Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Année universitaire 2022/2023

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 3h
Examen de : M1 Nom du diplôme : Master Informatique
Code du module : SINAU03L Libellé du module : Complexité
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Très important : vous devez rendre **2 copies**, une pour les exercices 1 et 2, l'autre pour l'exercice 3.

Très très important : Malgré les directives énoncées lors du partiel, certaines copies étaient difficiles à déchiffrer. Il est donc rappelé qu'il est impératif de soigner la **présentation des copies** en les rendant aussi **claires et lisibles** que possible. De même, concernant l'écriture d'algorithmes, il a été constaté que parfois, des ambiguïtés demeurent avec un usage inapproprié de certaines particularités spécifiques à certains langages de programmation. Vous devez donc impérativement écrire vos algorithmes sous la même forme que celle figurant dans les corrections mises en ligne sur Ametice (TD et Partiel). De plus, afin de lever tout doute, les **instructions de type "pour" devront préciser sans doute possible, l'étendue des énumérations**, c'est-à-dire pour quelles valeurs exactement de la variable de contrôle, les traitements internes seront exécutés. Par ailleurs, tout usage de structures de données (hormis celle des formules 3CNF ou des graphes utilisées en TD) devra impérativement faire l'objet d'**explications**. Notez que le non respect des consignes données ci-dessus pourra conduire à une dégradation significative de la note à la question correspondante (une **note de zéro** est alors tout à fait possible...).

1 Quelques questions de cours (3 points)

Chaque question peut posséder 0 ou plusieurs réponses positives. Il vous est juste demandé de préciser "OUI" ou "NON", ou encore "On ne sait pas", avec les numéros des différents items, ceci sans donner de justification. Mais attention, comme dans certains QCM, la notation prendra en compte (négativement) les réponses erronées. Vous êtes donc invités à ne donner que les réponses dont vous êtes sûrs.

Question 1. Soit A un langage **NP-complet**. Que peut-on déduire ?

1. au moins un langage **NP-complet** se réduit à A avec une réduction many-one polynomiale ;
2. tous les langages **NP-complets** se réduisent à A avec des réductions many-one polynomiales ;
3. A se réduit à un autre langage **NP-complet** avec une réduction many-one polynomiale ;
4. il n'existe aucun algorithme déterministe qui reconnaît A en temps polynomial.

Question 2. Lesquels des résultats suivants vous permettraient de gagner 1 000 000 $?

1. trouver un algorithme déterministe pour SAT qui s'exécute en temps polynomial ;
2. montrer qu'il n'existe pas d'algorithme déterministe pour SAT qui s'exécute en temps polynomial ;
3. montrer que $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{P}$
4. montrer que chaque langage reconnu par une machine de Turing non déterministe en temps polynomial $O(p(n))$ est aussi reconnu par une machine de Turing déterministe en temps $O(p(n)^2)$ où p est un polynôme.

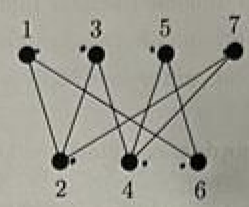
Question 3. Lesquelles des affirmations suivantes impliquent $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$?

1. tous les algorithmes déterministes possibles pour SAT prennent un temps exponentiel ou plus
2. il existe un algorithme non-déterministe pour SAT qui prend un temps polynomial
3. il existe un algorithme non-déterministe pour SAT qui prend un temps exponentiel ou plus
4. il existe un algorithme déterministe pour SAT qui prend un temps polynomial

2 Appartenance à la classe NP (7 points)

Nous considérons ici le problème appelé "Graphe-Partiel-Biparti", que nous noterons "GPaBip". Pour rappel, un graphe $G = (S, A)$ est dit biparti si l'ensemble de ses sommets S peut être partitionné en deux sous-ensemble S_1 et S_2, de telle sorte que pour toute arête $\{x, y\} \in A$, soit $x \in S_1$ et $y \in S_2$, soit $y \in S_1$ et $x \in S_2$ (ce qui veut dire que toute arête a un sommet extrémité dans un ensemble et l'autre, dans l'autre ensemble). On rappelle qu'un ensemble S peut être partitionné en deux sous-ensemble S_1 et S_2 si $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S_1 \neq \emptyset$ et $S_2 \neq \emptyset$.

Ci-dessous, vous avez un exemple de graphe biparti où $S_1 = \{1, 3, 5, 7\}$ et $S_2 = \{2, 4, 6\}$ et pour lequel on peut constater que les arêtes relient des sommets de S_1 à des sommets de S_2 :



Nous définissons le problème de décision **GPaBip** :

> **GPaBip**
> **Donnée :** Un graphe non-orienté sans boucle $G = (S, A)$ et un entier positif $K \leq |A| = m$.
> **Question :** Existe-t-il un sous-ensemble d'arêtes $A' \subseteq A$ avec $|A'| \geq K$ tel que le graphe partiel de G induit par A', c'est-à-dire le graphe $G' = (S, A')$, est biparti ?

