Année universitaire 2020/2021

Site : ☒ Luminy Q St-Charles Q St-Jérôme Q Cht-Gombert Q Aix-Montperrin Q Aubagne-SATIS
Sujet de : Q 1er semestre ☒ 2ème semestre Q Session 2 Durée de l'épreuve : 1 jour
Examen de : M1 Nom du diplôme : Master Informatique
Code du module : SINB19AL Libellé du module : Aspects probabilistes pour l'informatique
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : OUI, notes de cours/TD/TP

Exercice 1.

Supposons que 4% des hommes et 0.16% des femmes sont daltonien[ne]s.

(a) S'il y a autant d'hommes que de femmes dans un groupe, quelle est la probabilité qu'une personne prise uniformément au hasard soit daltonienne?

(b) Même question s'il y a deux fois plus de femmes que d'hommes dans le groupe.

Correction :

a)

Puisque le groupe compte autant d'hommes que de femmes, cela signifie que la proportion d'hommes dans le groupe est de 50% et la proportion de femmes dans le groupe est également de 50%.

La probabilité qu'une personne soit daltonienne sera donc la moyenne pondérée des pourcentages d'hommes et de femmes daltoniens, en utilisant les proportions d'hommes et de femmes dans le groupe comme pondération.

Probabilité qu'un homme soit daltonien : 4%

Probabilité qu'une femme soit daltonienne : 0.16%

Proportion d'hommes dans le groupe : 50%

Proportion de femmes dans le groupe : 50%

La probabilité qu'une personne prise au hasard dans ce groupe soit daltonienne sera donc :

(Probabilité qu'un homme soit daltonien) × (Proportion d'hommes dans le groupe) + (Probabilité qu'une femme soit daltonienne) × (Proportion de femmes dans le groupe)

= 4% × 50% + 0.16% × 50%

= 2% + 0.08%

= 2.08%

La probabilité qu'une personne prise au hasard dans ce groupe soit daltonienne est de 2.08%.

b)

En utilisant les mêmes pourcentages de daltoniens pour les hommes (4%) et les femmes (0.16%), et en utilisant les nouvelles proportions d'hommes et de femmes dans le groupe, nous pouvons calculer la probabilité qu'une personne prise au hasard dans ce groupe soit daltonienne.

Probabilité qu'un homme soit daltonien : 4%

Probabilité qu'une femme soit daltonienne : 0.16%

Proportion d'hommes dans le groupe : 33.33%

Proportion de femmes dans le groupe : 66.67%

La probabilité qu'une personne soit daltonienne dans ce groupe sera donc :

(Probabilité qu'un homme soit daltonien) × (Proportion d'hommes dans le groupe) + (Probabilité qu'une femme soit daltonienne) × (Proportion de femmes dans le groupe)

= 4% × 33.33% + 0.16% × 66.67%

= 1.33% + 0.1067%

= 1.4367%

La probabilité qu'une personne prise au hasard dans ce groupe soit daltonienne est d'environ 1.44%.

Exercice 2.

On a deux boîtes, A et B. La boîte A contient 1 bille noire et 1 bille blanche.
La boîte B contient 3 billes noires et 1 bille blanche. On choisit l'une des boîtes au hasard, puis on tire unebille au hasard dans cette boîte.

(a) Calculez la probabilité de tirer une bille noire avec la formule des probabilités totales.

(b) Les événements «choisir la boîte A» et «tirer une bille noire» sont-ils indépendants?Justifiez par un calcul.

(c) En utilisant la formule de Bayes, calculez la probabilité d'avoir choisi la boîte A sachant que l'on a tiré unebille noire.

(d) Supposons que l'on joue à un jeu : on gagne 4e si on tire une bille blanche, mais on perd 1e si on tire unebille noire. Quelle est l'espérance du gain?

(e) Quelle est la variance du gain?

(f) Expliquez intuitivement ce que signifie l'espérance du gain pour un jeu d'argent.

Correction :

(a) Pour calculer la probabilité de tirer une bille noire en utilisant la formule des probabilités totales, nous devons considérer les probabilités de tirer une bille noire à partir de chaque boîte, pondérées par la probabilité de choisir chaque boîte.

La probabilité de choisir la boîte A est de 1/2, car il y a deux boîtes au total (A et B) et elles sont équiprobables.
La probabilité de choisir la boîte B est également de 1/2.

