Logique propositionnelle

Cyril Terrioux
cyril.terrioux@univ-amu.fr

Faculté des Sciences Aix-Marseille Université

Plan

Plan

Comment modéliser un problème ?

- analyser le problème :
  - identifier les différents objets composant le problème
  - identifier les propriétés de ces objets
  - identifier les relations entre ces objets
- représenter ces informations dans un formalisme donné

Comment modéliser un problème ?

- analyser le problème :
  - identifier les différents objets composant le problème
  - identifier les propriétés de ces objets
  - identifier les relations entre ces objets
- représenter ces informations dans un formalisme donné

Logique propositionnelle :

- Objets $\rightarrow$ variables booléennes

Comment modéliser un problème ?

- analyser le problème :
  - identifier les différents objets composant le problème
  - identifier les propriétés de ces objets
  - identifier les relations entre ces objets
- représenter ces informations dans un formalisme donné

Logique propositionnelle :

- Objets $\rightarrow$ variables booléennes
- Propriétés et relations $\rightarrow$ variables booléennes / formules

Un formalisme simple mais très puissant

Un formalisme simple :

- Chaque variable peut prendre seulement deux valeurs

Un formalisme simple mais très puissant

Un formalisme simple :

- Chaque variable peut prendre seulement deux valeurs
- Des formules permettant de modéliser différents types de propriétés ou de relations

Un formalisme simple mais très puissant

Un formalisme simple :

- Chaque variable peut prendre seulement deux valeurs
- Des formules permettant de modéliser différents types de propriétés ou de relations

Exemples de problèmes :

- coloration de graphes,

Un formalisme simple mais très puissant

Un formalisme simple :

- Chaque variable peut prendre seulement deux valeurs
- Des formules permettant de modéliser différents types de propriétés ou de relations

Exemples de problèmes :

- coloration de graphes,
- vérification de circuits,

Un formalisme simple mais très puissant

Un formalisme simple :

- Chaque variable peut prendre seulement deux valeurs
- Des formules permettant de modéliser différents types de propriétés ou de relations

Exemples de problèmes :

- coloration de graphes,
- vérification de circuits,
- systèmes d'équations ou d'inéquations,

Un formalisme simple mais très puissant

Un formalisme simple :

- Chaque variable peut prendre seulement deux valeurs
- Des formules permettant de modéliser différents types de propriétés ou de relations

Exemples de problèmes :

- coloration de graphes,
- vérification de circuits,
- systèmes d'équations ou d'inéquations,
- cryptographie,
- ...

Plan

Langage de la logique propositionnelle

- un ensemble $\mathcal{V}$ de variables propositionnelles

Langage de la logique propositionnelle

- un ensemble $\mathcal{V}$ de variables propositionnelles
- les parenthèses ( )

Langage de la logique propositionnelle

- un ensemble $\mathcal{V}$ de variables propositionnelles
- les parenthèses ( )
- les opérateurs ou connecteurs:
  - non (noté $\neg$)
  - et (noté $\wedge$)
  - ou (noté $\vee$)
  - implication (noté $\rightarrow$)
  - équivalence (noté $\leftrightarrow$)

Langage de la logique propositionnelle

- un ensemble $\mathcal{V}$ de variables propositionnelles
- les parenthèses ( )
- les opérateurs ou connecteurs:
  - non (noté $\neg$)
  - et (noté $\wedge$)
  - ou (noté $\vee$)
  - implication (noté $\rightarrow$)
  - équivalence (noté $\leftrightarrow$)
- deux constantes :
  - faux (noté 0)
  - vrai (noté 1)

Formules

- toute variable propositionnelle v est une formule

Formules

- toute variable propositionnelle v est une formule
- 0 et 1 sont des formules

Formules

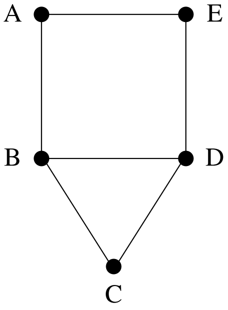
- toute variable propositionnelle v est une formule
- 0 et 1 sont des formules
- Si F est une formule alors
  - (F) est une formule
  - $\neg F$ est une formule

Formules

- toute variable propositionnelle v est une formule
- 0 et 1 sont des formules
- Si F est une formule alors
  - (F) est une formule
  - $\neg F$ est une formule
- Si F et G sont des formules alors
  - $F \wedge G$ est une formule
  - $F \vee G$ est une formule
  - $F \rightarrow G$ est une formule
  - $F \leftrightarrow G$ est une formule

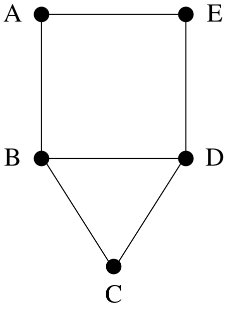
Exemple 1

Coloration de graphe avec 3 couleurs (vert, jaune, rouge)



Exemple 1

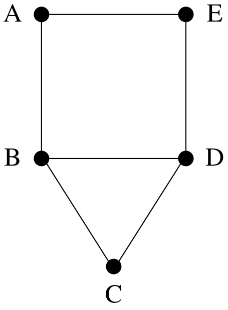
Coloration de graphe avec 3 couleurs (vert, jaune, rouge)



Variables :
a_v vrai si A a pour couleur vert

Exemple 1

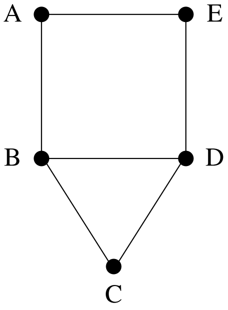
Coloration de graphe avec 3 couleurs (vert, jaune, rouge)



