TD n° 2

Calcul propositionnel 1

1 Syntaxe et Sémantique

Exercice 2.1. Considérez la formules du calcul propositionnel suivante :

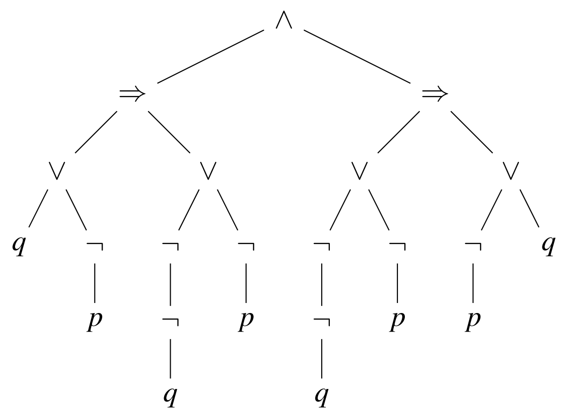
$$\varphi := ((q \vee \neg p) \Rightarrow (\neg\neg q \vee \neg p)) \;\wedge\; ((\neg\neg q \vee \neg p) \Rightarrow (\neg p \vee q))$$

.

1. Dessinez son arbre syntaxique ;
2. Énumérez ses sous-formules ;
3. Énumérez les symboles propositionnels ayant une occurrence dans φ.

Corrigé.

1. Voici l'arbre syntaxique :



2. Les sous-formules sont : φ, $(q \vee \neg p) \Rightarrow (\neg\neg q \vee \neg p)$, $(\neg\neg q \vee \neg p) \Rightarrow (\neg p \vee q)$, $(q \vee \neg p)$, $(\neg\neg q \vee \neg p)$, $(\neg\neg q \vee \neg p)$, $(\neg p \vee q)$, $\neg\neg q$, $\neg p$, $\neg q$, p, q.
3. Les symboles propositionnels ayant une occurrence dans φ sont p et q.

Exercice 2.2. 1. Quelles sont les valuations qui donnent même valeur à $p \wedge q$ et $p \Rightarrow q$?

2. Énumérez les modèles de la formule $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$.
3. Est-ce que cette formule est (in)satisfaisable, valide ?

Corrigé.

1. On a :
$v(p \wedge q) = 1$ ssi $v(p) = v(q) = 1$
et $v(p \Rightarrow q) = 1$ ssi $v(p) = 0$ ou $v(q) = 1$.

Les valuations rendant égales les 2 formules sont donc :

p	q
1	1
1	0

.

2. D'après ce qui précède, les modèles de $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ sont donc

p	q
1	1
1	0

.

3. La formule est satisfaisable mais non valide.

Exercice 2.3. Déterminer l'ensemble des modèles des formules suivantes :

1. $\varphi_1 := (p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
2. $\varphi_2 := (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
3. $\varphi_3 := \neg(p \wedge q) \vee (p \wedge q)$

Corrigé.

$mod(\varphi_1) =$

p	q	r
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	1

$mod(\varphi_2) =$

p	q	r
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	1

$mod(\varphi_3) =$

p	q
0	0
0	1
1	0
1	1

Exercice 2.4. Proposez une formule φ ayant la table de vérité suivante :

p	q	r	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Corrigé. La formule suivante

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

possède la table de vérité de l'énoncé.

Exercice 2.5. On considère les formules $\varphi = p \wedge (\neg q \Rightarrow (q \Rightarrow p))$ et $\psi = (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

1. Soit v une valuation. Déterminer, *si possible*, $v(\varphi)$ et $v(\psi)$ dans chacun des quatre cas suivants :
   (a) on sait que $v(p) = 0$ et $v(q) = 1$;
   (b) on sait que $v(p) = 0$;
   (c) on sait que $v(q) = 1$;
   (d) on ne sait rien sur $v(p)$ et $v(q)$.
2. Ces deux formules sont-elles satisfaisables ? Des tautologies ?
3. L'ensemble $\{\varphi, \psi\}$ est-il consistant ? C'est-à-dire, existe t'il une valuation telle que $v(\varphi) = v(\psi) = 1$?

Corrigé.

