Domaine Sciences et Technologies
MASTER 1 INFORMATIQUE

Aspects probabilistes pour l'informatique : TD 3

Code UE: SINB19AL

Année 2020-2021

Probabilités en $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^r$

Exercice 1 Soit X et Y deux variables aléatoires, F leur fonction de répartition simultanée et F_X, F_Y les fonctions de répartition marginales. Démontrer que $P\{X > a, Y > b\} = 1 - F_X(a) - F_Y(b) - F(a,b)$. *Indication :* Utiliser le fait que $P(\{X > a, Y > b\}^c) = P(\{X > a\}^c \cup \{Y > b\}^c)$.

Exercice 2 On tire au hasard 3 boules d'une urne contenant 3 rouges, 4 blanches et 5 bleues. X et Y designent le nombre de boules rouge et celui de boules blanches tirées. Calculer la loi de probabilité simultanée $p(i,j) = P\{X = i, Y = j\}$ de X et Y. Déduire aussi les lois marginales de X et de Y.

Exercice 3 La densité conjointe de X et Y est donnée par $f(x,y) = 2e^{-x}e^{-2y}$ si $0 < x < \infty, 0 < y < \infty$ et $f(x,y) = 0$ sinon. Calculer $P\{X < Y\}$ et $P\{X < a\}$.

Exercice 4 On considère un cercle de rayon R et de centre $(0,0)$. On choisi dans ce cercle uniformement un point au hasard, ce qui signifie que toutes les regions de taille donnée du cercle ont la même probabilité de contenir ce point. Les variables aléatoires X et Y représentant les coordonnées du point choisi. La répartition conjointe de X et Y étant uniforme, il doit exister une constante c telle que $f(x,y) = c$ si $x^2 + y^2 \leq R^2$ et $f(x,y) = 0$ si $x^2 + y^2 > R^2$. Trouver la constante c. Trouver aussi les densités marginales de X et Y.

Exercice 5 *(Independences des variables)* Un homme et un femme se donnent rendez-vous. L'heure d'arrivée de chacune de ces deux personnes sur les lieux du rendez-vous est une variable aléatoire uniforme entre midi et une heure. Notament X et Y designent l'écart en minutes entre midi et l'arrivée de l'homme ou de la femme. Ces deux variables sont indépendentes. Quelle est la probabilité que la première arrivée doive attendre plus de 10 minutes ?

Exercice 6 *(L'aiguille de Buffon)* Sur une table, on trace des lignes parallèles (disons horizontales) espacées d'un écart D les unes des autres. On y jette une aiguille de longueur L avec $L \leq D$. Quelle est la probabilité que l'aiguille coupe une ligne ? *Indication :* Réperer la position de l'aiguille par la distance X entre le milieu de l'aiguille et la parallele la plus proche et par l'angle Θ entre l'aiguille et une prependiculaire aux lignes. Dans quel cas l'aiguille va intersecter la droite horizontale ?

Exercice 7 *(Additivité de loi de Poisson)* Montrer que la somme $X+Y$ de deux variables aléatoires de Poisson indépendentes X et Y de paramètres λ_1 et λ_2 est une variable de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$. *Indication :* Utiliser la convolution discrète $P\{X + Y = n\} = \sum_{k=0}^{n} P\{X = k\}P\{Y = n - k\}$.

Exercice 8 *(Exemple d'espèrence d'une fonction de deux variables)* Un accident se produit en un poijnt X uniformément distribué sur une route de longuer L. Au moment de l'accident, une ambulence se trouvent en un point Y, lui aussi, uniformememnt distribué sur la route. En supposant que X et Y sont indépendents, trouver l'espérence de la distance entre l'ambulance et le lieu de l'accident.

Exercice 9 *(Déplacement aléatoire dans le plan)* On considère une particule située dans le plan et se déplacant par sauts de longueur fixe mais orientés dans dans n'importe quelle direction. On admettra que la longueur des sauts est égale à 1, tandis que l'angle entre l'axe des abscisses et la direction prise par la suite d'un saut est une variable uniforme sur $(0, 2\pi)$. On cherche le carré de la distance entre la particule et sa position initiale après n sauts. *Indication :* Désigner les variables de coordonnées associées au $i$ème saut par (X_i, Y_i), $i = 1, \dots, n$ et utiliser les relations

$X_i = \cos\theta_i, Y_i = \sin\theta_i$, ou $\theta_i, i = 1, \ldots, n$ sont des variables uniformes sur $(0, 2\pi)$.

Exercice 10 *(Variance d'une variable aléatoire binomiale)* Calculer la variance d'une variable Bernoulli de paramètre n. En utilisant le fait qu'une variable binomiale de parametres n et p est la somme des n variables Bernoulli ainsi que la formule $Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$ pour n variables indépendentes, déduire que la variance d'une variable binomiale de paramètres n et p est $np(1-p)$.