TD nº 6
Logique du premier ordre 2

1 Equivalences

Exercice 6.1. Démontrez les équivalences suivantes :

1. Lois de *conversion* des quantificateurs :

$$\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi\,, \qquad \neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi\,.$$

2. Lois de *distribution* des quantificateurs :

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)\,, \qquad \exists x(\varphi \vee \psi) \equiv (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)\,.$$

3. Lois de *permutation* des quantificateurs de même sorte :

$$\forall x\forall y\varphi \equiv \forall y\forall x\varphi\,, \qquad \exists x\exists y\varphi \equiv \exists y\exists x\varphi\,.$$

Corrigé. Les preuves qui vont suivre reposent sur les deux faits suivants :

1. Pour tout ensemble d'indices I, et tous éléments $b_i \in \{0,1\}$, $i \in I$:

$$1 - \min_{i\in I}\{b_i\} = \max_{i\in I}\{1 - b_i\}$$
$$1 - \max_{i\in I}\{b_i\} = \min_{i\in I}\{1 - b_i\}$$

Vérifions la première équation, la vérification de la seconde est similaire :
— si $\min_{i\in I}\{b_i\} = 0$, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $b_{i_0} = 0$, alors $1 - b_{i_0} = 1$ et donc $\max_{i\in I}\{1 - b_i\} = 1$.
— si $\min_{i\in I}\{b_i\} = 1$, alors pour tout $i \in I$: $b_i = 1$, et donc $1 - b_i = 0$. On a alors $\max_{i\in I}\{1 - b_i\} = 0$.

2. Pour tout ensembles d'indices I et J, tous entiers $x_{i,j}$:

$$\min_{i\in I}(\min_{j\in J})\{x_{i,j}\} = \min_{i\in I, j\in J}\{x_{i,j}\}$$
$$\max_{i\in I}(\max_{j\in J})\{x_{i,j}\} = \max_{i\in I, j\in J}\{x_{i,j}\}$$

Nous sommes maintenant prêts à démontrer les équivalences : Pour toute structure $\mathscr{M}$ et toute valuation $\mathscr{V}$:

$$\begin{aligned}
[\![\neg\forall x\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}} = 1 - [\![\forall x\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}} &= 1 - \min_{\alpha\in D_{\mathscr{M}}}\{[\![\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=\alpha]}\} \\
&= \max_{\alpha\in D_{\mathscr{M}}}\{1 - [\![\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=\alpha]}\} && \text{d'après (1)} \\
&= \max_{\alpha\in D_{\mathscr{M}}}\{[\![\neg\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=\alpha]}\} = [\![\exists x\neg\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\![\neg\exists x\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}} = 1 - [\![\exists x\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}} &= 1 - \max_{\alpha\in D_{\mathscr{M}}}\{[\![\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=\alpha]}\} \\
&= \min_{\alpha\in D_{\mathscr{M}}}\{1 - [\![\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=\alpha]}\} && \text{d'après (1)} \\
&= \min_{\alpha\in D_{\mathscr{M}}}\{[\![\neg\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=\alpha]}\} = [\![\forall x\neg\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[\![\forall x(\varphi\wedge\psi)]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}} &= \min_{\alpha\in D_{\mathscr{M}}}\{[\![\varphi\wedge\psi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=\alpha]}\}\\
&= \min_{\alpha\in D_{\mathscr{M}}}\{\min\{[\![\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=\alpha]},[\![\psi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=\alpha]}\}\}\\
&= \min_{\alpha\in D_{\mathscr{M}}}\{[\![\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=\alpha]},[\![\psi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=\alpha]}\} && \text{d'après (2)}\\
&= \min\{\min_{\alpha\in D_{\mathscr{M}}}\{[\![\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=\alpha]}\},\min_{\alpha\in D_{\mathscr{M}}}\{[\![\psi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=\alpha]}\}\} && \text{d'après (2)}\\
&= \min\{[\![\forall x\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}},[\![\forall x\psi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}}\} = [\![\forall x\varphi\wedge\forall x\psi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}}
\end{aligned}
$$

La démonstration de $\neg\exists x\varphi\equiv\forall x\neg\varphi$ est similaire, il suffit de remplacer min par max.

$$
\begin{aligned}
[\![\forall x\forall y\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}} &= \min_{\alpha\in D_{\mathscr{M}}}\{[\![\forall y\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=\alpha]}\}\\
&= \min_{\alpha\in D_{\mathscr{M}}}\{\min_{\beta\in D_{\mathscr{M}}}\{[\![\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=\alpha,y:=\beta]}\}\}\\
&= \min_{\alpha,\beta\in D_{\mathscr{M}}}\{[\![\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=\alpha,y:=\beta]}\} && \text{d'après (2)}\\
&= \min_{\beta\in D_{\mathscr{M}}}\{\min_{\alpha\in D_{\mathscr{M}}}\{[\![\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=\alpha,y:=\beta]}\}\} && \text{d'après (2)}\\
&= \min_{\beta\in D_{\mathscr{M}}}\{[\![\forall x\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[y:=\beta]}\}\\
&= [\![\forall y\forall x\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}}
\end{aligned}
$$

La démonstration de $\exists x\exists y\varphi\equiv\exists y\exists x\varphi$ est similaire, il suffit de remplacer min par max.

