

Partiel – octobre 2019 – Aix-Montperrin

Durée : 2h – documents interdits

Exercice 1. On fixe un ensemble \mathcal{P} de symboles propositionnels. Définissez précisément les notions suivantes :

- 1) Valuation.
- 2) Modèle d'une formule φ .
- 3) Formule valide.
- 4) $\varphi \models \psi$, où φ et ψ sont des formules.

Exercice 2. On se propose de modéliser dans le calcul propositionnel des mots de longueur fixée $n > 0$ sur un alphabet A . Pour cela on considère l'ensemble de variables propositionnelles $\mathcal{P} = \{p_{i,\alpha}, 1 \leq i \leq n, \alpha \in A\}$ dont la signification attendue est la suivante :

$p_{i,\alpha}$ est vraie si le mot contient la lettre a en position i .

Avec cette convention, chaque mot $w \in A^n$ peut être représenté par une valuation v_w qui envoie une variable $p_{i,\alpha}$ sur vrai ssi $w_i = \alpha$. Par exemple, pour $n = 3$ et $A = \{a, b\}$, les mots $u = bba$ et $w = aba$ sont représentés, respectivement, par les valuations

$$v_u = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} p_{1,a} & p_{1,b} & p_{2,a} & p_{2,b} & p_{3,a} & p_{3,b} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{et} \quad v_w = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} p_{1,a} & p_{1,b} & p_{2,a} & p_{2,b} & p_{3,a} & p_{3,b} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

- 1) Si une valuation v représente un mot de A^n , alors pour tout $i \leq n$, il existe un unique $\alpha \in A$ tel que $v(p_{i,\alpha}) = 1$. Exprimez cette contrainte par une formule propositionnelle.

On fixe désormais $A = \{a, b, c\}$ et on considère une valuation v satisfaisant la contrainte de la question précédente. Pour chacune des conditions qui suivent, décrivez la formule propositionnelle supplémentaire que v doit satisfaire pour représenter le mot w .

- 2) w contient le symbole a .
- 3) w contient tous les symboles de A .
- 4) w contient le facteur abc .
- 5) w est un palindrome.
- 6) Si la lettre a apparaît dans w , alors b apparaît quelque part à droite de a .

Exercice 3. Donnez une forme clausale de la formule suivante, en essayant de simplifier la formule au maximum :

$$\varphi = (p_A \wedge \neg p_B \wedge \neg p_C) \vee (p_B \wedge \neg p_A \wedge \neg p_C) \vee (p_C \wedge \neg p_A \wedge \neg p_B).$$

Exercice 4. Utiliser l'algorithme DPLL pour trouver un modèle (on ne les demande donc pas tous !) de l'ensemble de clauses suivant :

$$\{a \vee b, \neg b \vee c, \neg c \vee d, a \vee \neg d \vee e, a \vee \neg c \vee f, e \vee \neg f, g \vee h, \neg a \vee \neg h, \neg a \vee \neg g\}.$$

Exercice 5. Prouvez par résolution que $\{p \vee q \vee r, p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow p\} \models p$.

Exercice 6. Prouvez le séquent : $(r \wedge s) \rightarrow t \vdash r \rightarrow (s \rightarrow t)$.