TD nº 4

CP : systèmes de preuve

1 Résolution

Exercice 1. Soient C_0, C_1 deux clauses. On dit que C_0 *subsume* C_1, ou que C_1 *est subsumée* par C_0, si tout littéral de C_0 apparaît dans C_1. De manière équivalente, C_0 subsume C_1 s'il existe une clause C telle que $C_1 \equiv C \vee C_0$. On écrit alors $C_0 \sqsubseteq C_1$. Par exemple, $(p \vee \neg q \vee t) \sqsubseteq (\neg s \vee p \vee \neg q \vee \neg r \vee t)$.

1) Montrez $C_0 \sqsubseteq C_1$ implique $C_0 \models C_1$.

✎ *Si $C_0 \sqsubseteq C_1$, alors il existe une clause C telle que $C_1 \equiv C \vee C_0$. On a donc $\mathsf{mod}(C_1) = \mathsf{mod}(C) \cup \mathsf{mod}(C_0)$ et donc $\mathsf{mod}(C_0) \subseteq \mathsf{mod}(C_1)$, c'est-à-dire, $C_0 \models C_1$.*

2) Soit Γ un ensemble de clauses. Montrez que $\mathsf{mod}(\Gamma)$ n'est pas modifié si on retire de Γ toute clause subsumée par une autre clause de Γ.

✎ *Pour alléger l'écriture, on notera $\Gamma - C$ et $\Gamma + C$ plutôt que $\Gamma \setminus \{C\}$ et $\Gamma \cup \{C\}$ les ensembles de clause obtenus par suppression ou adjonction d'une clause C dans l'ensemble Γ. Supposons qu'il existe $C_0, C_1 \in \Gamma$ telles que $C_0 \sqsubseteq C_1$. Soit v une évaluation. On a d'une part :*

$$v \models \Gamma \quad \Rightarrow \quad v \models \Gamma - C_1 \quad \textit{puisque } \Gamma - C_1 \subset \Gamma$$

et d'autre part :

$$\begin{array}{rcll} v \models \Gamma - C_1 & \Rightarrow & v \models C_0 & \textit{puisque } C_0 \in \Gamma - C_1 \\ & \Rightarrow & v \models C_1 & \textit{puisque } C_0 \models C_1 \textit{ par la question } 1 \\ & \Rightarrow & v \models (\Gamma - C_1) + C_1 & \textit{puisque } v \models (\Gamma - C_1) \textit{ et } v \models C_1 \\ & \Rightarrow & v \models \Gamma & \end{array}$$

Par conséquent, $v \models \Gamma \Leftrightarrow v \models \Gamma - C_1$, c'est-à-dire $\mathsf{mod}(\Gamma) = \mathsf{mod}(\Gamma - C_1)$.

Exercice 2. Soient θ, φ, ψ trois formules propositionnelles. Montrez que

$$\mathsf{mod}(\{\theta \vee \varphi, \neg\theta \vee \psi\}) = \mathsf{mod}(\{\theta \vee \varphi, \neg\theta \vee \psi, \varphi \vee \psi\}).$$

(Pour le sens $\mathsf{mod}(\{\theta \vee \varphi, \neg\theta \vee \psi\}) \subseteq \mathsf{mod}(\{\theta \vee \varphi, \neg\theta \vee \psi, \varphi \vee \psi\})$, vous montrerez que tout modèle de $\{\theta \vee \varphi, \neg\theta \vee \psi\}$ est modèle de $\varphi \vee \psi$.)

✎ *Soit v une évaluation. On a clairement $v \models \{\theta \vee \varphi, \neg\theta \vee \psi, \varphi \vee \psi\} \Rightarrow v \models \{\theta \vee \varphi, \neg\theta \vee \psi\}$.*

Inversement, si $v \models \{\theta \vee \varphi, \neg\theta \vee \psi\}$, deux situations se présentent :

soit $v \models \neg\theta$ et dans ce cas, $v \models \theta \vee \varphi$ impose $v \models \varphi$ et donc $v \models \varphi \vee \psi$;

soit $v \models \theta$ et dans ce cas, $v \models \neg\theta \vee \psi$ impose $v \models \psi$ et donc $v \models \varphi \vee \psi$.