Exercice 6.2. Démontrer que les paires de formules suivantes ne sont pas équivalentes

1. $\forall x(\varphi\vee\psi)$ et $\forall x\varphi\vee\forall x\psi$
2. $\exists x(\varphi\wedge\psi)$ et $\exists x\varphi\wedge\exists x\psi$.

Corrigé. Pour montrer que les formules ne sont pas équivalentes, il suffit d'exhiber des contre-exemples. On considère le langage $\mathscr{S}$ ne contenant que les relations unaires P et Q et on pose $\varphi = P(x)$, $\psi = Q(x)$.

Soit $\mathscr{M}$ la $\mathscr{S}$-structure dont le domaine est $\{a,b\}$ et telle que $P^{\mathscr{M}}=\{a\}$ et $Q^{\mathscr{M}}=\{b\}$. On peut vérifier facilement que :

1. $\mathscr{M}\models\forall x(\varphi\vee\psi)$ et $\mathscr{M}\not\models\forall x\varphi\vee\forall x\psi$, donc les deux formules ne sont pas équivalentes.
2. $\mathscr{M}\not\models\exists x(\varphi\wedge\psi)$ et $\mathscr{M}\models\exists x\varphi\wedge\exists x\psi$, donc les deux formules ne sont pas équivalentes.

2 Mise sous forme clausale

Exercice 6.3. On considère les formules suivantes :

$\varphi_1 = \exists xp(x)\Rightarrow\forall xp(x)$

$\varphi_2 = \exists x\forall y(\exists zp(x,y,z)\wedge q(x,y))\Rightarrow\exists y(\forall xp(x,z,y)\wedge\exists xq(y,x))$

$\varphi_3 = \neg(\neg p(x)\vee\forall xq(x))\wedge(\exists xp(x)\Rightarrow\forall xr(x))$

$\varphi_4 = \neg[\forall x,\forall y\ (p(x,y)\wedge q(y,x))]\wedge\neg[\forall x\exists y\ p(y,x)\Rightarrow\exists y\forall x\ q(x,y)]$

$\varphi_5 = \quad\forall x\neg r(x,x)\ \wedge\ \exists x\forall y(r(x,y)\Rightarrow\neg\exists zr(z,x))\ \wedge\ \forall x\forall y(r(x,y)\Rightarrow\exists z(r(x,z)\wedge r(z,x)))$.

1. Mettez ces formules sous forme prenexe.
2. Mettez ces formules sous forme de Skolem

3. Mettez ces formules sous forme clausale.

Corrigé.

1. Forme prenexe :
   (a) *Renommage des variables :*

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \exists x p(x) \Rightarrow \forall x p(x) \\ &\equiv \exists x p(x) \Rightarrow \forall y p(y) \end{aligned}$$

Mise sous forme prénexe :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\equiv \exists x p(x) \Rightarrow \forall y p(y) \\ &\equiv \exists x (p(x) \Rightarrow \forall y p(y)) \\ &\equiv \forall x \forall y (p(x) \Rightarrow p(y)) \end{aligned}$$

   (b) *Renommage des variables :*

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= (\exists x \forall y (\exists z p(x,y,z) \wedge q(x,y))) \Rightarrow (\exists y (\forall x p(x,z,y) \wedge \exists x q(y,x))) \\ &\equiv (\exists x \forall y (\exists z_1 p(x,y,z_1) \wedge q(x,y))) \Rightarrow (\exists y_1 (\forall x_1 p(x_1,z,y_1) \wedge \exists x_2 q(y_1,x_2))) \end{aligned}$$

Attention ! l'occurrence libre de z ne peut pas être renommée.
Mise sous forme prénexe :

$$\begin{aligned} \varphi_2 &\equiv (\exists x \forall y (\exists z_1 p(x,y,z_1) \wedge q(x,y))) \Rightarrow (\exists y_1 (\forall x_1 p(x_1,z,y_1) \wedge \exists x_2 q(y_1,x_2))) \\ &\equiv (\exists x \forall y \exists z_1 (p(x,y,z_1) \wedge q(x,y))) \Rightarrow (\exists y_1 \exists x_2 \forall x_1 (p(x_1,z,y_1) \wedge q(y_1,x_2))) \\ &\equiv \exists y_1 \exists x_2 \forall x \exists y \forall z_1 \forall x_1 [(p(x,y,z_1) \wedge q(x,y)) \Rightarrow (p(x_1,z,y_1) \wedge q(y_1,x_2))] \end{aligned}$$

   (c) *Renommage des variables :*

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \neg(\neg p(x) \vee \forall x q(x)) \wedge (\exists x p(x) \Rightarrow \forall x\, r(x)) \\ &\equiv \neg(\neg p(x) \vee \forall x_1 q(x_1)) \wedge (\exists x_2 p(x_2) \Rightarrow \forall x_3 r(x_3)) \end{aligned}$$

