Exo 1 :

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser la distribution uniforme continue, qui est une distribution de probabilité utilisée pour modéliser des variables aléatoires qui peuvent prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné avec une probabilité égale.

Dans ce cas, nous avons une variable aléatoire X qui représente le temps d'attente de l'usager, exprimé en minutes. Cette variable suit une distribution uniforme continue sur l'intervalle [0, 30], car l'usager peut arriver à n'importe quelle minute entre 7h00 et 7h30.

Nous cherchons la probabilité que l'usager doive attendre plus de 10 minutes, c'est-à-dire que X soit supérieur à 10. Cette probabilité est donnée par :

$P(X > 10) = (30 - 10) / 30 = 2/3$

En effet, l'usager a une probabilité de 2/3 de se présenter à un moment où un bus est déjà passé, ce qui signifie qu'il devra attendre plus de 10 minutes avant le prochain bus.

Exo 2 :
On sait que la variable aléatoire X suit une loi normale avec $\mu=3$ et $\sigma^2=9$. On peut donc utiliser les propriétés de la loi normale pour calculer les probabilités demandées.

$P\{2 < X < 5\}$:
Tout d'abord, on peut standardiser la variable aléatoire X en utilisant la formule $Z = (X - \mu) / \sigma$. Dans ce cas, on a $Z = (X - 3) / 3$. Ainsi, la probabilité que $2 < X < 5$ est égale à la probabilité que $(2 - 3) / 3 < (X - 3) / 3 < (5 - 3) / 3$, ou encore $-1/3 < Z < 2/3$.

Ensuite, on peut utiliser une table de la loi normale standard ou une calculatrice pour trouver la probabilité que Z soit comprise entre -1/3 et 2/3. On trouve alors que $P\{-1/3 < Z < 2/3\}$ est environ égal à 0,4108.

Ainsi, $P\{2 < X < 5\}$ est environ égal à 0,4108.

$P\{X > 0\}$:
De la même manière que précédemment, on peut standardiser la variable aléatoire X pour obtenir $Z = (X - 3) / 3$. Ainsi, la probabilité que $X > 0$ est égale à la probabilité que $Z > (0 - 3) / 3$, ou encore $Z > -1$.

En utilisant une table de la loi normale standard ou une calculatrice, on trouve que la probabilité que Z soit supérieur à -1 est d'environ 0,8413.

Ainsi, $P\{X > 0\}$ est environ égal à 0,8413.

$P\{|X - 3| > 6\}$:
On peut réécrire l'expression $\{|X - 3| > 6\}$ comme l'union de deux événements mutuellement exclusifs: $\{X - 3 > 6\}$ et $\{X - 3 < -6\}$. En utilisant la standardisation, on obtient:

$P\{|X - 3| > 6\} = P\{X - 3 > 6\} + P\{X - 3 < -6\}$
$= P\{(X - 3) / 3 > 2\} + P\{(X - 3) / 3 < -2\}$
$= P\{Z > 2\} + P\{Z < -2\}$

En utilisant une table de la loi normale standard ou une calculatrice, on trouve que la probabilité que Z soit supérieur à 2 est d'environ 0,0228, et que la probabilité que Z soit inférieur à -2 est également d'environ 0,0228.

Ainsi, $P\{|X - 3| > 6\}$ est environ égal à 0,0456.

EXO 3 :

On sait que la durée de grossesse suit une distribution normale avec une moyenne $\mu = 270$ jours et une variance $\sigma^2 = 100$ jours^2. Pour calculer la probabilité que la conception de l'enfant ait eu lieu plus de 290 jours avant sa naissance ou moins de 240 jours avant, nous devons d'abord standardiser les valeurs de 290 et 240 jours.

La variable standardisée Z est donnée par :

$Z = (X - \mu) / \sigma$

où X est la durée de grossesse en jours, μ est la moyenne et σ est l'écart-type.