La probabilité de tirer une bille noire de la boîte A est de 1/2, car il y a 1 bille noire sur 2 billes au total dans cette boîte.
La probabilité de tirer une bille noire de la boîte B est de 3/4, car il y a 3 billes noires sur 4 billes au total dans cette boîte.

En utilisant la formule des probabilités totales, la probabilité de tirer une bille noire est :

Probabilité de tirer une bille noire = Probabilité de choisir la boîte A × Probabilité de tirer une bille noire dans la boîte A + Probabilité de choisir la boîte B × Probabilité de tirer une bille noire dans la boîte B

= (1/2) × (1/2) + (1/2) × (3/4)

= 1/4 + 3/8

= 5/8

La probabilité de tirer une bille noire est de 5/8.

(b) Les événements "choisir la boîte A" et "tirer une bille noire" ne sont pas indépendants, car la probabilité de tirer une bille noire dépend de la boîte choisie. En utilisant la formule des probabilités conditionnelles, on peut montrer que P(tirer une bille noire | choisir la boîte A) ≠ P(tirer une bille noire), ce qui indique que les deux événements ne sont pas indépendants.

(c) Pour calculer la probabilité d'avoir choisi la boîte A sachant que l'on a tiré une bille noire en utilisant la formule de Bayes, nous devons utiliser les probabilités conditionnelles.

La probabilité de choisir la boîte A sachant que l'on a tiré une bille noire est donnée par la formule de Bayes :

P(choisir la boîte A | tirer une bille noire) = P(tirer une bille noire | choisir la boîte A) × P(choisir la boîte A) / P(tirer une bille noire)

Nous avons déjà calculé que P(tirer une bille noire) est de 5/8, P(choisir la boîte A) est de 1/2, et P(tirer une bille noire | choisir la boîte A) est de 1/2 (car il y a 1 bille noire sur 2 billes dans la boîte A).

En substituant ces valeurs dans la formule de Bayes, nous obtenons :

P(choisir la boîte A | tirer une bille noire) = (1/2) × (1/2) / (5/8)

= 1/4 / 5/8

= 1/4 × 8/5

= 1/2

La probabilité d'avoir choisi la boîte A sachant que l'on a tiré une bille noire est de 1/2.

(d) Pour calculer l'espérance du gain, nous devons considérer les gains possibles et leurs probabilités associées.

Si l'on tire une bille blanche, on gagne 4e avec une probabilité de 1/2 (si l'on choisit la boîte A) et une probabilité de 3/4 (si l'on choisit la boîte B).

Si l'on tire une bille noire, on perd 1e avec une probabilité de 1/2 (si l'on choisit la boîte A) et une probabilité de 1/4 (si l'on choisit la boîte B).

L'espérance du gain est la somme des gains possibles multipliés par leurs probabilités associées :

Espérance du gain = (4 × 1/2 + (-1) × 1/2) + (4 × 3/4 + (-1) × 1/4)

= 2 + 3 - 1/2

= 4 1/2

L'espérance du gain est de 4 1/2.

(e) Pour calculer la variance du gain, nous devons d'abord calculer les carrés des écarts entre chaque gain possible et l'espérance du gain, puis les multiplier par leurs probabilités associées, et enfin les additionner.

La variance du gain est donnée par la formule :

Variance du gain = Σ [(gain possible - espérance du gain)^2 × probabilité associée]

En utilisant les gains possibles et leurs probabilités associées, nous pouvons calculer la variance du gain :

Variance du gain = [(4 - 9/2)^2 × 1/2 + ((-1) - 9/2)^2 × 1/2] + [(4 - 9/2)^2 × 3/4 + ((-1) - 9/2)^2 × 1/4]

= [(-1/2)^2 × 1/2 + (-11/2)^2 × 1/2] + [(-1/2)^2 × 3/4 + (-11/2)^2 × 1/4]

= [1/4 × 1/2 + 121/4 × 1/2] + [1/4 × 3/4 + 121/4 × 1/4]

= [1/8 + 121/8] + [3/16 + 121/16]

= 122/8 + 124/16

= 15 1/4

La variance du gain est de 15 1/4.

(f) L'espérance du gain pour un jeu d'argent représente la valeur moyenne que l'on peut s'attendre à gagner sur le long terme, en prenant en compte les gains possibles et leurs probabilités associées. Une espérance du gain positive indique que le jeu peut être rentable sur le long terme, tandis qu'une espérance du gain négative indique que le jeu est défavorable.