Mise sous forme prénexe :

$$\begin{aligned} \varphi_3 &\equiv (p(x) \wedge \exists x_1 \neg q(x_1)) \wedge (\exists x_2 p(x_2) \Rightarrow \forall x_3\, r(x_3)) \\ &\equiv \exists x_1\, (p(x) \wedge \neg q(x_1)) \wedge \forall x_2 \forall x_3 (p(x_2) \Rightarrow r(x_3)) \\ &\equiv \exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 \big(p(x) \wedge \neg q(x_1) \wedge (p(x_2) \Rightarrow r(x_3))\big) \end{aligned}$$

   (d) *Renommage des variables :*

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= \neg[\forall x, \forall y\ (p(x,y) \wedge q(y,x))] \wedge \neg[\forall x \exists y\ p(y,x) \Rightarrow \exists y \forall x\ q(x,y)] \\ &\equiv \neg[\forall x, \forall y\ (p(x,y) \wedge q(y,x))] \wedge \neg[\forall x_1 \exists y_1\ p(y_1,x_1) \Rightarrow \exists y_2 \forall x_2\ q(x_2,y_2)] \end{aligned}$$

Mise sous forme prénexe :

$$
\begin{aligned}
\varphi_4 &\equiv \neg[\forall x,\forall y\ (p(x,y)\wedge q(y,x))]\wedge\neg[\forall x_1\exists y_1\ p(y_1,x_1)\Rightarrow\exists y_2\forall x_2\ q(x_2,y_2)]\\
&\equiv \neg(\exists x\exists y[p(x,y)\wedge q(y,x)])\wedge\neg[\exists x_1\forall y_1\ (p(y_1,x_1)\Rightarrow\exists y_2\forall x_2\ q(x_2,y_2))]\\
&\equiv (\exists x\exists y\neg[p(x,y)\wedge q(y,x)])\wedge\neg[\exists x_1\forall y_1\exists y_2\forall x_2\ (p(y_1,x_1)\Rightarrow\ q(x_2,y_2))]\\
&\equiv \exists x\exists y(\neg[p(x,y)\wedge q(y,x)]\wedge\forall x_1\exists y_1\forall y_2\exists x_2\ (\neg[p(y_1,x_1)\Rightarrow\ q(x_2,y_2)]))\\
&\equiv \exists x\exists y\forall x_1\exists y_1\forall y_2\exists x_2\ (\neg[p(x,y)\wedge q(y,x)]\wedge\neg[p(y_1,x_1)\Rightarrow\ q(x_2,y_2)])
\end{aligned}
$$

(e) *Renommage des variables :*

$$
\begin{aligned}
\varphi_5 &= \forall x\neg r(x,x)\ \wedge\ \exists x\forall y(\,r(x,y)\Rightarrow\neg\exists z r(z,x)\,)\ \wedge\ \forall x\forall y(\,r(x,y)\Rightarrow\exists z(r(x,z)\wedge r(z,x))\,)\\
&\equiv \forall x_1\neg r(x_1,x_1)\ \wedge\ \exists x_2\forall y_2(\,r(x_2,y_2)\Rightarrow\neg\exists z_2 r(z_2,x_2)\,)\\
&\quad\ \wedge\forall x_3\forall y_3(\,r(x_3,y_3)\Rightarrow\exists z_3(r(x_3,z_3)\wedge r(z_3,x_3))\,)
\end{aligned}
$$

Mise sous forme prénexe :

$$
\begin{aligned}
\varphi_5 &\equiv \forall x_1\neg r(x_1,x_1)\ \wedge\ \exists x_2\forall y_2(\,r(x_2,y_2)\Rightarrow\neg\exists z_2 r(z_2,x_2)\,)\\
&\quad\ \wedge\forall x_3\forall y_3(\,r(x_3,y_3)\Rightarrow\exists z_3(r(x_3,z_3)\wedge r(z_3,x_3))\,)\\
&\equiv \exists x_2(\forall x_1\neg r(x_1,x_1)\ \wedge\ \forall y_2(\,r(x_2,y_2)\Rightarrow\forall z_2(\neg r(z_2,x_2)\,))\\
&\quad\ \wedge\forall x_3\forall y_3\exists z_3(\,r(x_3,y_3)\Rightarrow(r(x_3,z_3)\wedge r(z_3,x_3))\,))\\
&\equiv \exists x_2\forall x_3\forall y_3\exists z_3(\forall x_1\neg r(x_1,x_1)\ \wedge\ \forall y_2\forall z_2(\,r(x_2,y_2)\Rightarrow\neg r(z_2,x_2)\,)\\
&\quad\ \wedge(\,r(x_3,y_3)\Rightarrow(r(x_3,z_3)\wedge r(z_3,x_3))\,))\\
&\equiv \exists x_2\forall x_3\forall y_3\exists z_3\forall x_1\forall y_2\forall z_2(\neg r(x_1,x_1)\ \wedge\ (\,r(x_2,y_2)\Rightarrow\neg r(z_2,x_2)\,)\\
&\quad\ \wedge(\,r(x_3,y_3)\Rightarrow(r(x_3,z_3)\wedge r(z_3,x_3))\,))
\end{aligned}
$$

2. Mises sous forme de Skolem : Pour chaque formule φ_i, on note φ'_i sa forme de Skolem.

(a)

$$\varphi_1 \equiv \forall x\forall y(p(x)\Rightarrow p(y))$$

est déjà sous forme de Skolem donc

$$\varphi'_1 = \forall x\forall y(p(x)\Rightarrow p(y))$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 &\equiv \exists y_1\exists x_2\forall x\exists y\forall z_1\forall x_1[(p(x,y,z_1)\wedge q(x,y))\Rightarrow(p(x_1,z,y_1)\wedge q(y_1,x_2))]\\
\varphi'_2 &= \forall x\forall z_1\forall x_1[(p(x,f_3(x,z),z_1)\wedge q(x,f_3(x,z)))\Rightarrow(p(x_1,z,f_1(z))\wedge q(f_1(z),f_2(z)))]
\end{aligned}
$$

La substitution appliquée est $\{y_1\leftarrow f_1(z),x_2\leftarrow f_2(z),y\leftarrow f_3(x,z)\}$.

