L3 Informatique
2019/20

Logique
SIN5U06L

Partiel – octobre 2019 – Aix-Montperrin

Durée : 2h – documents interdits

Exercice 1. On fixe un ensemble $\mathcal{P}$ de symboles propositionnels. Définissez précisément les notions suivantes :

1) Valuation.
2) Modèle d'une formule φ.
3) Formule valide.
4) $\varphi \models \psi$, où φ et ψ sont des formules.

✎ *Voir le cours.*

Exercice 2. On se propose de modéliser dans le calcul propositionnel des mots de longueur fixée $n > 0$ sur un alphabet A. Pour cela on considère l'ensemble de variables propositionnelles $\mathcal{P} = \{p_{i,\alpha}, 1 \leq i \leq n, \alpha \in A\}$ dont la signification attendue est la suivante :

$p_{i,a}$ est vraie si le mot contient la lettre a en position i.

Avec cette convention, chaque mot $w \in A^n$ peut être représenté par une valuation v_w qui envoie une variable $p_{i,\alpha}$ sur vrai ssi $w_i = \alpha$. Par exemple, pour $n = 3$ et $A = \{a, b\}$, les mots $u = bba$ et $w = aba$ sont représentés, respectivement, par les valuations

$$v_u = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} p_{1,a} & p_{1,b} & p_{2,a} & p_{2,b} & p_{3,a} & p_{3,b} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{et} \quad v_w = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} p_{1,a} & p_{1,b} & p_{2,a} & p_{2,b} & p_{3,a} & p_{3,b} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

1) Si une valuation v représente un mot de A^n, alors pour tout $i \leq n$, il existe un unique $\alpha \in A$ tel que $v(p_{i,\alpha}) = 1$. Exprimez cette contrainte par une formule propositionnelle.

✎ $$\bigwedge_{1\leq i\leq n} \bigvee_{\alpha\in A} \left(p_{i,\alpha} \wedge \bigwedge_{\beta\in A-\alpha} \neg p_{i,\beta} \right).$$

On fixe désormais $A = \{a, b, c\}$ et on considère une valuation v satisfaisant la contrainte de la question précédente. Pour chacune des conditions qui suivent, décrivez la formule propositionnelle supplémentaire que v doit satisfaire pour représenter le mot w.

2) w contient le symbole a.

✎ $$\bigvee_{i=1}^{n} p_{i,a}.$$

3) w contient tous les symboles de A.

✎ $$\bigwedge_{a\in A} \bigvee_{i=1}^{n} p_{i,a}$$

4) w contient le facteur abc.

✎ $$\bigvee_{1\leq i\leq n-2} (p_{i,a} \wedge p_{i+1,b} \wedge p_{i+2,c})$$

5) w est un palindrome.

✎ $$\bigwedge_{1\leq i\leq \lfloor n/2\rfloor}\ \bigvee_{a\in A}(p_{i,a}\wedge p_{n-i+1,a})$$

6) Si la lettre a apparaît dans w, alors b apparaît quelque part à droite de a.

✎ $$\bigwedge_{1\leq i\leq n}\left(p_{i,a}\rightarrow \bigvee_{i<j\leq n} p_{j,b}\right)$$

Exercice 3. Donnez une forme clausale de la formule suivante, en essayant de simplifier la formule au maximum :

$$\varphi = (p_A\wedge\neg p_B\wedge\neg p_C)\vee(p_B\wedge\neg p_A\wedge\neg p_C)\vee(p_C\wedge\neg p_A\wedge\neg p_B).$$

