1 Devoir Maison—États quantique, intrication et applications

Non-clonage quantique

Exercice 1.1: Permutation matrix Soit $a \in \{0, 1\}$ et $|0\rangle, |1\rangle$, une base de calcul. Trouvez une unitaire 4×4 tel que :

$$U : |a\rangle \otimes |a\rangle \to |a\rangle \otimes |\bar{a}\rangle \tag{1}$$

où $\bar{a}$ denote l'operation NOT appliqué à a.

Exercice 1.2: CNOT La porte CNOT est telle que :

$$|x\rangle \otimes |y\rangle \to |x\rangle \otimes |x \oplus y\rangle \tag{2}$$

où $\oplus$ est la porte XOR.

1. Montrer que la porte CNOT peut être utilisé pour copier un bit.
2. Montrer que le même processus ne fonctionne plus si le qubit x est une superposition quelconque $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Ceci est une manifestation du fait qu'on peut effectuer une copie d'un bit classique mais pas d'un qubit en general (théorème de non-clonage quantique).

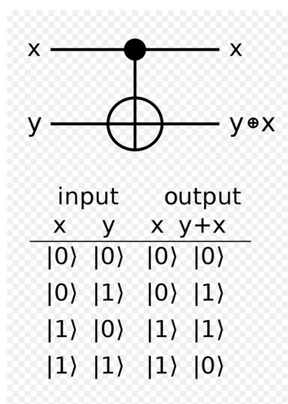

FIGURE 1 – CNOT - table de verité

Etats de Bell

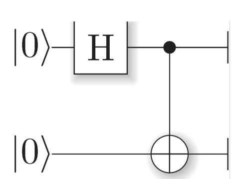

FIGURE 2 – Circuit pour creer des etats de Bell

Exercice 1.3: Bases

1. Déterminer les états obtenus (états de Bell) en injectant dans la porte logique en Fig 1 les quatre états de la base de calcul à deux qubits : $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ (On notera $|\beta_{00}\rangle$, $|\beta_{10}\rangle$, $|\beta_{01}\rangle$, $|\beta_{11}\rangle$ les états de Bell correspondants obtenus).
2. Montrer que ces états sont orthogonaux
3. Prenons l'état β_{01} ; on effectue une mesure sur le premiere qubit. Quelle est la probabilité d'obtenir 0 ? On obtient effectivement 0 et on mesure maintenant le deuxieme bit. Quelle est la probabilité d'obtenir 0 ?
4. Répondre aux meme questions en partant de l'état $|\phi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$

Super-dense coding

Exercice 1.4: Alice et Bob Alice dispose de deux bits (classique) d'information à transmettre à Bob ; comment peut-elle faire en sorte que Bob ait connaissance de la valeur de ces deux bits en ne lui envoyant qu'un seul qubit ? (Alice et Bob disposent chacun d'un qubit d'un état de Bell $|\beta_{00}\rangle$.

1. Selon la valeur de la paire de bits classique Alice agit sur son qubit de la façon suivante :

Bits classique	Action sur le qubit
00	I
01	X
10	Z
11	ZX

(3)

Dans chaque cas quel est l'état de deux qubits résultant de l'action sur le qubit de Alice ?

2. Alice transmet à Bob le qubit transformé. Bob fait agir sur l'état de deux qubits maintenant en sa possession d'abord C-Not puis Hadamard sur le premier qubit. Quel état obtient-il (pour chaque éventualité) ?

3. En déduire qu'en mesurant l'état obtenu dans la base de calcul le résultat est, avec probabilité 100% la paire de bit classique détenue par Alice.

Algorithme de Grover

Exercice 1.5: Dans cet exercice on détaillera l'algorithme de Grover vu en cours.

1. On va mettre en oeuvre l'algorithme de Grover dans le cas d'une liste de 8 éléments : on a donc $N = 8$ et $n = 3$; le registre comportera donc trois qubits.

   - Détailler toutes les étapes de calcul. Combien d'iteration faut-il pour trouver l'element cherché ? La probabilité de le trouver est-elle exacte ? Dessiner le circuit en précisant la representation matricielle des opérateurs qu'il faut appliquer. La representation sera donnée dans la base canonique. Donner aussi une representation graphique sur le plan des opérations nécessaires dans ce cas particulier.