Aix*Marseille université	Domaine Sciences et Technologies LICENCE 3 INFORMATIQUE **Algorithmique 2 : TD 8** **Code UE : SIN5U03C**
Année 2020-2021	**Randomisation**

Exercice 1 On tire les cartes une apres l'autre parmi les 52 cartes et chaque fois on essaie de deviner leur valeur. Utilisez des variables indicatrices pour calculer le nombre esperée des cartes correctement devines si

(a) on ne se souvient pas des cartes déjà sorties ;
(b) on se souviens des cartes déjà sorties.

Exercice 2 (vestiaire à chapeaux) Utilisez des variables indicatrices pour résoudre le problème suivant, connu sous le nom de problème du *vestiaire à chapeaux*. Chaque client parmi n au total donne son chapeau à un employé d'un restaurant. Cet employé redonne les chapeaux aux clients dans un ordre aléatoire. Quel est le nombre attendu de clients qui récupéreront leurs chapeaux ?

Exercice 3 (vu en cours) On repete une experience Bernoulli avec la probabilité du succès p, jusqu'a premier succès. Quel est le nombre esperée des tirages ?

Exercice 4 (coupon collecteur) Un collectionneur cherche à avoir toutes les vignettes d'une série de n vignettes dans les boîtes de céréales, mais à l'achat d'une boîte, le numéro de la vignette est inconnu. La question est : combien faut-il acheter de boîtes des céréales pour avoir la collection complète ?

Exercice 5 (coupe maximum) Une coupe d'un graphe $G = (V, E)$ non-orienté et non-pondéré est une partition (A, B) de V, i.e., $A \cup B = V$ et $A \cap B = \varnothing$. La *capacité* $c(A, B)$ d'une coupe (A, B) est le nombre d'arêtes uv avec $u \in A$ et $v \in B$. Une *coupe maximum* est une coupe de capacité maximum. Soit OPT la capacité d'une coupe maximum. Considerons aussi, l'algorithme randomisé suivant pour calculer une coupe maximum : de facon independent l'un de l'autre placer chaque sommet v de G dans l'ensemble A avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et dans l'ensemble B avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Retourner la coupe (A, B). Soit X la variable aléatoire designant la capacité de la coupe (A, B).

(a) Montrer que $OPT \leq |E|$;
(b) Pour chaque arête uv de G considerons la variable indicatrice X_{uv}, où $X_{uv} = 1$ si $u \in A, v \in B$ où $u \in B, v \in A$ et $X_{uv} = 0$ sinon. Utilisez ces variables indicatrices pour montrer que $E[X] \geq \frac{1}{2}|E|$.
(c) Conclure que l'algorithme randomisé est un algorithme d'approximation facteur $\frac{1}{2}$.

Exercice 6 (Max Sat.) Étant données n variables Booléennes $x_1, \ldots, x_n$, on appelle littéral, une variable x_i ou sa négation $\neg x_i$. Une clause est une disjonction de littéraux : par exemple, $\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3$. La taille d'une clause est son nombre de littéraux. On élimine les clauses triviales (e.g., $x_1 \vee x_2 \vee \neg x_1$) et les littéraux redondants (e.g., $x_1 \vee x_3 \vee x_1$).

Max Sat. *Étant donné un ensemble de m clauses pondérées sur n variables Booléennes $x_1, \ldots, x_n$, trouver une affectation des x_i qui maximise le poids total des clauses satisfaites.*

L'objectif de cet exercice est d'analyser la qualité des solutions produites par l'algorithme naïf qui consiste à tirer uniformément la valeur de chacune des variables x_i dans $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ et à retourner l'affectation calculée.

1. Montrer qu'à la fin de l'algorithme naïf décrit ci-dessus, pour toute clause c avec taille$(c) = k$, alors la probabilité que c soit satisfaite est $1 - 2^{-k}$.
2. Montrer que l'algorithme naïf est une 1/2-approximation randomisée pour le problème MAX-SAT, c'est-à-dire que l'espérance du poids des clauses satisfaites par la solution de l'algorithme est au moins la moitié du poids des clauses satisfaites par une affectation optimale.

Exercice 7 (Identité de polynômes) On veut savoir si deux polynômes $G(x)$ et $F(x)$ de degré d sont égaux. La méthode la plus simple consiste à les mettre tous les deux sous forme canonique $(\sum_{i=0}^{d} c_i x^i)$ en $O(d^2)$ avant de tester en $O(d)$ que tous les c_i sont égaux. L'algorithme randomisé suivant teste l'identité entre deux polynômes plus efficacement.

1. Choisir un entier r au hasard parmi un ensemble S de $100d$ valeurs possibles (d est le degré du polynôme $G(x) - F(x)$)
2. Evaluer $F(r)$ et $G(r)$.
3. Si $F(r)$ et $G(r)$ sont différents renvoyer "Les polynômes sont différents." sinon renvoyer "Les polynômes sont sans doute identiques.".

Donner une borne supérieure de la probabilité d'une réponse incorrecte, i.e. r est une racine du polynôme $F(x) - G(x)$ alors que $F(x)$ et $G(x)$ sont distincts. Comment diminuer encore la probabilité d'une réponse erronée jusqu'à $(\frac{1}{100})^2$?