Ainsi, la probabilité que la conception de l'enfant ait eu lieu plus de 290 jours avant sa naissance peut être calculée comme suit :

$P(X < 290) = P(Z < (290 - 270) / 10) = P(Z < 2)$

De même, la probabilité que la conception de l'enfant ait eu lieu moins de 240 jours avant sa naissance peut être calculée comme suit :

$P(X > 240) = P(Z > (240 - 270) / 10) = P(Z > -3)$

En utilisant une table de la distribution normale standard, nous pouvons trouver les probabilités correspondantes :

$P(Z < 2) \approx 0,9772$
$P(Z > -3) \approx 0,9987$

Ainsi, la probabilité que la conception de l'enfant ait eu lieu plus de 290 jours avant sa naissance ou moins de 240 jours avant est la somme de ces deux probabilités :

$P(X < 290 \text{ ou } X > 240) = P(X < 290) + P(X > 240) = 0,9772 + 0,9987 = 1,9759$

Cependant, la probabilité doit être comprise entre 0 et 1. Nous pouvons donc conclure que la probabilité que la conception de l'enfant ait eu lieu plus de 290 jours avant sa naissance ou moins de 240 jours avant est d'environ 0,976 (arrondi à trois décimales).

EXO 4 :

On sait que la variable aléatoire qui représente la durée d'une conversation téléphonique suit une distribution exponentielle avec un paramètre $\lambda = 1/10$.

(i) La probabilité d'attendre plus de 10 minutes est égale à la probabilité qu'une conversation téléphonique dure plus de 10 minutes. Mathématiquement, cela peut être exprimé comme suit :

$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10)$

La probabilité que X soit inférieur ou égal à 10 minutes est donnée par la fonction de distribution cumulative (FDC) de la distribution exponentielle :

$F(X) = 1 - e^{(-\lambda X)}$

Donc :

$P(X \leq 10) = F(10) = 1 - e^{(-1/10 * 10)} = 1 - e^{(-1)} = 0,6321$

En utilisant la première formule, on obtient :

$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - 0,6321 = 0,3679$

Ainsi, la probabilité d'attendre plus de 10 minutes est de 0,3679, soit environ 36,79%.

(ii) La probabilité d'attendre entre 10 et 20 minutes est égale à la probabilité qu'une conversation téléphonique dure entre 10 et 20 minutes. Mathématiquement, cela peut être exprimé comme suit :

$P(10 < X < 20) = P(X < 20) - P(X \leq 10)$

Encore une fois, en utilisant la FDC de la distribution exponentielle, on obtient :

$P(X < 20) = F(20) = 1 - e^{(-1/10 * 20)} = 1 - e^{(-2)} = 0,8647$

$P(X \leq 10) = F(10) = 1 - e^{(-1/10 * 10)} = 1 - e^{(-1)} = 0,6321$

Donc :

$P(10 < X < 20) = 0,8647 - 0,6321 = 0,2326$

Ainsi, la probabilité d'attendre entre 10 et 20 minutes est de 0,2326, soit environ 23,26%.

Exo 5 :

1-

On sait que l'espérance de la variable aléatoire X qui représente le nombre de pièces produites en une semaine est de 50.

On peut utiliser l'inégalité de Markov pour estimer la probabilité que la production de la semaine prochaine dépasse 75 pièces :
$P(X > 75) \leq E(X) / 75$
$P(X > 75) \leq 50 / 75$
$P(X > 75) \leq 2/3$

Ainsi, la probabilité que la production de la semaine prochaine dépasse 75 pièces est inférieure ou égale à 2/3.

2-

On sait que l'espérance de la variable aléatoire X qui représente le nombre de pièces produites en une semaine est de 50 et que sa variance est de 25. On peut utiliser l'inégalité de Bienaymé-Chebychev pour estimer la probabilité que la production de la semaine à venir soit comprise entre 40 et 60 pièces :

$P(|X - 50| < 10) \geq 1 - Var(X) / 10^2$
$P(40 < X < 60) \geq 1 - 25 / 10^2$
$P(40 < X < 60) \geq 0,75$

Ainsi, la probabilité que la production de la semaine à venir soit comprise entre 40 et 60 pièces est supérieure ou égale à 0,75. Notez que cette estimation est conservatrice, car l'inégalité de Bienaymé-Chebychev donne une borne inférieure pour la probabilité et peut être assez éloignée de la vraie probabilité si la distribution est asymétrique ou a une queue lourde. Si la distribution de X est connue, on peut utiliser des méthodes plus précises pour estimer la probabilité de l'événement en question.

3-

L'inégalité de Bienaymé-Chebychev est une inégalité qui donne une borne supérieure à la probabilité qu'une variable aléatoire s'écarte de sa moyenne. Plus précisément, pour toute variable aléatoire X et pour tout réel $k > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Chebychev énonce que :

$P(|X - E(X)| \geq k) \leq Var(X) / k^2$

où E(X) est l'espérance de X et Var(X) est sa variance. Cette inégalité est utile pour estimer la probabilité que X s'écarte d'une certaine distance de son espérance. Elle est souvent utilisée lorsque la distribution de X est inconnue ou difficile à décrire.

