L3 Informatique — Logique
2018/19 — SIN5U06L

Partiel – 19 octobre 2018

Durée : 2h – documents interdits

Exercice 1 (*Induction*)**.** Un *palindrome* sur l'alphabet $\{0,1\}$ est un mot $a_1a_2\dots a_n \in \{0,1\}^\star$ tel que $a_1a_2\dots a_n = a_n\dots a_2a_1$. On note $\mathcal{P}_p$ l'ensemble des palindromes sur $\{0,1\}$ *de longueur paire*. Par exemple, $101101 \in \mathcal{P}_p$ mais $1001001 \notin \mathcal{P}_p$. Cet ensemble admet la définition inductive suivante :

Cas de base : $\varepsilon \in \mathcal{P}_p$;

Règles : si $u \in \mathcal{P}_p$, alors $0u0 \in \mathcal{P}_p$ et $1u1 \in \mathcal{P}_p$.

À l'aide de cette définition, montrez par induction que pour tout $u \in \mathcal{P}_p$, les entiers $|u|_0$ et $|u|_1$ sont pairs. (On rappelle que $|u|_x$ désigne le nombre d'occurences de la lettre x dans le mot u.)

Exercice 2. On considère la formule $\varphi = \big(\neg((a \vee b) \to c) \ \wedge \ (\neg(a \vee b) \vee \neg(\neg a \vee c))\big)$.

1) Représentez son arbre syntaxique et listez ses sous-formules.
2) Calculez tous ses modèles et représentez-les sous forme de tableau.
3) Cette formule est-elle satisfaisable ? Est-elle tautologique ? Est-elle contingente ?
4) Calculez sa forme clausale.

Exercice 3. Exécutez l'algorithme DPLL sur l'ensemble de clauses :

$$(a \vee b),\ (\overline{b} \vee c),\ (\overline{c} \vee d),\ (a \vee \overline{d} \vee e),\ (a \vee \overline{c} \vee f),\ (\overline{e} \vee \overline{f}),\ (g \vee h),\ (\overline{a} \vee \overline{h}),\ (\overline{a} \vee \overline{g}).$$

Si cet ensemble est satisfaisable, donnez le modèle que vous avez obtenu par DPLL.

Exercice 4. Soit Γ un ensemble de formules propositionnelles. Rappelez les définitions :

1) d'un *modèle* de Γ ;
2) d'une *conséquence logique* de Γ.

Pour tout ensemble Γ de formules, on note $\mathsf{mod}(\Gamma)$ l'ensemble de ses modèles et $\mathrm{cons}(\Gamma)$ l'ensemble de ses conséquences logiques. Soient Γ et Σ deux ensembles de formules propositionnelles tels que $\Gamma \subseteq \Sigma$. Démontrez les inclusions :

3) $\mathsf{mod}(\Sigma) \subseteq \mathsf{mod}(\Gamma)$.
4) $\mathrm{cons}(\Gamma) \subseteq \mathrm{cons}(\Sigma)$.

Exercice 5. Soient $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_0$ et $\varphi \in \mathcal{F}_0$. Montrez l'équivalence :

$$\Gamma \models \varphi \ \text{ ssi } \ \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \models \perp .$$