4.3 Sémantique

Jusqu'ici nous nous sommes contentés de définir la **syntaxe** des langages. Les formules n'ont encore aucune signification, en partie car nous n'avons pas donné de signification aux symboles des langages. Une signature ne donne qu'un ensemble de symboles, sans en donner d'interprétation. Pour donner une **sémantique** aux formules, il faut donc commencer par donner une signification aux éléments de la signature du langage. On fait cela en associant une *structure* au langage.

4.3.1 Structures

Définition 4.17. Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_{\mathtt{r}}, \mathcal{S}_{\mathtt{f}})$ un langage. Une **$\mathcal{S}$-structure** (ou **$\mathcal{S}$-interprétation**) $\mathcal{M}$ est la donnée d'un ensemble $D_{\mathcal{M}}$ et

(a) d'une relation $R^{\mathcal{M}} \subseteq D_{\mathcal{M}}^{\rho(R)}$, pour chaque symbole de relation $R \in \mathcal{S}_{\mathtt{r}}$;

(b) d'une fonction totale (application) $f^{\mathcal{M}} : D_{\mathcal{M}}^{\rho(f)} \to D_{\mathcal{M}}$, pour chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{S}_{\mathtt{f}}$.

Remarque 4.18. A cause de la remarque 1.4, la clause (b) dans la définition d'une $\mathcal{S}$-structure peut se rephraser comme suit :

(b.1) d'un élément $c^{\mathcal{M}}$ de $D_{\mathcal{M}}$, pour chaque symbole de constante (symbole de fonction d'arité 0) $c \in \mathcal{S}_{\mathtt{f}}$,

(b.2) d'une fonction totale (application) $f^{\mathcal{M}} : D_{\mathcal{M}}^{\rho(f)} \to D_{\mathcal{M}}$, pour chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{S}_{\mathtt{f}}$, tel que $\rho(f) \geq 1$.

Exemple 4.19. Supposons que le langage soit composé de la constante o et de la fonction unaire s. On peut choisir, par exemple, les structures suivantes :

1. $D_{\mathcal{M}}$ est l'ensemble des entiers naturels, $o^{\mathcal{M}}$ est le nombre 0 et $s^{\mathcal{M}}$ est la fonction donnant le successeur, c'est-à-dire $s^{\mathcal{M}}(n) = n + 1$;
2. $D_{\mathcal{M}}$ est un ensemble de personnes, $o^{\mathcal{M}}$ c'est Paul et $s^{\mathcal{M}}$ est la fonction associant une personne à son conjoint.

Exemple 4.20. Supposons que $\mathcal{S}_{\mathtt{f}} = \{ (o,0), (s,1) \}$ et $\mathcal{S}_{\mathtt{r}} = \{ (\mathtt{Even}, 1) \}$. Comme auparavant, on peut choisir $D_{\mathcal{M}}$ est l'ensemble des entiers naturels, $o^{\mathcal{M}}$ est le nombre 0 et $s^{\mathcal{M}}$ est la fonction donnant le successeur. Pour compléter la définition de $\mathcal{S}$-structure nous pouvons poser

$$\mathtt{Even}^{\mathcal{M}} := \{ n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 2 = 1 \} .$$

Bien que la $\mathcal{S}$-structure ainsi définie puisse apparaître bien inappropriée, la définition de cette structure n'est pas incorrecte : *rien nous oblige à donner à un symbole une interprétation par défaut.*

La situation est assez différente pour le symbole d'égalité qu'on interprétera, *par défaut* :

$$=^{\mathcal{M}} := \{ (d,d) \mid d \in D_{\mathcal{M}} \} .$$

Structure de graphe

Un type de structure très utilisée en informatique est la structure de graphe. On rappelle qu'un graphe est la donnée d'une paire (V, E) où V est un ensemble de sommets et E une relation binaire sur E.

En particulier, si on considère une signature $\mathcal{S} = (\varnothing, \{(R,2)\}$, alors toute $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ est un graphe : le domaine $D_{\mathcal{M}}$ est l'ensemble des sommets et la relation $R^{\mathcal{M}}$ décrit les arcs du graphe.

