# Chapitre 3

# Logique propositionnelle

Nous présentons ici la logique propositionnelle (ou calcul propositionnel) qui est un fragment de la logique classique. Cette logique s'intéresse à la façon dont se propage la vérité au travers de connecteurs logiques élémentaires.

Les éléments de base sont les *propositions atomiques*, qui sont des assertions susceptibles d'être vraies ou fausses, que l'on suppose *atomiques*, en ce sens que leur valeur de vérité (« vrai » ou « faux ») ne peut pas être ramenée à celle de propositions plus petites qui entreraient dans leur composition. Puis on évalue la validité d'assertions plus complexes, formées en « connectant » les propositions atomiques.

Par exemple, « l'acide sulfurique bout à 337° » et « l'ornithorynque est omnivore » sont des propositions atomiques. Remarquez que leur véracité de relève pas de la logique, mais de la physique et de la zoologie. Par contre, si le physicien et le zoologue nous informent du fait que la première est vraie et que la seconde est fausse, nous n'aurons plus besoin d'eux pour établir que l'affirmation : « l'acide sulfurique bout à 337° *et* l'ornithorynque est omnivore » est fausse. La logique prend donc ici le pas sur les sciences de la nature pour juger de la vérité de cette affirmation composite.

Pour déduire que l'affirmation composite « l'acide sulfurique bout à 337° *et* l'ornithorynque est omnivore » est fausse, nous utilisons le fait que la proposition « l'ornithorynque est omnivore » est elle-même fausse. On ne s'appuie donc pas sur la signification particulière des assertions en jeu, mais sur leurs seules valeurs de vérité. On peut dire plus généralement qu'étant données deux propositions atomiques $p$ et $q$, si la seconde est fausse, alors la proposition « $p$ et $q$ » est fausse aussi. Et d'une manière plus générale, la proposition « $p$ et $q$ » est vraie si et seulement si la proposition $p$ et la proposition $q$ sont simultanément vraies.

En calcul propositionnel, les propositions atomiques considérées sont donc représentées par des lettres ($p$, $q$, $r$, $s\ldots$) plutôt que par des phrases particulières, puisque seule leur valeur de vérité intéresse le logicien.

Les formules (ou phrases, ou énoncés) du calcul propositionnel sont construites à partir de *propositions atomiques* composées à l'aide des connecteurs logiques $\wedge, \neg, \vee, \Rightarrow$ (*et*, *non*, *ou*, *implique*, que l'on appelle *connecteurs propositionnels*).

Le calcul des propositions est la première étape dans la définition de la logique et du raisonnement. Il définit les règles de déduction qui relient les phrases entre elles, sans en examiner le contenu ; il est ainsi une première étape dans la construction du calcul des prédicats, qui lui s'intéresse au contenu des propositions.

Nous partirons donc en général de faits : "p est vrai, q est faux" et essaierons de déterminer si une affirmation particulière est vraie.

Pour aborder efficacement ce type de problématiques, il nous faut :

1. préciser la forme des propositions auxquelles nous pourrons accorder une valeur de vérité ;
2. décrire comment évaluer la valeur de vérité d'une formule à partir de celles des propositions atomiques : ceci relève d'un simple calcul, comme pour l'évaluation d'une expression arithmétique.

## 3.1 Syntaxe du calcul propositionnel : les formules

Avant de donner la syntaxe précise des formules propositionnelles, commençons par décrire les éléments qui les formeront. Il est avant tout nécessaire de disposer d'un grand nombre de symboles désignant des propositions atomiques (ou *variables propositionnelles*). Nous supposons donc donné, pour l'ensemble de ce chapitre un ensemble infini dénombrable de symboles, noté Prop. Nous piocherons à l'intérieur autant de variables que nécessaires qui seront en général représentées par des lettres minuscules éventuellement indicées : $p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots$.

Le *langage* du calcul propositionnel est alors formé :
- — des symboles propositionnels contenus dans Prop ;
- — des connecteurs logiques $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ ;
- — et de symboles auxiliaires : les parenthèses qui serviront à lever les ambiguités.

