Domaine Sciences et Technologies
Master 1 Informatique

Aspects probabilistes pour l'informatique : TD 3

Code UE: SINB19AL

Année 2020-2021

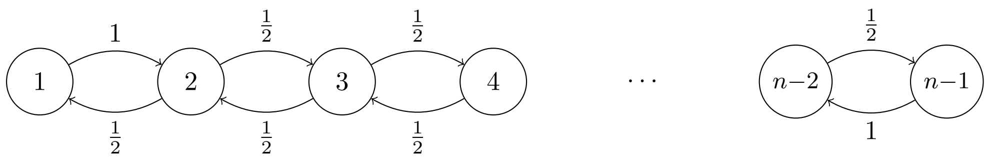
Marches aléatoires et chaînes de Markov

Dans une marche aléatoire, on rappelle que le temps de couverture est le nombre d'étapes nécessaires en moyenne pour visiter tous les sommets du graphe à partir d'un sommet initial donné. On a vu en cours que le temps de couverture d'un graphe non orienté fini, connexe et non biparti, depuis un sommet arbitraire, est majoré par $2|E|(|V|-1)$.

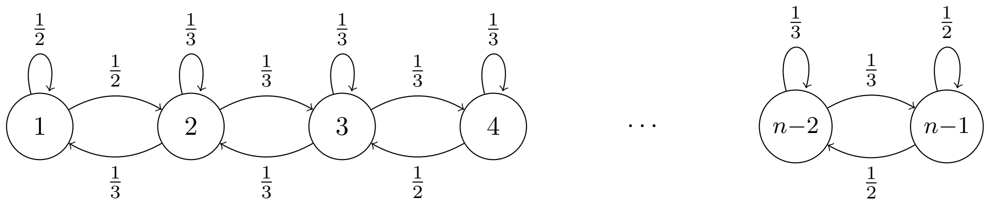
Exercice 1 (coupon collecteur) Un collectionneur cherche à avoir toutes les vignettes d'une série de n vignettes distribuées aléatoirement dans des boîtes de céréales. Combien faut-il acheter de boîtes de céréales en moyenne pour avoir la collection complète ? *Indication : On pourra chercher à estimer l'espérance de la variable aléatoire T_i décrivant le nombre d'achats nécessaires pour obtenir la i-ème nouvelle vignette, en utilisant le résultat du cours concernant le nombre moyen de tirages d'une expérience de Bernoulli avant le premier succès, c'est-à-dire l'espérance d'une variable suivant une loi géométrique. On utilisera également les nombres harmoniques $H_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i = \ln n + \gamma + o(1)$ avec $\gamma \approx 0,577$ la constante d'Euler-Mascheroni.*

Exercice 2

1. Modéliser le problème du collectionneur de vignettes comme une marche aléatoire dans un multi-graphe (c'est-à-dire qu'il peut y avoir plusieurs arcs reliant deux sommets). Quels sont les sommets, les arcs et le point de départ de la marche aléatoire ?
2. Montrer que le temps de couverture du chemin bidirigé sans boucle de n sommets, représenté ci-dessous, est $(n-1)^2$ lorsqu'on démarre à une des extrémités du chemin.



3. Quel devient le temps de couverture si on ajoute des boucles sur chacun des n sommets du chemin bidirigé ?



Exercice 3 Montrer que le temps de couverture d'un graphe complet à n sommets est de l'ordre de $n \log n$.

Exercice 4 Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Soient s et t deux sommets de V. On souhaite déterminer s'il existe un chemin de s à t. Pour simplifier, supposons que le graphe G ne possède aucune composante connexe bipartie. Un algorithme (déterministe) standard de parcours permet de résoudre ce problème en temps linéaire, en utilisant un espace $\Omega(|V|)$. Montrer que l'algorithme suivant retourne la réponse correcte avec probabilité $1/2$ et ne se trompe qu'en retournant que s et t ne sont pas connectés alors qu'ils le sont en réalité. Quelles sont les complexités en temps et en espace de cet algorithme ? *Indication : utiliser l'inégalité de Markov et le rappel en début de feuille.*

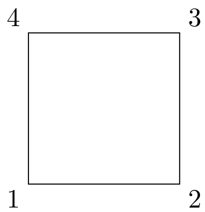
Algorithme de s-t connectivité
1. Commencer une marche aléatoire depuis le sommet s.
2. Si la marche atteint t en moins de $2|V|^3$ étapes, retourner « s et t sont connectés ». Sinon, retourner « s et t ne sont pas connectés ».