1. Soit v une valuation.

(a) Supposons que $v(p)=0$ et $v(q)=1$:

$$\begin{aligned} v(\varphi) = &\ \min\{v(p), v(\neg q \Rightarrow (q \Rightarrow p)\} \\ = &\ \min\{0, v(q \vee (q \Rightarrow p))\} \\ = &\ 0 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} v(\psi)=1 \text{ ssi } &\ v(p\vee q) = v(\neg p \vee \neg q) \\ \text{ssi } &\ \max\{v(p), v(q)\} = \max\{1-v(p), 1-v(q)\} \\ \text{ssi } &\ \max\{0,1\} = \max\{1,0\} \end{aligned}$$

Donc $v(\psi)=1$.

(b) Supposons que $v(p)=0$. D'après ce qui précède, on a :

$$v(\varphi) = 0$$

et :

$$\begin{aligned} v(\psi)=1 \text{ ssi } &\ \max\{0, v(q)\} = \max\{1, 1-v(q)\} \\ \text{ssi } &\ v(q)=1. \end{aligned}$$

Donc $v(\psi)=v(q)$.

(c) Supposons que $v(q)=1$.

$$\begin{aligned} v(\varphi) = &\ \min\{v(p), v(\neg q \Rightarrow (q \Rightarrow p)\} \\ = &\ \min\{v(p), v(q \vee (q \Rightarrow p))\} \\ = &\ \min\{v(p), \max\{v(q), v(\neg q), v(p))\}\} \\ = &\ \min\{v(p), \max\{1, v(\neg q), v(p))\}\} \\ = &\ \min\{v(p), 1\} \\ = &\ v(p) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} v(\psi)=1 \text{ ssi } &\ v(p\vee q) = v(\neg p \vee \neg q) \\ \text{ssi } &\ \max\{v(p), v(q)\} = \max\{1-v(p), 1-v(q)\} \\ \text{ssi } &\ \max\{v(p),1\} = \max\{1-v(p),0\} \\ \text{ssi } &\ 1 = 1-v(p) \\ \text{ssi } &\ v(p)=0 \end{aligned}$$

Donc $v(\psi)=1-v(p)$

(d) Supposons que v est quelconque.

$$\begin{aligned} v(\varphi) = &\ \min\{v(p), v(\neg q \Rightarrow (q \Rightarrow p)\} \\ = &\ \min\{v(p), v(q \vee (q \Rightarrow p))\} \\ = &\ \min\{v(p), \max\{v(q), v(\neg q), v(p))\}\} \\ = &\ \min\{v(p), \max\{v(q), 1-v(q), v(p))\}\} \\ = &\ \min\{v(p), 1\} = v(p) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v(\psi)=1 \text{ ssi } &\ v(p\vee q) = v(\neg p \vee \neg q) \\ \text{ssi } &\ \max\{v(p), v(q)\} = \max\{1-v(p), 1-v(q)\} \\ \text{ssi } &\ v(p) \neq v(q). \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, φ et ψ sont satisfaisables, mais ne sont pas des tautologies.
3. L'ensemble $\{\varphi, \psi\}$ est consistant puisque toute valuation v satisfaisant $v(p)=1$ et $v(q)=0$ est modèle de φ et de ψ.

Exercice 2.6. Soit φ une formule du calcul propositionnel. On dit que φ est contingente, lorsqu'elle est satisfaisable, mais qu'elle n'est pas une tautologie.

1. Que peut-on dire de $\mathsf{mod}(\varphi)$ lorsque φ est contingente ?
2. Soient φ et ψ deux formules propositionnelles. Que pensez-vous des affirmations suivantes :

   (a) si φ est contingente, alors $\neg\varphi$ l'est également ;

(b) si φ et ψ sont contingentes, alors $\varphi \vee \psi$ et $\varphi \wedge \psi$ sont contingentes ;

(c) si $\varphi \vee \psi$ est insatisfiable alors φ et ψ sont insatisfiables ;

(d) si $\varphi \wedge \psi$ est une tautologie alors φ est une tautologie, et ψ est une tautologie.

Corrigé.