**Remarque 3.1.** Dans la littérature logique on utilise plusieurs synonymes pour symbole propositionnel ; ainsi *variable propositionnelle*, *proposition atomique*, *formule atomique*, ou encore *atome* sont tous des synonymes de *symbole propositionnel.*

**Définition 3.2.** L'ensemble $\mathcal{F}_{\mathrm{cp}}$ des **formules du calcul propositionnel** (ou *formules propositionnelles*) est défini inductivement par

$$\frac{}{p}\ p \in \textsc{Prop} \qquad \frac{\varphi}{(\neg\varphi)} \qquad \frac{\varphi_1 \quad \varphi_2}{(\varphi_1 \wedge \varphi_2)} \qquad \frac{\varphi_1 \quad \varphi_2}{(\varphi_1 \vee \varphi_2)} \qquad \frac{\varphi_1 \quad \varphi_2}{(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)}$$

Cette définition inductive peut se formuler aussi ainsi :
- — (base) tout symbole propositionnel est une formule ;
- — (induction) si $\varphi$ est une formule alors $(\neg\varphi)$ est une formule ;
- — (induction) si $\varphi, \psi$ sont des formules alors $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$ et $(\varphi \Rightarrow \psi)$ sont des formules.

Notez que grâce à l'utilisation des parenthèses, la définition est non-ambiguë. Par la suite, et lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, on se permettra parfois de supprimer certaines parenthèses en utilisant l'ordre de priorité des opérateurs suivant : $\neg$ est prioritaire sur $\wedge$, qui est prioritaire sur $\vee$ et $\Rightarrow$. Nous verrons aussi un peu plus loin que les opérateurs $\vee$ et $\wedge$ sont associatifs, ce qui permettra encore l'omission de certaines parenthèses.

**Exemple 3.3.** $p$, $(p \Rightarrow (q \vee r))$ et $(p \vee q)$ sont des formules propositionnelles ; $(\neg(\vee q))$ et $(f(x) \Rightarrow g(x))$ n'en sont pas.

Tout comme les termes, on peut voir les formules comme des arbres : les feuilles sont les variables propositionnelles et les noeuds internes sont des symboles $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow$. Par exemple, la Figure 3.1 donne la représentation arborescente de la formule $(p \Rightarrow ((\neg q) \wedge r))$.

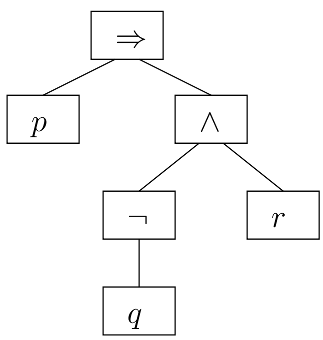


Figure 3.1 – Représentation arborescente de la formule $(p \Rightarrow ((\neg q) \wedge r))$

**Notation 3.4.** On utilise souvent en plus le connecteur binaire $\Leftrightarrow$ comme abréviation : $\varphi \Leftrightarrow \psi$ est l'abréviation de $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$. De la même façon, on ajoute le symbole $\perp$ qui correspond à

*Faux* et le symbole $\top$ qui correspond à *Vrai*. Ces deux symboles sont aussi des abréviations, ils ne sont pas indispensables au langage. (Par exemple $\perp$ peut être utilisé à la place de $p \wedge \neg p$ et $\top$ à la place de $p \vee \neg p$.)

**Définition 3.5** (Sous-formule)**.** La fonction $SF$ associant à une formule $\varphi$ l'ensemble des sous-formules de $\varphi$ est défini inductivement par :

— (Base) $SF(p) = \{p\}$ ;
— (Induction) $SF(\neg\varphi) = \{(\neg\varphi)\} \cup SF(\varphi)$ ;
— (Induction) $SF(\varphi \vee \psi) = \{(\varphi \vee \psi)\} \cup SF(\varphi) \cup SF(\psi)$
— (Induction) $SF(\varphi \wedge \psi) = \{(\varphi \wedge \psi)\} \cup SF(\varphi) \cup SF(\psi)$
— (Induction) $SF(\varphi \wedge \psi) = \{(\varphi \Rightarrow \psi)\} \cup SF(\varphi) \cup SF(\psi)$.

De façon équivalente, on peut présenter cette définition inductive de la façon suivante :

$$\frac{}{p \ : \ \{p\}}\ p \in Prop \qquad \frac{\varphi \ : \ S}{(\neg\varphi) \ : \ S \cup \{(\neg\varphi)\}} \qquad \frac{\varphi \ : \ S_1 \qquad \psi \ : \ S_2}{(\varphi \circ \psi) \ : \ S_1 \cup S_2 \cup \{(\varphi \circ \psi)\}}\ \circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$$

Calculons par exemple $SF(p \Rightarrow ((\neg q) \wedge r))$ :

$$\frac{\dfrac{}{p \ : \ \{p\}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q \ : \ \{q\}}}{(\neg q) \ : \ \{(\neg q), q\}} \qquad \dfrac{}{r \ : \ \{r\}}}{((\neg q) \wedge r) \ : \ \{(\neg q), q, r, ((\neg q) \wedge r)\}}}{(p \Rightarrow ((\neg q) \wedge r)) \ : \ \{(\neg q), q, r, ((\neg q) \wedge r), p, (p \Rightarrow ((\neg q) \wedge r))\}}$$

Donc , $SF(p \Rightarrow (\neg q \wedge r)) = \{p, q, r, \neg q, \neg q \wedge r, p \Rightarrow (\neg q \wedge r)\}$. Quand on voit une formule comme un arbre, une sous-formule est simplement un sous-arbre.