Variables :
a_v vrai si A a pour couleur vert
a_j vrai si A a pour couleur jaune

Exemple 1

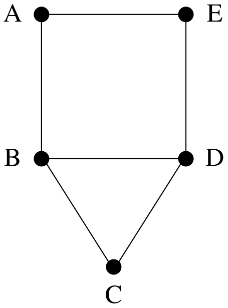
Coloration de graphe avec 3 couleurs (vert, jaune, rouge)



Variables :
a_v vrai si A a pour couleur vert
a_j vrai si A a pour couleur jaune
a_r vrai si A a pour couleur rouge

Exemple 1

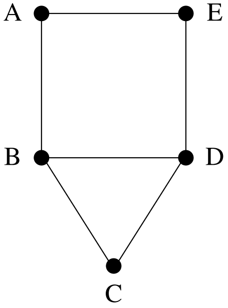
Coloration de graphe avec 3 couleurs (vert, jaune, rouge)



Variables :
a_v vrai si A a pour couleur vert
a_j vrai si A a pour couleur jaune
a_r vrai si A a pour couleur rouge
b_v vrai si B a pour couleur vert
b_j vrai si B a pour couleur jaune
b_r vrai si B a pour couleur rouge
...

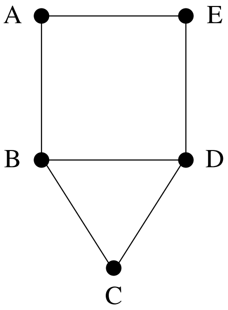
Exemple 1

Chaque sommet prend une et une seule couleur



Exemple 1

Chaque sommet prend une et une seule couleur

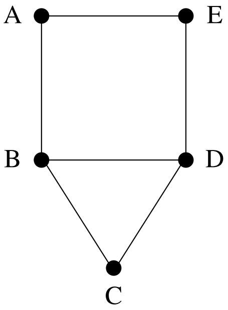


Chaque sommet prend au moins une couleur :

$$a_v \vee a_j \vee a_r$$

Exemple 1

Chaque sommet prend une et une seule couleur



Chaque sommet prend au moins une couleur :

$a_v \vee a_j \vee a_r$

$b_v \vee b_j \vee b_r$

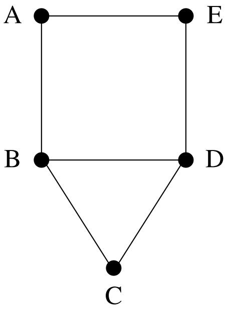
$c_v \vee c_j \vee c_r$

$d_v \vee d_j \vee d_r$

$e_v \vee e_j \vee e_r$

Exemple 1

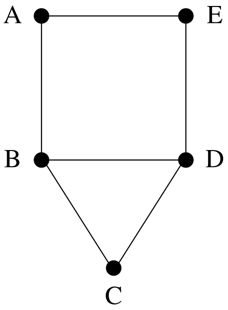
Chaque sommet prend une et une seule couleur



Chaque sommet prend au plus une couleur :

Exemple 1

Chaque sommet prend une et une seule couleur

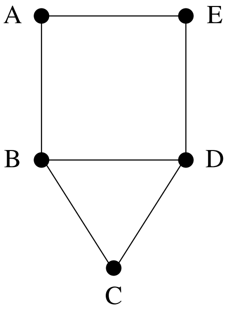


Chaque sommet prend au plus une couleur :

$a_v \rightarrow (\neg a_j \wedge \neg a_r)$

Exemple 1

Chaque sommet prend une et une seule couleur



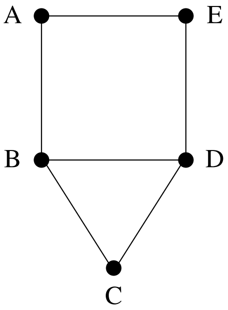
Chaque sommet prend au plus une couleur :

$a_v \rightarrow (\neg a_j \wedge \neg a_r)$

$a_j \rightarrow (\neg a_v \wedge \neg a_r)$

Exemple 1

Chaque sommet prend une et une seule couleur

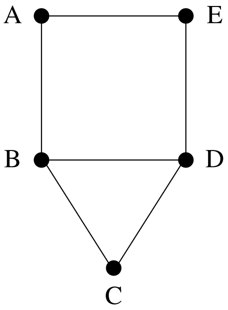


Chaque sommet prend au plus une couleur :

$$a_v \rightarrow (\neg a_j \wedge \neg a_r)$$
$$a_j \rightarrow (\neg a_v \wedge \neg a_r)$$
$$a_r \rightarrow (\neg a_v \wedge \neg a_j)$$

Exemple 1

Chaque sommet prend une et une seule couleur

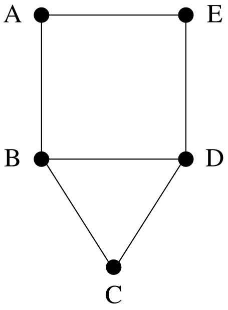


Chaque sommet prend au plus une couleur :

$$a_v \rightarrow (\neg a_j \wedge \neg a_r)$$
$$a_j \rightarrow (\neg a_v \wedge \neg a_r)$$
$$a_r \rightarrow (\neg a_v \wedge \neg a_j)$$
$$b_v \rightarrow (\neg b_j \wedge \neg b_r)$$
$$b_j \rightarrow (\neg b_v \wedge \neg b_r)$$
$$b_r \rightarrow (\neg b_v \wedge \neg b_j)$$
$$\ldots$$

