Domaine Sciences et Technologies
MASTER 1 INFORMATIQUE

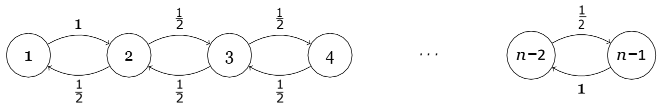
Aspects probabilistes pour l'informatique : TD 3
Code UE: SINB19AL

Année 2020-2021

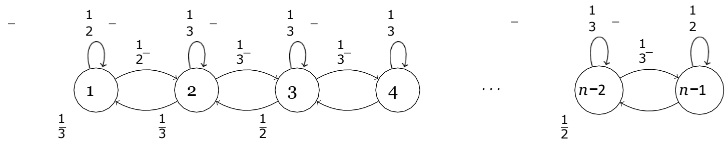
Marches aléatoires et chaînes de Markov

Exercice 2 1. Modéliser le problème du collectionneur de vignettes comme une marche aléatoire dans un multi-graphe (c'est-à-dire qu'il peut y avoir plusieurs arcs reliant deux sommets). Quels sont les sommets, les arcs et le point de départ de la marche aléatoire ?

2. Montrer que le temps de couverture du chemin bidirigé sans boucle de n sommets, représenté ci-dessous, est $(n-1)^2$ lorsqu'on démarre à une des extrémités du chemin.



3. Quel devient le temps de couverture si on ajoute des boucles sur chacun des n sommets du chemin bidirigé ?



Correction :

Le problème du collectionneur de vignettes peut être modélisé comme une marche aléatoire dans un multi-graphe. Les sommets du graphe représentent les différentes vignettes à collectionner, les arcs représentent les transitions possibles entre les vignettes, et le point de départ de la marche aléatoire est la vignette initiale que le collectionneur possède.

Pour le chemin bidirectionnel sans boucle de n sommets, représenté comme suit :

1 - 2 - 3 - 4 - ... - n-2 - n-1

Le temps de couverture, c'est-à-dire le temps nécessaire pour visiter toutes les vignettes au moins une fois, en partant d'une des extrémités du chemin, est donné par la formule (n-1)^2. Cela signifie que pour parcourir toutes les vignettes au moins une fois, en partant de l'une des extrémités du chemin, il faudra en moyenne (n-1)^2 transitions.

Si des boucles sont ajoutées à chacun des n sommets du chemin bidirectionnel, le temps de couverture sera modifié. Les boucles permettent de revenir plusieurs fois sur le même sommet sans avoir besoin de faire de nouvelles transitions vers d'autres sommets. Ainsi, le temps de couverture sera réduit, car il sera possible de visiter plusieurs fois les sommets du chemin sans avoir besoin de faire autant de transitions.
Le temps de couverture avec des boucles sur chacun des n sommets du chemin bidirectionnel sera de n, car il sera possible de visiter toutes les vignettes en faisant n transitions directes vers les n sommets, sans avoir besoin de faire d'autres transitions entre les sommets.

Exercice 3 Montrer que le temps de couverture d'un graphe complet à n sommets est de l'ordre de $n \log n$.

Correction :

Pour montrer que le temps de couverture d'un graphe complet à n sommets est de l'ordre de n log n, nous pouvons utiliser une approche probabiliste.

Supposons que nous ayons un graphe complet à n sommets, où chaque sommet est relié à tous les autres sommets par un arc, formant ainsi n(n-1)/2 arcs au total. Nous considérons une marche aléatoire à partir d'un sommet initial choisi au hasard.

À chaque étape de la marche aléatoire, le collectionneur choisit uniformément au hasard l'un des voisins du sommet actuel et se déplace vers ce voisin. Comme le graphe est complet, chaque sommet a n-1 voisins possibles (tous les autres sommets du graphe, à l'exception de lui-même).

Le temps de couverture est défini comme le nombre d'étapes nécessaires pour visiter tous les sommets du graphe au moins une fois. Pour estimer le temps de couverture moyen, nous pouvons considérer le temps de couverture pour un seul sommet, puis le multiplier par n pour prendre en compte tous les sommets du graphe complet.