✎ *Voici la forme clausale obtenue par distribution et élimination des clauses contenant des littéraux opposés (donc du type $p\vee\neg p$) :*

$$\begin{aligned}\varphi \equiv\ & (p_A\vee p_B\vee p_C)\wedge(p_A\vee\neg p_C\vee\neg p_B)\wedge(\neg p_B\vee\neg p_A\vee p_C)\wedge(\neg p_B\vee\neg p_A)\wedge\\ & (\neg p_B\vee\neg p_C\vee\neg p_A)\wedge(\neg p_B\vee\neg p_C)\wedge(\neg p_C\vee p_B\vee\neg p_A)\wedge(\neg p_C\vee\neg p_A)\wedge\\ & (\neg p_C\vee\neg p_A\vee\neg p_B)\wedge(\neg p_C\vee\neg p_A)\wedge(\neg p_C\vee\neg p_B)\end{aligned}$$

Après simplification par subsumption, on obtient :

$$(p_A\vee p_B\vee p_C)\wedge(\neg p_B\vee\neg p_C)\wedge(\neg p_A\vee\neg p_C)\wedge(\neg p_A\vee\neg p_B).$$

Exercice 4. Utiliser l'algorithme DPLL pour trouver un modèle (on ne les demande donc pas tous !) de l'ensemble de clauses suivant :

$$\{a\vee b,\neg b\vee c,\neg c\vee d,a\vee\neg d\vee e,a\vee\neg c\vee f,e\vee\neg f,g\vee h,\neg a\vee\neg h,\neg a\vee\neg g\}.$$

✎ $$\begin{array}{cl}
a\vee b,\neg b\vee c,\neg c\vee d,a\vee\neg d\vee e,a\vee\neg c\vee f,e\vee\neg f,g\vee h,\neg a\vee\neg h,\neg a\vee\neg g & \\ \hline
a\vee b,\neg b\vee c,\neg c\vee d,a\vee\neg c\vee f,g\vee h,\neg a\vee\neg h,\neg a\vee\neg g & e\leftarrow\top \text{ (litteral pur)}\\ \hline
a\vee b,\neg b\vee c,a\vee\neg c\vee f,g\vee h,\neg a\vee\neg h,\neg a\vee\neg g & d\leftarrow\top \text{ (litteral pur)}\\ \hline
a\vee b,\neg b\vee c,g\vee h,\neg a\vee\neg h,\neg a\vee\neg g & f\leftarrow\top \text{ (litteral pur)}\\ \hline
a\vee b,g\vee h,\neg a\vee\neg h,\neg a\vee\neg g & c\leftarrow\top \text{ (litteral pur)}\\ \hline
g\vee h,\neg a\vee\neg h,\neg a\vee\neg g & b\leftarrow\top \text{ (litteral pur)}\\ \hline
g\vee h & a\leftarrow\bot \text{ (litteral pur)}\\ \hline
\varnothing & g\leftarrow\top \text{ (litteral pur)}
\end{array}$$

On trouve les deux modèles suivants :

a	b	c	d	e	f	g	h
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	0

Exercice 5. Prouvez par résolution que $\{p\vee q\vee r,p\rightarrow q,q\rightarrow r,r\rightarrow p\}\models p$.

✎ *Il faut vérifier qu'on peut générer $\bot$ à partir de l'ensemble $\{p\vee q\vee r,q\vee\neg p,\neg q\vee r,\neg r\vee p,\neg p\}$. Voici une preuve possible.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{p\vee q\vee r}\qquad\overline{\neg q\vee r}}{p\vee r}\qquad\overline{\neg r\vee p}}{p}\qquad\overline{\neg p}}{\bot}$$

Exercice 6. Prouvez le séquent : $(r \wedge s) \rightarrow t \vdash r \rightarrow (s \rightarrow t)$.

✎

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{r, s \vdash r, t}\,Ax \qquad \dfrac{}{r, s \vdash s, t}\,Ax}{r, s \vdash r \wedge s, t}\,D_{\wedge} \qquad \dfrac{}{t, r, s \vdash t}\,Ax}{(r \wedge s) \rightarrow t, r, s \vdash t}\,G_{\rightarrow}}{(r \wedge s) \rightarrow t, r \vdash s \rightarrow t}\,D_{\rightarrow}}{(r \wedge s) \rightarrow t \vdash r \rightarrow (s \rightarrow t)}\,D_{\rightarrow}
$$