Année universitaire 2021/2022

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 1h30
Examen de : M1 Nom du diplôme : Informatique
Code du module : Libellé du module : Algorithmique et Recherche Opérationnelle
Calculatrices autorisées : oui Documents autorisés : OUI, notes de cours/TD/TP

Ce sujet contient quatre exercices indépendants sur 13.5 points (12 points plus 1.5 points de bonus). Les exercices peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.

1 Méthode simplex (6 points)

On se donne le programme linéaire (P_1) suivant :

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{Maximiser} & 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{sous les contraintes} & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
 & & & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & & & \leq & 3 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Question 1. (4 pts) Résoudre (P_1) par l'algorithme du simplex.

Question 2. (2 pts) Justifier l'optimalité de la solution trouvée en utilisant la solution duale extraite du dernier dictionnaire.

2 Dualité (4.5 points)

Considérons le programme linéaire suivant.

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & \\
 & & & & & \\
\text{sous les contraintes} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 14 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 10 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0 &
\end{array}$$

Question 1. Ecrire son programme linéaire dual.

Question 2. Montrer que $\overline{x} = (\frac{20}{3}, \frac{11}{3})$ est une solution admissible du programme linéaire primal.

Question 3. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, montrer que $\overline{x} = (\frac{20}{3}, \frac{11}{3})$ est une solution optimale du programme linéaire primal. Determiner la solution optimale du programme linéaire dual.

3 Modélisation par des flots (4.5 points)

Un champ de patates rectangulaire est subdivisé en cellules (parcelles) sous la forme d'un échiquier de dimensions $n \times m$. Certaines cellules de ce champ sont *marquées* pour indiquer que les patates de ces cellules ont été mangées par des rongeurs. Supposons que le champ est donnée par un tableau booléen $M[1..n, 1..m]$ ou $M[i, j] = Vrai$ si et seulement si la cellule (i, j) est marquée.

Le propriétaire P du champ souhaite traiter les cellules abimées à l'aide d'un micro tracteur. Ce tracteur ne peut jamais remonter ou aller vers la gauche, i.e., si P est arrivé dans la cellule (i, j), alors il n'a que deux choix : il peut aller dans la cellule en-dessous $(i + 1, j)$ ou dans la cellule de droite $(i, j + 1)$. Par conséquent, le trajet du tracteur est un chemin dit *monotone*.

	1	2	3	4	5	6
1		✠				
2		✠	✠		✠	
3					✠	
4				✠		✠
5	✠		✠			
6			✠			
7						✠
8				✠	✠	

Le propriétaire souhaite trouver un nombre minimum de trajets de son micro tracteur tels que chaque cellule marquée soit sur au moins un de ces trajets. En d'autres termes, il souhaite trouver un nombre minimum de chemins monotones qui couvrent toutes les cellules marquées. Dans l'exemple ci-dessus, le nombre minimal de chemins monotones est 3.

Aidez le propriétaire à modéliser son problème sous la forme d'un problème de flot avec contraintes :

Question 1. Définir d'abord le graphe du réseau, i.e., l'ensemble des sommets, les arcs, la source et le puit.

Question 2. Définir ensuite les capacités et les coûts des arcs ainsi que d'autres paramètres (demandes, bornes inférieures et bornes supérieures, etc.) si nécessaire.

Question 3. Formuler ensuite le problème de flot dont la solution optimale représente l'ensemble de trajets recherchés.