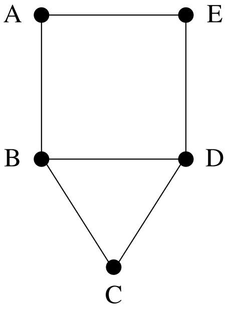
Exemple 1

Des sommets voisins ont des couleurs différentes



Exemple 1

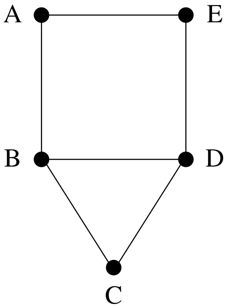
Des sommets voisins ont des couleurs différentes



$$a_v \rightarrow \neg b_v$$

Exemple 1

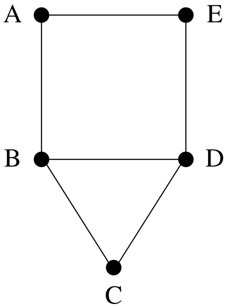
Des sommets voisins ont des couleurs différentes



$$a_v \rightarrow \neg b_v$$
$$a_v \rightarrow \neg e_v$$

Exemple 1

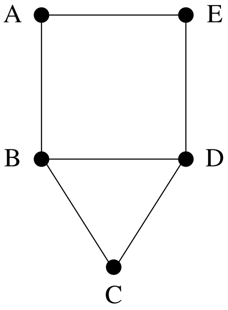
Des sommets voisins ont des couleurs différentes



$$a_v \rightarrow \neg b_v$$
$$a_v \rightarrow \neg e_v$$
$$a_j \rightarrow \neg b_j$$
$$a_j \rightarrow \neg e_j$$

Exemple 1

Des sommets voisins ont des couleurs différentes



$$a_v \rightarrow \neg b_v$$
$$a_v \rightarrow \neg e_v$$
$$a_j \rightarrow \neg b_j$$
$$a_j \rightarrow \neg e_j$$
$$a_r \rightarrow \neg b_r$$
$$a_r \rightarrow \neg e_r$$
$$\ldots$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Variables :

x_{ij} vrai si la variable x_i a pour valeur j

Exemple 2 (Système d'inéquations)

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1, 2\} \\ x_i \in \{1, 2, 3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Variables :

x_{ij} vrai si la variable x_i a pour valeur j

x_{11}, x_{12}, x_{13}

x_{21}, x_{22}, x_{23}

x_{31}, x_{32}

x_{41}, x_{42}, x_{43}

x_{51}, x_{52}, x_{53}

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Chaque variable prend une et une seule valeur

$$
\begin{cases}
x_1 < x_2 \\
x_1 < x_3 \\
x_1 < x_4 \\
x_2 < x_5 \\
x_3 > x_5 \\
x_3 \in \{1, 2\} \\
x_i \in \{1, 2, 3\}, i \neq 3
\end{cases}
$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Chaque variable prend une et une seule valeur

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Chaque variable prend au moins une valeur :

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Chaque variable prend une et une seule valeur

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Chaque variable prend au moins une valeur :

$x_{11} \vee x_{12} \vee x_{13}$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Chaque variable prend une et une seule valeur

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Chaque variable prend au moins une valeur :

$$x_{11} \vee x_{12} \vee x_{13}$$
$$x_{21} \vee x_{22} \vee x_{23}$$
$$x_{31} \vee x_{32}$$
$$x_{41} \vee x_{42} \vee x_{43}$$
$$x_{51} \vee x_{52} \vee x_{53}$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Chaque variable prend une et une seule valeur

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Chaque variable prend au plus une valeur :

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Chaque variable prend une et une seule valeur

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1, 2\} \\ x_i \in \{1, 2, 3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Chaque variable prend au plus une valeur :

$x_{i1} \rightarrow (\neg x_{i2} \wedge \neg x_{i3})$ pour $i \neq 3$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Chaque variable prend une et une seule valeur

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1, 2\} \\ x_i \in \{1, 2, 3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Chaque variable prend au plus une valeur :

$$x_{i1} \rightarrow (\neg x_{i2} \wedge \neg x_{i3}) \text{ pour } i \neq 3$$
$$x_{i2} \rightarrow (\neg x_{i1} \wedge \neg x_{i3})$$
$$x_{i3} \rightarrow (\neg x_{i1} \wedge \neg x_{i2})$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Chaque variable prend une et une seule valeur

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Chaque variable prend au plus une valeur :

$$x_{i1} \rightarrow (\neg x_{i2} \wedge \neg x_{i3}) \text{ pour } i \neq 3$$
$$x_{i2} \rightarrow (\neg x_{i1} \wedge \neg x_{i3})$$
$$x_{i3} \rightarrow (\neg x_{i1} \wedge \neg x_{i2})$$
$$x_{31} \rightarrow \neg x_{32}$$
$$x_{32} \rightarrow \neg x_{31}$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Respect des inéquations

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1, 2\} \\ x_i \in \{1, 2, 3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Respect des inéquations

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1, 2\} \\ x_i \in \{1, 2, 3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Codage des combinaisons valides pour $x_1 < x_2$:

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Respect des inéquations

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1, 2\} \\ x_i \in \{1, 2, 3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Codage des combinaisons valides pour $x_1 < x_2$:

$x_{11} \wedge x_{22}$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Respect des inéquations

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Codage des combinaisons valides pour $x_1 < x_2$:

$x_{11} \wedge x_{22}$

ou

$x_{11} \wedge x_{23}$

ou

$x_{12} \wedge x_{23}$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Respect des inéquations

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1, 2\} \\ x_i \in \{1, 2, 3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Codage des combinaisons interdites pour $x_1 < x_2$:

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Respect des inéquations

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1, 2\} \\ x_i \in \{1, 2, 3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Codage des combinaisons interdites pour $x_1 < x_2$:

$$\neg(x_{11} \wedge x_{21})$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Respect des inéquations

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Codage des combinaisons interdites pour $x_1 < x_2$:

$$\neg(x_{11} \wedge x_{21})$$
$$\neg(x_{12} \wedge x_{21})$$
$$\neg(x_{12} \wedge x_{22})$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Respect des inéquations

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1, 2\} \\ x_i \in \{1, 2, 3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Codage des combinaisons interdites pour $x_1 < x_2$:

$$\neg(x_{11} \wedge x_{21})$$
$$\neg(x_{12} \wedge x_{21})$$
$$\neg(x_{12} \wedge x_{22})$$
$$\neg(x_{13} \wedge x_{21})$$
$$\neg(x_{13} \wedge x_{22})$$
$$\neg(x_{13} \wedge x_{23})$$

Interprétation

Interprétation $I : \mathcal{V} \mapsto \{0, 1\}$

Interprétation

Interprétation $I : \mathcal{V} \mapsto \{0, 1\}$

Généralisation aux formules

Interprétation $I : \mathcal{F} \mapsto \{0, 1\}$

Interprétation

Interprétation $I : \mathcal{V} \mapsto \{0, 1\}$

Généralisation aux formules

Interprétation $I : \mathcal{F} \mapsto \{0, 1\}$

- $I(0) = 0$ et $I(1) = 1$

Interprétation

Interprétation $I : \mathcal{V} \mapsto \{0, 1\}$

Généralisation aux formules

Interprétation $I : \mathcal{F} \mapsto \{0, 1\}$

- $I(0) = 0$ et $I(1) = 1$
- $I(\neg F) = 1$ ssi $I(F) = 0$

Interprétation

Interprétation $I : \mathcal{V} \mapsto \{0,1\}$

Généralisation aux formules

Interprétation $I : \mathcal{F} \mapsto \{0,1\}$

- $I(0) = 0$ et $I(1) = 1$
- $I(\neg F) = 1$ ssi $I(F) = 0$
- $I(F \wedge G) = 1$ ssi $I(F) = 1$ et $I(G) = 1$

Interprétation

Interprétation $I : \mathcal{V} \mapsto \{0,1\}$

Généralisation aux formules

Interprétation $I : \mathcal{F} \mapsto \{0,1\}$

- $I(0) = 0$ et $I(1) = 1$
- $I(\neg F) = 1$ ssi $I(F) = 0$
- $I(F \wedge G) = 1$ ssi $I(F) = 1$ et $I(G) = 1$
- $I(F \vee G) = 1$ ssi $I(F) = 1$ ou $I(G) = 1$

Interprétation

Interprétation complète $=$ interprétation portant sur toutes les variables

Interprétation

Interprétation complète = interprétation portant sur toutes les variables

Interprétation partielle = interprétation portant sur une partie des variables

Modèle

interprétation I satisfait F si $I(F) = 1$

Modèle

interprétation I satisfait F si $I(F) = 1$

I est un modèle de F.

Modèle

interprétation I satisfait F si $I(F) = 1$

I est un modèle de F.

F est consistante si F possède au moins un modèle.

Modèle

interprétation I satisfait F si $I(F) = 1$

I est un modèle de F.

F est consistante si F possède au moins un modèle.

F est inconsistante sinon.

Modèle

interprétation I satisfait F si $I(F) = 1$

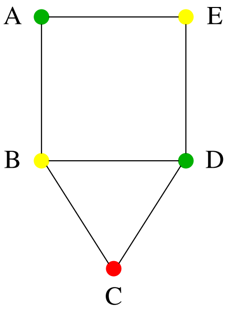
I est un modèle de F.

F est consistante si F possède au moins un modèle.

F est inconsistante sinon.

I satisfait $\mathcal{F}$ si I est un modèle de chaque formule de $\mathcal{F}$.

Exemple 1



Interprétation partielle :

$I(a_v) = 1$

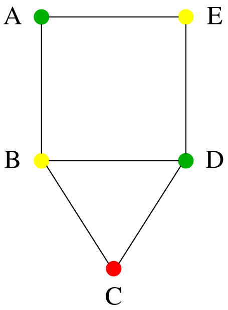
$I(b_j) = 1$

$I(c_r) = 1$

$I(d_v) = 1$

$I(e_j) = 1$

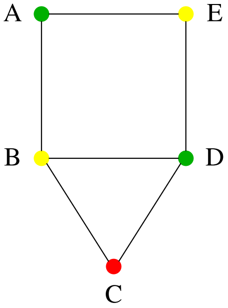
Exemple 1



Interprétation complète :

$$\begin{array}{lll} I(a_v) = 1 & I(a_j) = 0 & I(a_r) = 0 \\ I(b_j) = 1 & I(b_v) = 0 & I(b_r) = 0 \\ I(c_r) = 1 & I(c_v) = 0 & I(d_j) = 0 \\ I(d_v) = 1 & I(d_j) = 0 & I(d_r) = 0 \\ I(e_j) = 1 & I(e_v) = 0 & I(e_r) = 0 \end{array}$$

Exemple 1



Interprétation complète :

$$\begin{array}{lll} I(a_v) = 1 & I(a_j) = 0 & I(a_r) = 0 \\ I(b_j) = 1 & I(b_v) = 0 & I(b_r) = 0 \\ I(c_r) = 1 & I(c_v) = 0 & I(d_j) = 0 \\ I(d_v) = 1 & I(d_j) = 0 & I(d_r) = 0 \\ I(e_j) = 1 & I(e_v) = 0 & I(e_r) = 0 \end{array}$$