(c)

$$
\begin{aligned}
\varphi_3 &\equiv \exists x_1\forall x_2\forall x_3\big(p(x)\wedge\neg q(x_1)\wedge(p(x_2)\Rightarrow r(x_3))\big)\\
\varphi'_3 &= \forall x_2\forall x_3\big(p(x)\wedge\neg q(f(x))\wedge(p(x_2)\Rightarrow r(x_3))\big)
\end{aligned}
$$

La substitution appliquée est $\{x_1\leftarrow f(x)\}$.

(d)

$$
\begin{aligned}
\varphi_4 &\equiv \exists x \exists y \forall x_1 \exists y_1 \forall y_2 \exists x_2\ (\neg[p(x,y) \wedge q(y,x)] \wedge \neg[p(y_1,x_1) \Rightarrow\ q(x_2,y_2)]) \\
\varphi_4' &= \forall x_1 \forall y_2\ (\neg[p(c_1,c_2) \wedge q(c_2,c_1)] \wedge \neg[p(f(x_1),x_1) \Rightarrow\ q(g(x_1,y_2),y_2)])
\end{aligned}
$$

La substitution appliquée est $\{x \leftarrow c_1, y \leftarrow c_2, y_1 \leftarrow f(x_1), x_2 \leftarrow g(x_1,y_2)\}$.

(e)

$$
\begin{aligned}
\varphi_5 &\equiv \exists x_2 \forall x_3 \forall y_3 \exists z_3 \forall x_1 \forall y_2 \forall z_2 (\neg r(x_1,x_1)\ \wedge\ (r(x_2,y_2) \Rightarrow \neg r(z_2,x_2)) \\
&\quad \wedge (r(x_3,y_3) \Rightarrow (r(x_3,z_3) \wedge r(z_3,x_3)))) \\
\varphi_5' &= \forall x_3 \forall y_3 \forall x_1 \forall y_2 \forall z_2 (\neg r(x_1,x_1)\ \wedge\ (r(c,y_2) \Rightarrow \neg r(z_2,c)) \\
&\quad \wedge (r(x_3,y_3) \Rightarrow (r(x_3,f(x_3,y_3)) \wedge r(f(x_3,y_3),x_3))))
\end{aligned}
$$

La substitution appliquée est $\{x_2 \leftarrow c, z_3 \leftarrow f(x_3,y_3)\}$.

3. Mise sous forme clausale

(a)

$$
\begin{aligned}
\varphi_1' &= \forall x \forall y (p(x) \Rightarrow p(y)) \\
&\equiv \forall x \forall y (\neg p(x) \vee p(y))
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\varphi_2' &= \forall x \forall z_1 \forall x_1 [(p(x,f_3(x,z),z_1) \wedge q(x,f_3(x,z))) \Rightarrow (p(x_1,z,f_1(z)) \wedge q(f_1(z),f_2(z)))] \\
&\equiv \forall x \forall z_1 \forall x_1 [\neg(p(x,f_3(x,z),z_1) \wedge q(x,f_3(x,z))) \vee (p(x_1,z,f_1(z)) \wedge q(f_1(z),f_2(z)))] \\
&\equiv \forall x \forall z_1 \forall x_1 [\neg p(x,f_3(x,z),z_1) \vee \neg q(x,f_3(x,z)) \vee (p(x_1,z,f_1(z)) \wedge q(f_1(z),f_2(z)))] \\
&\equiv \forall x \forall z_1 \forall x_1 [(\neg p(x,f_3(x,z),z_1) \vee \neg q(x,f_3(x,z)) \vee p(x_1,z,f_1(z))) \\
&\quad \wedge (\neg p(x,f_3(x,z),z_1) \vee \neg q(x,f_3(x,z)) \vee q(f_1(z),f_2(z)))]
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\varphi_3' &= \forall x_2 \forall x_3 \big(p(x) \wedge \neg q(f(x)) \wedge (p(x_2) \Rightarrow r(x_3))\big) \\
&\equiv \forall x_2 \forall x_3 \big(p(x) \wedge \neg q(f(x)) \wedge (\neg p(x_2) \vee r(x_3))\big)
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
\varphi_4' &= \forall x_1 \forall y_2\ (\neg[p(c_1,c_2) \wedge q(c_2,c_1)] \wedge \neg[p(f(x_1),x_1) \Rightarrow\ q(g(x_1,y_2),y_2)]) \\
&\equiv \forall x_1 \forall y_2\ ((\neg p(c_1,c_2) \vee \neg q(c_2,c_1)) \wedge \neg[\neg p(f(x_1),x_1) \vee\ q(g(x_1,y_2),y_2)]) \\
&\equiv \forall x_1 \forall y_2\ ((\neg p(c_1,c_2) \vee \neg q(c_2,c_1)) \wedge p(f(x_1),x_1) \wedge \neg q(g(x_1,y_2),y_2))
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
\varphi_5' &= \forall x_3 \forall y_3 \forall x_1 \forall y_2 \forall z_2 (\neg r(x_1,x_1)\ \wedge\ (r(c,y_2) \Rightarrow \neg r(z_2,c)) \\
&\quad \wedge (r(x_3,y_3) \Rightarrow (r(x_3,f(x_3,y_3)) \wedge r(f(x_3,y_3),x_3)))) \\
&\equiv \forall x_3 \forall y_3 \forall x_1 \forall y_2 \forall z_2 (\neg r(x_1,x_1)\ \wedge\ (\neg r(c,y_2) \vee \neg r(z_2,c)) \\
&\quad \wedge (\neg r(x_3,y_3) \vee (r(x_3,f(x_3,y_3)) \wedge r(f(x_3,y_3),x_3)))) \\
&\equiv \forall x_3 \forall y_3 \forall x_1 \forall y_2 \forall z_2 \neg r(x_1,x_1)\ \wedge\ (\neg r(c,y_2) \vee \neg r(z_2,c)) \\
&\quad \wedge (\neg r(x_3,y_3) \vee r(x_3,f(x_3,y_3))) \wedge (\neg r(x_3,y_3) \vee r(f(x_3,y_3),x_3))
\end{aligned}
$$

