Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Année universitaire 2020/2021

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 1 jour
Examen de : M1 Nom du diplôme : Master Informatique
Code du module : SINB19AL Libellé du module : Aspects probabilistes pour l'informatique
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : OUI, notes de cours/TD/TP

Exercice 1.
Supposons que 4% des hommes et 0.16% des femmes sont daltonien[ne]s.

(a) S'il y a autant d'hommes que de femmes dans un groupe, quelle est la probabilité qu'une personne prise uniformément au hasard soit daltonienne ?

(b) Même question s'il y a deux fois plus de femmes que d'hommes dans le groupe.

Exercice 2.
On a deux boîtes, A et B. La boîte A contient 1 bille noire et 1 bille blanche.
La boîte B contient 3 billes noires et 1 bille blanche. On choisit l'une des boîtes au hasard, puis on tire une bille au hasard dans cette boîte.

(a) Calculez la probabilité de tirer une bille noire avec la formule des probabilités totales.

(b) Les événements «choisir la boîte A» et «tirer une bille noire» sont-ils indépendants ?
Justifiez par un calcul.

(c) En utilisant la formule de Bayes, calculez la probabilité d'avoir choisi la boîte A sachant que l'on a tiré une bille noire.

(d) Supposons que l'on joue à un jeu : on gagne 4€ si on tire une bille blanche, mais on perd 1€ si on tire une bille noire. Quelle est l'espérance du gain ?

(e) Quelle est la variance du gain ?

(f) Expliquez intuitivement ce que signifie l'espérance du gain pour un jeu d'argent.

Exercice 3.
La taille d'un homme adulte (en cm) suit une loi normale avec $\mu = 175$ et $\sigma^2 = 36$.

(a) Quel pourcentage des hommes adultes font plus de 185cm ?

(b) Parmi les hommes adultes faisant plus de 185cm, quel pourcentage fait plus de 195cm ?

Exercice 4.
Soit X une variable aléatoire positive suivant une loi inconnue.

(a) On suppose que $\mathbb{E}[X] = 30$. En appliquant l'inégalité de Markov, que pouvez-vous dire de $P\{0 \leq X < 60\}$?

(b) On suppose de plus que $\text{Var}[X] = 30$. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que pouvez-vous dire de $P\{0 \leq X \leq 60\}$?

Exercice 5.
Si on lance un dé équilibré à 6 faces, l'espérance du résultat est 7/2 et la variance est 35/12.

(a) En supposant que l'on fait un grand nombre n de lancers, quelle loi de probabilités suit la somme des résultats ?
Indication : théorème central limite.

(b) On lance un dé et on additionne les résultats jusqu'à ce que la somme atteigne ou dépasse 300. Quelle est la probabilité qu'il faille plus de 80 lancers ?
Indication : c'est la probabilité de ne pas dépasser 300 au bout d'exactement 80 lancers.

Exercice 6.
On trouve une *montre étrange* : son cadran est numéroté de 1 à 6, et elle n'a qu'une seule aiguille. Chaque jour, l'aiguille a une chance sur deux d'avancer d'un cran, et une chance sur deux de reculer d'un cran.

(a) Modélisez le comportement de cette montre par une chaîne de Markov, que vous dessinerez.

(b) Donnez la matrice de transitions de cette chaîne de Markov.

(c) Cette chaîne de Markov admet-telle une distribution stationnaire ? Laquelle ?

(d) Admet-elle une distribution limite ? Pourquoi ?

Exercice 7.
Pour $x \in [0;1]$ et $y \in [0;2]$, soit :

$$f(x,y) = \frac{6}{7} \cdot \left(x^2 + \frac{xy}{2}\right).$$

(a) Montrez que f est une densité de probabilité conjointe.

(b) Calculez la densité de x.

(c) Calculez $P\{x > y\}$.

(d) Calculez $P\{y > \frac{1}{2} | x > \frac{1}{2}\}$.

Exercice 8.
Dans *Equilateralia* (un pays du continent Isocèlien), la Loi ordonne que tous les triangles soient équilatéraux, qu'ils aient un côté horizontal, et qu'ils pointent vers le haut. L'ennemi juré du roi équilateralien, en guerre contre le pays, utilise toujours la même tactique pour attaquer : il produit un champ de mines, qui est bien sûr un triangle équilatéral T conforme à la Loi. L'armée équilatéralienne possède un seul moyen de lutter contre ces triangles minés : les pierres effervescentes. Si une telle pierre tombe dans le triangle miné T, alors elle s'illumine ; sinon, elle est perdue. Ces pierres sont achetées à prix d'or et viennent de très loin. L'armée équlatéralienne s'entraîne tous les jours à tirer des pierres (simples) dans le royaume, selon une distribution probabiliste $\mathcal{D}$ connue seulement par le général d'armée et le géomètre de la cour.
Le but de l'armée est de retrouver le triangle miné T (ou plutot, une très bonne approximation T_0 de T) en utilisant un petit nombre m de pierres effervescentes. Pour cela, le général demande une estimation de m au géomètre de la cour, qui connait un petit peu la théorie de Vapnik et Chervonenskis.

(a) Aidez le géométre et calculez la VC-dimension de l'ensemble $\mathcal{T}E$ de tous les triangles équilateraux (conformes à la Loi) du royaume.

(b) Formulez pour $\mathcal{T}E$ la borne inférieure pour m donée par le thèoreme d'apprentissage de Vapnik et Chervonenskis (Thèoreme 6 du dernièr cours).

Le géomètre n'a jamais fait la preuve du théorème de Vapnik et Chervonenskis et il ne connaît donc pas la valeur de la constate c_0 de la borne inférieure pour m. Le général, lui, se méfie des constantes multiplicatives et de la notation O ; il demande donc au géomètre de faire un calcul plus précis.

(c) En vous inspirant du jeu du rectangle vu en cours, aidez le géomètre et faites le calcul pour évaluer directement la valeur de m.

(d) Quel sera le triangle T_0 retrouvé après m lancés ?