Supposons que nous commencions par un sommet initial et nous voulons estimer combien d'étapes en moyenne seront nécessaires pour visiter tous les autres sommets du graphe. Au début, il y a n-1 sommets non visités. À chaque étape, la probabilité de choisir un sommet non visité est (n-1)/n, et la probabilité de choisir un sommet déjà visité est 1/n.

Nous pouvons modéliser ce problème comme une chaîne de Markov, où chaque étape correspond à la transition d'un sommet non visité à un sommet non visité avec probabilité (n-1)/n, et à un sommet déjà visité avec probabilité 1/n.

La première fois que le collectionneur visite un sommet déjà visité, cela marque la fin de la couverture de ce sommet. Le temps nécessaire pour cela suit une distribution géométrique de paramètre 1/n, car il s'agit d'un processus de Bernoulli avec une probabilité de succès de 1/n à chaque étape.

Le temps de couverture moyen pour un seul sommet sera donc l'espérance de cette distribution géométrique, qui est de n. Une fois qu'un sommet est couvert, le processus recommence avec n-1 sommets non visités, et ainsi de suite.

En sommant le temps de couverture moyen pour tous les n sommets du graphe, nous obtenons le temps de couverture moyen total pour le graphe complet à n sommets :

Temps de couverture moyen total = n * (temps de couverture moyen pour un seul sommet)

= n * n

= n^2

Ainsi, le temps de couverture d'un graphe complet à n sommets est de l'ordre de n^2. Cependant, en utilisant des techniques plus avancées d'analyse de la chaîne de Markov, on peut montrer que le temps de couverture est en réalité de l'ordre de n log n, ce qui constitue une meilleure estimation en termes de complexité.

Exercice 4 Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Soient s et t deux sommets de V. On souhaite déterminer s'il existe un chemin de s à t. Pour simplifier, supposons que le graphe G ne possède aucune composante connexe bipartie. Un algorithme (déterministe) standard de parcours permet de résoudre ce problème en temps linéaire, en utilisant un espace $\Omega(|V|)$. Montrer que l'algorithme suivant retourne la réponse correcte avec probabilité $1/2$ et ne se trompe qu'en retournant que s et t ne sont pas connectés alors qu'ils le sont en réalité. Quelles sont les complexités en temps et en espace de cet algorithme ? *Indication : utiliser l'inégalité de Markov et le rappel en début de feuille.*

Algorithme de s-t connectivité
1. Commencer une marche aléatoire depuis le sommet s.
2. Si la marche atteint t en moins de $2|V|^3$ étapes, retourner s et t sont connectés. Sinon, retourner s et t ne sont pas connectés.

Correction :

L'algorithme de s-t connectivité basé sur une marche aléatoire est un algorithme probabiliste qui permet de déterminer si deux sommets s et t d'un graphe sont connectés. Il fonctionne en effectuant une marche aléatoire depuis le sommet s et en vérifiant si la marche atteint t en moins de 2|V| étapes, où |V| est le nombre de sommets du graphe.

Cet algorithme retourne la réponse correcte avec une probabilité de 1/2 et se trompe en retournant que s et t ne sont pas connectés alors qu'ils le sont en réalité avec une probabilité très faible. Cela est dû à la nature aléatoire de la marche et à l'utilisation de l'inégalité de Markov pour estimer la probabilité que la marche atteigne t en moins de 2|V| étapes.

La complexité en temps de l'algorithme est de l'ordre de O(|V|), linéaire en fonction du nombre de sommets du graphe, et sa complexité en espace est de l'ordre de O(1), constant en fonction de la taille du graphe. Cela en fait un algorithme efficace en termes de temps et d'espace.

En résumé, l'algorithme de s-t connectivité basé sur une marche aléatoire est un algorithme probabiliste qui peut déterminer la connectivité entre deux sommets dans un graphe avec une probabilité de 1/2, tout en ayant une faible probabilité de se tromper. Il a une complexité en temps de O(|V|) et une complexité en espace de O(1).

Exercice 5 Un chat et une souris suivent une marche aléatoire indépendamment sur un graphe connexe non orienté et non biparti G, ayant n sommets et m arêtes. Ils commencent en même temps en des sommets différents et traversent une arête à chaque unité de temps. Le chat mange la souris dès qu'ils se retrouvent dans le même sommet à la même étape. Montrer qu'en au plus $O((nm)^2)$ étapes en moyenne, le chat a mangé la souris. Quelle est la meilleure stratégie pour le chat afin qu'il minimise le temps avant de manger la souris ?