3 Modélisation

Exercice 6.4. On considère le langage $\mathscr{S} = (\varnothing, \mathscr{S}_r)$ où $\mathscr{S}_r = \{(P,1)\}$.

1. Donnez une formule φ_1 dont les modèles sont toutes les $\mathscr{S}$-structures dont le domaine ne contient qu'un seul élément.
2. Donnez une formule φ_2 dont les modèles sont toutes les $\mathscr{S}$-structures dont le domaine ne contient que deux éléments.
3. Donnez une formule φ_3 dont les modèles sont toutes les $\mathscr{S}$-structures dont le domaine contient au moins trois éléments.
4. Donnez une formule ψ_1 dont les modèles sont toutes les $\mathscr{S}$-structures $\mathscr{M}$ telles que $P^{\mathscr{M}}$ ne contient qu'un seul élément.
5. Donnez une formule ψ_2 dont les modèles sont toutes les $\mathscr{S}$-structures $\mathscr{M}$ telles que $P^{\mathscr{M}}$ ne contient que deux éléments.
6. Donnez une formule ψ_3 dont les modèles sont toutes les $\mathscr{S}$-structures $\mathscr{M}$ telles que $P^{\mathscr{M}}$ contient au moins trois éléments.

Corrigé.

1. $\varphi_1 := \exists x \forall y (x = y)$
2. $\varphi_2 := \exists x, y[\neg(x = y) \wedge \forall z(x = z \vee y = z)]$
3. $\varphi_3 := \exists x, y, z[\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z)]$
4. $\psi_1 := \exists x[P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow (x = y)]$
5. $\psi_2 := \exists x \exists y[P(x) \wedge P(y) \wedge \neg(x = y) \wedge \forall z(P(z) \Rightarrow (x = z \vee y = z))]$
6. $\varphi_3 := \exists x, y, z[\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z) \wedge P(x) \wedge P(y) \wedge P(z)]$

Exercice 6.5. On considère le langage $\mathscr{S} = (\varnothing, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ où

$$\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{\, (Mange, 2), (Herbivore, 1), (Vegetal, 1), (Bambou, 1), (Panda, 1) \,\}.$$

En utilisant ce langage, exprimez les énoncés suivants en logique du premier ordre.

1. Les herbivore ne mangent que des végétaux.
2. Aucun herbivore ne mange tout type de végétal.
3. Il y a des végétaux que ne mange aucun herbivore.
4. Les pandas sont des herbivores qui ne consomment que des bambous.

Corrigé.

1. $\forall x \, \forall y \; ((Herbivore(x) \wedge Mange(x, y)) \Rightarrow Vegetal(y))$
2. $\forall x \; (Herbivore(x) \Rightarrow \exists y(Vegetal(y) \wedge \neg Mange(x, y)))$
3. $\exists x \; (Vegetal(x) \wedge \forall y \; (Herbivore(y) \Rightarrow \neg Mange(y, x)))$
4. $\forall Panda(x) \Rightarrow (Herbivore(x) \wedge \forall y \; (Mange(x, y) \Rightarrow Bambou(y)))$

Exercice 6.6. Considérez les phrases suivantes :

1. Au moins deux personnes ont préparé et réussi l'examen.
2. Tout le monde a reçu des conseils d'Alice ou de Bob.
3. Tous ceux qui ont préparé l'examen et ont reçu des conseils de Bob ont raté l'examen.

4. Quelqu'un a donné des conseils à exactement une personne.
5. Alice a reçu des conseils de quelqu'un ayant reçu des conseils de Bob, et elle a raté l'examen.