Par conséquent, $v \models \{\theta \vee \varphi, \neg\theta \vee \psi\} \Rightarrow v \models \{\theta \vee \varphi, \neg\theta \vee \psi, \varphi \vee \psi\}$. Finalement :

$$v \models \{\theta \vee \varphi, \neg\theta \vee \psi\} \textit{ ssi } v \models \{\theta \vee \varphi, \neg\theta \vee \psi, \varphi \vee \psi\}.$$

L'égalité à prouver en découle.

Exercice 3. Utiliser la résolution pour prouver ou infirmer les affirmations suivantes.

1) $\models p \to p$.

✎ *Soit* $\varphi = p \to p$. *La forme clausale de* $\neg\varphi$ *est* $\{p, \neg p\}$.
Résolution :

$$\dfrac{p \qquad \neg p}{\bot}$$

Donc $\vdash \varphi$ *et par correction de la méthode de résolution,* $\models \varphi$.

2) $\models ((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$.

✎ *Posons* $\varphi = ((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$, *d'où* $\neg\varphi \equiv (p \to q) \wedge (q \to r) \wedge \neg(\neg p \vee r)$.
La forme clausale de $\neg\varphi$ *est donc* $\{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p, \neg r\}$.
Résolution :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \qquad \neg p \vee q}{q} \qquad \neg q \vee r}{r} \qquad \neg r}{\bot}$$

Donc $\vdash \varphi$ *et par correction,* $\models \varphi$.

3) $\models ((s \to r) \wedge p \wedge \neg r) \to \neg r \wedge \neg s \wedge p$.

✎ *Soit* $\varphi = ((s \to r) \wedge p \wedge \neg r) \to \neg r \wedge \neg s \wedge p$. *On a* $\neg\varphi \equiv (\neg s \vee r) \wedge p \wedge \neg r \wedge (r \vee s \vee \neg p)$.
La forme clausale de φ *est donc* $\{\neg s \vee r, p, \neg r, r \vee s \vee \neg p\}$.
Résolution :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \qquad r \vee s \vee \neg p}{r \vee s} \qquad \neg r}{s} \qquad \neg s \vee r}{r} \qquad \neg r}{\bot}$$

Donc $\vdash \varphi$ *et par correction,* $\models \varphi$.

4) $\models [(p \wedge q) \vee (r \wedge q)] \to (p \vee r)$.

✎ *Soit* $\varphi = [(p \wedge q) \vee (r \wedge q)] \to (p \vee r)$. *On a* $\neg\varphi \equiv ((p \wedge q) \vee (r \wedge q)) \wedge \neg(p \vee r)$.
La forme clausale de φ *est donc* $\{p \vee r, p \vee q, q \vee r, q, \neg p, \neg r\}$.
Résolution :

$$\dfrac{\dfrac{p \vee r \qquad \neg p}{r} \qquad \neg r}{\bot}$$

Donc $\vdash \varphi$ *et par correction,* $\models \varphi$.

5) $\{q \to (\neg q \vee r), q \to (p \wedge \neg r)\} \models q \to r$.

✎ *Soit* $\Gamma = \{q \to (\neg q \vee r), q \to (p \wedge \neg r)\}$ *et* $\varphi = q \to r$.
La forme clausale de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *est* $\{\neg q \vee r, \neg q \vee p, \neg q \vee \neg r, q, \neg r\}$.
Résolution :

$$\dfrac{\dfrac{\neg q \vee r \qquad \neg r}{\neg q} \qquad q}{\bot}$$

Donc $\Gamma \vdash \varphi$ et par correction, $\Gamma \models \varphi$.