I est un modèle

Littéral

Soit v une variable propositionnelle

littéral $=$ v ou sa négation $\neg v$

Littéral

Soit v une variable propositionnelle

littéral $=$ v ou sa négation $\neg v$

littéral positif $=$ v

Littéral

Soit v une variable propositionnelle

littéral $=$ v ou sa négation $\neg v$

littéral positif $= v$

littéral négatif $= \neg v$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

clause = disjonction de littéraux

Forme Normale Conjonctive (CNF)

clause = disjonction de littéraux

arité ou taille d'une clause = nombre de littéraux

Forme Normale Conjonctive (CNF)

clause = disjonction de littéraux

arité ou taille d'une clause = nombre de littéraux

mono-littéral = clause de taille 1

Forme Normale Conjonctive (CNF)

clause = disjonction de littéraux

arité ou taille d'une clause = nombre de littéraux

mono-littéral = clause de taille 1

clause vide $\square$ = clause ne contenant aucun littéral

Forme Normale Conjonctive (CNF)

F est sous forme CNF ssi F est une conjonction de clauses.

Forme Normale Conjonctive (CNF)

F est sous forme CNF ssi F est une conjonction de clauses.

Toute formule de logique propositionnelle peut être réécrite sous forme CNF.

Forme Normale Conjonctive (CNF)

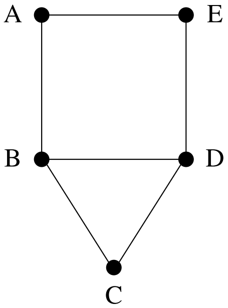
F est sous forme CNF ssi F est une conjonction de clauses.

Toute formule de logique propositionnelle peut être réécrite sous forme CNF.

Une formule CNF F est représentée par l'ensemble de ses clauses.

Exemple 1

Chaque sommet prend une et une seule couleur

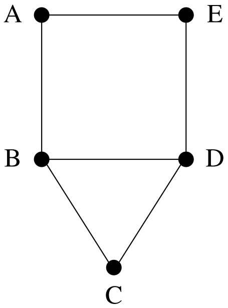


Chaque sommet prend au moins une couleur :

$a_v \vee a_j \vee a_r$
$b_v \vee b_j \vee b_r$
$c_v \vee c_j \vee c_r$
$d_v \vee d_j \vee d_r$
$e_v \vee e_j \vee e_r$

Exemple 1

Chaque sommet prend une et une seule couleur



Chaque sommet prend au moins une couleur :

$a_v \vee a_j \vee a_r$

$b_v \vee b_j \vee b_r$

$c_v \vee c_j \vee c_r$

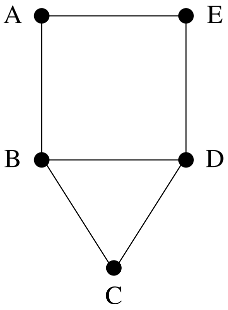
$d_v \vee d_j \vee d_r$

$e_v \vee e_j \vee e_r$

Déjà sous forme clausale !

Exemple 1

Chaque sommet prend une et une seule couleur

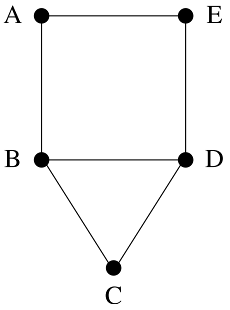


Chaque sommet prend au plus une couleur :

$$a_v \rightarrow (\neg a_j \wedge \neg a_r)$$

Exemple 1

Chaque sommet prend une et une seule couleur



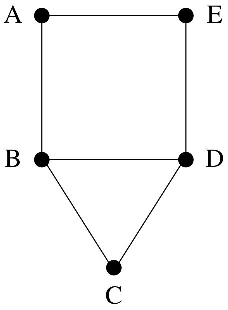
Chaque sommet prend au plus une couleur :

$a_v \rightarrow (\neg a_j \wedge \neg a_r)$

$\neg a_v \vee (\neg a_j \wedge \neg a_r)$

Exemple 1

Chaque sommet prend une et une seule couleur



Chaque sommet prend au plus une couleur :

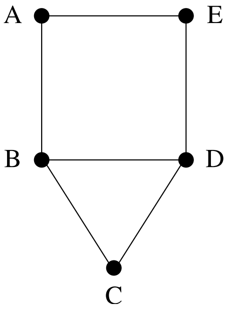
$a_v \rightarrow (\neg a_j \wedge \neg a_r)$

$\neg a_v \vee (\neg a_j \wedge \neg a_r)$

$(\neg a_v \vee \neg a_j) \wedge (\neg a_v \vee \neg a_r)$

Exemple 1

Chaque sommet prend une et une seule couleur



Chaque sommet prend au plus une couleur :

$a_v \rightarrow (\neg a_j \wedge \neg a_r)$

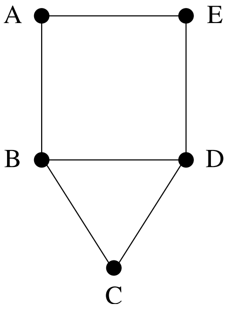
$\neg a_v \vee (\neg a_j \wedge \neg a_r)$

$(\neg a_v \vee \neg a_j) \wedge (\neg a_v \vee \neg a_r)$

$(\neg a_j \vee \neg a_r)$

Exemple 1

Chaque sommet prend une et une seule couleur



Chaque sommet prend au plus une couleur :