Exercice 3.

La taille d'un homme adulte (en cm) suit une loi normale avec $\mu = 175$ et $\sigma^2 = 36$.

(a) Quel pourcentage des hommes adultes font plus de 185cm?

(b) Parmi les hommes adultes faisant plus de 185cm, quel pourcentage fait plus de 195cm?

Correction :

(a) Pour calculer le pourcentage des hommes adultes faisant plus de 185 cm, nous devons utiliser la fonction de répartition de la loi normale. La formule pour calculer la fonction de répartition d'une loi normale avec une moyenne μ et une variance σ^2 est :

F(x) = Φ((x - μ) / σ)

où Φ représente la fonction de répartition de la loi normale standard, c'est-à-dire une loi normale avec une moyenne de 0 et une variance de 1.

Dans ce cas, μ = 175 et σ^2 = 36, donc σ = √36 = 6. Nous pouvons maintenant calculer la probabilité que la taille d'un homme adulte soit supérieure à 185 cm :

F(185) = Φ((185 - 175) / 6) = Φ(10 / 6) ≈ Φ(1.67)

En utilisant une table de valeurs de la fonction de répartition de la loi normale standard, nous pouvons trouver que Φ(1.67) ≈ 0.9525.

Ainsi, environ 95.25% des hommes adultes font moins de 185 cm, donc le complément de cette probabilité est le pourcentage d'hommes adultes faisant plus de 185 cm, soit 100% - 95.25% = 4.75%.

(b) Pour calculer le pourcentage des hommes adultes faisant plus de 195 cm parmi ceux qui font plus de 185 cm, nous pouvons utiliser la même approche en utilisant la fonction de répartition de la loi normale standard.

$F(195) = \Phi((195 - 175) / 6) = \Phi(20 / 6) \approx \Phi(3.33)$

En utilisant une table de valeurs de la fonction de répartition de la loi normale standard, nous pouvons trouver que $\Phi(3.33) \approx 0.9992$.

Ainsi, environ 99.92% des hommes adultes faisant plus de 185 cm font moins de 195 cm, donc le complément de cette probabilité est le pourcentage d'hommes adultes faisant plus de 195 cm parmi ceux qui font plus de 185 cm, soit 100% - 99.92% = 0.08%.

Exercice 4.
Soit X une variable aléatoire positive suivant une loi inconnue.

(a) On suppose que $E[X] = 30$. En appliquant l'inégalité de Markov, que pouvez-vous dire de $P\{0 \leq X < 60\}$?

(b) On suppose de plus que $\mathrm{Var}[X] = 30$. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que pouvez-vous dire de $P\{0 \leq X \leq 60\}$?

Correction :

(a) L'inégalité de Markov énonce que pour toute variable aléatoire positive X et pour tout a > 0, on a :

$P\{X \geq a\} \leq E[X] / a$

Dans ce cas, on sait que E[X] = 30 et l'on souhaite calculer $P\{0 \leq X < 60\}$. Pour cela, on peut appliquer l'inégalité de Markov avec a = 60 :

$P\{0 \leq X < 60\} = P\{X \geq 0\} - P\{X \geq 60\}$

Comme X est une variable aléatoire positive, on a $P\{X \geq 0\} = 1$. En utilisant l'inégalité de Markov, on a donc :

$P\{0 \leq X < 60\} = 1 - P\{X \geq 60\} \leq 1 - E[X] / 60 = 1 - 30 / 60 = 0.5$

Ainsi, on peut dire que la probabilité que X soit comprise entre 0 et 60 est inférieure ou égale à 0.5 en utilisant l'inégalité de Markov.

(b) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev énonce que pour toute variable aléatoire X avec une variance finie et pour tout k > 0, on a :

$P\{|X - E[X]| \geq k\sigma\} \leq 1 / k^2$

où E[X] est l'espérance de X et σ^2 est la variance de X.

Dans ce cas, on sait que Var[X] = 30 et l'on souhaite calculer $P\{0 \leq X \leq 60\}$. Pour cela, on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $k = \sigma / (60 - 0) = \sigma / 60$, car l'écart maximum entre 0 et 60 est de 60.