6) $\{q \to (\neg q \vee r), q \to (p \wedge \neg r)\} \models q \wedge r$.

✎ *Soit $\Gamma = \{q \to (\neg q \vee r), q \to (p \wedge \neg r)\}$ et $\varphi = q \wedge r$.*
La forme clausale de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est $C = \{\neg q \vee r, \neg q \vee p, \neg q \vee \neg r\}$.
Résolution :

$$\dfrac{\dfrac{\neg q \vee r \qquad \neg q \vee \neg r}{\neg q \vee \neg q}}{\neg q}$$

Il n'y a pas possibilité de générer d'autres clauses, donc Coupure$(C) = \{\neg q \vee r, \neg q \vee p, \neg q \vee \neg r; \neg q \vee \neg q, \neg q\}$ qui ne contient pas $\bot$. On en conclue que $C \nvdash \bot$ et donc, par complétude de la méthode de coupure, $\Gamma \not\models \varphi$.

7) $\models (p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((\neg p \to r) \wedge (p \wedge q))$.

✎ *Soit $\varphi = (p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((\neg p \to r) \wedge (p \wedge q))$. En remarquant que $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$, on obtient :*

$$\begin{aligned}
\neg\varphi &\equiv [(p \wedge (q \vee r)) \vee ((\neg p \to r) \wedge (p \wedge q))] \wedge [\neg(p \wedge (q \vee r)) \vee \neg((\neg p \to r) \wedge (p \wedge q))] \\
&\equiv [(p \wedge (q \vee r)) \vee ((p \vee r) \wedge p \wedge q)] \wedge [(\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)) \vee ((\neg p \wedge \neg r) \vee \neg p \vee \neg q)] \\
&\equiv (p \vee r) \wedge p \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge \\
&\quad\ [((\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee ((\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q))] \\
&\equiv (p \vee r) \wedge p \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)
\end{aligned}$$

La forme clausale de $\neg\varphi$ est donc $\Gamma = \{p \vee r,\ p,\ p \vee q,\ p \vee q \vee r,\ q \vee r,\ \neg p \vee \neg q,\ \neg p \vee \neg q \vee \neg r\}$. En simplifiant Γ par subsumption, on obtient l'ensemble $\Gamma' = \{p, q \vee r,\ \neg p \vee \neg q\}$ tel que $\mathsf{mod}(\Gamma) = \mathsf{mod}(\Gamma')$. On construit alors facilement l'ensemble Coupure$(\Gamma') = \{p, q \vee r,\ \neg p \vee \neg q, \neg q, r, \neg p \vee r\}$ qui ne contient pas $\bot$. On en conclut que $\Gamma' \nvdash \bot$ et par complétude de la méthode de coupure que $\not\models \varphi$.

8) $\{p \to q, q \to r, p \vee \neg r\} \models p \wedge q \wedge r$.

✎ *Soit $\Gamma = \{p \to q, q \to r, p \vee \neg r\}$ et $\varphi = p \wedge q \wedge r$.*
La forme normale de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est $\Delta = \{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p \vee \neg r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p \vee q \qquad p \vee \neg r}{q \vee \neg r} \qquad \neg p \vee \neg q \vee \neg r}{\neg p \vee \neg r \vee \neg r}}{\neg p \vee \neg r} \qquad p \vee \neg r}{\neg r} \qquad \neg q \vee r}{\neg q} \qquad \neg p \vee q}{\neg p}$$

On a donc construit un ensemble $\Delta' = \{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p \vee \neg r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r, q \vee \neg r, \neg p \vee \neg r \vee \neg r, \neg p \vee \neg r, \neg r \neg q, \neg p\}$ tel que $\mathsf{mod}(\Delta') = \mathsf{mod}(\Delta)$. (Par contre, rien ne dit que $\Delta' =$ Coupure(Δ).)