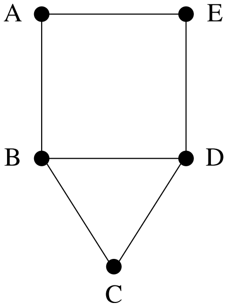
$$a_v \rightarrow (\neg a_j \wedge \neg a_r)$$
$$\neg a_v \vee (\neg a_j \wedge \neg a_r)$$
$$(\neg a_v \vee \neg a_j) \wedge (\neg a_v \vee \neg a_r)$$

$$(\neg a_j \vee \neg a_r)$$

$$(\neg b_v \vee \neg b_j)$$
$$(\neg b_v \vee \neg b_r)$$
$$(\neg b_j \vee \neg b_r)$$
$$\ldots$$

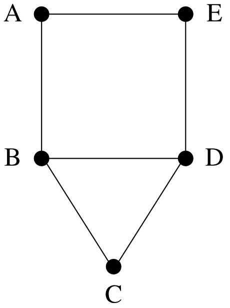
Exemple 1

Des sommets voisins ont des couleurs différentes



Exemple 1

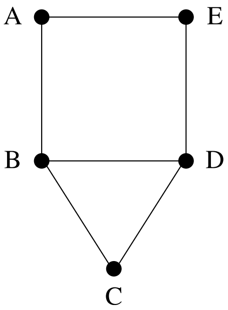
Des sommets voisins ont des couleurs différentes



$$a_v \rightarrow \neg b_v \Rightarrow \neg a_v \vee \neg b_v$$

Exemple 1

Des sommets voisins ont des couleurs différentes

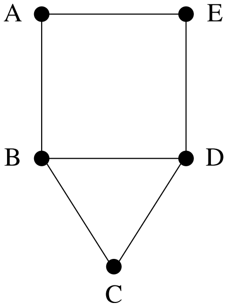


$$a_v \rightarrow \neg b_v \Rightarrow \neg a_v \vee \neg b_v$$

$$\neg a_v \vee \neg e_v$$

Exemple 1

Des sommets voisins ont des couleurs différentes



$$a_v \to \neg b_v \Rightarrow \neg a_v \vee \neg b_v$$

$$\neg a_v \vee \neg e_v$$

$$\neg a_j \vee \neg b_j$$
$$\neg a_j \vee \neg e_j$$
$$\neg a_r \vee \neg b_r$$
$$\neg a_r \vee \neg e_r$$
$$\ldots$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Chaque variable prend une et une seule valeur

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1, 2\} \\ x_i \in \{1, 2, 3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Chaque variable prend au moins une valeur :

$$x_{11} \vee x_{12} \vee x_{13}$$
$$x_{21} \vee x_{22} \vee x_{23}$$
$$x_{31} \vee x_{32}$$
$$x_{41} \vee x_{42} \vee x_{43}$$
$$x_{51} \vee x_{52} \vee x_{53}$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Chaque variable prend une et une seule valeur

$$
\begin{cases}
x_1 < x_2 \\
x_1 < x_3 \\
x_1 < x_4 \\
x_2 < x_5 \\
x_3 > x_5 \\
x_3 \in \{1, 2\} \\
x_i \in \{1, 2, 3\}, i \neq 3
\end{cases}
$$

Chaque variable prend au moins une valeur :

$$x_{11} \vee x_{12} \vee x_{13}$$
$$x_{21} \vee x_{22} \vee x_{23}$$
$$x_{31} \vee x_{32}$$
$$x_{41} \vee x_{42} \vee x_{43}$$
$$x_{51} \vee x_{52} \vee x_{53}$$

Déjà sous forme clausale !

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Chaque variable prend une et une seule valeur

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Chaque variable prend au plus une valeur :

$x_{i1} \rightarrow (\neg x_{i2} \wedge \neg x_{i3})$ pour $i \neq 3$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Chaque variable prend une et une seule valeur

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Chaque variable prend au plus une valeur :

$x_{i1} \rightarrow (\neg x_{i2} \wedge \neg x_{i3})$ pour $i \neq 3$

$\Rightarrow \neg x_{i1} \vee (\neg x_{i2} \wedge \neg x_{i3})$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Chaque variable prend une et une seule valeur

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Chaque variable prend au plus une valeur :

$$x_{i1} \rightarrow (\neg x_{i2} \wedge \neg x_{i3}) \text{ pour } i \neq 3$$

$$\Rightarrow \neg x_{i1} \vee (\neg x_{i2} \wedge \neg x_{i3})$$

$$\Rightarrow (\neg x_{i1} \vee \neg x_{i2}) \wedge (\neg x_{i1} \vee \neg x_{i3})$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Chaque variable prend une et une seule valeur

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Chaque variable prend au plus une valeur :

$$x_{i1} \rightarrow (\neg x_{i2} \wedge \neg x_{i3}) \text{ pour } i \neq 3$$

$$\Rightarrow \neg x_{i1} \vee (\neg x_{i2} \wedge \neg x_{i3})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ & (\neg x_{i1} \vee \neg x_{i2}) \wedge (\neg x_{i1} \vee \neg x_{i3}) \\ & (\neg x_{i2} \vee \neg x_{i1}) \wedge (\neg x_{i2} \vee \neg x_{i3}) \\ & (\neg x_{i3} \vee \neg x_{i1}) \wedge (\neg x_{i3} \vee \neg x_{i2}) \end{aligned}$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Chaque variable prend une et une seule valeur

