Extentions de flot maximum

1. Flot de coût minimum: $N=(V,A,s,t,c,\underline{q})$

$q : A \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ - la fonction de coût

$q(\overrightarrow{uv})$ - le coût de transport d'une unite de flot sur l'arc $\overrightarrow{uv}$

Cout d'un flot f : $\text{cout}(f) = \sum_{\overrightarrow{uv} \in A} q(\overrightarrow{uv}) \cdot c(\overrightarrow{uv})$

But : Calculer un flot de valeur donnée et de coût minimum.

Modification de l'algorithme Ford-Fulkerson :

Commencer par le flot nul (flot de coût min de valeur 0) et l'augmenter sur des chaines augmentants de N_f de coût min.

Soit f un flot de cout min de valeur $val(f)$.

Soit N_f le réseau residuel de N. Ponderer N_f de la facon suivant:

- si $\overrightarrow{uv}$ est arc direct, $q_f(\overrightarrow{uv}) = q(\overrightarrow{uv})$
- si $\overrightarrow{uv}$ est arc arière, $q_f(\overrightarrow{uv}) = -q(\overrightarrow{vu})$.

Dans N_f pondéré par q_f, calculer <u>un plus court chemin</u> de s à t (en utilisant l'algo de Floyd-Warshall). Augmenter le flot sur cet chemin P, i.e. faire $f' = f \oplus \delta(P)$.

Si $val(f')$ dépasse la valeur du flot voulu, prendre juste une partie.

On peut montrer le résultat suivant:

<u>Théorème 1</u>: Si f est un flot de valeur w et de coût minimum, P est un plus court chemin de N_f avec la ponderation q_f, alors $f' = f \oplus \delta(P)$ est un flot de valeur $w + \delta(P)$ de cout minimum.

<u>Rémarque</u>: Cet algorithme (qui porte le nom de l'algo Busacker-Gowen) est de nouveau pseudo-polynomial. Neanmoins, il existe un algorithme polynomial pour le flot de coût minimum.

2. Circulation avec demandes:

- une demande $d_v > 0$ correspond à un puits v qui requiert un flot d'exactement d_v unités;
- une demande $d_v < 0$ correspond à une source v qui produit exactement $-d_v$ unités de flot;
- une demande $d_v = 0$ correspond à un sommet classique

Une circulation avec demandes est une fonction $f: A \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ telle que:

Loi de capacité: $f(\vec{uv}) \leq c(\vec{uv}) \ \forall \vec{uv} \in A$

Loi de conservation: $\sum_{\vec{uv} \in \Delta^+(v)} f(\vec{uv}) - \sum_{\vec{vu} \in \Delta^+(v)} f(\vec{vu}) = d_v \ \forall v \in V$.

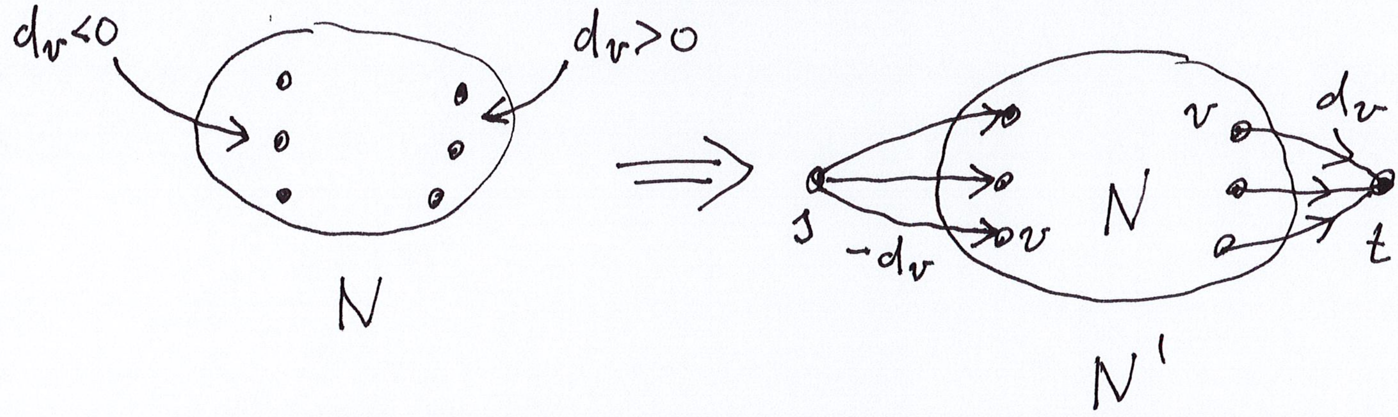
Lemma 1: Si il existe une circulation avec démandes $(d_v)_{v \in V}$, alors $\sum_{v \in V} d(v) = 0$.

Donc, soit $D = \sum_{v: d_v > 0} d_v = -\sum_{v: d_v < 0} d_v$.

Reduction au flot max:

1. Verifier si $\sum_{d_v > 0} d_v = -\sum_{d_v < 0} d_v$.
2. Créez une super-source s connecté à tous les sommets v, $d_v \leq 0$ avec des arcs de capacite $-d_v$;
3. Créez un super-puits t connecté à tous les sommets v, $d_v > 0$ avec des arcs de capacite d_v;

4. Dans le réseau N' ainsi obtenu, calculer un flot maximum. Si sa valeur est D, alors il existe une circulation valide, sinon — non.



Circulation avec demandes et bornes inf de capacité:

- la fonction des demandes $(d_v)_{v\in V}$;
- la fonction $\ell : A \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ telle que $\ell(\overrightarrow{uv}) \le c(\overrightarrow{uv})$ pour tout arc $\overrightarrow{uv}$.

Une **circulation avec demandes** $(d_v)_{v\in V}$ et **bornes inférieures décrites par** $\ell(\overrightarrow{uv})_{\overrightarrow{uv}\in A}$ est une circulation $f : A \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ vérifiant de plus que $\ell(\overrightarrow{uv}) \le f(\overrightarrow{uv})$ pour tout arc $\overrightarrow{uv}$.

Rémarque: Si $\ell(\overrightarrow{uv}) = c(\overrightarrow{uv})$ cela signifie qu'il faut passer un flot d'une telle valeur par l'arc $\overrightarrow{uv}$. En général, $\ell(\overrightarrow{uv}) \le f(\overrightarrow{uv}) \le c(\overrightarrow{uv})$.

Réduction à la circulation avec demandes

Pour chaque arc $\overrightarrow{uv}$, soit $f_0(\overrightarrow{uv}) := \ell(\overrightarrow{uv})$.

Pour chaque sommet v, soit

$$L_v := \sum_{\overrightarrow{vu} \in \Delta^-(v)} f_0(\overrightarrow{vu}) - \sum_{\overrightarrow{uv} \in \Delta^+(v)} f_0(\overrightarrow{uv}) .$$

Soit $d'_v = d_v - L_v$ pour tout sommet v.

Soit $c'(\overrightarrow{uv}) = c(\overrightarrow{uv}) - \ell(\overrightarrow{uv})$ pour tout arc $\overrightarrow{uv}$.

Soit N' le nouveau réseau (sans bornes inf sur les capacités). Donc $N' = (V, A, d', c')$

Si on trouve une circulation f' dans N' qui satisfait les nouvelles demandes, alors $f = f_0 + f'$ est une circulation valide avec les anciennes demandes et qui satisfait de plus les bornes inf. Sinon, on répond "non".