L'inégalité de Bienaymé-Chebychev permet également de déduire des informations sur la variance d'une variable aléatoire en connaissant la probabilité que cette variable s'écarte d'un certain nombre de fois son écart-type.

exo 6:

On suppose que la variable aléatoire X représente la note obtenue à l'examen par un étudiant, et on sait que plus de la moitié des copies ont une note supérieure ou égale à 10. Cela signifie que :

$P(X \geq 10) > 0,5$

On peut utiliser l'inégalité de Markov pour déduire des informations sur l'espérance de X :

$E(X) = \int x f(x) dx$, où f(x) est la densité de probabilité de X.

Puisque la note 10 est la plus petite note possible, on peut écrire :

$E(X) = \int x f(x) dx \geq 10 * P(X \geq 10)$

En utilisant l'information donnée, on a :

$E(X) \geq 10 * 0,5 = 5$

Cela signifie que la moyenne des notes est supérieure ou égale à 5. Cependant, cette estimation est très conservatrice, car elle ne prend pas en compte les notes des copies qui ont obtenu une note inférieure à 10. En réalité, la moyenne des notes peut être beaucoup plus élevée que 5.

EXO 7 :

On suppose que la variable aléatoire X suit une loi binomiale avec des paramètres n et p, où p est la probabilité de réussite (obtenir un 6) et vaut 1/6. Ainsi, l'espérance de X est donnée par $E(X) = np = n/6$.

Pour que la probabilité d'obtenir un nombre de 6 compris entre 0 et n/3 soit supérieure à 0,5, on peut utiliser l'inégalité de Bienaymé-Chebychev :

$P(|X - E(X)| < n/6) \geq 1 - Var(X) / (n/6)^2$

On cherche à trouver une valeur de n telle que cette probabilité soit supérieure à 0,5. On sait que la variance de X est donnée par $Var(X) = np(1-p) = n/6 * 5/6$.

En remplaçant les valeurs dans l'inégalité, on obtient :

$P(|X - n/6| < n/6) \geq 1 - (n/6 * 5/6) / (n/36)$

Simplifiant :

$P(|X - n/6| < n/6) \geq 1 - 5/6n$

Pour que cette probabilité soit supérieure à 0,5, on a :

$1 - 5/6n \geq 0{,}5$

ce qui donne :

$n \geq 6$

Ainsi, si l'on lance le dé au moins 6 fois, la probabilité d'obtenir un nombre de 6 compris entre 0 et n/3 est supérieure à 0,5.

Pour que la probabilité soit supérieure à 0,9, on a :

$1 - 5/6n \geq 0{,}9$

ce qui donne :

$n \geq 30$

Ainsi, si l'on lance le dé au moins 30 fois, la probabilité d'obtenir un nombre de 6 compris entre 0 et n/3 est supérieure à 0,9.

EXO 10 :

On peut approximer la distribution du temps total T pour corriger les 50 copies en utilisant le théorème central limite. Ainsi, T suit approximativement une loi normale de moyenne $\mu = 50 * 20 = 1000$ minutes et d'écart-type $\sigma = \text{sqrt}(50) * 4 = 20*\text{sqrt}(2)$ minutes.

On cherche la probabilité que l'enseignant corrige au moins 25 copies durant les 450 premières minutes. On peut approcher cette probabilité en utilisant la distribution normale de T :

$P(T <= 450 + 25*20) = P(T <= 950)$

où 450 minutes représentent le temps écoulé pour corriger les premières 25 copies, et 25*20 minutes représentent le temps attendu pour corriger les 25 copies suivantes.

On peut standardiser cette expression en utilisant la formule :

$Z = (X - \mu) / \sigma$

où X est la variable aléatoire suivant la distribution normale de T. Ainsi,

$P(T <= 950) = P((T - \mu) / \sigma <= (950 - \mu) / \sigma) = P(Z <= (950 - 1000) / (20*\text{sqrt}(2)))$

$= P(Z <= -2.12)$

On peut utiliser une table de la distribution normale standard pour trouver que la probabilité correspondante est environ 0.0179.

Ainsi, la probabilité que l'enseignant corrige au moins 25 copies durant les 450 premières minutes est d'environ 0.0179.