Pour la représentation de graphes, vous utiliserez la représentation standard matricielle, à savoir celle pour laquelle pour un graphe G, on a `G.n` qui est égal au nombre de sommets n de G et `G.A` qui est un tableau $n \times n$ de booléens qui représente les arêtes.

Question 1. Montrez que le graphe complet (sans boucle) de 5 sommets avec $K = 6$ est une instance positive du problème **GPaBip** et que le graphe complet (sans boucle) de 5 sommets avec $K = 7$ est une instance négative du problème **GPaBip**.

Question 2. Montrez que le problème **GPaBip** appartient à **NP** en utilisant un algorithme non-déterministe. Dans la réponse à cette question, vous allez très probablement utiliser une structure de données pour la représentation d'ensemble d'arêtes. Si c'est effectivement le cas, vous devez impérativement donner une explication sur cette structure de données. Petite aide : dans un graphe biparti, pour toute arête $\{x, y\} \in A$, si $x \in S_1$, on doit avoir $y \in S_2$, et si en plus il existe une arête $\{y, z\} \in A$, avec $y \in S_2$, on doit avoir $z \in S_1$.

Question 3. Montrez que le problème **GPaBip** appartient à **NP** en exploitant la notion de certificat polynomial. Comme pour la question 2, dans la réponse à cette question, vous allez très probablement utiliser une structure de données pour la représentation d'ensemble d'arêtes. Si c'est effectivement le cas, vous devez impérativement donner une explication sur cette structure de données.

Question 4. Nous considérons dans cette question un problème voisin de **GPaBip** que nous appelons **GBip** et que nous définissons ci-dessous :

> **GBip**
> **Donnée :** Un graphe non-orienté sans boucle $G = (S, A)$.
> **Question :** Le graphe G est-il un graphe biparti ?

Est-ce que le problème **GBip** appartient à **NP** ? Pour répondre à cette question, il ne vous est pas demandé d'exhiber un algorithme non-déterministe ni de vous appuyer sur un certificat polynomial, spécifiques à ce problème, mais il vous faut vous appuyer sur votre réponse aux questions 2 ou 3 qui précédent.

Question 5. Le problème **GBip** appartient-il à **P** ? Que votre réponse soit oui ou non, il vous faut la justifier.

Question 6. Si on suppose que le problème **GBip** appartient à **P** et comme le problème **GPaBip** appartient à **NP**, peut-on en déduire que **P** = **NP** ? Justifiez votre réponse.

3 Réductions (10 points)

Considérons les deux problèmes suivants :

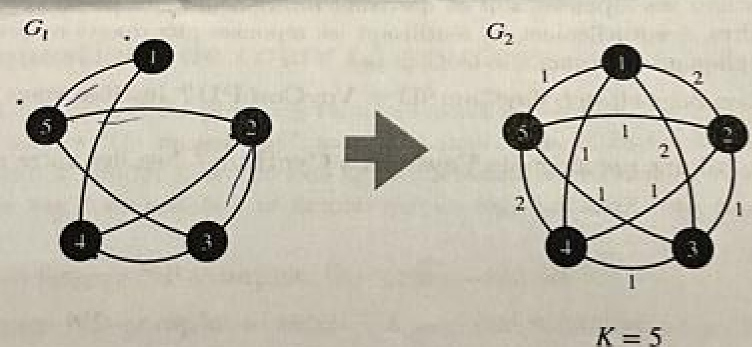
Cycle hamiltonien (CycHam)
Donnée : Un graphe non-orienté sans boucle $G = (S, A)$.
Question : Existe-t-il un cycle hamiltonien dans G, c'est-à-dire une chaîne qui commence par un sommet s, qui traverse tous les autres sommets une et une seule fois, et qui revient au sommet de départ s ?

Voyageur de commerce (VoyCom)
Donnée : Un graphe non-orienté sans boucle complet (toutes les arêtes possibles existent) et pondéré $G = (S, A, p)$, c'est-à-dire, chaque arête $\{x, y\}$ de G a un poids entier $p(x, y) \in \mathbb{N}$ associé, et un entier K.
Question : Existe-t-il un cycle hamiltonien dans G *ayant poids total (somme des poids des arêtes traversées) inférieur ou égal à* K ?