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Chaque variable prend au plus une valeur :

$$x_{i1} \rightarrow (\neg x_{i2} \wedge \neg x_{i3}) \text{ pour } i \neq 3$$

$$\Rightarrow \neg x_{i1} \vee (\neg x_{i2} \wedge \neg x_{i3})$$

$$\Rightarrow (\neg x_{i1} \vee \neg x_{i2}) \wedge (\neg x_{i1} \vee \neg x_{i3})$$

$$(\neg x_{i2} \vee \neg x_{i1}) \wedge (\neg x_{i2} \vee \neg x_{i3})$$

$$(\neg x_{i3} \vee \neg x_{i1}) \wedge (\neg x_{i3} \vee \neg x_{i2})$$

$$x_{31} \rightarrow \neg x_{32} \Rightarrow \neg x_{31} \vee \neg x_{32}$$

$$x_{32} \rightarrow \neg x_{31} \Rightarrow \neg x_{32} \vee \neg x_{31}$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Chaque variable prend une et une seule valeur

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Chaque variable prend au plus une valeur :

$$x_{i1} \rightarrow (\neg x_{i2} \wedge \neg x_{i3}) \text{ pour } i \neq 3$$

$$\Rightarrow \neg x_{i1} \vee (\neg x_{i2} \wedge \neg x_{i3})$$

$$\Rightarrow (\neg x_{i1} \vee \neg x_{i2}) \wedge (\neg x_{i1} \vee \neg x_{i3})$$

$$(\neg x_{i2} \vee \neg x_{i1}) \wedge (\neg x_{i2} \vee \neg x_{i3})$$

$$(\neg x_{i3} \vee \neg x_{i1}) \wedge (\neg x_{i3} \vee \neg x_{i2})$$

$$x_{31} \rightarrow \neg x_{32} \Rightarrow \neg x_{31} \vee \neg x_{32}$$

$$x_{32} \rightarrow \neg x_{31} \Rightarrow \neg x_{32} \vee \neg x_{31}$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Respect des inéquations

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Codage des combinaisons valides pour $x_1 < x_2$:

$x_{11} \wedge x_{22}$

ou

$x_{11} \wedge x_{23}$

ou

$x_{12} \wedge x_{23}$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Respect des inéquations

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Codage des combinaisons valides pour $x_1 < x_2$:

$x_{11} \wedge x_{22}$

ou

$x_{11} \wedge x_{23}$

ou

$x_{12} \wedge x_{23}$

Difficile à faire

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Respect des inéquations

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Codage des combinaisons interdites pour $x_1 < x_2$:

$$\neg(x_{11} \wedge x_{21})$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Respect des inéquations

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1, 2\} \\ x_i \in \{1, 2, 3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Codage des combinaisons interdites pour $x_1 < x_2$:

$$\neg(x_{11} \wedge x_{21}) \Rightarrow \neg x_{11} \vee \neg x_{21}$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Respect des inéquations

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1, 2\} \\ x_i \in \{1, 2, 3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Codage des combinaisons interdites pour $x_1 < x_2$:

$$\neg(x_{11} \wedge x_{21}) \Rightarrow \neg x_{11} \vee \neg x_{21}$$
$$\neg(x_{12} \wedge x_{21}) \Rightarrow \neg x_{12} \vee \neg x_{21}$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Respect des inéquations

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1, 2\} \\ x_i \in \{1, 2, 3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Codage des combinaisons interdites pour $x_1 < x_2$:

$$\neg(x_{11} \wedge x_{21}) \Rightarrow \neg x_{11} \vee \neg x_{21}$$
$$\neg(x_{12} \wedge x_{21}) \Rightarrow \neg x_{12} \vee \neg x_{21}$$
$$\neg(x_{12} \wedge x_{22}) \Rightarrow \neg x_{12} \vee \neg x_{22}$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Respect des inéquations

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Codage des combinaisons interdites pour $x_1 < x_2$:

$$\neg(x_{11} \wedge x_{21}) \Rightarrow \neg x_{11} \vee \neg x_{21}$$
$$\neg(x_{12} \wedge x_{21}) \Rightarrow \neg x_{12} \vee \neg x_{21}$$
$$\neg(x_{12} \wedge x_{22}) \Rightarrow \neg x_{12} \vee \neg x_{22}$$
$$\neg(x_{13} \wedge x_{21}) \Rightarrow \neg x_{13} \vee \neg x_{21}$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Respect des inéquations

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1,2\} \\ x_i \in \{1,2,3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Codage des combinaisons interdites pour $x_1 < x_2$:

$$\neg(x_{11} \wedge x_{21}) \Rightarrow \neg x_{11} \vee \neg x_{21}$$
$$\neg(x_{12} \wedge x_{21}) \Rightarrow \neg x_{12} \vee \neg x_{21}$$
$$\neg(x_{12} \wedge x_{22}) \Rightarrow \neg x_{12} \vee \neg x_{22}$$
$$\neg(x_{13} \wedge x_{21}) \Rightarrow \neg x_{13} \vee \neg x_{21}$$
$$\neg(x_{13} \wedge x_{22}) \Rightarrow \neg x_{13} \vee \neg x_{22}$$

Exemple 2 (Système d'inéquations)

Respect des inéquations

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_3 \\ x_1 < x_4 \\ x_2 < x_5 \\ x_3 > x_5 \\ x_3 \in \{1, 2\} \\ x_i \in \{1, 2, 3\}, i \neq 3 \end{cases}$$

Codage des combinaisons interdites pour $x_1 < x_2$:

$$\begin{array}{l}
\neg(x_{11} \wedge x_{21}) \Rightarrow \neg x_{11} \vee \neg x_{21} \\
\neg(x_{12} \wedge x_{21}) \Rightarrow \neg x_{12} \vee \neg x_{21} \\
\neg(x_{12} \wedge x_{22}) \Rightarrow \neg x_{12} \vee \neg x_{22} \\
\neg(x_{13} \wedge x_{21}) \Rightarrow \neg x_{13} \vee \neg x_{21} \\
\neg(x_{13} \wedge x_{22}) \Rightarrow \neg x_{13} \vee \neg x_{22} \\
\neg(x_{13} \wedge x_{23}) \Rightarrow \neg x_{13} \vee \neg x_{23}
\end{array}$$

Le problème SAT

Problème de décision :

- Donnée : une formule CNF F
- Question : F possède-t-elle un modèle ?