Exercice 5 Un chat et une souris suivent une marche aléatoire indépendamment sur un graphe connexe non orienté et non biparti G, ayant n sommets et m arêtes. Ils commencent en même temps en des sommets différents et traversent une arête à chaque unité de temps. Le chat mange la souris dès qu'ils se retrouvent dans le même sommet à la même étape. Montrer qu'en au plus $O((nm)^2)$ étapes en moyenne, le chat a mangé la souris. Quelle est la meilleure stratégie pour le chat afin qu'il minimise le temps avant de manger la souris ?

Exercice 6 Au pays d'Oz, la météo est capricieuse. Ils n'ont jamais deux jours de suite où il fait beau. S'il fait beau, il y a autant de chances qu'il pleuve ou qu'il neige le lendemain. S'il neige ou qu'il pleut, alors il y a une chance sur deux d'avoir le même temps le lendemain, et si le temps change, il n'y a qu'une chance sur deux qu'il fasse beau le lendemain. Représenter cette situation avec une chaîne de Markov d'états Pluie, Soleil, Neige, dont vous donnerez la matrice de probabilités de transitions.

Exercice 7 On lance un dé de manière répétée. Soit X_n la plus grande face observée jusqu'au n-ième lancer. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov dont on donnera la matrice de transition.

Exercice 8 On considère une personne marchant sur le carré suivant :



Cette personne commence au sommet 1, puis, à chaque intersection, elle lance une pièce équilibrée : si la pièce retombe sur *face*, elle tourne dans le sens trigonométrique, sinon elle tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.

1. Décrire la situation avec une chaîne de Markov dont on donnera la matrice de transition P et le graphe des transitions. Quelle est la distribution initiale ?
2. Calculer les distributions $\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$ pour tout entier naturel n. Cette chaîne de Markov admet-elle une distribution limite ?
3. Considérons désormais le même exemple avec des règles différentes. Plutôt que de lancer une pièce équilibrée, la personne lance deux pièces équilibrées. Si la première pièce tombe sur *face*, elle décide de ne pas bouger. Sinon, elle lance l'autre dé comme avant pour décider le sens dans lequel elle va tourner. Donner une description de la nouvelle chaîne de Markov. Calculer la nouvelle distribution $\pi^{(n)}$ et étudier l'existence d'une distribution limite.

Exercice 9 Considérons une suite de paris équilibrés entre deux joueurs : à chaque tour, un des joueurs donne un jeton à l'autre joueur avec probabilité $1/2$ ou reçoit un jeton de l'autre joueur avec probabilité $1/2$. L'état du système est représenté par le nombre de jetons que possède le joueur 1. L'état initial est 0. On suppose qu'il existe deux nombres ℓ_1 et ℓ_2 tels que le joueur i ne peut pas perdre plus que ℓ_i jetons et le jeu termine donc dès qu'on atteint l'état $-\ell_1$ ou ℓ_2. À ce moment-là, l'un des joueurs est ruiné.

1. Décrire la chaîne de Markov associée à ce jeu et calculer la probabilité que le joueur 1 gagne ℓ_2 jetons avant d'en avoir perdu ℓ_1.
2. Classifier les états de la chaîne de Markov (récurrents positifs, récurrents nuls, transients ?). Utiliser cette classification pour retrouver la probabilité que la joueur 1 gagne ℓ_2 jetons avant d'en avoir perdu ℓ_1.
3. Que devient le jeu dans le cas d'un pari déséquilibré où le joueur 1 a probabilité $p > 1/2$ de perdre un jeton à chaque tour ?

Exercice 10 On considère le nombre X_n de *face* obtenues après n lancers indépendants d'une pièce (potentiellement déséquilibrée). On cherche à montrer que, pour tout $k \geq 2$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \text{ est divisible par } k) = \frac{1}{k}\,.$$

1. Modéliser le problème avec une chaîne de Markov ayant pour états $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$. On notera P la matrice de transition de la chaîne de Markov.
2. Montrer que P est une matrice *doublement stochastique*, c'est-à-dire que la somme des coefficients sur chaque ligne **et** sur chaque colonne est égale à 1.
3. Montrer que la chaîne de Markov est irreductible et apériodique. En déduire qu'elle est ergodique puis conclure.
4. Résoudre le problème dans le cas où X_n représente la somme de n lancers indépendants d'un dé.