On peut aller plus plus loin :

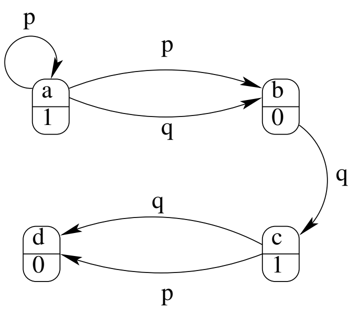
— si on considère une signature $\mathcal{S} = (\varnothing, \{(R_1,2), \ldots, (R_n,2)\})$, alors toute $\mathcal{S}$-structure est un graphe dont les arcs sont étiquetés par des éléments de $\{1, \ldots, n\}$.

— si on considère une signature $\mathcal{S} = (\varnothing, \{(R_1,2), \ldots, (R_n,2), (P_1,1), \ldots, (P_m,1)\})$, alors toute $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ est un graphe dont les arcs sont étiquetés par des éléments de $\{1, \ldots, n\}$ et les sommets par des éléments de $\{0,1\}^m$ (par exemple un sommet $s \in D_{\mathcal{M}}$ est étiqueté par $(0,1,1,\ldots,1)$ si $s \notin P_1^{\mathcal{M}}$, et $s \in P_i^{\mathcal{M}}$ pour $i = 2, \ldots, m$).

Exemple 4.21. On considère une signature $\mathcal{S} = (\varnothing, \{(p,2),(q,2),(e,1)\}$, et la $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ définie par :

$D_{\mathcal{M}} = \{a,b,c,d\}$, $p^{\mathcal{M}} = \{(a,a),(a,b),(c,d)\}$, $q^{\mathcal{M}} = \{(a,b),(b,c),(c,d)\}$, $e^{\mathcal{M}} = \{a,c\}$.

On peut représenter $\mathcal{M}$ de la façon suivante :



Terminons par nommer quelques structures importantes :

Domaine	Fonctions	Relations	Nom
$\mathbb{N}$	$0, s, +$	$=, \leq$	Arithmétique de Presburger
$\mathbb{N}$	$0, s, +, \times$	$=, \leq$	Arithmétique de Peano
$\mathbb{R}$	$0, s, +, \times$	$=, \leq$	Théorie des rééls
$\{0\}$	$\varnothing$	$\{p_0, \ldots, p_n, \ldots\}$	Structure propositionnelle
$\mathcal{T}_{\mathcal{S}_{\mathtt{f}}}(\varnothing)$	$\hat{\mathcal{S}}_{\mathtt{f}}$	$\hat{\mathcal{S}}_{\mathtt{r}}$	Modèle de Herbrand

Dans le cas des modèle de Herbrand, le domaine est l'ensemble des termes définis sur un ensemble de variables vide. Une fonction $\hat{f} \in \hat{\mathcal{S}}_{\mathtt{f}}$ d'arité n associe aux termes $t_1, \ldots, t_n$ le nouveau terme $f(t_1, \ldots, t_n)$, et les relations sont quelconques.

4.3.2 Evaluation (des termes et) des formules

Comme pour le calcul des propositions, nous allons définir l'interprétation d'une formule en fonction de l'interprétation des formules élémentaires (ici les formules atomiques). Pour qu'une formule soit évaluable à vrai ou faux (1 ou 0), il faut non seulement dire comment s'interprètent les prédicats et les symboles de fonctions, (ce qui est l'analogue d'interpréter les propositions pour le calcul propositionnel) mais aussi ce que valent les variables : en effet les formules peuvent contenir des variables libres, et on a besoin de connaître leur valeur pour que la formule soit évaluable. Bien sûr la valeur des variables liées n'intervient en rien dans le calcul de la valeur d'une formule.