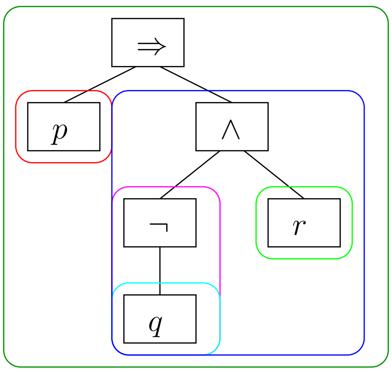


FIGURE 3.2 – Représentation arborescente des sous-formules de $p \Rightarrow (\neg q \wedge r)$

## 3.2 Sémantique du calcul propositionnel

Il faut maintenant un moyen de déterminer si une formule est vraie ou fausse. La première étape est de donner une valeur de vérité aux propositions atomiques. L'évaluation d'une formule, dépend donc des valeurs choisies pour les symboles propositionnels. Ces valeurs sont données par une **valuation**.

**Définition 3.6** (Valuation)**.** Une valuation est une application de PROP dans $\{0, 1\}$. La valeur 0 désigne le "faux" et la valeur 1 désigne le "vrai".

Une valuation sera souvent donnée sous forme d'un tableau. Par exemple, si PROP $= \{p, q\}$ alors la valuation $v : p \mapsto 1,\ q \mapsto 0$ s'écrit plus simplement $v$ :

| $p$ | $q$ |
|---|---|
| 1 | 0 |

Une fois la valuation $v$ choisie, la valeur de la formule se détermine de façon naturelle, par extension de la valuation $v$ aux formules de la façon suivante :

**Définition 3.7** (Valeur d'une formule)**.**
- $v(\neg\varphi) = 1$ ssi $v(\varphi) = 0$ ;
- $v(\varphi \vee \psi) = 1$ ssi $v(\varphi) = 1$ ou $v(\psi) = 1$ ;
- $v(\varphi \wedge \psi) = 1$ ssi $v(\varphi) = 1$ et $v(\psi) = 1$ ;
- $v(\varphi \Rightarrow \psi) = 0$ ssi $v(\varphi) = 1$ et $v(\psi) = 0$.

La définition précédente peut apparaître trompeuse car circulaire : afin d'expliquer la logique, nous somme en train de l'utiliser (*ssi*, *ou*, *et* ...). Ceci peut être contournée en utilisant la définition inductive (équivalente à la Définition 3.7) suivante.

**Définition 3.8** (Valeur d'une formule (bis))**.**

$$\frac{}{p \;:\; v(p)}\; p \in \textsc{Prop} \qquad \frac{\varphi \;:\; x}{(\neg\varphi) \;:\; 1-x} \qquad \frac{\varphi_1 \;:\; x_1 \qquad \varphi_2 \;:\; x_2}{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \;:\; \min\{x_1, x_2\}}$$

$$\frac{\varphi_1 \;:\; x_1 \qquad \varphi_2 \;:\; x_2}{\varphi_1 \vee \varphi_2 \;:\; \max\{x_1, x_2\}} \qquad \frac{\varphi_1 \;:\; x_1 \qquad \varphi_2 \;:\; x_2}{\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \;:\; \max\{1-x_1, x_2\}}$$

Cette dernière définition est purement combinatoire car elle repose sur la structure de l'ensemble ordonné *fini* $\{0 < 1\}$.

Par exemple, pour $v$ telle que $v(p) = 1$, $v(q) = 0$ et $v(r) = 0$, on a $v(p \Rightarrow ((\neg q) \wedge r)) = 0$ comme le démontre la preuve suivante :

$$\frac{\dfrac{}{p \;:\; 1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q \;:\; 0}}{(\neg q) \;:\; 1} \qquad \dfrac{}{r \;:\; 0}}{((\neg q) \wedge r) \;:\; 0}}{(p \Rightarrow ((\neg q) \wedge r)) \;:\; 0}$$

**Exercice 3.9.** Proposez un algorithme qui, étant donné une formule $\varphi$ du calcul propositionnel et une valuation $v$, calcule $v(\varphi)$. Quel type de structure de données utiliser pour coder les formules ? Quel type de structure de données utiliser pour coder les valuations ?

