

TD n° 3

CP : formes normales, Quine, DPLL

Exercice 1. Soient Γ, Σ deux ensembles de formules et φ une formule. On rappelle ces deux résultats importants du cours :

(a) $\Gamma \models \varphi$ ssi $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est contradictoire ; (b) $\text{mod}(\Sigma \cup \Gamma) = \text{mod}(\Sigma) \cap \text{mod}(\Gamma)$.

Démontrez les propriétés suivantes :

- 1) Γ est contradictoire ssi $\Gamma \models \perp$.
- 2) Si $\Sigma \subseteq \Gamma$, alors $\text{mod}(\Gamma) \subseteq \text{mod}(\Sigma)$.
- 3) Si $\Sigma \subseteq \Gamma$ et $\Sigma \models \varphi$, alors $\Gamma \models \varphi$.
- 4) $\text{mod}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}) = \text{mod}(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$
- 5) $\Gamma \models \varphi$ ssi $\text{mod}(\Gamma) = \text{mod}(\Gamma \cup \{\varphi\})$.

Exercice 2. Reliez les propositions logiquement équivalentes.

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| 1. $\neg(p \wedge q)$ | 5. $\neg p \wedge \neg q$ |
| 2. $\neg(p \vee q)$ | 6. $q \rightarrow \neg p$ |
| 3. $p \rightarrow \neg q$ | 7. $\neg p \vee \neg q$ |
| 4. $\neg(p \rightarrow q)$ | 8. $p \wedge \neg q$ |

Exercice 3 (*Mise sous forme clausale*). Écrivez ces formules sous FNC.

- 1) $(c \rightarrow ((b \vee a) \wedge d)) \vee f$
- 2) $(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge f)$
- 3) $(p \wedge \neg((q \vee r) \rightarrow p)) \vee s$.
- 4) $\neg((p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s))$.

Exercice 4. Appliquez l'algorithme de Quine pour déterminer la satisfaisabilité des formules suivantes. Donnez le modèle éventuellement trouvé.

- 1) $\neg(x \rightarrow (y \rightarrow \neg z)) \vee (\neg x \wedge \neg(y \vee z))$
- 2) $(x \wedge \neg t) \wedge \neg((x \wedge \neg y) \vee \neg(y \rightarrow z)) \wedge (z \rightarrow t)$

Exercice 5. Exécutez la procédure DPLL sur les formules suivantes. Lorsqu'aucune heuristique ne s'applique, choisissez les variables dans l'ordre alphabétique.

- 1) $(\neg c \vee d \vee \neg b \vee \neg a) \wedge (c \vee d \vee \neg b \vee \neg a)$.
- 2) $(\neg x \vee w) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (x \vee y) \wedge (\neg w \vee \neg y \vee \neg z \vee x)$.
- 3) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee s \vee t) \wedge (q \vee r \vee \neg s)$.
- 4) $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee x_4)$

Exercice 6. Utilisez l'algorithme DPLL pour décider si l'affirmation suivante est vraie :

$$\{p \rightarrow (q \vee r), q \rightarrow (r \rightarrow s), \neg s\} \models \neg p.$$

Exercice 7. En étendant la procédure DPLL, énumérez tous les modèles des formules suivantes. Lorsqu'aucune heuristique ne s'applique, choisissez les variables dans l'ordre alphabétique.

- 1) $(\neg p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee p \vee s) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg s \vee \neg q).$
- 2) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee s \vee t) \wedge (q \vee r \vee \neg s).$

Exercice 8. On considère cinq affirmations :

- (i) Jules n'est jamais en vacances quand il lit le journal.
- (ii) Pour que Jules soit à la mer, il suffit qu'on soit en été.
- (iii) Si Jules est à la mer mais qu'il n'est pas en forme alors il lit le journal.
- (iv) Il est impossible qu'on ne soit pas en été et que Jules ne soit pas à la mer.
- (v) Quand Jules n'est pas en vacances alors il ne lit pas le journal.

- 1) Modélisez ces assertions en logique des propositions.
- 2) À l'aide de la méthode DPLL, montrez que l'assertion « Jules est en forme » est une conséquence logique de l'ensemble des hypothèses précédentes.

Exercice 9. Soit le règlement suivant d'un club écossais.

- a) Tout membre non écossais porte des chaussettes orange ;
- b) Tout membre porte une jupe ou ne porte pas de chaussettes orange ;
- c) Les membres mariés ne sortent pas le dimanche ;
- d) Un membre sort le dimanche si et seulement si il est écossais ;
- e) Tout membre qui porte une jupe est écossais et marié ;
- f) Tout membre écossais porte une jupe.

Peut-il y avoir un membre dans ce club ?

Exercice 10. Vous êtes perdu dans le désert depuis trop longtemps. Vous arrivez à une bifurcation. Les deux pistes peuvent soit conduire à une oasis, soit se perdre dans le désert (au mieux elles mènent toutes deux à une oasis, au pire elles se perdent toutes les deux). Chaque piste est gardée par un sphinx que vous pouvez interroger. Votre but bien sûr est d'atteindre une oasis.

- (i) L'un des sphinx vous répond que « une au moins des deux pistes conduit à un oasis ».
- (ii) L'autre sphinx vous répond que « la piste de droite se perd dans le désert ».
- (iii) De source sûre vous savez que les deux sphinx disent tous les deux la vérité, ou bien mentent tous les deux.

Résoudre l'énigme : peut-on déduire à partir de l'énoncé qu'une piste conduit à une oasis et si oui quelle est-elle ?

Exercice 11 (*Evolution sentimentale...*).

1) On interroge un logicien (qui dit toujours la vérité) sur sa vie sentimentale. Il répond par les deux affirmations suivantes :

- J’aime Marie ou j’aime Anne.
- Si j’aime Marie, j’aime Anne.

Que peut-on conclure : aime-t-il Marie ? Anne ? Ou les deux ?

2) Le même logicien est à nouveau interrogé un an plus tard par un autre logicien de la façon suivante : « Est-il vrai que si vous aimez Marie, alors vous aimez Anne ? ». Ce à quoi il répond :

- Si c’est vrai alors j’aime Marie.
- Si j’aime Marie, alors c’est vrai.

Quelles conclusions en tirer : aime-t-il toujours Marie ? Anne ? Les deux ? Ou plus personne ?
Modélisez ces deux problèmes en logique des propositions, et précisez quel problème de la logique des propositions vous vous posez ?

Exercice 12 (« *L’énigme du masque de fer* »). On a trouvé les inscriptions suivantes dans la cellule de l’homme au masque de fer :

- (i) Je ne suis pas le frère jumeau de Louis XIV.
- (ii) Une seule de ces deux propositions est vraie.

Que peut-on en déduire ?