TD n° 8

Unification - Résolution

Dans toute ce TD, on suppose que a et b désignent des constantes, f, g, h, et j sont des fonctions (dont l'arité pourra varier selon les questions) et p, q, r et s sont des relations. On considère également l'ensemble de variables suivant : $X = \{u, v, w, x, y, z\}$

Exercice 8.1. Pour chacun des cas suivants, calculez $\sigma_1 \circ \sigma_2$

1. $\sigma_1 = (x/y)$ et $\sigma_2 = (y/x)$
2. $\sigma_1 = (h(y)/y, h(y)/z)$ et $\sigma_2 = (y/x, y/z, f(z)/w)$
3. $\sigma_1 = (f(g(x))/x, y/u, a/y)$ et $\sigma_2 = (f(g(x))/x, g(x)/y, a/z)$
4. $\sigma_1 = (b/y, a/x, y/z)$ et $\sigma_2 = (f(y)/x, z/y)$

Corrigé.

1.

	σ_2	σ_1
x	y	x
y	y	x

Donc $\sigma_1 \circ \sigma_2 = (x/y)$

2.

	σ_2	σ_1
x	y	$h(y)$
y	y	$h(y)$
z	y	$h(y)$
w	$f(z)$	$f(h(y))$

Donc $\sigma_1 \circ \sigma_2 = (h(y)/x, h(y)/y, h(y)/z, f(h(y))/w)$

3.

	σ_2	σ_1
x	$f(g(x))$	$f(g(f(g(x))))$
y	$g(x)$	$g(f(g(x)))$
z	a	a
u	u	y

Donc $\sigma_1 \circ \sigma_2 = (f(g(f(g(x))))/x, g(f(g(x)))/y, a/z, y/u)$

4.

	σ_2	σ_1
x	$f(y)$	$f(b)$
y	z	y
z	z	y

Donc $\sigma_1 \circ \sigma_2 = (f(b)/x, y/z)$

Exercice 8.2. Unifier les termes suivants

1. $t_1 = f(x, a)$ et $t_2 = f(h(y, y), y)$
2. $t_1 = f(v)$ et $t_2 = g(x)$
3. $t_1 = g(g(u, v), v)$ et $t_2 = g(g(h(x), h(y)), x)$
4. $t_1 = f(g(v), h(u, v))$ et $t_2 = f(g(w), h(w, j(x, w)))$
5. $t_1 = g(x, h(a))$ et $t_2 = f(g(u, v), v)$
6. $t_1 = f(a, x, h(g(z)))$ et $t_2 = f(z, h(y), h(y))$

Corrigé.

1. $\mathtt{UNIFIER}((f(x,a),f(h(y,y),y))) = \mathtt{UNIFIER}((x,h(y,y)),(a,y))$.
   — $\sigma_1 = (h(y,y)/t)$ et $\mathscr{U} = \{(a,y)\}$
   $\mathtt{UNIFIER}((a[h(y,y)/t],y[h(y,y)/t])) = \mathtt{UNIFIER}(a,y)$
   — $\sigma_2 = (a,y)$ et $\mathscr{U} = \varnothing$
   et donc $\mathtt{UNIFIER}((f(x,a),f(h(y,y),y))) = \sigma_2 \circ \sigma_1 = (h(a,a)/x,a/y)$
   Le terme unifié est donc $f(h(a,a),a)$.
2. $\mathtt{UNIFIER}(f(v),g(x)) = \varnothing$ car $f \neq g$.

3. $\mathscr{U} = \{(g(g(u,v),v),g(g(h(x),h(y)),x)\}$

   $\mathtt{UNIFIER}(\mathscr{U})$ =
   $\mathtt{UNIFIER}((g(u,v),g(h(x),h(y)),(v,x))$ =
   $\mathtt{UNIFIER}((u,h(x)),(v,h(y)),(v,x))$
   — $\sigma_1 = (h(x)/u)$ et $\mathscr{U} = \{(v,h(y)),(v,x)\}$
   $\mathtt{UNIFIER}((v[h(x)/u],h(y)[h(x)/u]),(v[h(x)/u],x[h(x)/u])) = \mathtt{UNIFIER}((v,h(y)),(v,x))$
   — $\sigma_2 = (h(y)/v)$et $\mathscr{U} = \{(v,x)\}$
   $\mathtt{UNIFIER}((v[h(y)/v],x[h(y)/v])) = \mathtt{UNIFIER}(h(y),x) = (h(y)/x)$
   — $\sigma_3 = (h(y)/x)$ et $\mathscr{U} = \varnothing$
   Donc $\mathtt{UNIFIER}((g(g(u,v),v),g(g(h(x),h(y)),x)) = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = (h(y)/x) \circ (h(y)/v) \circ (h(x)/u) = (h(h(y))/u,h(y)/v,h($
   Le terme unifié est donc $g(g(h(h(y)),h(y)),h(y))$.
4. $\mathscr{U} = \{f(g(v),h(u,v)),f(g(w),h(w,j(x,w)))\}$