1. Si φ est contingente, $\mathsf{mod}(\varphi) \neq \varnothing$ et $\mathsf{mod}(\varphi) \neq \mathsf{Val}$ où Val est l'ensemble des valuations de *Prop* dans $\{0,1\}$.
2. D'après la Proposition 1.17 du cours, on a :

   (a) $\mathsf{mod}(\neg\varphi) = \mathsf{Val} - \mathsf{mod}(\varphi)$ donc
   — puisque $\mathsf{mod}(\varphi) \neq \varnothing$, $\mathsf{mod}(\neg\varphi) \neq \mathsf{Val}$
   — puisque $\mathsf{mod}(\varphi) \neq \mathsf{Val}$, $\mathsf{mod}(\neg\varphi) \neq \varnothing$
   $\neg\varphi$ est donc contingente

   (b) $\mathsf{mod}(\varphi \vee \psi) = \mathsf{mod}(\varphi) \cup \mathsf{mod}(\varphi)$, donc on peut trouver φ et ψ contingentes telles que $\varphi \vee \psi$ ne soit pas contingente. Il suffit de les choisir de façon à ce que $\varphi \vee \psi$ soit une tautologie. Prenons par exemple $\varphi = p$ et $\psi = \neg p$, $\mathsf{mod}(\varphi \vee \psi) = \mathsf{Val}$ et $\varphi \vee \psi$ est donc non contingente.

   De même, $\mathsf{mod}(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{mod}(\varphi) \cap \mathsf{mod}(\psi)$, donc on peut trouver φ et ψ contingentes telles que $\varphi \wedge \psi$ ne soit pas contingente. Il suffit de les choisir de façon à ce que $\varphi \wedge \psi$ soit insatisfiable. Prenons par exemple $\varphi = p$ et $\psi = \neg p$, $\mathsf{mod}(\varphi \wedge \psi) = \varnothing$ et $\varphi \wedge \psi$ est donc non contingente.

   (c) $\mathsf{mod}(\varphi \vee \psi) = \mathsf{mod}(\varphi) \cup \mathsf{mod}(\psi)$. Donc si $\varphi \vee \psi$ est insatisfaisable, on a $\mathsf{mod}(\varphi) \cup \mathsf{mod}(\psi) = \varnothing$, soit $\mathsf{mod}(\varphi) = \varnothing$ et $\mathsf{mod}(\psi) = \varnothing$, i.e., φ et ψ sont insatisfaisables.

   (d) $\mathsf{mod}(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{mod}(\varphi) \cap \mathsf{mod}(\psi)$ donc si $\varphi \vee \psi$ est une tautologie, $\mathsf{mod}(\varphi) \cap \mathsf{mod}(\psi) = \mathsf{Val}$, soit $\mathsf{mod}(\varphi) = \mathsf{Val}$ et $\mathsf{mod}(\psi) = \mathsf{Val}$. φ et ψ sont donc des tautologies.

---

2 Conséquence logique

Soit Σ un ensemble de formules. On note $\mathsf{mod}(\Sigma)$ l'ensemble des valuations v telles que $v(\varphi) = 1$ pour toute formule $\varphi \in \Sigma$.

On étend la notion de conséquence logique d'une formule aux ensembles de formules : soit Σ un ensemble de formules et φ une formule, on note $\Sigma \models \varphi$ si $\mathsf{mod}(\Sigma) \subseteq \mathsf{mod}(\varphi)$. On note $\mathrm{Cons}(\Sigma)$ l'ensemble des conséquences logiques de Σ.

Exercice 2.7. On considère l'ensemble de formules propositionnelles

$$\Gamma = \{p \vee q \vee r,\ p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r\}$$

1. Trouver un modèle de Γ. Combien y a-t-il de modèles ?
2. Les formules $q \Rightarrow p$, p, r sont elles des conséquences logiques de Γ ?

Corrigé. Soit $\gamma = \bigwedge_{\varphi \in \Gamma} \varphi$. On en déduit facilement la table de vérité suivante pour γ :

p	q	r	γ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Car $\mathsf{mod}(\Gamma) = \mathsf{mod}(\gamma)$, il s'ensuit que l'ensemble des mod'eles de Γ est le suivant :

p	q	r
0	0	1
0	1	1
1	1	1

Les formules $q \Rightarrow p$ et p ne sont pas conséquences logiques de Γ. La formule r est conséquence de Γ.

Exercice 2.8. On se donne Γ un ensemble fini satisfaisable de formules, une formule φ conséquence de Γ, une formule ψ qui n'est pas une conséquence de Γ.

1. On ajoute une tautologie τ à Γ. Est-ce que φ et ψ sont des conséquences logiques de $\Gamma \cup \{\tau\}$? Donnez une preuve formelle.
2. Même question si τ est une formule insatisfaisable.

Corrigé. On a $\mathsf{mod}(\Gamma) \neq \varnothing$, $\mathsf{mod}(\Gamma) \subseteq \mathsf{mod}(\varphi)$ et $\mathsf{mod}(\Gamma) \nsubseteq \mathsf{mod}(\psi)$, i.e., il existe $v \in \mathsf{mod}(\Gamma)$ tel que $v(\psi) = 0$.

