

Exercice 1 Soit Π la classe des concepts *rectangle axe-parallèle* de \mathbb{R}^2 . En cours on a démontré que $\text{VC-dim}(\Pi) \leq 4$.

1. Montrer par un exemple à 4 points que $\text{VC-dim}(\Pi) \geq 4$.
2. Refaire l'analyse vue en cours pour borner le nombre N d'exemples à tirer pour retourner un rectangle hypothèse h à la place du concept cible c , tel que $P[\text{Aire}(c\Delta h) \leq \epsilon] \geq 1 - \delta$.

Exercice 2 Soit \mathcal{B} la classe de concepts *boîte axe-parallèle* de \mathbb{R}^d et soit \mathcal{I}_k la classes de concepts *union de k intervals de la droite réelle*.

1. Calculer $\text{VC-dim}(\mathcal{B})$.
2. Calculer $\text{VC-dim}(\mathcal{I}_1)$ et $\text{VC-dim}(\mathcal{I}_2)$, ensuite calculer $\text{VC-dim}(\mathcal{I}_k)$ pour tout k .
3. Etant données N exemples positives et negatives, comment calculer un concept-hypothèse de \mathcal{I}_k (respectivement, de \mathcal{B}) compatible avec les exemples ?

Exercice 3 Soit \mathcal{C} la classe de concepts *ensemble convexe* de \mathbb{R}^2 . Montrer que $\text{VC-dim}(\mathcal{C}) = \infty$.

Exercice 4 Soit \mathcal{S} la classe de concepts *circle* de \mathbb{R}^2 (i.e., $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$ et soit \mathcal{H} la classe de concepts *demi-éspace* de \mathbb{R}^2 (i.e., $ax + by \geq c$). On peut montrer (ou on a vu déjà en cours) que $\text{VC-dim}(\mathcal{S}) \leq 3$ et $\text{VC-dim}(\mathcal{H}) \leq 3$. Etant données N exemples positives et negatives, comment algorithmiquement calculer un concept-hypothèse de \mathcal{S} et de \mathcal{H} ?

Exercice 5 Soit \mathcal{T} la classe de concepts *triangle* de \mathbb{R}^2 . Une conséquence d'un résultat vu en cours est que $\text{VC-dim}(\mathcal{T}) \leq 7$.

1. Revisitez la preuve vue en cours et montrez que $\text{VC-dim}(\mathcal{T}) \leq 7$. Ensuite montrez que $\text{VC-dim}(\mathcal{T}) \geq 4$, $\text{VC-dim}(\mathcal{T}) \geq 5$, etc.
2. Etant données N exemples positives et negatives, comment algorithmiquement calculer un concept-hypothèse de \mathcal{T} ?