   $\mathtt{UNIFIER}(\mathscr{U})$ =
   $\mathtt{UNIFIER}((g(v),g(w)),(h(u,v),h(w,j(x,w)))$ =
   $\mathtt{UNIFIER}((v,w),(h(u,v),h(w,j(x,w)))$
   — $\sigma_1 = (w/v)$ et $\mathscr{U} = \{(h(u,v),h(w,j(x,w))\}$
   $\mathtt{UNIFIER}((h(u[w/v],v[w/v]),h(w[w/v],j(x[w/v],w[w/v])))$ =
   $\mathtt{UNIFIER}((h(u,w),h(w,j(x,w)))$ =
   $\mathtt{UNIFIER}((u,w),(w,j(x,w)))$
   — $\sigma_2 = (w/u)$ et $\mathscr{U} = \{(w,j(x,w))\}$
   Pas unifiable car w apparait dans $j(x,w)$
5. Pas unifiable car $f \neq g$
6. $\mathscr{U} = \{(f(a,x,h(g(z))),f(z,h(y),h(y))\}$
   $\mathtt{UNIFIER}(\mathscr{U}) = \mathtt{UNIFIER}(\{(a,z),(x,h(y)),(h(g(z)),h(y))\})$
   — $\sigma_1 = (a/z)$ et $\mathscr{U} = \{(x,h(y)),(h(g(z)),h(y))\}$
   $\mathtt{UNIFIER}(\{(x[a/z],h(y)[a/z]),(h(g(z))[a/z],h(y)[a/z])\}) = \mathtt{UNIFIER}(\{(x,h(y)),(h(g(a)),h(y))\})$
   — $\sigma_2 = (h(y)/x)$ et $\mathscr{U} = \{(h(g(a)),h(y))\}$
   $\mathtt{UNIFIER}(\{(h(g(a))[h(y)/x],h(y)[h(y)/x])\}) = \mathtt{UNIFIER}(\{(h(g(a)),h(y))\}) = \mathtt{UNIFIER}(\{(g(a),y)\})$
   — $\sigma_3 = (g(a)/y)$ et $\mathscr{U} = \varnothing$
   Donc $\mathtt{UNIFIER}(\mathscr{U}) = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = (g(a)/y,h(g(a))/x,a/z)$
   Le terme unifié est donc $f(a,h(g(a)),h(g(a)))$.

Exercice 8.3. Prouvez par résolution que les ensembles suivants ne sont pas satisfaisables :

1. $\{p(x), \neg p(x) \vee \neg q(x), q(x) \vee \neg r(y), r(x) \vee s(a), r(b) \vee \neg s(x)\}$
2. $\{s(b,b,a), s(b,b,b), r(w,a), r(a,z), \neg q(b), q(x') \vee \neg p(x',z') \vee \neg p(x',w') \vee \neg r(z',w'), p(x,y) \vee \neg s(x,x,y)\}$

Corrigé.

1.

1.	$p(x)$	
2.	$\neg p(x) \vee \neg q(x)$	
3.	$q(x) \neg r(y)$	
4.	$r(x) \vee s(a)$	
5.	$r(b) \vee \neg s(x)$	
6.	$\neg p(x) \vee \neg r(y)$	$2,3,q$
7.	$\neg p(x) \vee s(a)$	$4,6,r,(x/y)$
8.	$r(b) \vee \neg p(a)$	$5,7,s,(a/x)$
9.	$r(b)$	$1,8,p,(a/x)$
10.	$q(x)$	$3,9,r,(b/y)$
11.	$\neg p(x)$	$2,10,q$
12.	$\perp$	$1,11,p$

2.

1. $s(b,b,a)$
2. $s(b,b,b)$
3. $r(w,a)$
4. $r(a,z)$
5. $\neg q(b)$
6. $q(x') \vee \neg p(x',z') \vee \neg p(x',w') \vee \neg r(z',w')$
7. $p(x,y) \vee \neg s(x,x,y)$

$$\dfrac{\dfrac{q(x') \vee \neg p(x',z') \vee \neg p(x',w') \vee \neg r(z',w') \qquad \neg q(b)}{\neg p(b,z') \vee \neg p(b,w') \vee \neg r(z',w')}\; q,b/x' \qquad r(a,z)}{\neg p(b,a) \vee \neg p(b,w')}\; r,(a/z',w'/z)$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg p(b,a) \vee \neg p(b,w') \qquad p(x,y) \vee \neg s(x,x,y)}{\neg s(b,b,a) \vee \neg p(b,w')}\; p,(b/x),a/y) \qquad s(b,b,a)}{\neg p(b,w')}\; s$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg p(b,w') \qquad p(x,y) \vee \neg s(x,x,y)}{\neg s(b,b,w')}\; p,(b/x,w'/y) \qquad s(b,b,b)}{\perp}\; s,(b/w')$$

Exercice 8.4. Prouvez par résolution la validité de la formule suivante.

$$\exists x \exists y((p(f(x)) \wedge q(f(b))) \Rightarrow (p(f(a)) \wedge p(y) \wedge q(y)))$$

Corrigé. $\neg(\exists x \exists y((p(f(x)) \wedge q(f(b))) \Rightarrow (p(f(a)) \wedge p(y) \wedge q(y))))$
$\forall x \forall y \neg((p(f(x)) \wedge q(f(b))) \Rightarrow (p(f(a)) \wedge p(y) \wedge q(y)))$ $\forall x \forall y \neg(\neg(p(f(x)) \wedge q(f(b))) \vee (p(f(a)) \wedge p(y) \wedge q(y)))$ $\forall x \forall y (p(f(x)) \wedge$
$q(f(b)) \wedge \neg(p(f(a)) \wedge p(y) \wedge q(y)))$ $\forall x \forall y (p(f(x)) \wedge q(f(b)) \wedge (\neg p(f(a)) \vee \neg p(y) \vee \neg q(y)))$

On considère donc l'ensemble de clause suivant :
$\{p(f(x)), q(f(b)), \neg p(f(a)) \vee \neg p(y) \vee \neg q(y)\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p(f(x)) \qquad \neg p(f(a)) \vee \neg p(y) \vee \neg q(y)}{\neg p(y) \vee \neg q(y)}\; (a/x) \qquad p(f(x))}{\neg q(f(x))}\; (f(x)/y) \qquad q(f(b))}{\perp}\; (b/x)$$