1. On a $\mathsf{mod}(\Gamma \cup \{\tau\}) = \mathsf{mod}(\Gamma) \cap \mathsf{mod}(\tau) = \mathsf{mod}(\Gamma) \cap \mathsf{Val} = \mathsf{mod}(\Gamma)$. Donc ajouter une tautologie ne modifie pas l'ensemble des conséquences.
2. On a $\mathsf{mod}(\Gamma \cup \{\tau\}) = \mathsf{mod}(\Gamma) \cap \mathsf{mod}(\tau) = \mathsf{mod}(\Gamma) \cap \varnothing = \varnothing$. Cet ensemble est inconsistant, φ et ψ sont donc conséquences logiques de $\Gamma \cup \{\tau\}$

Exercice 2.9. Démontrer :

1. $\Sigma \models \varphi$ ssi $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \models \bot$.
2. $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$ ssi $\Sigma \models \varphi \Rightarrow \psi$.

Corrigé.

1.

$$
\begin{array}{rll}
\Sigma \models \varphi & \text{ssi} & \mathsf{mod}(\Sigma) \subseteq \mathsf{mod}(\varphi) \\
& \text{ssi} & \mathsf{mod}(\Sigma) \cap \mathsf{mod}(\neg\varphi) \subseteq \mathsf{mod}(\varphi) \cap \mathsf{mod}(\neg\varphi) \\
& \text{ssi} & \mathsf{mod}(\Sigma \cup \{\neg\varphi\}) \subseteq \mathsf{mod}(\varphi \wedge \neg\varphi) \\
& \text{ssi} & \mathsf{mod}(\Sigma \cup \{\neg\varphi\}) \subseteq \mathsf{mod}(\bot) \\
& \text{ssi} & \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \models \bot.
\end{array}
$$

2.

$$
\begin{array}{ll}
& \Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi \\
\text{ssi} & \text{pour toute valuation } v, \text{ si } v \in \mathsf{mod}(\Sigma) \text{ et } v \in \mathsf{mod}(\varphi) \text{ alors } v \in \mathsf{mod}(\psi) \\
\text{ssi} & \text{pour toute valuation } v, \text{ si } v \in \mathsf{mod}(\Sigma) \text{ alors (si } v \in \mathsf{mod}(\varphi) \text{ alors } v \in \mathsf{mod}(\psi)) \\
\text{ssi} & \text{pour toute valuation } v, \text{ si } v \in \mathsf{mod}(\Sigma) \text{ alors } v \in \mathsf{mod}(\varphi \Rightarrow \psi) \\
\text{ssi} & \mathsf{mod}(\Sigma) \subseteq \mathsf{mod}(\varphi \Rightarrow \psi) \\
\text{ssi} & \Sigma \models \varphi \Rightarrow \psi
\end{array}
$$

On pouvait aussi procéder par opérations ensemblistes, mais la preuve est plus compliquée :

$$\begin{array}{ll}
 & \Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi \\
\text{ssi} & \mathsf{mod}(\Sigma \cup \{\varphi\}) \subseteq \mathsf{mod}(\psi) \\
\text{ssi} & \mathsf{mod}(\Sigma) \cap \mathsf{mod}(\varphi) \subseteq \mathsf{mod}(\psi) \\
\text{ssi} & (\mathsf{mod}(\Sigma) \cap \mathsf{mod}(\varphi)) \cup (\mathsf{Val} - \mathsf{mod}(\varphi)) \subseteq (\mathsf{Val} - \mathsf{mod}(\varphi)) \cup \mathsf{mod}(\psi) \\
\text{ssi} & (\mathsf{mod}(\Sigma) \cup (\mathsf{Val} - \mathsf{mod}(\varphi))) \cap (\mathsf{mod}(\varphi) \cup (\mathsf{Val} - \mathsf{mod}(\varphi))) \subseteq (\mathsf{Val} - \mathsf{mod}(\varphi)) \cup \mathsf{mod}(\psi) \\
\text{ssi} & (\mathsf{mod}(\Sigma) \cup (\mathsf{Val} - \mathsf{mod}(\varphi))) \cap \mathsf{Val} \subseteq (\mathsf{Val} - \mathsf{mod}(\varphi)) \cup \mathsf{mod}(\psi) \\
\text{ssi} & \mathsf{mod}(\Sigma) \cup (\mathsf{Val} - \mathsf{mod}(\varphi)) \subseteq (\mathsf{Val} - \mathsf{mod}(\varphi)) \cup \mathsf{mod}(\psi) \\
\text{ssi} & \mathsf{mod}(\Sigma) \subseteq (\mathsf{Val} - \mathsf{mod}(\varphi)) \cup \mathsf{mod}(\psi) \\
\text{ssi} & \mathsf{mod}(\Sigma) \subseteq \mathsf{mod}(\varphi \Rightarrow \psi) \\
\text{ssi} & \Sigma \models \varphi \Rightarrow \psi
\end{array}$$