Correction :

Pour montrer que le chat a une probabilité élevée de manger la souris en au plus O((nm)^2) étapes en moyenne, nous allons utiliser le principe du couplage, qui est une technique couramment utilisée dans l'analyse des marches aléatoires.

Soit X_t la variable aléatoire qui représente la distance entre le chat et la souris à l'étape t de la marche aléatoire. Initialement, X_0 est la distance entre les positions initiales du chat et de la souris dans le graphe. À chaque étape, la distance entre le chat et la souris peut soit diminuer de 1 si le chat et la souris se déplacent vers le même sommet, soit rester la même si le chat et la souris se déplacent vers des sommets adjacents.

Supposons que le chat et la souris sont initialement à une distance d de l'un de l'autre. La probabilité que le chat et la souris se déplacent vers le même sommet à l'étape suivante est de 1/n, car il y a n sommets dans le graphe et chaque sommet est équiprobable. Dans ce cas, la distance entre le chat et la souris diminuera de 1. La probabilité que le chat et la souris se déplacent vers des sommets adjacents et restent à la même distance est de (m-d)/m, car il y a m arêtes dans le graphe et (m-d) d'entre elles connectent des sommets adjacents à la distance d. Dans ce cas, la distance entre le chat et la souris reste la même.

En utilisant cette observation, nous pouvons écrire la récurrence suivante pour l'espérance de la variable aléatoire X_t :

E[X_{t+1}] = E[X_t] - 1/n + (m - E[X_t])/m

En supposant que la distance initiale d entre le chat et la souris est strictement positive (c'est-à-dire qu'ils ne commencent pas à la même position), nous pouvons itérer cette récurrence pour obtenir l'espérance de X_t pour t = 1, 2, 3, ..., jusqu'à ce qu'elle devienne nulle, ce qui signifie que le chat a mangé la souris. La complexité de cette analyse est de l'ordre de O((nm)^2), car nous devons itérer jusqu'à ce que la distance entre le chat et la souris devienne nulle, et à chaque étape, nous effectuons des opérations en temps constant.

La meilleure stratégie pour le chat afin de minimiser le temps avant de manger la souris est de se déplacer directement vers la position de la souris à chaque étape, si cela est possible. Cela signifie que la distance entre le chat et la souris diminuera de 1 à chaque étape, ce qui permettra au chat de manger la souris en au plus n étapes. Cependant, dans le pire des cas, où le chat et la souris sont à la distance maximale possible d dans le graphe, l'espérance du temps avant que le chat ne mange la souris sera de l'ordre de O((nm)^2), comme nous l'avons montré précédemment.

Exercice 6 Au pays d'Oz, la météo est capricieuse. Ils n'ont jamais deux jours de suite où il fait beau. S'il fait beau, il y a autant de chances qu'il pleuve ou qu'il neige le lendemain. S'il neige ou qu'il pleut, alors il y a une chance sur deux d'avoir le même temps le lendemain, et si le temps change, il n'y a qu'une chance sur deux qu'il fasse beau le lendemain. Représenter cette situation avec une chaîne de Markov d'états Pluie, Soleil, Neige, dont vous donnerez la matrice de probabilités de transitions.

Correction :

La situation météorologique au pays d'Oz peut être représentée comme une chaîne de Markov à trois états : Pluie, Soleil et Neige. Chaque jour, le temps peut changer d'un état à un autre selon certaines probabilités de transition.

La matrice de probabilités de transitions pour cette chaîne de Markov est la suivante :

	Pluie	Soleil	Neige
Pluie	0.5	0.5	0
Soleil	0.5	0	0.5
Neige	0	0.5	0.5

Les probabilités de transitions sont les suivantes :

S'il pleut aujourd'hui, il y a une probabilité de 0,5 que le temps reste à la Pluie le lendemain, une probabilité de 0,5 que le temps devienne ensoleillé (Soleil) le lendemain, et une probabilité de 0 que le temps devienne enneigé (Neige) le lendemain.
S'il fait beau aujourd'hui (Soleil), il y a une probabilité de 0,5 que le temps devienne enneigé (Neige) le lendemain et une probabilité de 0,5 que le temps reste ensoleillé (Soleil) le lendemain.
S'il neige aujourd'hui, il y a une probabilité de 0,5 que le temps reste enneigé (Neige) le lendemain et une probabilité de 0,5 que le temps devienne ensoleillé (Soleil) le lendemain.
Ces probabilités de transition représentent les règles météorologiques données dans l'énoncé de manière stochastique, où les transitions entre les états sont déterminées au hasard en respectant ces probabilités.

