TD 3: Probabilités en $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$

Rappel de cours :

- Fonction de répartition simultannée.

$$F(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b)$$

- Fonction de répartition marginale

$$F_X(a) = P(X \leq a, Y \leq \infty) = P(X \leq a)$$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\{X > a, Y > b\}^c) = P(\{X > a\}^c \cup \{Y > b\}^c)$.

Exo1 : Démontrer que $P\{X > a, Y > b\} = 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F(a+b)$.

$$P(\{X > a, Y > b\}) = 1 - P(\{X > a, y > b\}^c)$$

$$= 1 - [P(\{X > a\}^c \cup \{y > b\}^c)] = 1 - [P(\{X > a\}^c) +$$

$$P(\{y > b\}^c) - P(\{X > a\}^c, \{y > b\}^c)] = 1 -$$

$$P(X < a) - P(y \leq b) + P(X \leq a, y \leq b)$$

$$= 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F(a,b).$$

EXO2 :

X = nb de boule rouge obtenue.
Y = nb de boule blanche obtenue.

$X, Y \in \{0, 1, 2, 3\}$ tq $X + Y \leq 3$

$$P(0,0) = \frac{5 \times 4 \times 3}{12 \times 11 \times 10} = \frac{1}{22}.$$

. On a tiré 3 boule Blanc

$$P(0,1) = \frac{5\times4\times4}{12\times11\times10}\times 3 = \frac{4}{22}.$$

2 bleue + 1 blanc

$$P(0,2) = \frac{5\times4\times3}{12\times11\times10}\times 3 = \frac{3}{22}$$

1 bleu + 2 blanche

$$P(0,3) = \frac{1\times3\times2}{12\times11\times10} = \frac{1}{55}$$, 3 blanche.

$$P(1,0) = \frac{3\times5\times4}{12\times11\times10}\times 3 = \frac{3}{22}$$. 1 rouge et 2 blanche.

$$P(1,1) = \frac{3\times5\times4}{12\times11\times10}\times 6 = \frac{6}{22}$$, 1 de chaque couleur.

$$P(1,2) = \frac{3\times4\times3}{12\times11\times10}\times 3 = \frac{3}{110}$$, 1 rouge et 2 blanche.

$$P(2,0) = \frac{3\times2\times5}{12\times11\times10}\times 3 = \frac{3}{44}$$, 2 rouge et 1 bleue.

$$P(2,1) = \frac{3\times2\times1}{12\times11\times10}\times 3 = \frac{3}{55}$$, 2 rouge et 1 blanche.

$$P(3,0) = \frac{3\times2\times1}{12\times11\times10} = \frac{1}{220}.$$

3 rouge.

① Calcul de la loi marginale de X.

$$P_X(0) = \frac{1}{22} + \frac{1}{22} + \frac{3}{22} + \frac{1}{55} = \frac{8}{22} + \frac{1}{55} =$$

$$P_X(1) = \frac{3}{22} + \frac{6}{22} + \frac{9}{110} = \frac{9}{22} + \frac{9}{110} = \frac{27}{55}$$

$P_x(2) = \frac{3}{44} + \frac{3}{55} = \frac{27}{}$

$P_x(3) = \frac{1}{220}$

Exo3 :

• X et Y sont conjointement continue.

$\exists f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $\forall C \subseteq \mathbb{R}^2$ mesurable.
on a $P((X,Y) \in C) = \iint_{(x,y)\in C} f(x,y)$.

on appelle f la densité conjointe.

Exo3

$$-\ P(X \leq Y) = \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx.$$

$$= \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} 2e^{-x} e^{-2y}\,dy\,dx.$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x} \left[-e^{-2y}\right]_x^{\infty} dx.$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-2x}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-3x}\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3} e^{-3x}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{3}.$$

$$-\ P(X \leq a) = \int_0^a \int_0^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx.$$

$$= \int_0^a \int_0^{\infty} 2e^{-x} e^{-2y}\,dy\,dx.$$

$$= \int_0^a e^{-x}\,dx. \,/\, \int_0^a e^{-x} \underbrace{\left[-e^{2y}\right]_0^{\infty}}_{\to 1} dx.$$

$$= \int_0^a e^{-x}\,dx.$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_0^a = -e^{a} - (-e^{0})$$

$$= 1 - e^{-a}.$$

Exo 5 :

X : le nb de minute après midi a l'arrivée de l'homme

Y : le nb de minute aprè midi a l'arrivée de la femme.

$X \sim \mathcal{U}(0,60)$ continue

$Y \sim \mathcal{U}(0,60)$ " .

Loi uniforme :

$$\boxed{f(x) = \frac{1_{(a,b)}(x)}{b-a}}$$

$$P(|X-Y| \geq 10) = P(X-Y \geq 10 \cup Y-X \geq 10)$$
$$= P(X-Y \geq 10) + P(Y-X \geq 10) - P(X-Y \geq 10 \cap Y-X \geq 10)$$

$x - y \cancel{-x} \geq 10 \Leftrightarrow x \geq 10 + y$.

$y - x \geq 10 \Leftrightarrow x \leq 10 + y$.

donc $P(x-y \geq 10 \cap y-X \geq 10) = P(X = 10+y)$
$= 0$.

donc $P(|X-Y| \geq 10) = P(X-Y \geq 10) + P(Y-X \geq 10)$
$= P(X \geq 10+y) + P(y \geq 10+X)$.