Choisissez un langage du premier ordre vous permettant de formaliser ces phrases en logique du premier ordre. Formalisez ces quatre phrases comme des formules de la logique du premier ordre sur le langage choisi.

Corrigé. Le langage nécessaire est $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(Alice, 0), (Bob, 0)\}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{(Prepare, 1), (Rate, 1)(Conseil, 2)\}$.

1. $\exists x \exists y (\neg(x = y) \wedge Prepare(x) \wedge Prepare(y) \wedge \neg Rate(x) \wedge \neg Rate(y))$
2. $\forall x (Conseil(Bob, x) \vee Conseil(Alice, x))$
3. $\forall x ((Prepare(x) \wedge Conseil(Bob, x)) \Rightarrow Rate(x))$
4. $\exists x \exists y (Conseil(x, y) \wedge \forall z (Conseil(x, y) \Rightarrow y = z))$
5. $Rate(Alice) \wedge \exists x (Conseil(x, Alice) \wedge Conseil(Bob, x)$

Exercice 6.7. On se propose de traduire les phrases suivantes en logique du premier ordre :

1. Marcus était un pompéen.
2. Tous les pompéens étaient des romains.
3. César était souverain.
4. Tous les romains étaient fidèles à César ou le haissaient.
5. Chacun est fidèle à quelqu'un.
6. Les personnes n'essayent d'assassiner que les souverains auxquels ils ne sont pas fidèles.
7. Marcus a essayé d'assassiner César.

Proposez :

(a) un langage du premier ordre pour modéliser ces phrases,
(b) pour chaque phrase, une formule en logique du premier ordre qui la traduit ;
(c) mettez chaque formule en forme clausale ;
(d) si vous connaissez déjà le calcul de la résolution : quelles sont les inférences que vous pouvez appliquer à ces clauses ?

Corrigé.

(a) $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{Pompeen, 1), (Romain, 1), (Souverain, 1), (Fidele, 2), (Hait, 2)(Assassiner, 2)\}$
$\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(Marcus, 0), (Cesar, 0)\}$.
(b) pour chaque phrase, une formule en logique du premier ordre qui la traduit :
    (a) $Pompeen(Marcus)$
    (b) $\forall x (Pompeen(x) \Rightarrow Romain(x))$
    (c) $Souverain(Cesar)$
    (d) $\forall x (Romain(x) \Rightarrow (Fidele(x, Cesar) \vee Hair(x, Cesar)))$
    (e) $\forall x \exists y Fidele(x, y)$
    (f) $\forall x \forall y ((Souverain(y) \wedge Assassiner(x, y)) \Rightarrow \neg Fidele(x, y)$
    (g) $Assassiner(Marcus, Cesar)$

4 Propriétés

Exercice 6.8. Montrez que toute formule est équivalente à une formule n'utilisant que les connecteurs $\exists$, $\neg$ et $\vee$

Corrigé. On le prouve par induction sur la structure de la formule : pour toute formule φ on construit φ' telle que $\varphi \equiv \varphi'$ et φ' n'utilise que $\exists$, $\neg$ et $\vee$.

— si φ est atomique alors $\varphi' = \varphi$
— si $\varphi = \neg\psi$ alors $\varphi' = \neg\psi'$
— si $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ alors $\varphi' = \psi_1' \vee \psi_2'$
— si $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ alors $\varphi' = \neg(\neg\psi_1' \vee \neg\psi_2')$
— si $\varphi = \psi_1 \Rightarrow \psi_2$ alors $\varphi' = \neg\psi_1' \vee \psi_2'$
— si $\varphi = \exists x\psi$ alors $\varphi' = \exists x\psi'$
— si $\varphi = \forall x\psi$ alors $\varphi' = \neg(\exists x\neg\psi')$

Exercice 6.9. Soit $\mathscr{S}$ un langage contenant le symbole de relation unaire P. Montrez que

$$\mathscr{M} \models \forall x P(x) \text{ implique } \mathscr{M}, \mathscr{V} \models P(t), \text{ pour tout terme } t \text{ et valuation } \mathscr{V}.$$

Corrigé. Supposons que $\mathscr{M} \models \forall x P(x)$. On a donc que pour toute valuation $\mathscr{V}$: $\mathscr{M}, \mathscr{V} \models \forall x P(x)$, et donc pour tout $a \in D_{\mathscr{M}}$, et toute valuation $\mathscr{V}$, $[\![P(x)]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=a]} = 1$.

Soit $\mathscr{V}$ une valuation, et t un terme.
Il existe $b \in D_{\mathscr{M}}$ tel que $[\![t]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}} = b$. On a donc $[\![P(t)]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}} = [\![P(x)]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=b]} = 1$.

Exercice 6.10. Supposons que x ne soit pas liée dans φ, et que y n'a aucune occurrence dans φ. Soit $\varphi[y/x]$ la formule obtenue de φ en remplaçant toute occurrence de x par y. Demontrez que

$$\mathscr{M}, \mathscr{V} \models \forall x\varphi \quad \text{si et seulement si} \quad \mathscr{M}, \mathscr{V} \models \forall y\varphi[y/x] \ ,$$

pour toute structure $\mathscr{M}$ et valuation $\mathscr{V}$.