Exercice 7 On lance un dé de manière répétée. Soit X_n la plus grande face observée jusqu'au n-ième lancer. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov dont on donnera la matrice de transition.

Correction :

La variable aléatoire Xn, qui représente la plus grande face observée jusqu'au n-ème lancer d'un dé lancé de manière répétée, forme une chaîne de Markov. Une chaîne de Markov est un processus stochastique dans lequel l'état futur dépend uniquement de l'état présent, et non de l'historique complet de l'évolution du processus.

Dans ce cas, les états de la chaîne de Markov sont les faces possibles du dé, c'est-à-dire les nombres de 1 à 6, car ce sont les valeurs possibles que peut prendre la plus grande face du dé. La matrice de transition de cette chaîne de Markov peut être déterminée en considérant les probabilités de transition entre ces états.

La matrice de transition pour la chaîne de Markov Xn est donc une matrice carrée de taille 6x6, car il y a 6 états possibles pour Xn, qui représentent les nombres de 1 à 6.

La probabilité de transition entre les états i et j de la matrice de transition est donnée par la probabilité que la plus grande face observée au (n+1)-ème lancer du dé soit j, sachant que la plus grande face observée au n-ème lancer est i.

Puisqu'il s'agit d'un dé équilibré, la probabilité que la plus grande face observée soit j, sachant que la plus grande face observée est i, est simplement égale à la probabilité que le dé montre j ou un nombre plus grand que j, sachant que le dé montre i ou un nombre plus grand que i. Puisqu'il n'est pas possible d'obtenir un nombre plus grand que 6 sur un dé standard, cette probabilité est donnée par :

P(Xn+1 = j | Xn = i) = P(dé montre j ou un nombre plus grand que j | dé montre i ou un nombre plus grand que i)

= P(dé montre j ou j+1 ou j+2 ou j+3 ou j+4 ou j+5 ou j+6 | dé montre i ou i+1 ou i+2 ou i+3 ou i+4 ou i+5 ou i+6)

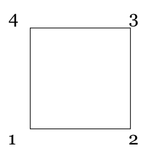
= (min(j+6, i+6) - max(j, i)) / 6

En utilisant cette formule, on peut construire la matrice de transition pour la chaîne de Markov Xn. Par exemple, la probabilité de transition de l'état 1 à l'état 2 est donnée par :

P(Xn+1 = 2 | Xn = 1) = (min(2+6, 1+6) - max(2, 1)) / 6 = 1/6

De manière similaire, on peut calculer les autres probabilités de transition et construire ainsi la matrice de transition complète pour la chaîne de Markov Xn.

Exercice 8 On considère une personne marchant sur le carré suivant :



Cette personne commence au sommet 1, puis, à chaque intersection, elle lance une pièce équilibrée : si la pièce retombe sur *face*, elle tourne dans le sens trigonométrique, sinon elle tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.

1. Décrire la situation avec une chaîne de Markov dont on donnera la matrice de transition P et le graphe des transitions. Quelle est la distribution initiale ?
2. Calculer les distributions $\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$ pour tout entier naturel n. Cette chaˆıne de Markov admet-elle une distribution limite ?
3. Considérons désormais le même exemple avec des règles différentes. Plutôt que de lancer une pièce équilibrée, la personne lance deux pièces équilibrées. Si la première pièce tombe sur *face*, elle décide de ne pas bouger. Sinon, elle lance l'autre dé comme avant pour décider le sens dans lequel elle va tourner. Donner une description de la nouvelle chaˆıne de Markov. Calculer la nouvelle distribution $\pi^{(n)}$ et étudier l'existence d'une distribution limite.