Pour le problème **CycHam**, utilisez la représentation par matrice d'adjacence : on notera le nombre de sommets n par `G.n` et la matrice d'adjacence par `G.A`. Pour le problème **VoyCom**, utilisez également une représentation par matrice d'adjacence, mais cette fois-ci, `G.A[x][y]` représentera le poids $p(x, y)$ de l'arête qui relie le sommet x au sommet y plutôt qu'une valeur booléenne 0 ou 1.

On veut réduire le problème **CycHam** à **VoyCom** avec une réduction *many-one en temps polynomial*. Nous donnons ci-dessous un exemple de transformation pour la graphe G_1 *suivante, qui se transforme en* une instance (G_2, K) du problème **VoyCom** avec $K = 5$ (les arêtes de G_2 *sont étiquetées par leur poids*) :

1, 5, 2, 3, 4, 1
5, 1, 4, 2, 3, 5



Question 1. Trouvez un cycle hamiltonien dans G_1. Est-ce qu'il y a un cycle hamiltonien correspondant dans G_2 ? Quel est son poids ?

Question 2. Trouvez un cycle hamiltonien de poids inférieur ou égal à 5 dans G_2, différent de celui de la question précédente. Cela correspond à quoi dans G_1 ?

Question 3. Trouvez un cycle hamiltonien de poids 7 dans G_2. Cela correspond à quoi dans G_1 ?

Question 3. Dessinez un graphe G_3 de 4 sommets qui *n'admet pas de cycle hamiltonien.* Quel est le graphe G_4 correspondant pour le problème **VoyCom** selon la transformation utilisée précédemment pour G_1 ? Que peut-on dire des cycles hamiltoniens de G_4 ?

Question 4. Généralisez la transformation des graphes précédents G_1 et G_3 en paire (*graphe*, *entier*) à des graphes quelconques, en fournissant un algorithme en pseudo-code qui fonctionne en temps polynomial. Fournissez une analyse de la complexité de cet algorithme.

Question 5. Expliquez pourquoi si le graphe G en entrée admet un cycle hamiltonien, la sortie (G, K) consiste en un graphe complet pondéré qui admet un cycle hamiltonien de poids inférieur ou égal à K.

Question 6. Expliquez pourquoi si la sortie (G, K) consiste en un graphe complet pondéré qui admet un cycle hamiltonien de poids inférieur ou égal à K, alors le graphe G en entrée admet un cycle hamiltonien.

Question 7. À partir des réponses aux questions précédentes, que peut-on conclure concernant la transformation proposée ? Justifiez votre réponse.

Question 8. En sachant que **CycHam** est **NP**-difficile et qu'on peut résoudre **VoyCom** en temps polynomial avec un algorithme non-déterministe, comment peut-on classer les deux problèmes **CycHam** et **VoyCom** ? Justifiez votre réponse.

Question 9. Est-il possible de modifier la transformation de la question 4, en donnant en sortie pour l'entrée G_1 un graphe avec des poids différents de 1 et 2 mais qui satisfait quand même les propriétés montrées dans les questions 5 et 6 ? Quels poids et quelle valeur pour K pourrait-on choisir en alternative ?

Question 10. Considérez ces deux variantes du problème du voyageur de commerce :

> **Voyageur de commerce sans dépenses (VoyComSD)**
> **Donnée :** Un graphe non-orienté sans boucle complet (toutes les arêtes possibles existent) et pondéré $G = (S, A, p)$, c'est-à-dire, chaque arête $\{x, y\}$ de G a un poids entier $p(x, y) \in \mathbb{N}$ associé.
> **Question :** Existe-t-il un cycle hamiltonien *de poids 0* dans G ?
>
> **Voyageur de commerce à poids uniforme (VoyComPU)**
> **Donnée :** Un graphe $G = (S, A, p)$ non-orienté sans boucle complet (toutes les arêtes possibles existent) et pondéré de façon uniforme, c'est-à-dire, chaque arête $\{x, y\}$ de G a un poids entier $p(x, y) = 1$, et un entier K.
> **Question :** Existe-t-il un cycle hamiltonien ayant poids total inférieur ou égal à K dans G ?

1. Est-il possible de réduire **CycHam** à **VoyComSD**, sous l'hypothèse que $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$? Et à **VoyComPU** ? Justifiez vos réponses, soit en décrivant brièvement (sans pseudo-code, mais avec tous les détails nécessaires, éventuellement en réutilisant les réponses aux questions précédentes) une réduction, soit en expliquant pourquoi elle n'existe pas.
2. Comment peut-on donc classer **VoyComSD** et **VoyComPU** ? Justifiez votre réponse.

Question 11. Existe-t-il une réduction de **VoyCom** à **CycHam** ? Justifiez votre réponse.