TD n° 6

Logique du premier ordre 2

1 Equivalences

Exercice 6.1. Démontrez les équivalences suivantes :

1. Lois de *conversion* des quantificateurs :

$$\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi\,, \qquad \neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi\,.$$

2. Lois de *distribution* des quantificateurs :

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)\,, \qquad \exists x(\varphi \vee \psi) \equiv (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)\,.$$

3. Lois de *permutation* des quantificateurs de même sorte :

$$\forall x\forall y\varphi \equiv \forall y\forall x\varphi\,, \qquad \exists x\exists y\varphi \equiv \exists y\exists x\varphi\,.$$

Exercice 6.2. Démontrer que les paires de formules suivantes ne sont pas équivalentes

1. $\forall x(\varphi \vee \psi)$ et $\forall x\varphi \vee \forall x\psi$
2. $\exists x(\varphi \wedge \psi)$ et $\exists x\varphi \wedge \exists x\psi$.

2 Mise sous forme clausale

Exercice 6.3. On considère les formules suivantes :

$\varphi_1 = \exists x p(x) \Rightarrow \forall x p(x)$

$\varphi_2 = \exists x\forall y(\exists z p(x,y,z) \wedge q(x,y)) \Rightarrow \exists y(\forall x p(x,z,y) \wedge \exists x q(y,x))$

$\varphi_3 = \neg(\neg p(x) \vee \forall x q(x)) \wedge (\exists x p(x) \Rightarrow \forall x r(x))$

$\varphi_4 = \neg[\forall x, \forall y\ (p(x,y) \wedge q(y,x))] \wedge \neg[\forall x\exists y\ p(y,x) \Rightarrow \exists y\forall x\ q(x,y)]$

$\varphi_5 = \quad \forall x\neg r(x,x)\ \wedge\ \exists x\forall y(\, r(x,y) \Rightarrow \neg\exists z r(z,x)\,)\ \wedge\ \forall x\forall y(\, r(x,y) \Rightarrow \exists z(r(x,z) \wedge r(z,x))\,)$.

1. Mettez ces formules sous forme prenexe.
2. Mettez ces formules sous forme de Skolem
3. Mettez ces formules sous forme clausale.

3 Modélisation

Exercice 6.4. On considère le langage $\mathscr{S} = (\varnothing, \mathscr{S}_r)$ où $\mathscr{S}_r = \{(P,1)\}$.

1. Donnez une formule φ_1 dont les modèles sont toutes les $\mathscr{S}$-structures dont le domaine ne contient qu'un seul élément.
2. Donnez une formule φ_2 dont les modèles sont toutes les $\mathscr{S}$-structures dont le domaine ne contient que deux éléments.
3. Donnez une formule φ_3 dont les modèles sont toutes les $\mathscr{S}$-structures dont le domaine contient au moins trois éléments.
4. Donnez une formule ψ_1 dont les modèles sont toutes les $\mathscr{S}$-structures $\mathscr{M}$ telles que $P^{\mathscr{M}}$ ne contient qu'un seul élément.

5. Donnez une formule ψ_2 dont les modèles sont toutes les $\mathscr{S}$-structures $\mathscr{M}$ telles que $P^{\mathscr{M}}$ ne contient que deux éléments.
6. Donnez une formule ψ_3 dont les modèles sont toutes les $\mathscr{S}$-structures $\mathscr{M}$ telles que $P^{\mathscr{M}}$ contient au moins trois éléments.

Exercice 6.5. On considère le langage $\mathscr{S} = (\varnothing, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ où

$$\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{\, (Mange, 2), (Herbivore, 1), (Vegetal, 1), (Bambou, 1), (Panda, 1)\,\}\,.$$

En utilisant ce langage, exprimez les énoncés suivants en logique du premier ordre.

1. Les herbivore ne mangent que des végétaux.
2. Aucun herbivore ne mange tout type de végétal.
3. Il y a des végétaux que ne mange aucun herbivore.
4. Les pandas sont des herbivores qui ne consomment que des bambous.

Exercice 6.6. Considérez les phrases suivantes :

1. Au moins deux personnes ont préparé et réussi l'examen.
2. Tout le monde a reçu des conseils d'Alice ou de Bob.
3. Tous ceux qui ont préparé l'examen et ont reçu des conseils de Bob ont raté l'examen.
4. Quelqu'un a donné des conseils à exactement une personne.
5. Alice a reçu des conseils de quelqu'un ayant reçu des conseils de Bob, et elle a raté l'examen.

Choisissez un langage du premier ordre vous permettant de formaliser ces phrases en logique du premier ordre. Formalisez ces quatre phrases comme des formules de la logique du premier ordre sur le langage choisi.