Par exemple pour connaître la valeur de $P(x,y)$ il faut non seulement connaître la signification de P (donnée par la structure), mais aussi la valeur de x et de y qui sera donnée par une **valuation**. Dans la formule $\exists x P(x,y)$ il faut connaître la valeur P et celle de y (mais celle de x n'a aucune importance). Cependant, comme la valeur de $\exists x P(x,y)$ va être définie en fonction de la valeur de $P(x,y)$, on fera aussi intervenir la valeur de x, ou plus précisément les valeurs de $P(x,y)$ pour toutes les valeurs de x.

Nous allons donc définir la valeur d'une formule φ d'un langage $(\mathcal{S}, X)$ en fonction d'une $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ et d'une valuation des variables.

Définition 4.22. Une **valuation** de l'ensemble X des variables individuelles dans une structure $\mathcal{M}$ est une fonction $\mathcal{V}$ de l'ensemble X vers le domaine de $\mathcal{M}$, soit $\mathcal{V} : X \to D_{\mathcal{M}}$.

On définit maintenant la valeur $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}$ d'une formule φ en fonction d'une structure $\mathcal{M}$ et d'une valuation $\mathcal{V}$. On commence naturellement par donner la valeur des termes.

Définition 4.23. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{S}$-structure et $\mathcal{V}$ une valuation de X dans $D_{\mathcal{M}}$.

La fonction $[\![\ ]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} : \mathcal{T}_{\mathcal{S}_{\mathtt{f}}}(X) \to D_{\mathcal{M}}$ associant un terme t à sa valeur $[\![t]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}$ est défini inductivement par :

$$\frac{}{x \ : \ \mathcal{V}(x)}\ x \in X \qquad \frac{t_1 \ : \ v_1 \qquad \cdots \qquad t_n \ : \ v_n}{f(t_1, \ldots, t_n) \ : \ f^{\mathcal{M}}(v_1, \ldots, v_n)}\ f \in \mathcal{S}_{\mathtt{f}} \text{ d'arité } n$$

Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{V}$ sont fixées, toute formule atomique prend la valeur 0 ou 1, selon la définition formelle suivante, qui suit l'intuition :

Définition 4.24. La valeur $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}$ d'une formule atomique φ est définie par :
— pour tout $R \in \mathcal{S}_{\mathrm{r}}$ d'arité n, pour tous termes $t_1, \ldots, t_n$,

$$[\![\, R(t_1, \ldots, t_n) \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1 \qquad \text{ssi} \qquad ([\![\, t_1 \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}, \ldots, [\![\, t_n \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}) \in R^{\mathcal{M}} .$$

Pour évaluer une formule contenant des quantificateurs, nous avons besoin la notion de variante d'une valuation.

Notation 4.25. Nous allons noter $\mathcal{V}[x := a]$ la valuation $\mathcal{V}'$ telle que $\mathcal{V}'(x) = a$ et $\mathcal{V}(y)' = \mathcal{V}(y)$ pour tout $y \in X \setminus \{ x \}$. Autrement, pour tout $y \in X$:

$$\mathcal{V}[x := a](y) = \begin{cases} a\,, & \text{si } y = x\,, \\ \mathcal{V}(y)\,, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dira alors que $\mathcal{V}[x := a]$ est une **variante** en x de $\mathcal{V}$.

Enfin, la valeur d'une formule est définie par induction sur la structure de la formule :

Définition 4.26 (Valeur d'une formule)**.** Etant donné un langage $\mathcal{S}$ et une formule φ de $\mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$, la valeur de φ pour la $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ et la valuation $\mathcal{V}$ est notée $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}$ et est définie de la façon suivante :
— $[\![\, \varphi \wedge \psi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$ ssi $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$ et $[\![\, \psi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$;
— $[\![\, \varphi \vee \psi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$ ssi $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$ ou $[\![\, \psi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$;
— $[\![\, \neg\varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$ ssi $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 0$;
— $[\![\, \varphi \Rightarrow \psi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 0$ ssi $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$ et $[\![\, \psi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 0$;
— $[\![\, \forall x\varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$ si et seulement si pour tout $a \in D_{\mathcal{M}}$, $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}[x:=a]} = 1$;
— $[\![\, \exists x\varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$ si et seulement s'il existe $a \in D_{\mathcal{M}}$ tel que $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}[x:=a]} = 1$.