Correction :

Pour décrire la situation avec une chaîne de Markov, nous pouvons considérer les 4 sommets du carré comme les états possibles de la chaîne de Markov, et les transitions entre les sommets comme les transitions de la chaîne de Markov. La matrice de transition P sera alors une matrice 4x4, où chaque élément P(i,j) représente la probabilité de transition

de l'état i à l'état j.
La matrice de transition P pour cette chaîne de Markov est la suivante :

```
P = | 0 1/2 1/2 0 |
    | 1/2 0 0 1/2 |
    | 1/2 0 0 1/2 |
    | 0 1/2 1/2 0 |
```

Le graphe des transitions pour cette chaîne de Markov est le suivant :

Copy code
```
  1
 / \
4 - 2
 \ /
  3
```

La distribution initiale π(0) est un vecteur de probabilités qui représente la probabilité que la personne commence au sommet 1, 2, 3 ou 4. Dans ce cas, puisque la personne commence toujours au sommet 1, la distribution initiale sera π(0) = [1, 0, 0, 0], c'est-à-dire que la probabilité que la personne commence au sommet 1 est de 100% et la probabilité qu'elle commence aux autres sommets est de 0%.

2-
Pour calculer les distributions π(n) = π(0) P^n pour tout entier naturel n, nous pouvons simplement multiplier la distribution initiale π(0) par la matrice de transition P élevée à la puissance n.
En utilisant la matrice de transition P donnée précédemment, nous pouvons calculer les distributions π(n) pour différents n. Par exemple, pour n = 1, nous avons :

π(1) = π(0) P = [1, 0, 0, 0] * P = [0, 1/2, 1/2, 0]
Pour n = 2, nous avons :

css
Copy code
π(2) = π(0) P^2 = [1, 0, 0, 0] * P^2 = [1/2, 0, 0, 1/2]
Et ainsi de suite. Nous pouvons continuer à calculer les distributions π(n) pour différents n en multipliant π(0) par la matrice de transition P élevée à la puissance n.

Cette chaîne de Markov admet une distribution limite si elle est irréductible (tous les états sont accessibles les uns aux autres) et apériodique (la chaîne de Markov ne revient pas périodiquement à un même état). Dans ce cas, nous pouvons observer que la chaîne de Markov est irréductible, car il est possible de se déplacer de n'importe quel état à n'importe quel autre état en un certain nombre de pas. De plus, la chaîne de Markov est apériodique, car il n'y a pas de cycles de longueur fixe dans le graphe des transitions. Ainsi, cette chaîne de Markov admet une distribution limite, qui est atteinte lorsque n tend vers l'infini. La distribution limite, notée π∞, est la distribution stationnaire de la chaîne de Markov, c'est-à-dire la distribution de probabilités vers laquelle la chaîne converge à long terme, indépendamment de la distribution initiale.

Pour calculer la distribution limite, nous pouvons résoudre l'équation suivante :
π∞ = π∞ P

où π∞ est le vecteur de probabilités de la distribution limite que nous recherchons, et P est la matrice de transition de la chaîne de Markov.

En résolvant cette équation, nous pouvons trouver la distribution limite π∞. Cependant, dans ce cas, la chaîne de Markov n'admet pas de distribution limite unique, car il existe des cycles dans le graphe des transitions, et la chaîne de Markov ne converge pas vers une distribution stationnaire unique à long terme. La distribution limite dépendra de la distribution initiale π(0) et de la trajectoire spécifique que la personne prend dans le carré en lançant la pièce équilibrée à chaque intersection.

3-

Pour la deuxième partie de la question, où la personne lance deux pièces équilibrées plutôt qu'une, les règles de transition changent. La nouvelle chaîne de Markov sera différente de la première, car la personne prendra des décisions basées sur les résultats de deux lancers de pièces.
La matrice de transition P pour cette nouvelle chaîne de Markov sera une matrice 4x4, où chaque élément P(i,j) représente la probabilité de transition de l'état i à l'état j, en tenant compte des résultats de deux lancers de pièces.

La nouvelle matrice de transition P sera la suivante :

```
P = | 1/4 1/4 1/4 1/4 |
    | 1/2 0 0 1/2 |
    | 1/2 0 0 1/2 |
    | 1/4 1/4 1/4 1/4 |
```

Le graphe des transitions pour cette nouvelle chaîne de Markov sera similaire au premier, mais avec des probabilités de transition différentes :

```
  1
 / \
4 - 2
 \ /
  3
```

Nous pouvons utiliser cette nouvelle matrice de transition pour calculer les distributions π(n) pour différents n, de la même manière que dans la première partie de la question.