Notez que les définitions 3.8 et 3.7 correspondent aux tables de vérité des connecteurs logiques (dont vous avez sûrement entendu parler) :

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

**Remarque 3.10** (Langage naturel et langage formel)**.** Remarquez la définition particulière de l'implication : on l'entend en général comme un "si ..., alors ...", on voit ici que l'énoncé "si 1+1=1, alors la capitale de la France est Marseille" est vrai, puisque toute phrase $\varphi \Rightarrow \psi$ est vraie dès lors que $\varphi$ est évaluée à faux. Ceci est peu naturel, car dans le langage courant, on ne s'intéresse à la vérité d'un tel énoncé que lorsque la condition est vraie : "s'il fait beau je vais à la pêche" n'a d'intérêt pratique que s'il fait beau... Attribuer la valeur vrai dans le cas ou la prémisse est fausse correspond a peu près à l'usage du si .. alors dans la phrase suivante : "Si Pierre obtient sa Licence, alors je suis Einstein" : c'est à dire que partant d'une hypothèse fausse, alors je peux démontrer des choses fausses (ou vraies). Par contre, il n'est pas possible de démontrer quelque chose de faux partant d'une hypothèse vraie.

Terminons en mentionnant de la valeur de l'abréviation $\Leftrightarrow$ : $v(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1$ ssi $v(\varphi) = v(\psi)$. Ce qui correspond à la table de vérité suivante :

| $p$ | $q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

L'exercice suivant montre que pour présenter les modèles d'une formule $\varphi$, on peut se restreindre aux valuations définies sur les variables propositionelles de $\varphi$.

**Exercice 3.11.** Définissons la fonction $\textsc{Prop}$ associant une formule $\varphi$ l'ensemble $\textsc{Prop}(\varphi)$ des variables propositionnelles contenues dans $\varphi \in \mathcal{F}_{\text{cp}}$ par l'induction suivante :
— (Base) $\textsc{Prop}(p) = \{ p \}$
— (Induction) $\textsc{Prop}(\neg\varphi) = \textsc{Prop}(\varphi)$
— (Induction) $\textsc{Prop}(\varphi \circ \psi) = \textsc{Prop}(\varphi) \cup \textsc{Prop}(\psi)$, $\circ \in \{ \wedge, \vee, \Rightarrow \}$.
Montrez que :

1. $\textsc{Prop}(\varphi) = \textsc{Prop} \cap SF(\varphi)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{F}_{\text{cp}}$ ;
2. si $v(p) = v'(p)$ pour tout $p \in \textsc{Prop}(\varphi)$, alors $v(\varphi) = v'(\varphi)$.

### 3.2.1 Vocabulaire

**Définition 3.12** (Modèle d'une formule)**.** Un **modèle** de $\varphi$ est une valuation $v$ telle que $v(\varphi) = 1$. On note $\mathsf{mod}(\varphi)$ l'ensemble des modèles de $\varphi$.

**Exemple 3.13.** Si $\textsc{Prop} = \{p, q, r\}$ et $\varphi = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$ alors l'ensemble des modèles de $\varphi$ est

$\mathsf{mod}(\varphi) =$

| $p$ | $q$ | $r$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

**Définition 3.14** (Modèle d'un ensemble de formules)**.** Un **modèle** d'un ensemble $\Gamma$ de formules est une valuation $v$ telle que $v(\varphi) = 1$, pour toute formule $\varphi \in \Gamma$. On note $\mathsf{mod}(\Gamma)$ l'ensemble des modèles de $\Gamma$.

**Définition 3.15** (Satisfaisabilité)**.** Une formule $\varphi$ est **satisfaisable** (ou **consistante**, ou encore **cohérente**) si elle admet un modèle (*i.e.*, s'il existe une valuation $v$ telle que $v(\varphi) = 1$, *i.e.* si $\mathsf{mod}(\varphi) \neq \varnothing$).

**Définition 3.16** (Insatisfaisabilité)**.** Une formule $\varphi$ est **insatisfaisable** (ou **inconsistante**, ou **incohérente**) si elle n'admet aucun modèle (*i.e.*, si pour toute valuation $v$, $v(\varphi) = 0$, *i.e.*, si $\mathsf{mod}(\varphi) = \varnothing$)

**Définition 3.17** (Tautologie)**.** Une formule $\varphi$ est une **tautologie** (ou **valide**) si $v(\varphi) = 1$ pour toute valuation $v$ (*i.e.*, si $\mathsf{mod}(\varphi) = \mathsf{Val}$). On note $\models \varphi$ pour dire que $\varphi$ est une tautologie.