On notera souvent $\mathcal{M}, \mathcal{V} \models \varphi$ à la place de $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$.

On peut donner une définition alternative, mais bien entendu équivalente :

Définition 4.27 (Valeur d'une formule (bis))**.**

$$\frac{}{\varphi \;:\; [\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}}\ \varphi \text{ formule atomique} \qquad \frac{\varphi \;:\; b}{(\neg\varphi) \;:\; 1-b} \qquad \frac{\varphi_1 \;:\; b_1 \qquad \varphi_2 \;:\; b_2}{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \;:\; \min\{b_1, b_2\}}$$

$$\frac{\varphi_1 \;:\; b_1 \qquad \varphi_2 \;:\; b_2}{\varphi_1 \vee \varphi_2 \;:\; \max\{b_1, b_2\}} \qquad \frac{\varphi_1 \;:\; b_1 \qquad \varphi_2 \;:\; b_2}{\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \;:\; \max\{1-b_1, b_2\}}$$

$$\frac{\varphi}{(\exists x\, \varphi) \;:\; \max\{[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}[x:=a]} \mid a \in D_{\mathcal{M}}\}} \qquad \frac{\varphi}{(\forall x\, \varphi) \;:\; \min\{[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}[x:=a]} \mid a \in D_{\mathcal{M}}\}}$$

Remarque 4.28. La valuation ne sert qu'à donner une valeur aux variables libres. Ainsi la valeur de $[\![\, \forall x\varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}$ ou $[\![\, \exists x\varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}$ ne dépend pas de $\mathcal{V}(x)$.
Par conséquent, si φ est une formule close (sans variables libres), alors écrira $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M}}$ à la place de $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}$ et $\mathcal{M} \models \varphi$ à la place de $\mathcal{M}, \mathcal{V} \models \varphi$.

L'ordre d'apparition des quantificateurs dans une formule est important. Il détermine le sens de la formule.

Par exemple, si nous donnons au prédicat $p(x, y)$ la signification "x aime y", alors, nous obtenons des significations différentes pour la formule $Q_1xQ_2yp(x, y)$ (où Q_1 et Q_2 sont des quantificateurs).
— $\forall x\forall yp(x, y)$ tout le monde aime tout le monde
— $\exists x\forall yp(x, y)$ il existe des personnes qui aiment tout le monde
— $\exists y\forall xp(x, y)$ il existe des personnes aimées de tous
— $\forall x\exists yp(x, y)$ toute personne aime quelqu'un
— $\forall y\exists xp(x, y)$ toute personne est aimée par quelqu'un

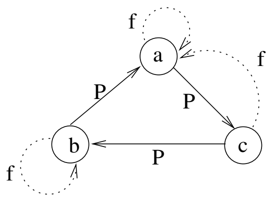


FIGURE 4.1 – Structure en forme de graphe étiqueté

— $\exists x \exists y p(x, y)$ il y a une personne qui aime quelqu'un.

On peut remarquer que les seuls cas où on peut échanger l'ordre des quantificateurs sans modifier le sens de la formule sont ceux où les quantificateurs sont identiques : $\exists x \exists y \varphi \equiv \exists y \exists x \varphi$ et $\forall x \forall y \varphi \equiv \forall y \forall x \varphi$. C'est pourquoi en mathématique on écrit souvent $\exists xy\varphi$ ou $\forall xy\varphi$.

Exemple 4.29. Considérons la formule

$$\varphi := \forall x \exists y(\, P(x, f(y)) \vee P(y, f(x))\,)\,,$$

à évaluer dans $\mathcal{M} = \langle D_{\mathcal{M}}, P^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}} \rangle$ où :
— $D_{\mathcal{M}} = \{a, b, c\}$,
— $P^{\mathcal{M}} = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$,
— $f^{\mathcal{M}} : a \mapsto a, b \mapsto b, c \mapsto a$.
Cette structure, étant sur un langage relationnel d'arité au plus 2 et sur un langage fonctionnel d'arité au plus 1, est représentée en forme de graphe étiqueté en figure 4.1.