Exercice 2.10. Soient φ et ψ deux formules, démontrer que :

1. $\mathsf{mod}(\neg\varphi) = \mathsf{Val} - \mathsf{mod}(\varphi)$ (Val est l'ensemble de toutes les valuations) ;
2. $\mathsf{mod}(\varphi \vee \psi) = \mathsf{mod}(\varphi) \cup \mathsf{mod}(\psi)$;
3. $\mathsf{mod}(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{mod}(\varphi) \cap \mathsf{mod}(\psi)$;
4. $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $\mathsf{mod}(\varphi) \subseteq \mathsf{mod}(\psi)$.

Corrigé.

1. pour toute valuation $v \in \mathsf{Val}$,

$$\begin{array}{rll}
v \in \mathsf{mod}(\neg\varphi) & \text{ssi } v(\neg\varphi) = 1 & \text{par la définition de modèle} \\
 & \text{ssi } v(\varphi) = 0 & \text{par la Définition de l'évaluation} \\
 & \text{ssi } v \notin \mathsf{mod}(\varphi) & \text{encore, par la définition de modèle} \\
 & \text{ssi } v \in \mathsf{Val} - \mathsf{mod}(\varphi) &
\end{array}$$

2. pour toute valuation $v \in \mathsf{Val}$,

$$\begin{array}{rl}
v \in \mathsf{mod}(\varphi \vee \psi) & \text{ssi } v(\varphi \vee \psi) = 1 \\
 & \text{ssi } v(\varphi) = 1 \text{ ou } v(\psi) = 1 \\
 & \text{ssi } v \in \mathsf{mod}(\varphi) \text{ ou } v \in \mathsf{mod}(\psi) \\
 & \text{ssi } v \in \mathsf{mod}(\varphi) \cup \mathsf{mod}(\psi)
\end{array}$$

3. pour toute valuation $v \in \mathsf{Val}$,

$$\begin{array}{rll}
v \in \mathsf{mod}(\varphi \wedge \psi) & \text{ssi} & v(\varphi \wedge \psi) = 1 \\
 & \text{ssi} & v(\varphi) = 1 \text{ et } v(\psi) = 1 \\
 & \text{ssi} & v \in \mathsf{mod}(\varphi) \text{ et } v \in \mathsf{mod}(\psi) \\
 & \text{ssi} & v \in \mathsf{mod}(\varphi) \cap \mathsf{mod}(\psi)
\end{array}$$

4.

$$\begin{array}{rl}
\models \varphi \Rightarrow \psi & \text{ssi pour toute valuation } v \in \mathsf{Val}, v(\varphi \Rightarrow \psi) = 1 \\
 & \text{ssi pour toute valuation } v \in \mathsf{Val}, \text{ si } v(\varphi) = 1 \text{ alors } v(\psi) = 1 \\
 & \text{ssi pour toute valuation } v \in \mathsf{Val}, \text{ si } v \in \mathsf{mod}(\varphi) \text{ alors } v \in \mathsf{mod}(\psi) \\
 & \text{ssi } \mathsf{mod}(\varphi) \subseteq \mathsf{mod}(\psi)
\end{array}$$

3 Modélisation

Exercice 2.11. On considère les énoncés suivants, où p, q, r, s, t sont eux mêmes des énoncés. Les écrires comme des formules du calcul propositionnel.

A : *Si p alors q*
B : *Pour que p il suffit que q*
C : *Pour que p il faut que q*
D : *p est une condition nécessaire et suffisante pour que q*
E : *Soit p, soit q, mais pas les deux*
F : *Si p alors q sinon r*

Corrigé.