$P\{0 \leq X \leq 60\} = 1 - P\{X > 60\} - P\{X < 0\}$

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a donc :

$P\{0 \leq X \leq 60\} \geq 1 - 1 / (\sigma^2 / 3600)$

Comme $\sigma^2 = 30$, on a :

$P\{0 \leq X \leq 60\} \geq 1 - 1 / (30 / 3600) = 1 - 1 / 120 = 0.9917$

Ainsi, on peut dire que la probabilité que X soit comprise entre 0 et 60 est supérieure ou égale à 0.9917 en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 5.

Si on lance un dé équilibré à 6 faces, l'espérance du résultat est 7/2 et la variance est 35/12.

(a) En supposant que l'on fait un grand nombre n de lancers, quelle loi de probabilités suit la somme des résultats ?
Indication : théorème central limite.

(b) On lance un dé et on additionne les résultats jusqu'à ce que la somme atteigne ou dépasse 300. Quelle est la probabilité qu'il faille plus de 80 lancers?
Indication : c'est la probabilité de ne pas dépasser 300 au bout d'exactement 80 lancers.

Correction :

(a) Selon le théorème central limite, la somme des résultats de plusieurs variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) suit approximativement une distribution normale lorsque le nombre d'échantillons est suffisamment grand.

Dans ce cas, nous lançons un dé équilibré à 6 faces, ce qui génère une variable aléatoire discrète uniforme sur {1, 2, 3, 4, 5, 6}. L'espérance du résultat d'un seul lancer est (1+2+3+4+5+6)/6 = 3.5 et la variance est ((1-3.5)^2 + (2-3.5)^2 + (3-3.5)^2 + (4-3.5)^2 + (5-3.5)^2 + (6-3.5)^2)/6 = 35/12.

Ainsi, en supposant que l'on fait un grand nombre n de lancers de ce dé, la somme des résultats de ces n lancers sera approximativement distribuée selon une loi normale avec une espérance de n * 3.5 et une variance de n * (35/12).

(b)

Pour trouver cette probabilité, nous pouvons calculer la probabilité cumulative de ne pas dépasser 300 après 80 lancers, et soustraire cette probabilité de 1 pour obtenir la probabilité que cela nécessite plus de 80 lancers.

Étant donné qu'un dé à six faces a des résultats possibles de 1 à 6 avec une probabilité égale pour chaque face, la somme des résultats possibles après 80 lancers est comprise entre 80 (1+1+...+1) et 480 (6+6+...+6).

Nous pouvons utiliser une approche itérative pour calculer la probabilité cumulative de ne pas dépasser 300 après 80 lancers :

P(n <= 300) = P(n-1 <= 300) + P(n-2 <= 300) + ... + P(80 <= 300)

où P(n <= 300) est la probabilité cumulative de ne pas dépasser 300 après n lancers.

Nous pouvons commencer par P(1 <= 300) = 1, car au premier lancer, la somme sera toujours inférieure à 300. Ensuite, nous pouvons utiliser la formule récursive pour calculer les probabilités cumulatives pour n = 2, 3, ..., 80, en ajoutant les probabilités d'obtenir une somme inférieure ou égale à 300 après chaque lancer.

Une fois que nous avons la probabilité cumulative de ne pas dépasser 300 après 80 lancers, nous pouvons soustraire cette probabilité de 1 pour obtenir la probabilité que cela nécessite plus de 80 lancers :

Probabilité de plus de 80 lancers = 1 - P(80 <= 300)
P(n <= 300) = P(n-1 <= 300) + P(n-2 <= 300) + ... + P(80 <= 300)

Nous pouvons continuer à appliquer cette formule de manière récursive pour calculer les probabilités cumulatives jusqu'à n = 80.

P(1 <= 300) = 1 (car au premier lancer, la somme sera toujours inférieure à 300)

P(2 <= 300) = P(1 <= 300) + P(2 <= 300) = 1 + 1/6 = 7/6

P(3 <= 300) = P(2 <= 300) + P(3 <= 300) = 7/6 + 1/6 = 8/6 = 4/3

Et ainsi de suite, nous continuons à calculer les probabilités cumulatives jusqu'à n = 80.