Exercice 6.7. On se propose de traduire les phrases suivantes en logique du premier ordre :

1. Marcus était un pompéen.
2. Tous les pompéens étaient des romains.
3. César était souverain.
4. Tous les romains étaient fidèles à César ou le haissaient.
5. Chacun est fidèle à quelqu'un.
6. Les personnes n'essayent d'assassiner que les souverains auxquels ils ne sont pas fidèles.
7. Marcus a essayé d'assassiner César.

Proposez :

(a) un langage du premier ordre pour modéliser ces phrases,
(b) pour chaque phrase, une formule en logique du premier ordre qui la traduit ;
(c) mettez chaque formule en forme clausale ;
(d) si vous connaissez déjà le calcul de la résolution : quelles sont les inférences que vous pouvez appliquer à ces clauses ?

4 Propriétés

Exercice 6.8. Montrez que toute formule est équivalente à une formule n'utilisant que les connecteurs $\exists$, $\neg$ et $\vee$

Exercice 6.9. Soit $\mathscr{S}$ un langage contenant le symbole de relation unaire P. Montrez que

$$\mathscr{M} \models \forall x P(x) \text{ implique } \mathscr{M}, \mathscr{V} \models P(t), \text{ pour tout terme } t \text{ et valuation } \mathscr{V}.$$

Exercice 6.10. Supposons que x ne soit pas liée dans φ, et que y n'a aucune occurrence dans φ. Soit $\varphi[y/x]$ la formule obtenue de φ en remplaçant toute occurrence de x par y. Demontrez que

$$\mathscr{M},\mathscr{V} \models \forall x\varphi \quad \text{si et seulement si} \quad \mathscr{M},\mathscr{V} \models \forall y\varphi[y/x] \ ,$$

pour toute structure $\mathscr{M}$ et valuation $\mathscr{V}$.

Exercice 6.11. Considérons le langage $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}},\mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ où $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{\,(P,1)\,\}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \varnothing$.

1. Combien de $\mathscr{S}$-structures $\mathscr{M}$ il y a tels que $D_{\mathscr{M}} = \{\,1,\ldots,n\,\}$?
2. Même question, en considérant maintenant le langage $\mathscr{S}' = (\mathscr{S}'_{\mathtt{f}},\mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ où $\mathscr{S}'_{\mathtt{f}} = \{\,(c,0)\,\}$.
3. Considérez la formule $\exists xP(x)$ sur $\mathscr{S}$. Combien de modèles tels que $D_{\mathscr{M}} = \{\,1,\ldots,n\,\}$ cette formule possède-t-elle que ?
4. Considérez la formule atomique $P(c)$. Combien de modèles cette formule possède tels que $D_{\mathscr{M}} = \{\,1,\ldots,n\,\}$?

Exercice 6.12. Soit φ une formule du premier ordre sur le langage $\mathscr{S}$. Montrez, par induction sur la structure de φ que pour toute $\mathscr{S}$-structure $\mathscr{M}$ et tout couple de valuations $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$, si $\mathscr{V}(x) = \mathscr{V}'(x)$ pour toute variable libre x de φ, alors $\mathscr{M},\mathscr{V} \models \varphi$ si et seulement si $\mathscr{M},\mathscr{V}' \models \varphi$.

5 Sémantique

Exercice 6.13. Considérez le langage $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}},\mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ donné par

$$\mathscr{S}_{\mathtt{f}} := \{\,(f,1),(o,0)\,\} \qquad \mathscr{S}_{\mathtt{r}} := \{\,(R,2)\,\},$$

et la $\mathscr{S}$-structure $\mathscr{M}$ suivante :

$$\begin{aligned} D_{\mathscr{M}} &:= \{0,1,2,3\}, \\ f^{\mathscr{M}}(x) &:= (x-1) \mod 4, \quad o^{\mathscr{M}} := 0, \\ R^{\mathscr{M}} &:= \{\,(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,3)\,\}. \end{aligned}$$

1. Représentez cette structure comme un graphe étiqueté.
2. Pour chaque formule φ_i, $i = 1,\ldots,6$,
   $$\begin{aligned} \varphi_1 &:= \forall x(\,R(x,f(o)) \vee R(o,x)\,)\,; \\ \varphi_2 &:= \forall x\exists y(\,R(x,y) \vee R(y,x)\,)\,; \\ \varphi_3 &:= \forall xR(f(x),x)\,; \\ \varphi_4 &:= \forall x(\,R(x,f(o)) \Rightarrow \exists yR(x,y)\,)\,; \\ \varphi_5 &:= \exists x(\,R(o,x) \wedge \forall y(\,R(o,y) \Rightarrow R(x,y)\,)\,)\,; \\ \varphi_6 &:= \forall x(\,R(o,x) \Rightarrow \exists y(\,R(o,y) \wedge \neg R(x,y)\,)\,)\,; \end{aligned}$$
   dites si $\mathscr{M} \models \varphi_i$ ou non. Justifiez brièvement votre réponse.
3. Pour la formule φ_3 ci-dessus, détaillez *toutes* les étapes nécessaires à l'évaluer.