Un exemple de tautologie est $\varphi \vee \neg\varphi$, c'est à dire le *tiers exclus*.

**Exercice 3.18.** Montrez que les formules suivantes sont des tautologies :

$$p \Rightarrow p\,, \qquad p \Rightarrow (q \Rightarrow p)\,, \qquad (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))\,, \qquad ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p\,.$$

**Définition 3.19** (Equivalence)**.** On dit que $\varphi$ **est équivalente à** $\psi$ si les deux formules ont les mêmes modèles (*i.e.* si $\mathsf{mod}(\varphi) = \mathsf{mod}(\psi)$). On note alors $\varphi \equiv \psi$.

Remplacer une sous-formule $\psi$ d'une formule $\varphi$ par une formule équivalente $\psi'$ donne une formule notée $\varphi[\psi \leftarrow \psi']$. Cette substitution préserve les modèles, *i.e.*, $\mathsf{mod}(\varphi) = \mathsf{mod}(\varphi[\psi \leftarrow \psi'])$.

**Exemple 3.20.** Les opérateurs $\wedge$, $\vee$ sont associatifs-commutatifs. Deux formules identiques à associativité-commutativité près sont équivalentes.

**Exercice 3.21.** Prouvez les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
\varphi \vee \bot \equiv \varphi & \varphi \wedge \bot \equiv \bot & (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \\
\varphi \vee \top \equiv \top & \varphi \wedge \top \equiv \varphi & (\varphi \wedge \psi) \vee \theta \equiv (\varphi \vee \theta) \wedge (\psi \vee \theta) \\
\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi & \varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi & (\varphi \vee \psi) \wedge \theta \equiv (\varphi \wedge \theta) \vee (\varphi \wedge \theta) \\
\varphi \vee \varphi \equiv \varphi & \neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi) & (\varphi \vee \psi) \vee \theta \equiv \varphi \vee (\psi \vee \theta) \\
\neg\neg\varphi \equiv \varphi & \varphi \wedge \varphi \equiv \varphi & \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi) \vee (\neg\psi)\,.
\end{array}$$

La proposition suivante explicite les liens forts existants entre logique propositionnelle et algèbre ensembliste.

**Proposition 3.22.** *Soient $\varphi$ et $\psi$ deux formules, on a :*

1. $\mathsf{mod}(\neg\varphi) = \mathsf{Val} - \mathsf{mod}(\varphi)$ *($\mathsf{Val}$ est l'ensemble de toutes les valuations) ;*
2. $\mathsf{mod}(\varphi \vee \psi) = \mathsf{mod}(\varphi) \cup \mathsf{mod}(\psi)$ *;*
3. $\mathsf{mod}(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{mod}(\varphi) \cap \mathsf{mod}(\psi)$ *;*
4. $\models \varphi \Rightarrow \psi$ *ssi* $\mathsf{mod}(\varphi) \subseteq \mathsf{mod}(\psi)$.

*Démonstration.* 1. pour toute valuation $v \in \mathsf{Val}$,

$$\begin{aligned}
v \in \mathsf{mod}(\neg\varphi) &\text{ ssi } v(\neg\varphi) = 1 && \text{par la définition de modèle} \\
&\text{ ssi } v(\varphi) = 0 && \text{par la Définition de l'évaluation} \\
&\text{ ssi } v \notin \mathsf{mod}(\varphi) && \text{encore, par la définition de modèle} \\
&\text{ ssi } v \in \mathsf{Val} - \mathsf{mod}(\varphi)
\end{aligned}$$

2. pour toute valuation $v \in \mathsf{Val}$,

$$\begin{aligned}
v \in \mathsf{mod}(\varphi \vee \psi) &\text{ ssi } v(\varphi \vee \psi) = 1 \\
&\text{ ssi } v(\varphi) = 1 \text{ ou } v(\psi) = 1 \\
&\text{ ssi } v \in \mathsf{mod}(\varphi) \text{ ou } v \in \mathsf{mod}(\psi) \\
&\text{ ssi } v \in \mathsf{mod}(\varphi) \cup \mathsf{mod}(\psi)
\end{aligned}$$