$A : p \Rightarrow q$
$B : q \Rightarrow p$
$C : p \Rightarrow q$
$D : p \Leftrightarrow q$
$E : \neg(p \Leftrightarrow q)$
$F : (p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$

Exercice 2.12. Traduire les assertions ci-dessous en associant les variables propositionnelles p, q, r aux énoncés suivants : p : *il pleut*; q : *Pierre prend son parapluie*; r : *Pierre est mouillé*.

1. S'il pleut Pierre prend son parapluie.
2. Si Pierre prend son parapluie, Pierre n'est pas mouillé.
3. S'il ne pleut pas, Pierre ne prend pas son parapluie et Pierre n'est pas mouillé.

Montrer que « Pierre n'est pas mouillé » est une consequence logique des trois énoncés précédents.

Corrigé.

1. $\varphi_1 := p \Rightarrow q$
2. $\varphi_2 := q \Rightarrow \neg r$
3. $\varphi_3 := \neg p \Rightarrow (\neg q \wedge \neg r)$

Soit $\Gamma = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow \neg r, \neg p \Rightarrow (\neg q \wedge \neg r)\}$. Montrons que $\Gamma \models \neg r$.

$\mathsf{mod}(\varphi_1)$		
p	q	r
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	1	0
1	1	1

$\mathsf{mod}(\{\varphi_1, \varphi_2\})$		
p	q	r
0	0	0
0	0	1
0	1	0
1	1	0

$\mathsf{mod}(\Gamma)$		
p	q	r
0	0	0
1	1	0

Clairement $\mathsf{mod}(\Gamma) \subseteq \mathsf{mod}(\neg r)$ et donc $\Gamma \models \neg r$.

Exercice 2.13. La finale d'un tournoi de tennis oppose deux joueurs A et B. Après le match, les joueurs s'adressent à la presse :

— A dit : « je ne suis pas le gagnant ».
— B dit : « A ne ment pas ».

Le but de l'exercice est de représenter les informations précédentes par un ensemble de formules du calcul propositionnel. Pour cela on utilisera les symboles propositionnels :

— Ag qui signifie *A est le gagnant du match*,
— Am qui signifie *A ment*
— Bg qui signifie *B est le gagnant du match*
— Bm qui signifie *B ment*

Représenter toutes les informations, à savoir :
— un des joueurs a gagné et l'autre a perdu,
— A dit qu'il n'a pas gagné (si A ne ment pas alors A n'a pas gagné, sinon c'est le contraire),
— B dit que A ne ment pas.

Corrigé.
— un des joueurs a gagné et l'autre a perdu : $\neg(A_g \Leftrightarrow B_g)$
— A dit qu'il n'a pas gagné (si A ne ment pas alors A n'a pas gagné, sinon c'est le contraire), $Am \Leftrightarrow A_g$
— B dit que A ne ment pas. $B_m \Leftrightarrow A_m$.

Exercice 2.14. On dispose de trois cases alignées, notées $1,2,3$ de gauche à droite, et de pions de formes différentes : triangle, rond ou carré. Les pions peuvent-être placés dans les cases. Pour chaque $i \in \{1,2,3\}$ on note c_i l'assertion : « la case i contient un pion carré », et on fait de même pour les autres formes.

1. Modélisez, avec des formules du calcul propositionnel, les deux assertions suivantes : « il y a un pion rond immédiatement à droite d'un pion carré » et « chaque case contient un (et un seul) pion ».
2. Donnez les modèles de l'ensemble composé par ces deux formules. Que peut-on en déduire quant au pion situé dans la case 2 ?

Corrigé.

1.
   — $\varphi := (r_2 \wedge c_1) \vee (r_3 \wedge c_2)$
   — $\psi := \bigwedge_{i=1,2,3} (r_i \wedge \neg c_i \wedge \neg t_i) \vee (c_i \wedge \neg r_i \wedge \neg t_i) \vee (t_i \wedge \neg c_i \wedge \neg r_i)$
2. Les modèles sont les suivants :

c_1	c_2	c_3	r_1	r_2	r_3	t_1	t_2	t_3
1	0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0

   Dans la case 2, il y a soit un carré, soit un rond.