Pour calculer $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}$ on peut d'abord considérer toutes les valuations possibles de x et de y, soit 9 valuations. Pour chaque valuation, nous pouvons évaluer la formule $P(x, f(y)) \vee P(y, f(x))$, en évaluant d'abord les termes $x, f(x), y, f(y)$, pour ensuite évaluer la disjonction selon les règles usuelles de la logique propositionnelle. Nous avons donc :

$\mathcal{V}_{aa}$ **:** $x = a, y = a$ **:**

$$[\![\, P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)) \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{aa}} = \max([\![\, P(x, f(y)) \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{aa}}, [\![\, P(y, f(x)) \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{aa}}) = 0$$

car $[\![\, f(y) \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{aa}} = [\![\, f(x) \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{aa}} = a$ et donc

$$[\![\, P(x, f(y)) \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{aa}} = [\![\, P(y, f(x)) \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{aa}} = 0\,, \quad \text{car} \quad (a, a) \notin P^{\mathcal{M}}\,.$$

Dans la suite, nous allons abréger l'exposition, tous ces calculs seront sous-entendus. Avec un abus de notation, nous allons simplement écrire :

$$[\![\, P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)) \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{aa}} = [\![\, P(a, a) \vee P(a, a) \,]\!]_{\mathcal{M}} = 0\,.$$

$\mathcal{V}_{ab}$ **:** $x = a, y = b$ **:**

$$[\![\, P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)) \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{ab}} = [\![\, P(a, b) \vee P(b, a) \,]\!]_{\mathcal{M}} = 1;$$

$\mathcal{V}_{ac}$ **:** $x = a, y = c$ **:**

$$[\![\, (P(x, f(y)) \vee P(y, f(x))) \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{ac}} = [\![\, P(a, a) \vee P(c, a) \,]\!]_{\mathcal{M}} = 1;$$

$\mathcal{V}_{ba}$ **:** $x = b, y = a$ **:**

$$[\![\, P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)) \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{ba}} = [\![\, P(b, a) \vee P(a, b) \,]\!]_{\mathcal{M}} = 1\,;$$

$\mathcal{V}_{bb}$ **:** $x = b, y = b$ **:**

$$[\![\, P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)) \,]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{bb}} = [\![\, P(b, b) \vee P(b, b) \,]\!]_{\mathcal{M}} = 0\,;$$

$\mathcal{V}_{bc}$ **:** $x = b, y = c$ **:**

$$[\![P(x, f(y)) \vee P(y, f(x))]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{bc}} = [\![P(b, a) \vee P(c, b)]\!]_{\mathcal{M}} = 0\,;$$

$\mathcal{V}_{ca}$ **:** $x = c, y = a$ **:**

$$[\![P(x, f(y)) \vee P(y, f(x))]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{ca}} = [\![P(c, a) \vee P(a, a)]\!]_{\mathcal{M}} = 1\,;$$

$\mathcal{V}_{cb}$ **:** $x = c, y = b$ **:**

$$[\![P(x, f(y)) \vee P(y, f(x))]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{cb}} = [\![P(c, b) \vee P(b, a)]\!]_{\mathcal{M}} = 0\,;$$

$\mathcal{V}_{cc}$ **:** $x = c, y = c$ **:**

$$[\![P(x, f(y)) \vee P(y, f(x))]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{cc}} = [\![P(c, a) \vee P(c, a)]\!]_{\mathcal{M}} = 1\,.$$

Commençons par étudier les valeurs possibles de la sous-formule $\exists y(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))$:

$\mathcal{V}_a$: $x := a$ **:**

$$[\![\exists y(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_a} = 1\,, \qquad \text{car } [\![P(x, f(y)) \vee P(y, f(x))]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{ab}} = 1.$$

Donc pour toute valuation $\mathcal{V}$ telle que $\mathcal{V}(x) = a$, $[\![\exists y(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$.