3. pour toute valuation $v \in \mathsf{Val}$,

$$\begin{aligned}
v \in \mathsf{mod}(\varphi \wedge \psi) &\quad \text{ssi} \quad v(\varphi \wedge \psi) = 1 \\
&\quad \text{ssi} \quad v(\varphi) = 1 \text{ et } v(\psi) = 1 \\
&\quad \text{ssi} \quad v \in \mathsf{mod}(\varphi) \text{ et } v \in \mathsf{mod}(\psi) \\
&\quad \text{ssi} \quad v \in \mathsf{mod}(\varphi) \cap \mathsf{mod}(\psi)
\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}
\models \varphi \Rightarrow \psi &\text{ ssi pour toute valuation } v \in \mathsf{Val}, v(\varphi \Rightarrow \psi) = 1 \\
&\text{ ssi pour toute valuation } v \in \mathsf{Val}, v(\neg\varphi \vee \psi) = 1 \\
&\text{ ssi pour toute valuation } v \in \mathsf{Val}, v(\varphi) = 0 \text{ ou } v(\psi) = 1 \\
&\text{ ssi pour toute valuation } v \in \mathsf{Val}, v(\varphi) \leq v(\psi) \\
&\text{ ssi pour toute valuation } v \in \mathsf{Val}, \text{ si } v(\varphi) = 1 \text{ alors } v(\psi) = 1 \\
&\text{ ssi } \mathsf{mod}(\varphi) \subseteq \mathsf{mod}(\psi)
\end{aligned}$$
□

**Définition 3.23** (Conséquence logique)**.** Une formule $\varphi$ est **conséquence logique** d'une formule $\psi$ si tout modèle de $\psi$ est un modèle de $\varphi$ (c'est-à-dire, si $\mathsf{mod}(\psi) \subseteq \mathsf{mod}(\varphi)$). On note alors $\psi \models \varphi$.

**Remarque 3.24.** Attention à la confusion dans les notations !
- $\psi \models \varphi$ où $\psi$ est une formule : $\varphi$ est conséquence logique de $\psi$ ;
- $\models \varphi$ (rien à gauche du symbole $\models$) : $\varphi$ est une tautologie ;

— $v \models \varphi$ où $v$ est une valuation, i.e., l'assignation d'une valeur aux propositions atomiques de la formule ; c'est un raccourcis assez fréquent dans la littérature (noté quelques-fois aussi $v \Vdash \varphi$, exactement pour ne pas utiliser $\models$) pour $v(\varphi) = 1$. Dans ces notes, nous essayerons d'éviter cette notation, si possible.

Attention : la notation $\psi \models \varphi$ signifie que $\varphi$ est conséquence logique de $\psi$ (donc $\mathsf{mod}(\psi) \subseteq \mathsf{mod}(\varphi)$) et non pas que $\psi$ est conséquence logique de $\varphi$, ce que serait plutôt $\mathsf{mod}(\varphi) \subseteq \mathsf{mod}(\psi)$.

**Proposition 3.25.** *Soient $\varphi$ et $\psi$ deux formules propositionnelles.*

1. $\varphi \models \psi$ *si et seulement si* $\models \varphi \Rightarrow \psi$.
2. $\varphi \equiv \psi$ *si et seulement si* $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$.

*Démonstration.*

1. Conséquence directe du point 4 de la Proposition 3.22
2. $$\begin{aligned} \varphi \equiv \psi \text{ ssi } & \mathsf{mod}(\varphi) = \mathsf{mod}(\psi) \\ \text{ssi } & \mathsf{mod}(\varphi) \subseteq \mathsf{mod}(\psi) \text{ et } \mathsf{mod}(\psi) \subseteq \mathsf{mod}(\varphi) \\ \text{ssi } & \models \varphi \Rightarrow \psi \text{ et } \models \psi \Rightarrow \varphi \\ \text{ssi } & \models (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)\,. \end{aligned}$$ □

## 3.3 Equivalence entre formules

Il est courant de souhaiter modifier une formule, de façon à rendre son expression plus simple, ou plus facile à manipuler, et ceci en gardant bien sûr la sémantique de la formule, c'est-à-dire, sans modifier l'ensemble de ses modèles.

### 3.3.1 La substitution

La substitution d'une formule $\psi$ par une formule $\psi'$ dans une troisième formule $\varphi$ (notée $\varphi_{[\psi \leftarrow \psi']}$) consiste à remplacer chaque occurrence de $\psi$ dans $\varphi$ par $\psi'$.