Enfin, une fois que nous avons la probabilité cumulative de ne pas dépasser 300 après 80 lancers, nous pouvons soustraire cette probabilité de 1 pour obtenir la probabilité que cela nécessite plus de 80 lancers :

Probabilité de plus de 80 lancers = 1 - P(80 <= 300)

Il convient de noter que ce calcul dépend des règles spécifiques du jeu ou de l'expérience probabiliste donnée, ainsi que des probabilités associées à chaque face du dé. Assurez-vous d'utiliser les probabilités appropriées en fonction du contexte spécifique pour obtenir une réponse précise.

Exercice 6.

On trouve une *montre étrange* : son cadran est numéroté de 1 à 6, et elle n'a qu'une seule aiguille. Chaque jour, l'aiguille a une chance sur deux d'avancer d'un cran, et une chance sur deux de reculer d'un cran.

(a) Modélisez le comportement de cette montre par une chaîne de Markov, que vous dessinerez.

(b) Donnez la matrice de transitions de cette chaîne de Markov.

(c) Cette chaîne de Markov admet-telle une distribution stationnaire? Laquelle?

(d) Admet-elle une distribution limite? Pourquoi?

Correction :

(a) La chaîne de Markov pour modéliser le comportement de cette montre peut être représentée graphiquement comme suit :

1 --> 2 <-- 3 --> 4 <-- 5 --> 6.

Chaque état représente un numéro du cadran de 1 à 6, et les flèches indiquent les transitions possibles entre les états. Les flèches orientées vers le bas représentent les transitions où l'aiguille avance d'un cran, avec une probabilité de 1/2, tandis que les flèches orientées vers le haut représentent les transitions où l'aiguille recule d'un cran, avec une probabilité de 1/2.

(b)
La matrice de transitions pour cette chaîne de Markov peut être représentée comme suit :

$$P = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix}$$

Les éléments de la matrice P représentent les probabilités de transition entre les états de la chaîne de Markov. Par exemple, Pij représente la probabilité de transition de l'état i à l'état j. Dans cette matrice, les éléments non nuls sont tous égaux à 1/2, car l'aiguille de la montre a une probabilité de 1/2 d'avancer d'un cran et une probabilité de 1/2 de reculer d'un cran à chaque jour.

(c) Cette chaîne de Markov admet une distribution stationnaire si elle possède un état stable vers lequel elle converge à long terme. Pour déterminer si une distribution stationnaire existe, nous devons calculer les valeurs propres de la matrice de transitions et vérifier si elles sont réelles et égales à 1.

(d) Oui, cette chaîne de Markov admet une distribution limite, car elle est ergodique. Une chaîne de Markov est ergodique si elle satisfait les trois conditions suivantes :

Irréductibilité : Il existe un chemin de transition possible entre n'importe quelles deux états de la chaîne, c'est-à-dire qu'il est possible de passer d'un état à un autre en un certain nombre d'étapes, avec une probabilité non nulle.Aperiodicité : Chaque état de la chaîne a une période de transition de 1, ce qui signifie qu'il est possible de revenir à cet état après n'importe quel nombre d'étapes.

Positivité des probabilités de transition : Les probabilités de transition entre les états de la chaîne sont strictement positives, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'états isolés avec une probabilité de transition nulle.

Dans le cas de cette chaîne de Markov modélisant le comportement de la montre étrange, les trois conditionsd'ergodicité sont satisfaites, car il est possible de passer de n'importe quel état à n'importe quel autre état en un certain nombre d'étapes avec une probabilité non nulle (irréductibilité), chaque état a une période de transition de 1 (aperiodicité), et les probabilités de transition sont positives (1/2 dans ce cas). Par conséquent, cette chaîne de Markov admet une distribution limite.

Exercice 7.

Pour $x \in [0; 1]$ et $y \in [0; 2]$, soit :

$$f(x, y) = \frac{6}{7} \cdot x^2 + \frac{xy}{2} .$$

(a) Montrez que f est une densité de probabilité conjointe.

(b) Calculez la densité de x.

(c) Calculez $P\{x > y\}$.

(d) Calculez $P\{y > \frac{1}{2} | x > \frac{1}{2}\}$.

Exercice 8.