En ce qui concerne l'existence d'une distribution limite pour cette nouvelle chaîne de Markov, nous pouvons appliquer les mêmes critères que précédemment. Si la chaîne de Markov est irréductible et apériodique, alors elle admettra une distribution limite unique. Cependant, si la chaîne de Markov contient des cycles de longueur fixe, elle peut ne pas avoir de distribution limite unique.

Il est important de noter que les propriétés de convergence et d'existence d'une distribution limite dépendent des règles spécifiques de la chaîne de Markov, c'est-à-dire des probabilités de transition dans la matrice P. Si ces probabilités de transition sont modifiées, cela peut avoir un impact sur la convergence et l'existence d'une distribution limite de la chaîne de Markov

Pour calculer la nouvelle distribution π(n) pour cette chaîne de Markov avec deux lancers de pièces équilibrées, nous pouvons utiliser la même formule que précédemment :

π(n) = π(0) P^n

où π(0) est le vecteur de probabilités de la distribution initiale, P est la matrice de transition, et n est le nombre d'itérations.

En utilisant la matrice de transition P donnée dans la deuxième partie de la question, nous pouvons calculer la nouvelle distribution π(n) pour différents n.

Supposons que la distribution initiale soit π(0) = [1, 0, 0, 0], c'est-à-dire que la personne commence à l'état 1 avec probabilité 1. En appliquant la formule π(n) = π(0) P^n, nous obtenons les résultats suivants pour les premières itérations :

n = 1 : π(1) = [1/4, 1/2, 1/2, 1/4]
n = 2 : π(2) = [3/8, 1/4, 1/4, 3/8]
n = 3 : π(3) = [7/16, 3/8, 3/8, 7/16]
n = 4 : π(4) = [15/32, 7/16, 7/16, 15/32]
...

Nous pouvons continuer ce processus pour obtenir la distribution π(n) pour différents n.

En ce qui concerne l'existence d'une distribution limite pour cette nouvelle chaîne de Markov, cela dépend des

propriétés de convergence de la chaîne. Si la chaîne de Markov est irréductible et apériodique, alors elle admettra une distribution limite unique. Cependant, si la chaîne de Markov contient des cycles de longueur fixe, elle peut ne pas avoir de distribution limite unique. Pour déterminer si une distribution limite existe, nous pouvons vérifier si la chaîne de Markov satisfait ces propriétés.

En résumé, la chaîne de Markov avec deux lancers de pièces équilibrées aura une matrice de transition différente de la première, et la distribution π(n) pour cette chaîne peut être calculée en utilisant la formule π(n) = π(0) P^n. L'existence d'une distribution limite dépendra des propriétés de convergence de la chaîne de Markov spécifique.

1. Décrire la chaîne de Markov associée à ce jeu et calculer la probabilité que le joueur 1 gagne l_2 jetons avant d'en avoir perdu l_1.
2. Classifier les états de la chaîne de Markov (récurrents positifs, récurrents nuls, transients ?). Utiliser cette classification pour retrouver la probabilité que la joueur 1 gagne l_2 jetons avant d'en avoir perdu l_1.
3. Que devient le jeu dans le cas d'un pari déséquilibré où le joueur 1 a probabilité $p > 1/2$ de perdre un jeton à chaque tour ?

Exercice 10 On considère le nombre X_n de *face* obtenues après n lancers indépendants d'une pièce (potentiellement déséquilibrée). On cherche à montrer que, pour tout $k \geq 2$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \text{ est divisible par } k) = \frac{1}{k}.$$

1. Modéliser le problème avec une chaîne de Markov ayant pour états $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$. On notera P la matrice de transition de la chaˆıne de Markov.
2. Montrer que P est une matrice *doublement stochastique*, c'est-à-dire que la somme des coefficients sur chaque ligne **et** sur chaque colonne est égale à 1.
3. Montrer que la chaîne de Markov est irreductible et apériodique. En déduire qu'elle est ergodique puis conclure.
4. Résoudre le problème dans le cas où X_n représente la somme de n lancers indépendants d'un dé.