Prenons par exemple les formules $\varphi = (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$, $\psi = \neg p$ et $\psi' = q \Rightarrow p$, alors

$$\varphi_{[\psi \leftarrow \psi']} = ((q \Rightarrow p) \vee q) \wedge ((q \Rightarrow p) \vee \neg r).$$

Plus formellement, la substitution est définie de la façon suivante :

**Définition 3.26** (Substitution)**.** Soient $\varphi$, $\psi$, et $\psi'$ trois formules du calcul propositionnel,

— si $\psi$ n'est pas une sous-formule de $\varphi$, alors $\varphi_{[\psi \leftarrow \psi']} = \varphi$
— sinon si $\varphi = \psi$ alors $\varphi_{[\psi \leftarrow \psi']} = \psi'$
— sinon
  — si $\varphi = \neg\varphi'$ alors $\varphi_{[\psi \leftarrow \psi']} = \neg(\varphi'_{[\psi \leftarrow \psi']})$
  — si $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ (où $\circ$ est un connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$) alors $\varphi_{[\psi \leftarrow \psi']} = \varphi_{1[\psi \leftarrow \psi']} \circ \varphi_{2[\psi \leftarrow \psi']}$.

**Exemple 3.27.** Soit $\varphi$ une formule quelconque :

1. $p_{[q \leftarrow \varphi]} = p$ car $q$ n'est pas une sous-formule de $p$.
2. $p_{[p \leftarrow \varphi]} = \varphi$
3. $(p \wedge q)_{[q \leftarrow \varphi]} = (p \wedge \varphi)$
4. $(p \wedge q)_{[p \wedge q \leftarrow \varphi]} = \varphi$
5. $(p \wedge q)_{[p \vee q \leftarrow \varphi]} = p \wedge q$

**Proposition 3.28.** *Soient $\varphi$, $\psi$, et $\psi'$ trois formules du calcul propositionnel, si $\psi \equiv \psi'$ alors $\varphi \equiv \varphi_{[\psi \leftarrow \psi']}$.*

*Démonstration.* Voir TD. □

Attention, dans le cas général, la substitution ne conserve pas la sémantique de la formule. Par exemple, $p$ et $q \wedge \neg q$ ne sont pas équivalentes ; ainsi, les formules $p$ et $p_{[p \leftarrow q \wedge \neg q]}$ ne sont pas équivalentes.

### 3.3.2 Equivalences classiques

Nous avons vu que remplacer une sous-formule $\psi$ d'une formule $\varphi$ par une formule équivalente $\psi'$ donne une formule notée $\varphi_{[\psi \leftarrow \psi']}$ équivalente à $\varphi$. C'est-à-dire que cette substitution préserve les modèles, *i.e.*, $\mathsf{mod}(\varphi) = \mathsf{mod}(\varphi[\psi \leftarrow \psi'])$.

Voici quelques règles d'équivalences courantes, qui permettent de telles substitutions.

$$
\begin{array}{ccr}
\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi & \varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi & \text{(Commutativité)} \\
\varphi \wedge (\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv (\varphi \wedge \psi_1) \wedge \psi_2 & \varphi \vee (\psi_1 \vee \psi_2) \equiv (\varphi \vee \psi_1) \vee \psi_2 & \text{(Associativité)} \\
\top \wedge \varphi \equiv \varphi \wedge \top \equiv \varphi & \bot \vee \varphi \equiv \varphi \vee \bot \equiv \varphi & \text{(Élements neutres)} \\
\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi & \varphi \vee \varphi \equiv \varphi & \text{(Idempotence)} \\
\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi & \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi & \text{(Absorption)} \\
\varphi \wedge \bot \equiv \bot \wedge \varphi \equiv \bot & \varphi \vee \top \equiv \top \vee \varphi \equiv \top & \text{(Elément absorbant)} \\
\varphi \wedge (\psi_1 \vee \psi_2) \equiv (\varphi \wedge \psi_1) \vee (\varphi \wedge \psi_2) & \varphi \vee (\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv (\varphi \vee \psi_1) \wedge (\varphi \vee \psi_2) & \text{(Distributivité)} \\
\varphi \wedge \neg\varphi \equiv \neg\varphi \wedge \varphi \equiv \bot & \varphi \vee \neg\varphi \equiv \neg\varphi \vee \varphi \equiv \top & \text{(Complément)} \\
\neg\neg\varphi \equiv \varphi & & \text{(Involution)} \\
\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi & \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi & \text{(Lois de De Morgan)} \\
\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\psi) & & \text{(Implication matérielle)} \\
\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi & & \text{(Contraposition)} \\
\varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Rightarrow \varphi_3 & & \text{(Curryfication)}
\end{array}
$$

Nous observons ici que la formule suivante :

$$[(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_3)] \Rightarrow [\varphi_1 \Rightarrow \varphi_3] \qquad \text{(Transitivité)}$$

est une tautologie, et que $\varphi \equiv \top$ si et seulement si $\varphi$ est une tautologie.