En simplifiant l'ensemble Δ' par subsumption on obtient $\Delta" = \{\neg p, \neg q, \neg r\}$ qui a les mêmes modèles que Δ' et qui est clairement satisfaisable. Donc $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est satisfaisable et φ n'est pas une conséquence logique de Γ.

9) $\{p \to q, q \to r, p \vee \neg r\} \models (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$.

✎ *Soit* $\Gamma = \{p \to q, q \to r, p \vee \neg r\}$ *et* $\varphi = (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$.
La forme normale de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *est* $\Delta = \{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p \vee \neg r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r, p \vee q \vee r\}$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg p \vee q$}
\AxiomC{$p \vee \neg r$}
\BinaryInfC{$q \vee \neg r$}
\AxiomC{$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$}
\BinaryInfC{$\neg p \vee \neg r \vee \neg r$}
\UnaryInfC{$\neg p \vee \neg r$}
\AxiomC{$p \vee \neg r$}
\BinaryInfC{$\neg r$}
\AxiomC{$\neg p \vee q$}
\AxiomC{$p \vee q \vee r$}
\BinaryInfC{$q \vee q \vee r$}
\UnaryInfC{$q \vee r$}
\AxiomC{$\neg q \vee r$}
\BinaryInfC{$r \vee r$}
\UnaryInfC{r}
\BinaryInfC{$\bot$}
\end{prooftree}
$$

Donc $\Gamma \vdash \varphi$ *et par correction* $\Gamma \models \varphi$.

2 Calcul des Séquents

Exercice 4. Donner des preuves des séquents suivants :

1) $\vdash \neg\neg p \to p$.

✎

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$p \vdash p$}
\RightLabel{$D_\neg$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg p, p$}
\RightLabel{$G_\neg$}
\UnaryInfC{$\neg\neg p \vdash p$}
\RightLabel{$D_\to$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg\neg p \to p$}
\end{prooftree}
$$

2) $p \to q \vdash (p \to \neg q) \to \neg p$.

✎

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$p \to q,\ p \vdash p$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\neg q,\ p \vdash p$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$p,\ q \vdash q$}
\RightLabel{$G_\neg$}
\UnaryInfC{$\neg q,\ p,\ q \vdash$}
\RightLabel{$G_\to$}
\BinaryInfC{$\neg q,\ p,\ p \to q \vdash$}
\RightLabel{$G_\to$}
\BinaryInfC{$p \to q,\ p \to \neg q,\ p \vdash$}
\RightLabel{$D_\neg$}
\UnaryInfC{$p \to q,\ p \to \neg q \vdash \neg p$}
\RightLabel{$D_\to$}
\UnaryInfC{$p \to q \vdash (p \to \neg q) \to \neg p$}
\end{prooftree}
$$

3) $\vdash (p \to q) \to ((p \to (q \to r)) \to (p \to r))$.

✎

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$q,\ r,\ p \vdash r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$q,\ p \vdash r,\ q$}
\RightLabel{$G_\to$}
\BinaryInfC{$q,\ q \to r,\ p \vdash r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$q,\ p \vdash p,\ r$}
\BinaryInfC{$q,\ p \to (q \to r), p \vdash r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$p \to (q \to r),\ p \vdash p,\ r$}
\RightLabel{$G_\to$}
\BinaryInfC{$p \to q,\ p \to (q \to r), p \vdash r$}
\RightLabel{$D_\to$}
\UnaryInfC{$p \to q,\ p \to (q \to r) \vdash p \to r$}
\RightLabel{$D_\to$}
\UnaryInfC{$p \to q \vdash (p \to (q \to r)) \to (p \to r)$}
\RightLabel{$D_\to$}
\UnaryInfC{$\vdash (p \to q) \to ((p \to (q \to r)) \to (p \to r))$}
\end{prooftree}
$$

4) $p \to q \vdash (r \to p) \to (r \to q)$.