Corrigé.

$$\begin{aligned} \mathscr{M}, \mathscr{V} \models \forall y\varphi[y/x] \quad & \text{ssi} \quad \text{pour tout } a \in D_{\mathscr{M}} : \mathscr{M}, \mathscr{V}[y := a] \models \varphi[y/x] \\ & \text{ssi} \quad \text{pour tout } a \in D_{\mathscr{M}} : \mathscr{M}, \mathscr{V}[x := a] \models \varphi \\ & \text{ssi} \quad \mathscr{M}, \mathscr{V} \models \forall x\varphi \end{aligned}$$

Exercice 6.11. Considérons le langage $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}}, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ où $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{ (P,1) \}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \varnothing$.

1. Combien de $\mathscr{S}$-structures $\mathscr{M}$ il y a tels que $D_{\mathscr{M}} = \{ 1, \ldots, n \}$?
2. Même question, en considérant maintenant le langage $\mathscr{S}' = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}}', \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ où $\mathscr{S}_{\mathtt{f}}' = \{ (c,0) \}$.
3. Considérez la formule $\exists x P(x)$ sur $\mathscr{S}$. Combien de modèles tels que $D_{\mathscr{M}} = \{ 1, \ldots, n \}$ cette formule possède-t-elle que ?
4. Considérez la formule atomique $P(c)$. Combien de modèles cette formule possède tels que $D_{\mathscr{M}} = \{ 1, \ldots, n \}$?

Corrigé.

1. Il y a autant de $\mathscr{S}$-structures $\mathscr{M}$ tels que $D_{\mathscr{M}} = \{ 1, \ldots, n \}$ que de sous-ensembles de $\{ 1, \ldots, n \}$, donc 2^n.
2. Chaque $\mathscr{S}'$-structures est une $\mathscr{S}'$-structures à laquelle on a ajouté une constante : il y en a donc $n2^n$.

3. $\mathscr{M} \models \exists x P(x)$ ssi il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $i \in P^{\mathscr{M}}$. Donc il y a autant de modèles que de sous-ensembles non vides de $\{1, \ldots, n\}$, c'est à dire $2^n - 1$.
4. $\mathscr{M} \models P(c)$ ssi $P^{\mathscr{M}} \neq \varnothing$ et $c^{\mathscr{M}} \in P^{\mathscr{M}}$. Donc il y a $\sum_{i=1}^{n} i \frac{n!}{(n-i)!i!}$ modèles.

Exercice 6.12. Soit φ une formule du premier ordre sur le langage $\mathscr{S}$. Montrez, par induction sur la structure de φ que pour toute $\mathscr{S}$-structure $\mathscr{M}$ et tout couple de valuations $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$, si $\mathscr{V}(x) = \mathscr{V}'(x)$ pour toute variable libre x de φ, alors $\mathscr{M}, \mathscr{V} \models \varphi$ si et seulement si $\mathscr{M}, \mathscr{V}' \models \varphi$.

Corrigé. On prouve la propriété par induction sur la structure de la formule :

— Base : si φ est une formule atomique : $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$ et toutes ses variables sont libres. Trivialement, pour tout terme t_i, $[\![t_i]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}} = [\![t_i]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}'}$, puisque $\mathscr{V}(x) = \mathscr{V}'(x)$ pour tout x apparaissant dans t_i. On a donc $[\![\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}} = 1$ ssi $R^{\mathscr{M}}([\![t_1]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}}, \ldots, [\![t_b]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}}) = 1$ ssi $R^{\mathscr{M}}([\![t_1]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}'}, \ldots, [\![t_b]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}'}) = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}'} = 1$.

— Induction : Supposons la propriété vraie pour φ_1 et φ_2 : on a donc $[\![\varphi_1]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}} = [\![\varphi_1]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}'}$ pour toute valuations $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ égales sur les variables libres de φ_1
et $[\![\varphi_2]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}} = [\![\varphi_2]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}'}$ pour toute valuations $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ égales sur les variables libres de φ_2.
  — si $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, alors les variables libres de φ sont les mêmes que celles de φ_1 et de φ_2. L'hypothèse d'induction s'applique donc à φ_1 et φ_2 pour toutes valuations $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ égales sur les variables libres de φ.
  $[\![\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}} = \min\{[\![\varphi_1]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}}, [\![\varphi_2]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}}\} = \min\{[\![\varphi_1]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}'}, [\![\varphi_2]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}'}\} = [\![\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}'}$
  — les cas $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi = \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ et $\varphi = \neg\varphi_1$ sont similaires, nous ne les détaillons pas.
  — si $\varphi = \exists x \varphi_1$, commençons par noter que pour tout $a \in D_{\mathscr{M}}$, on a encore que $\mathscr{V}[x := a]$ et $\mathscr{V}'[x := a]$ sont égales sur les variables libres de φ_1. En particulier $[\![\varphi_1]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=a]} = [\![\varphi_1]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}'[x:=a]}$.
  Alors $[\![\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}} = \max_{a \in D_{\mathscr{M}}}\{[\![\varphi_1]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}[x:=a]}\} = \max_{a \in D_{\mathscr{M}}}\{[\![\varphi_1]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}'[x:=a]}\} = [\![\varphi]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}'}$
  — Le cas $\varphi = \forall x \varphi_1$ est similaire.