Observez que, dans les exemples d'équivalences ci-dessus, si $\varphi \equiv \psi$ et $\varphi, \psi$ sont des formules sans implication, alors on a aussi l'équivalence $\varphi' \equiv \psi'$ où $\varphi'$ et $\psi'$ sont les formules obtenues de $\varphi$ et $\psi$ en échangeant la conjonction avec la disjonction et vice-versa (donc, en échangeant aussi le vrai par le faux). C'est un principe tout à fait général que l'on peut énoncer ici :

**Exemple 3.29.** Nous pouvons argumenter que $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv \varphi \wedge (\chi \vee \psi)$ de façon précise de cette façon :

$$
\begin{aligned}
\varphi \wedge (\psi \vee \chi) &\equiv (\varphi \wedge p)_{[p \leftarrow \psi \vee \chi]} \\
&\equiv (\varphi \wedge p)_{[p \leftarrow \chi \vee \psi]} \qquad \text{(par commutativité, et en utilisant la proposition 3.28)} \\
&\equiv \varphi \wedge (\chi \vee \psi)\,.
\end{aligned}
$$

### 3.3.3 Formes normales

La mise sous forme normale transforme une formule en une formule équivalente (que l'on dit « normalisée ») plus adaptée au traitement algorithmique.

**Notations.** Remarquons que, à cause des lois d'associativité et commutativité, toutes les possibles formules construites à partir des formules $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ via l'application du connecteur logique $\wedge$, sont équivalentes. Par exemple

$$((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \varphi_4\,, \quad \varphi_1 \wedge ((\varphi_2 \wedge \varphi_3) \wedge \varphi_4)\,, \quad \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge (\varphi_3 \wedge \varphi_4))\,, \quad (\varphi_2 \wedge \varphi_4) \wedge (\varphi_3 \wedge \varphi_1)\,,$$

sont des formules équivalentes. On peut faire la remarque analogue pour le connecteur logique $\vee$.

Ainsi, si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des formules, nous pourrons utiliser les notations :

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \qquad \text{et} \qquad \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$$

pour dénoter un parenthèsage arbitraire de $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ (resp. $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$). Les choix de l'ordre et du parenthèsage ne sont donc pas significatifs, au moins du point de vue sémantique.

**Définition 3.30** (Littéral)**.** Un **littéral** est une formule atomique ou la négation d'une formule atomique. Autrement dit, c'est une formule $\ell$ de la forme $p$ ou $\neg p$, où $p$ est un symbole propositionnel.

**Définition 3.31** (Clause)**.** Une **clause (disjonctive)** est une disjonction de littéraux, c'est-à-dire une formule de la forme $\ell_1 \vee \ldots \vee \ell_n$, où les $\ell_i$ sont des littéraux.

Par exemple $p \vee \neg q \vee p$ est une clause. $p$ et $\neg p$ sont également des clauses.

**Définition 3.32** (Forme normale conjonctive)**.** Une formule est sous forme **clausale** (ou **forme normale conjonctive** (FNC)), est une conjonction de clauses : $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n$ où les $C_j$ sont des clauses.

**Exemple 3.33.** La formule suivante est sous forme clausale :

$$(q \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee p) \wedge r$$

La forme normale conjonctive est en général la plus adaptée lorsqu'on cherche un modèle d'une formule car il faut chercher une valuation satisfaisant chacune des clauses de la formule (le Lemme 3.34 ci-dessous précise ce point). Dans l'exemple 3.33, on voit que si $v$ est un modèle, alors forcément $v(r) = 1$ ; pour satisfaire également la deuxième clause, il faut donc que $v(p) = 1$, mais alors la seule façon de satisfaire la première clause est $v(q) = 1$. Il n'y a donc qu'un seul modèle : $p \mapsto 1, q \mapsto 1, s \mapsto 1$.

**Lemme 3.34.** *Soit $\varphi$ une formule en FNC : $\varphi = \bigwedge_{i=1,\ldots,n} C_i$ où $C_i$ sont des clauses. Pour tout $v \in \mathsf{Val}$, $v \in \mathsf{mod}(\varphi)$ ssi, pour tout $i = 1, \ldots, n$, il existe un littéral $l$ in $C_i$ tel que $v(l) = 1$.*

La preuve de ce lemme étant immédiate, elle est laissée au lecteur.