4 Systèmes équivalents

Exercice 2.15. On considère la fonction `simpl` définie inductivement par :

$$\frac{}{p \ : \ p}\ p \in Prop \qquad \frac{\varphi \ : \ \psi}{(\neg\varphi) \ : \ (\neg\psi)}$$

$$\frac{\varphi_1 \ : \ \psi_1 \qquad \varphi_2 \ : \ \psi_2}{(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \ : \ \neg(\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2)} \qquad \frac{\varphi_1 \ : \ \psi_1 \qquad \varphi_2 \ : \ \psi_2}{(\varphi_1 \vee \varphi_2) \ : \ (\psi_1 \vee \psi_2)} \qquad \frac{\varphi_1 \ : \ \psi_1 \qquad \varphi_2 \ : \ \psi_2}{(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \ : \ (\neg\psi_1 \vee \psi_2)}$$

1. Que fait la fonction `simpl` ?
2. Prouver le résultat précédent par induction structurelle.

Corrigé. La fonction `simpl` associe chaque formule φ a une formule ψ telle que : ψ ne contient que les connecteurs $\neg$ et $\vee$ et telle que $\varphi \equiv \psi$.

Prouvons cela par induction sur la structure des formules propositionnelles :
— (Base) $\texttt{simpl}(p) = p$, évident
— (Induction) On suppose $\texttt{simpl}(\varphi_1) = \psi_1$, $\texttt{simpl}(\varphi_2) = \psi_2$ et que ψ_1 et ψ_2 ne contiennent que les connecteurs $\neg$ et $\vee$ et que $\varphi_1 \equiv \psi_1$ et $\varphi_2 \equiv \psi_2$. On a :

— $\texttt{simpl}(\neg\varphi_1) = \neg\psi_1$: par hypothèse $\neg\psi_1$ ne ne contient que les connecteurs $\neg$ et $\vee$ et $\neg\varphi_1 \equiv \neg\psi_1$ puisque $\varphi_1 \equiv \psi_1$

— $\texttt{simpl}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \psi_1 \vee \psi_2$: par hypothèse $\psi_1 \vee \psi_2$ ne ne contient que les connecteurs $\neg$ et $\vee$ et $\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \psi_1 \vee \psi_2$ puisque $\varphi_1 \equiv \psi_1$ et $\varphi_2 \equiv \psi_2$.

— $\texttt{simpl}(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \neg\psi_1 \vee \psi_2$: par hypothèse $\neg\psi_1 \vee \psi_2$ ne ne contient que les connecteurs $\neg$ et $\vee$ et $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \equiv \neg\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \neg\psi_1 \vee \psi_2$ puisque $\varphi_1 \equiv \psi_1$ et $\varphi_2 \equiv \psi_2$.

— $\texttt{simpl}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \neg(\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2)$: par hypothèse $\neg(\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2)$ ne ne contient que les connecteurs $\neg$ et $\vee$ et $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2) \equiv \neg(\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2)$ puisque $\varphi_1 \equiv \psi_1$ et $\varphi_2 \equiv \psi_2$.

Exercice 2.16. On dira qu'une formule est en forme minimale si elle n'utilise que le connecteur $\Rightarrow$, et comme formule atomique $\perp$ et les variables propositionnelles. Le but de l'exercice est de montrer que toute formule propositionnelle admet une forme minimale équivalente.

1. Montrer que les formules $p \Rightarrow \perp$ et $\neg p$ sont logiquement équivalentes.
2. Sachant que les formules $p \Rightarrow q$ et $\neg p \vee q$ sont logiquement équivalentes, donner une formule équivalente à $p \vee q$ en forme minimale.
3. Sachant que $p \wedge q \equiv \neg(p \Rightarrow \neg q)$, donner une formule équivalente à $p \wedge q$ en forme minimale.
4. Déduire des questions précédentes une fonction `min` qui transforme toute formule propositionnelle en une formule équivalente en forme minimale.

Corrigé.

1. $p \Rightarrow \perp \equiv \neg p \vee \perp \equiv \neg p$
2. $p \vee q \equiv \neg p \Rightarrow q \equiv (p \Rightarrow \perp) \Rightarrow q$
3. $p \wedge q \equiv \neg(p \Rightarrow \neg q) \equiv (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \perp \equiv (p \Rightarrow (q \Rightarrow \perp)) \Rightarrow \perp$.
4. On définit `min` par l'induction suivante :

$$\frac{}{p \ : \ p}\, p \in \textsc{Prop} \qquad \frac{\varphi \ : \ m}{(\neg\varphi) \ : \ (m \Rightarrow \perp)} \qquad \frac{\varphi_1 \ : \ m_1 \qquad \varphi_2 \ : \ m_2}{(\varphi_1 \vee \varphi_2) \ : \ ((m_1 \Rightarrow \perp) \Rightarrow m_2}$$

$$\frac{\varphi_1 \ : \ m_1 \qquad \varphi_2 \ : \ m_2}{(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \ : \ ((m_1 \Rightarrow (m_2 \Rightarrow \perp)) \Rightarrow \perp} \qquad \frac{\varphi_1 \ : \ m_1 \qquad \varphi_2 \ : \ m_2}{(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \ : \ (m_1 \Rightarrow m_2)}$$