✎

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q,\ r \to p,\ r \vdash q}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{p,\ r \vdash q,\ p}\,Ax \quad \dfrac{}{r \vdash q,\ p,\ r}\,Ax}{r \to p,\ r \vdash q, p}\,G_{\to}}{p \to q,\ r \to p,\ r \vdash q}\,G_{\to}}{p \to q,\ r \to p \vdash r \to q}\,D_{\to}}{p \to q \vdash (r \to p) \to (r \to q)}\,D_{\to}$$

5) $(p \wedge q) \to r \vdash p \to (q \to r)$.

✎

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p,\ q,\ r \vdash r}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{p,\ q \vdash r,\ p}\,Ax \quad \dfrac{}{p,\ q \vdash r,\ q}\,Ax}{p,\ q \vdash r,\ p \wedge q}\,D_{\wedge}}{p,\ q,\ (p \wedge q) \to r \vdash r}\,G_{\to}}{p,\ (p \wedge q) \to r \vdash q \to r}\,D_{\to}}{(p \wedge q) \to r \vdash p \to (q \to r)}\,D_{\to}$$

6) $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

✎

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p,\ q \vdash p,\ p \wedge r}\,Ax \quad \dfrac{}{p,\ q \vdash q,\ p \wedge r}\,Ax}{p,\ q \vdash (p \wedge q),\ (p \wedge r)}\,D_{\wedge} \qquad \dfrac{\dfrac{}{p,\ r \vdash p,\ p \wedge q}\,Ax \quad \dfrac{}{p,\ r \vdash r,\ p \wedge q}\,Ax}{p,\ r \vdash (p \wedge q),\ (p \wedge r)}\,D_{\wedge}}{p,\ q \vee r \vdash (p \wedge q),\ (p \wedge r)}\,G_{\vee}}{p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q),\ (p \wedge r)}\,G_{\wedge}}{p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}\,D_{\vee}$$

7) $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$.

✎

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p,\ p \vee r \vdash p,\ q}\,Ax \quad \dfrac{}{q,\ p \vee r \vdash p,\ q}\,Ax}{p \vee p,\ p \vee r \vdash p,\ q}\,G_{\vee} \qquad \dfrac{\dfrac{}{p \vee q,\ p \vdash p,\ r}\,Ax \quad \dfrac{}{p \vee q,\ r \vdash p,\ r}\,Ax}{p \vee q,\ p \vee r \vdash p,\ r}\,G_{\vee}}{p \vee q,\ p \vee r \vdash p,\ q \wedge r}\,D_{\wedge}}{p \vee q,\ p \vee r \vdash p \vee (q \wedge r)}\,D_{\vee}}{(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)}\,G_{\wedge}$$

2.1 Le calcul des séquents avec coupure

On rappelle la règle de coupure :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi, \Delta_1 \qquad \Gamma_2, \varphi \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \quad (C)$$

Exercice 5 . En utilisant la règle de coupure, montrez que si il existe une preuve du séquent $\Gamma \vdash p \wedge \neg p$ alors il existe une preuve du séquent $\Gamma \vdash \varphi$, pour toute formule φ.

✎

$$\dfrac{\Gamma \vdash p \wedge \neg p \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, p \vdash \varphi, p}\,Ax}{\Gamma, p \wedge \neg p \vdash \varphi}\,G_{\wedge}}{\Gamma \vdash \varphi}\,Cut$$

Exercice 6. Démontrez le séquent $p \to q, p \to r, q \wedge r \to s \vdash p \to s$. Pour cela, vous démontrerez d'abord les séquents $p \to q, p \to r \vdash p \to q \wedge r$ et $p \to q \wedge r, q \wedge r \to s \vdash p \to s$

✎

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, q, p \to r \vdash p, q}\,Ax \qquad \dfrac{}{p, q, p \to r \vdash q}\,Ax}{p, p \to q, p \to r \vdash q}\,G_{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{}{p, p \to q \vdash p, r}\,Ax \qquad \dfrac{}{p, p \to q, r \vdash r}\,Ax}{p, p \to q, p \to r \vdash r}\,G_{\to}}{p, p \to q, p \to r \vdash q \wedge r}\,D_{\wedge}}{p \to q, p \to r \vdash p \to q \wedge r}\,D_{\to}$$

