TD1 - Aspects probabiliste.
probabilités discrètes.

- Axiomes : $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

① P est une valeur positive.

② $P(\Omega) = 1$

③ $(A_i)_i$ famille disjoint d'ensemble alors

$$P(\cup A_i) = \sum_i P(A_i).$$

- **Exo1:** Montrer

a) $P(A^c) = 1 - P(A)$ Démontrer ça

on remarque que $\Omega = A^c \cup A$ et $\boxed{A^c \cap A = \emptyset}$

Donc, par l'axiome ③, on a que

$$P(\Omega) = P(A^c \cup A) = P(A^c) + P(A)$$

Par l'axiome ②, $1 = P(A^c) + P(A)$,

soit $P(A^c) = 1 - P(A)$.

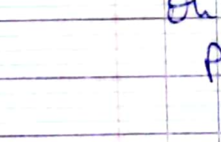
b) $A \subseteq B$ implique $P(A) \leq P(B)$.

on prend un autre ensemble C telque

On note $C = B \setminus A$

$$\underset{\underset{P(B)}{\parallel}}{P(A \cup C)} \underset{③}{=} P(A) + P(C) \underset{①}{\geq} P(A).$$

c - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



$A \cap B$
$= C$

$A' \cup C = A$

$B' \cup C = B$

$A \cup B = (A' \cup C) \cup (B' \cup C)$

$= (A' \cup C) \cup B'$.

$$P(A \cup B') = P(A' \cup C \cup B') = P(A' \cup C) + P(B')$$
$$= P(A) + P(B/C)$$
$$P(C) + P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exercice 2 !

Independence :

A et B sont indépendant

Soi $P(B/A) = P(B)$

soi $P(B \cap A) = P(A)\,P(B).$

A = " on tire un nb pair "

B = " on tire un multiple de 3 "

① Cas des 12 boule.

$P(A) = \frac{1}{2}$.

$P(B) = \frac{1}{3}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ on remarque que $P(A) \times P(B) = \frac{1}{6}$.

donc A et B indépendent.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Cas des 13 boules.

$P(A) = \frac{6}{13}$.

$P(B) = \frac{4}{13}$

$P(A \cup B) = \frac{2}{13} = \frac{26}{13^2}$.

$P(A) \times P(B) = \frac{6}{13} \times \frac{4}{13} = \frac{24}{13^2}$.

$P(A \cup B) \neq P(A) \times P(B)$.

Exo 3 :

B = "au moins un 6"

A = "les deux sont différents".

① Formules de Bayes :

$$P(B/A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}.$$

$A\cap B = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$

$$P(A) = \frac{5}{6}$$

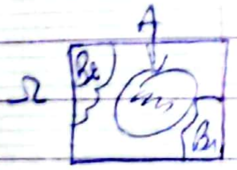
$$P(B\backslash A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{10}{36} \times \frac{36}{30}$$

$$= \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

$$P(A\cap B) = \frac{10}{36} = \frac{|A\cap B|}{|\Omega|}$$

Exo 4 : Formul des proba totales.

① $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$ avec $\Omega = \bigsqcup_i B_i$



② $$P(A_i/B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

avec $\Omega = \bigsqcup_j A_j$ $$= \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1} P(B/A_j)P(A_j)}.$$ ③

risque	accident	Part pop
bas	0,05	20%
moyenne	0,15	50%
haut	0,30	30%

1) La proportion des gens

A = "avoir eu 0 accident"

B_i = "fait partie de la classe i".

$$P(A) = P(A|B_m) \times P(B_b) + P(A|B_m) \times P(B_m) + P(A|B_r) \times P(B_n).$$

$$\Rightarrow P(A) = 0{,}05 \times 0{,}2 + 0{,}15 \times 0{,}5 + 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}175 = 17{,}5\%$$

2 - On veut calculer $P(B_0/A^c)$:

$$P(B_0/A^c) = \frac{P(B_0 \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(A^c/B_0)\,P(B_0)}{P(A^c)} = \frac{(1-0{,}05) \times 0{,}2}{1-0{,}175} = 0{,}23.$$

Exo5 :

A = "possède un chien"

B = "possède un chat"

$P(A) = 0{,}36.$

$P(B) = 0{,}30.$

$P(B/A) = 0{,}22$

④ En utilise la formule de Bayes :

$$\frac{2}{14} + \frac{1}{13}$$

$$= \frac{40}{182} \Big| 2$$

1 - $P(A \cap B) = \frac{0,22 \times 0,36}{0,3} =$

2 - $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,079}{0,30}$

$= 0,264$.

Exo 7 :

1 - $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$.

2 - $P[X = -2] = \frac{8}{14} \times \frac{7}{13} = \frac{28}{91}$.

$P[X = -1] = \frac{8}{14} \times \frac{2}{13} + \frac{2}{14} \times \frac{8}{13} = \frac{16}{91}$.

$P[X = 0] = \frac{2}{14} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{91}$

$P[X = 1] = \frac{4}{14} \times \frac{8}{13} + \frac{8}{14} \times \frac{4}{13} = \frac{32}{91}$.

$P[X = 2] = \frac{4}{14} \times \frac{2}{13} + \frac{2}{14} \times \frac{4}{13} = \frac{8}{91}$.

$P[X = 4] = \frac{4}{14} \times \frac{3}{13} = \frac{6}{91}$.

3 - Graphe de loi : $(\cancel{X}, P[X = x])$.

4 - Fonction de répartition :