Exercice 2.17. On considère des formules construites à partir de variables propositionnelles, des constantes $\perp$ et $\top$ et d'un seul connecteur logique ternaire IF. On appelle $PropIF$ l'ensemble des formules ainsi construites. La valeur de $IF(\varphi_c, \varphi_t, \varphi_e)$ est égale à la valeur de φ_t lorsque φ_c est vraie et à la valeur de φ_e sinon.

1. Donnez une définition inductive de $PropIF$.
2. Donnez des formules propositionnelles équivalentes à $IF(\varphi_c, \varphi_t, \varphi_e)$, à $IF(\varphi_c, \perp, \varphi_e)$, $IF(\varphi_c, \varphi_t, \top)$
3. Donnez des formules équivalentes à $\neg\varphi$, $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$ et $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ qui n'utilisent que le connecteur IF et déduisez en une définition inductive de la fonction associant une formule à une formule équivalente de $PropIF$
4. Donnez une définition récursive de la fonction I_v qui étant donnée une interprétation des variables propositionnelles v et une formule φ de PropIF calcule la valeur de vérité de cette formule.

Corrigé.

1. $$\frac{}{\perp} \qquad \frac{}{\top} \qquad \frac{}{p}\, p \in \textsc{Prop} \qquad \frac{\varphi_c \qquad \varphi_t \qquad \varphi_e}{IF(\varphi_c, \varphi_t, \varphi_e)}$$
2. $IF(\varphi_c, \varphi_t, \varphi_e) \equiv (\varphi_c \wedge \varphi_t) \vee (\neg\varphi_c \wedge \varphi_e)$,
   $IF(\varphi_c, \perp, \varphi_e) \equiv \neg\varphi_c \wedge \varphi_e$,
   $IF(\varphi_c, \varphi_t, \top) \equiv (\varphi_c \wedge \varphi_t) \vee \neg\varphi_c \equiv (\varphi_c \vee \neg\varphi_c) \wedge (\varphi_t \vee \neg\varphi_c) \equiv \top \wedge (\varphi_t \vee \neg\varphi_c) \equiv \varphi_t \vee \neg\varphi_c$.

3. D'après la question précédente, on déduit facilement que :
   $\neg\varphi \equiv IF(\varphi, \bot, \top)$
   $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv IF(\varphi_1, \varphi_2, \bot)$
   $\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv IF(\varphi_1, \top, \varphi_2)$
   $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \equiv IF(\varphi_1, \varphi_2, \top)$
   On en déduit la fonction inductive :

$$\frac{}{p \;:\; p}\; p \in \textsc{Prop} \qquad \frac{\varphi \;:\; m}{(\neg\varphi) \;:\; IF(m, \bot, \top)} \qquad \frac{\varphi_1 \;:\; m_1 \qquad \varphi_2 \;:\; m_2}{(\varphi_1 \vee \varphi_2) \;:\; F(m_1, \top, m_2)}$$

$$\frac{\varphi_1 \;:\; m_1 \qquad \varphi_2 \;:\; m_2}{(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \;:\; IF(m_1, m_2, \bot)} \qquad \frac{\varphi_1 \;:\; m_1 \qquad \varphi_2 \;:\; m_2}{(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \;:\; IF(m_1, m_2, \top)}$$

4.

$$\frac{}{\bot \;:\; 0} \qquad \frac{}{\top \;:\; 1} \qquad \frac{}{p \;:\; v(p)}\; p \in \textsc{Prop}$$

$$\frac{\varphi_c \;:\; 0 \qquad \varphi_t \;:\; b_t \qquad \varphi_e \;:\; b_e}{IF(\varphi_c, \varphi_t, \varphi_e) \;:\; b_e} \qquad \frac{\varphi_c \;:\; 1 \qquad \varphi_t \;:\; b_t \qquad \varphi_e \;:\; b_e}{IF(\varphi_c, \varphi_t, \varphi_e) \;:\; b_t}$$