Appelons cette preuve $\mathcal{D}_1$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, s, p \to q \wedge r \vdash s}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{p \vdash s, p, q \wedge r}\,Ax \qquad \dfrac{}{p, q \wedge r \vdash s, q \wedge r}\,Ax}{p, p \to q \wedge r \vdash s, q \wedge r}\,G_{\to}}{p, p \to q \wedge r, q \wedge r \to s \vdash s}\,G_{\to}}{p \to q \wedge r, q \wedge r \to s \vdash p \to s}\,D_{\to}$$

Appelons cette preuve $\mathcal{D}_2$. On en déduit la preuve suivante :

$$\dfrac{\mathcal{D}_1 \qquad \mathcal{D}_2}{p \to q, p \to r, q \wedge r \to s \vdash p \to s}\,Cut$$

Exercice 7 (*Introduction de la règle de coupure*)**.**

1) Montrez que la règle de coupure est correcte, i.e., que si $\Gamma_1 \models \{\varphi\} \cup \Delta_1$ et $\Gamma_2 \cup \{\varphi\} \models \Delta_2$, alors $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \models \Delta_1 \cup \Delta_2$.

La règle de coupure est-elle inversible ?

✎ *On doit montrer que si $\Gamma_1 \models \{\varphi\} \cup \Delta_1$ et $\Gamma_2 \cup \{\varphi\} \models \Delta_2$, alors $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \models \Delta_1 \cup \Delta_2$.*
Supposons donc que $\Gamma_1 \models \{\varphi\} \cup \Delta_1$ et $\Gamma_2 \cup \{\varphi\} \models \Delta_2$.
D'après $\Gamma_1 \models \{\varphi\} \cup \Delta_1$, il existe $\psi \in \{\varphi\} \cup \Delta_1$ tel que $\Gamma_1 \models \psi$. Considérons deux cas :

- *si $\psi = \varphi$, alors $\mathsf{mod}(\Gamma_1) \subseteq \mathsf{mod}(\varphi)$.*
  D'après l'hypothèse $\Gamma_2 \cup \{\varphi\} \models \Delta_2$, il existe $\varphi' \in \Delta_2$ tel que $\mathsf{mod}(\Gamma_2 \cup \varphi) \subseteq \mathsf{mod}(\psi')$, et on a donc $\mathsf{mod}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \mathsf{mod}(\Gamma_1) \cap \mathsf{mod}(\Gamma_2) \subseteq \mathsf{mod}(\varphi) \cap \mathsf{mod}(\Gamma_2) = \mathsf{mod}(\Gamma_2 \cup \{\varphi\}) \subseteq \mathsf{mod}(\varphi')$.

- *si $\psi \in \Delta_1$, alors $\mathsf{mod}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \mathsf{mod}(\Gamma_1) \cap \mathsf{mod}(\Gamma_2) \subseteq \mathsf{mod}(\Gamma_1) \subseteq \mathsf{mod}(\varphi)$.*

La règle de coupure n'est pas inversible. Par exemple

$$\dfrac{\vdash p \wedge \neg p \qquad p \wedge \neg p \vdash \top}{\vdash \top}\quad (C)$$

est une instance de la règle de coupure dont la conclusion est vraie mais pas les prémisses : on a $\models \top$ et $\not\models p \wedge \neg p$.

2) La propriété de la sous-formule est-elle toujours satisfaite dans le calcul des séquents avec coupure ?

✎ *La propriété de la sous-formule n'est plus respectée, comme le montre par exemple la preuve suivante :*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}}{\vdash p, \neg p}}{\vdash p \vee \neg p} \qquad \dfrac{}{p \vee \neg p \vdash \top}\,D_{\top}}{\vdash \top}\,C$$