5 Sémantique

Exercice 6.13. Considérez le langage $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}}, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ donné par

$$\mathscr{S}_{\mathtt{f}} := \{(f,1),(o,0)\} \qquad \mathscr{S}_{\mathtt{r}} := \{(R,2)\},$$

et la $\mathscr{S}$-structure $\mathscr{M}$ suivante :

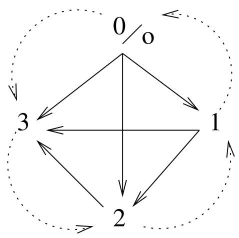
$$\begin{aligned} D_{\mathscr{M}} &:= \{0,1,2,3\}, \\ f^{\mathscr{M}}(x) &:= (x-1) \mod 4, \quad o^{\mathscr{M}} := 0, \\ R^{\mathscr{M}} &:= \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,3)\}. \end{aligned}$$

1. Représentez cette structure comme un graphe étiqueté.
2. Pour chaque formule φ_i, $i = 1, \ldots, 6$,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= \forall x(R(x, f(o)) \vee R(o,x)); \\ \varphi_2 &:= \forall x \exists y(R(x,y) \vee R(y,x)); \\ \varphi_3 &:= \forall x R(f(x),x); \\ \varphi_4 &:= \forall x(R(x, f(o)) \Rightarrow \exists y R(x,y)); \\ \varphi_5 &:= \exists x(R(o,x) \wedge \forall y(R(o,y) \Rightarrow R(x,y))); \\ \varphi_6 &:= \forall x(R(o,x) \Rightarrow \exists y(R(o,y) \wedge \neg R(x,y))); \end{aligned}$$

   dites si $\mathscr{M} \models \varphi_i$ ou non. Justifiez brièvement votre réponse.
3. Pour la formule φ_3 ci-dessus, détaillez *toutes* les étapes nécessaires à l'évaluer.

Corrigé. Le graphe est le suivant ($R^{\mathscr{M}}$ est représenté en trait plein, $f^{\mathscr{M}}$ en pointillé ; et on a mis en évidence le sommet $o^{\mathscr{M}}$) :



— $\mathscr{M} \models \varphi_1$:
- pour $i = 0,1,2$, $[\![R(x, f(o))]\!]_{\mathscr{M},[x:=i]} = 1$ car $(0,3),(1,3),(2,3) \in R^{\mathscr{M}}$;
- $[\![R(o,x)]\!]_{\mathscr{M},[x:=3]} = 1$ puisque $(0,3) \in R^{\mathscr{M}}$.

— $\mathscr{M} \models \varphi_2$ puisqu'elle modélise le fait que chaque sommet du graphe a au moins un arc entrant ou sortant.

— $\mathscr{M} \not\models \varphi_3$ car $[\![\forall x R(f(x),x)]\!]_{\mathscr{M},\mathscr{V}} = \min_{\alpha \in D_{\mathscr{M}}}\{[\![R(f(x),x)]\!]_{\mathscr{M},[x:=\alpha]}\} < [\![R(f(x),x)]\!]_{\mathscr{M},[x:=0]} = 0$ car $(3,0) \notin R^{\mathscr{M}}$.

— $\mathscr{M} \models \varphi_4$:
- $[\![R(x, f(o)) \Rightarrow \exists y R(x,y)]\!]_{\mathscr{M},[x:=3]} = 1$ car $[\![R(x, f(o))]\!]_{\mathscr{M},[x:=3]} = 0$ puisque $(3,3) \notin D^{\mathscr{M}}$;
- pour $i = 0,1,2$, $[\![R(x, f(o)) \Rightarrow \exists y R(x,y)]\!]_{\mathscr{M},[x:=i]} = 1$ car $[\![R(x, f(o))]\!]_{\mathscr{M},[x:=i]} = 1$ (puisque $(0,3),(1,3),(2,3) \in D^{\mathscr{M}}$) et $[\![\exists y R(x,y)]\!]_{\mathscr{M},[x:=i]} = 1$ puisque chacun des sommets $0,1,2$ admet un arc sortant.

— $\mathscr{M} \not\models \varphi_5$. Pour satisfaire la première partie ($R(o,x)$), il faut choisir x dans $\{1,2,3\}$. Pour satisfaire la seconde partie ($\forall y(R(o,y) \Rightarrow R(x,y))$) il faudrait que pour tout $y \in \{1,2,3\}$, $R(x,y)$ soit vrai, or c'est faux pour $y = x$.

— $\mathscr{M} \models \varphi_6$. On a :
- $[\![R(o,x) \Rightarrow \exists y(R(o,y) \wedge \neg R(x,y))]\!]_{\mathscr{M},[x:=0]} = 1$ car $[\![R(o,x)]\!]_{\mathscr{M},[x:=0]} = 0$
- pour $i \in \{1,2,3\}$, $[\![R(o,x)]\!]_{\mathscr{M},[x:=i]} = 1$ et $[\![\exists y(R(o,y) \wedge \neg R(x,y))]\!]_{\mathscr{M},[x:=i]} = 1$ puisque $[\![R(o,y) \wedge \neg R(x,y)]\!]_{\mathscr{M},[x:=i,y:=i]} = 1$.