$\mathcal{V}_b$: $x := b$ **:**

$$[\![\exists y(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_b} = 1\,, \qquad \text{car } [\![P(x, f(y)) \vee P(y, f(x))]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{ba}} = 1.$$

Donc pour toute valuation $\mathcal{V}$ telle que $\mathcal{V}(x) = b$, $[\![\exists y(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$.

$\mathcal{V}_c$: $x := c$ **:**

$$[\![\exists y(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_c} = 1\,, \qquad \text{car } [\![P(x, f(y)) \vee P(y, f(x))]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{ca}} = 1.$$

Donc pour toute valuation $\mathcal{V}$ telle que $\mathcal{V}(x) = c$, $[\![\exists y(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]\!]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$.

Donc pour toute valuation $\mathcal{V}$, nous avons $\mathcal{M}, \mathcal{V} \models \exists y(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))$, i.e.,

$$\mathcal{M} \models \forall x \exists y(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))\,.$$

Remarque 4.30. Observons que la notation $P(a, a)$ et les notations similaires sont impropres, mais très utiles en pratique, et aussi très utilisés par les logiciens ! ! ! En fait, $P(a, a)$ n'est pas une formule (atomique) du premier ordre, car ici a n'est pas un terme, mais plutôt un élément du domaine $D_{\mathcal{M}}$. Pour pouvoir justifier cette notation il faut ajouter au langage un symbole de constante c_a, pour tout élément du domaine $a \in D_{\mathcal{M}}$; il faut de plus étendre l'interprétation en posant $c_a^{\mathcal{M}} = a$.

Vocabulaire

Définition 4.31 (Modèle)**.** Soit $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$ une formule close (i.e., qui ne contient pas de variable libre) et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{S}$-structure. La structure $\mathcal{M}$ est un **modèle** de φ si $\mathcal{M} \models \varphi$.

Soit $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$ un ensemble de formules closes (i.e., qui ne contient pas de variable libre) et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{S}$-structure. La structure $\mathcal{M}$ est un **modèle** de Γ si $\mathcal{M} \models \varphi$ pour tout $\varphi \in \Gamma$.

Définition 4.32 (Tautologie)**.** Une formule close $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$ est une **tautologie** si $\mathcal{M} \models \varphi$ pour toute $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$.

Définition 4.33 (Formule insatisfaisable)**.** Une formule close $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$ est **insatisfaisable** si elle n'a pas de modèle.

Définition 4.34 (Conséquence logique)**.** Une formule close φ est **conséquence logique** d'un ensemble de formules closes Γ si tout modèle de Γ est un modèle de φ. On écrit alors $\Gamma \models \varphi$.

Définition 4.35 (Théorie)**.** Une **théorie** est l'ensemble des conséquences logiques d'un ensemble de formules closes.

Par exemple, la théorie des groupes est l'ensemble des formules logiques qui sont vraies dans tous les groupes.

Définition 4.36 (Equivalence)**.** Deux formules φ et ψ de $\mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$ sont **équivalentes** (noté $\varphi \equiv \psi$) si pour toute $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ et toute valuation $\mathcal{V} : X \to D_{\mathcal{M}}$, on $\mathcal{M}, \mathcal{V} \models \varphi$ ssi $\mathcal{M}, \mathcal{V} \models \psi$.

Attention : on peut parler d'équivalence entre deux formules même quand celles-ci ne sont pas de formules closes.

On peut par ailleurs noter que φ et ψ sont équivalentes ssi $\overline{\forall}(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ est une tautologie. Ici, $\overline{\forall}(\varphi)$ est la clôture universelle de la formule φ, obtenue de φ en lui ajoutant une suite de quantificateurs universels $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n$, où $x_1, \dots, x_n$ est la liste des variables libres de φ.