1400 voitures. Les coûts de transport sont : LA-Denver 80, LA-Miami : 215, Detroit-Denver : 100, Detroit-Miami : 108, Nouvelle Orléans-Denver : 102, Nouvelle Orleans-Miami : 68.

1. Modéliser ce problème comme un *problème de flot de coût minimum.*

Exercice 5 (Enquête consommateurs) Pour organiser une enquête de consommateurs (avec des questions du type « Est-ce que le consommateur i aime le produit j ? »), chaque consommateur i accepte de répondre à un certain nombre de questions, ce nombre étant compris entre c_i et c'_i. Pour chaque produit j on souhaite avoir au moins p_j avis sur le produit mais pas plus de p'_j avis. Chaque consommateur peut être interrogé sur un sous-ensemble des produits qu'il utilise. On suppose qu'on connait en avance tous les produits que chaque consommateur utilise. On souhaite planifier l'enquête (i.e. affecter des questions à chaque consommateur) avec les contraintes sur les $[c_i, c'_i]$ et $[p_j, p'_j]$. Modéliser ce problème comme un *problème de flot avec bornes inf et sup des capacités.*

Exercice 6 (Affectation d'une flotte aérienne – flot maximum avec bornes inférieures)

Une compagnie aérienne a un planning de vols à accomplir. Chaque vol est donné par ses lieux et horaires de départ et d'arrivée, par exemple : de Paris 9h30 vers Marseille 10h30. La compagnie dispose seulement de $k = 3$ avions pour assurer tous ses vols et cherche comment les affecter aux vols afin de remplir tout son planning.

Entre deux vols, les avions doivent subir des opérations de maintenance. De plus, un avion peut voler à vide pour être affecté à un vol partant d'un aéroport différent. Dans les deux cas, cela entraîne un temps d'indisponibilité pour l'avion qui dépend des aéroports en question, et qui est donné par la table suivante :

	Ajaccio	Marseille	Paris	Bordeaux
Ajaccio	1h30	1h30	2h30	2h30
Marseille	1h30	1h	1h30	1h30
Paris	2h30	1h30	1h	2h
Bordeaux	2h30	1h30	2h	1h

Ainsi, un avion qui termine son vol à Ajaccio à 10h et qui est ensuite affecté à un vol partant de Paris ne pourra partir de Paris qu'à 12h30.

Au matin, deux avions sont à Paris et un à Marseille. La liste des vols qui doivent être effectués demain est :

De	horaire	Vers	horaire
Paris	7h00	Marseille	8h00
Paris	7h30	Bordeaux	8h30
Marseille	9h30	Paris	10h30
Marseille	9h30	Ajaccio	10h
Paris	11h	Ajaccio	12h30
Bordeaux	11h	Marseille	12h
Paris	12h	Marseille	13h
Ajaccio	14h	Paris	15h30
Paris	14h	Bordeaux	15h
Marseille	14h30	Paris	15h30
Paris	17h	Marseille	18h
Marseille	17h	Paris	18h

> Modéliser ce problème comme un *problème de flot maximum avec des capacités à la fois inférieures et supérieures.* Pour cela, représenter chaque vol par un arc de capacité minimum 1.

Exercice 7 (Lavage des serviettes au *Fouquet's*)

Le restaurant *Fouquet's* (99, avenue des Champs-Elysées 75008 Paris) a décidé d'optimiser ses dépenses hebdomadaires en achat de serviettes. Pour cela, il a embauché un spécialiste en Algorithmique (nommons-le "ALGO"). Chaque semaine, la tâche d'ALGO est de minimiser pour la semaine à venir les dépenses du restaurant en serviettes, en résolvant un problème de flot (ALGO ne sait faire que ça).

Au début de chaque semaine, le *Fouquet's* fournit à ALGO le nombre d_i de serviettes nécessaires pour les clients du jour i de la semaine ($i \in \{L, M, Me, J, V, S, D\}$). Chaque jour, le *Fouquet's* dispose de 3 options : acheter de nouvelles serviettes (au coût de $a = 15$ euros par serviette), effectuer un lavage « express » (au coût de $\ell_1 = 5$ euros par serviette, les serviettes lavées seront disponibles le lendemain), ou effectuer un lavage « ordinaire » (au coût de $\ell_2 = 2$ euros par serviette, les serviettes sont disponibles deux jours après).

Le but est d'aider ALGO à modéliser le problème du *Fouquet's* comme un *problème de flot de coût minimum généralisé* dans un réseau $N_{Fouquet's}$ à définir. Voici en quoi consiste ce nouveau problème dans un réseau de flot $N = (V, A, c, q, S)$, où $q(x, y) \geq 0$ désigne le coût et $c(x, y)$ désigne la capacité de (x, y). On suppose que chaque sommet x d'un sous-ensemble de sommets $S \subset V$

possède aussi une demande de flot $b(x) > 0$, qui représente la quantité totale de flot qui doit traverser le sommet x. Le but du problème de *flot de coût minimum généralisé* est alors de trouver un flot f de coût total minimum qui satisfait les demandes de flot de tous les sommets de S.

(a) Définir l'ensemble des sommets et des arcs du réseau de flot $N_{Fouquet's}$.

(b) Définir la fonction q (coût) et la fonction c (capacité) de chaque arc a de $N_{Fouquet's}$. Définir l'ensemble S et la fonction b (demande) de chaque noeud de S.

(c) Dessiner le réseau obtenu $N_{Fouquet's}$ pour les demandes journalières suivantes : $(100, 150, 100, 150, 200, 300, 250)$.

(d) Comment modeliser le problème de flot de coût minimum généralisé comme *flot de coût minimum avec des capacités à la fois inférieures et supérieures* ?

Exercice 8 (Un conseil des clubs étudiants)

Les étudiants de l'université peuvent s'inscrire dans des clubs universitaires (danse folklorique, macramé, Scrabble...). Il y a n étudiants, p clubs, et chaque étudiant $i \in [1, n]$ est inscrit dans un ou plusieurs clubs $C_i \subseteq [1, p]$. Il a été décidé d'ouvrir un conseil représentatif des clubs universitaires, comprenant un délégué par club. Chaque club doit avoir un représentant dans ce conseil, un étudiant ne pouvant représenter qu'un seul club, auquel il doit appartenir.

(a) Connaissant C_i pour tout $i \in [1, n]$, montrer comment former un conseil, lorsque c'est possible, en utilisant un flot maximum.

Par ailleurs, les différents niveaux universitaires doivent être équitablement représentés. Chaque étudiant a exactement un niveau parmi k (par exemple, $k = 5$ pour L1, L2, L3, M1 et M2). Chaque niveau doit avoir au moins $\lfloor \frac{p}{k} \rfloor$ représentants au conseil.

(b) Comment ajouter cette contrainte dans le modèle précédent ?

(c) Appliquer cette méthode aux données suivantes ($n = 10$, $p = 4$, $k = 3$) :

Nom	Danse	Macramé	Scrabble	Curling	Niveau
Ali	oui	oui			L1
Bruno	oui		oui		L2
Claire	oui	oui			L1
Daniel			oui		L3
Élise		oui		oui	L1
François				oui	L1
Gaspard	oui	oui			L2
Hermione		oui			L2
Isaac			oui	oui	L3
Jérome	oui				L3