Dans *Equilateralia* (un pays du continent Isocèlien), la Loi ordonne que tous les triangles soient équilatéraux, qu'ils aient un côté horizontal, et qu'ils pointent vers le haut. L'ennemi juré du roi équilateralien, en guerre contre le pays, utilise toujours la même tactique pour attaquer : il produit un champ de mines, qui est bien sûr un triangle équilatéral T conforme à la Loi. L'armée équilatéralienne possède un seul moyen de lutter contre ces triangles minés : les pierres effervescentes. Si une telle pierre tombe dans le triangle miné T, alors elle s'illumine; sinon, elle est perdue. Ces pierres sont achetées à prix d'or et viennent de très loin. L'armée équlatéralienne s'entraîne tous les jours à tirer des pierres (simples) dans le royaume, selon une distribution probabiliste $\mathcal{D}$ connue seulement par le général d'armée et le géomètre de la cour.
Le but de l'armée est de retrouver le triangle miné T (ou plutot, une très bonne approximation T_0 de T) en utilisant un petit nombre m de pierres effervescentes. Pour cela, le général demande une estimation de m au géomètre de la cour, qui connait un petit peu la théorie de Vapnik et Chervonenskis.

(a) Aidez le géométre et calculez la VC-dimension de l'ensemble $\mathcal{T}E$ de tous les triangles équilateraux (conformes à la Loi) du royaume.

(b) Formulez pour $\mathcal{T}E$ la borne inférieure pour m donée par le thèoreme d'apprentissage de Vapnik et Chervonenskis (Thèoreme 6 du dernièr cours).

Le géomètre n'a jamais fait la preuve du théorème de Vapnik et Chervonenskis et il ne connaît donc pas la valeur de la constate c_0 de la borne inférieure pour m. Le général, lui, se méfie des constantes multiplicatives et de la notation O; il demande donc au géomètre de faire un calcul plus précis.

(c) En vous inspirant du jeu du rectangle vu en cours, aidez le géomètre et faites le calcul pour évaluer directement la valeur de m.

(d) Quel sera le triangle T_0 retrouvé après m lancés?

Correction :

(a) La VC-dimension de l'ensemble TE de tous les triangles équilatéraux conformes à la Loi peut être calculée en déterminant le nombre maximum de points pouvant être brisés par TE. Dans le cas des triangles équilatéraux, la VC-dimension est 3, car il est possible de choisir 3 points dans le plan de manière à les briser dans toutes les configurations possibles (par exemple, en formant un triangle équilatéral, en formant un triangle scalène, ou en formant un segment de droite).

(b) La borne inférieure pour m donnée par le théorème d'apprentissage de Vapnik et Chervonenkis pour TE dépend de la VC-dimension de TE, qui est 3 dans notre cas. La borne inférieure est donnée par la formule :

m ≥ c0 * (VC-dimension + log2(1/delta)),

où c0 est une constante dépendant de la distribution probabiliste D (que le géomètre ne connaît pas) et delta est la probabilité d'échec tolérée. Étant donné que le géomètre ne connaît pas la valeur de c0, il ne peut pas fournir une estimation précise de m en utilisant cette formule.

(c) Pour évaluer directement la valeur de m, le géomètre peut utiliser une approche inspirée du jeu du rectangle vu en cours. Le jeu du rectangle consiste à trouver le plus petit nombre de points nécessaires pour briser toutes les configurations possibles d'un rectangle dans le plan. Dans notre cas, nous pouvons utiliser une approche similaire pour les triangles équilatéraux.

Pour cela, le géomètre peut diviser le triangle équilatéral T en une grille de petits triangles équilatéraux de côté d, où d est une petite constante positive choisie. En lançant des pierres effervescentes à des positions aléatoires à l'intérieur du triangle T, le géomètre peut déterminer si chaque petit triangle de la grille est miné ou non. Ainsi, le géomètre peut obtenir des informations sur les configurations des triangles de la grille et progressivement construire une approximation T0 de T.

En utilisant cette approche, le géomètre peut estimer le nombre total de petits triangles dans la grille, n, et utiliser cette valeur comme estimation de m, c'est-à-dire m ≈ n. La valeur de n dépendra de la taille de la grille (c'est-à-dire du choix de d) et de la distribution probabiliste D utilisée pour les lancers de pierres effervescentes.

(d) Le triangle T0 retrouvé après m lancés sera une approximation de T, construite à partir des informations obtenues en lançant les pierres effervescentes selon la méthode décrite dans la réponse précédente. T0 sera une approximation basée sur les configurations des petits triangles de la grille utilisée par le géomètre, et il peut ne pas être une copie exacte de T. Plus le nombre de lancés de pierres effervescentes (c'est-à-dire m) sera grand, meilleure sera l'approximation de T par T0.