Le problème SAT

Problème de décision :

- Donnée : une formule CNF F
- Question : F possède-t-elle un modèle ?

k-SAT $=$ problème SAT pour lequel chaque clause est de taille au plus k.

Plan

Algorithme de Quine

Principe :

- on construit progressivement une interprétation

Algorithme de Quine

Principe :

- on construit progressivement une interprétation
- en cas d'échec, on change la valeur de la variable courante

Algorithme de Quine

Principe :

- on construit progressivement une interprétation
- en cas d'échec, on change la valeur de la variable courante
- s'il n'y a plus de valeur, on revient sur la variable précédente

Algorithme de Quine

Principe :

- on construit progressivement une interprétation
- en cas d'échec, on change la valeur de la variable courante
- s'il n'y a plus de valeur, on revient sur la variable précédente
- on réitère le procédé tant qu'on n'a pas trouvé un modèle et qu'on n'a pas essayé toutes les possibilités

Algorithme de Quine

Principe :

- on construit progressivement une interprétation
- en cas d'échec, on change la valeur de la variable courante
- s'il n'y a plus de valeur, on revient sur la variable précédente
- on réitère le procédé tant qu'on n'a pas trouvé un modèle et qu'on n'a pas essayé toutes les possibilités

Complexité : $O(2^n)$

Algorithme de Quine

Quine($\mathcal{V}, \mathcal{C}$)

Si $\mathcal{C} = \emptyset$ **Alors** Retourner 1
Sinon
  Si $\square \in \mathcal{C}$ **Alors** Retourner 0
  Sinon
    Choisir $x \in \mathcal{V}$
    Retourner Quine($\mathcal{V} - \{x\}, \mathcal{C} \cup \{x\}$) $\vee$ Quine($\mathcal{V} - \{x\}, \mathcal{C} \cup \{\neg x\}$)

Algorithme de Quine

Quine($\mathcal{V}, \mathcal{C}$)

Si $\mathcal{C} = \emptyset$ **Alors** Retourner 1
Sinon
  Si $\square \in \mathcal{C}$ **Alors** Retourner 0
  Sinon
    Choisir $x \in \mathcal{V}$
    Retourner Quine($\mathcal{V} - \{x\}, \mathcal{C} \cup \{x\}$) $\vee$ Quine($\mathcal{V} - \{x\}, \mathcal{C} \cup \{\neg x\}$)

$\mathcal{C} \cup \{x\}$

- on retire de $\mathcal{C}$ toutes les clauses contenant x
- on enlève $\neg x$ de toutes les clauses de $\mathcal{C}$

Exemple

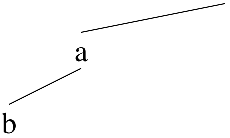
$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$

a

$\{d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$

Exemple

$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$

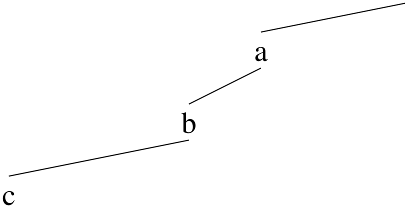


$\{d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$

$\{d \vee \neg e, e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$

Exemple

$$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

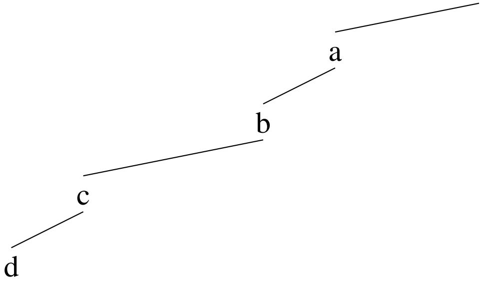


$$\{d \vee \neg e, e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

$$\{d \vee \neg e, e \vee f, \neg d \vee \neg e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

Exemple

$$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

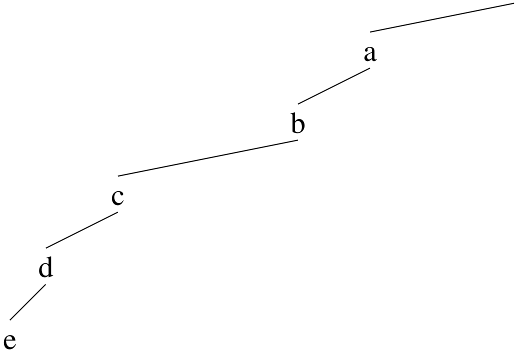


$$\{d \vee \neg e, e \vee f, \neg d \vee \neg e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

$$\{e \vee f, \neg e, f, e \vee \neg f\}$$

Exemple

$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$

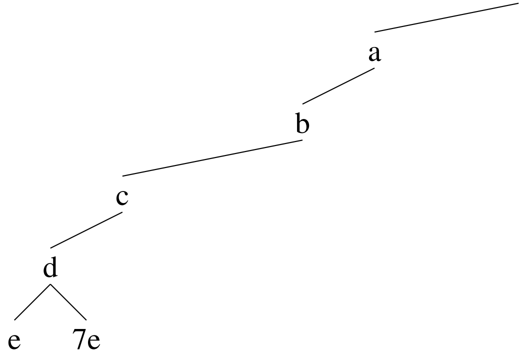


$\{e \vee f, \neg e, f, e \vee \neg f\}$

$\{\Box, f\}$

Exemple

$$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

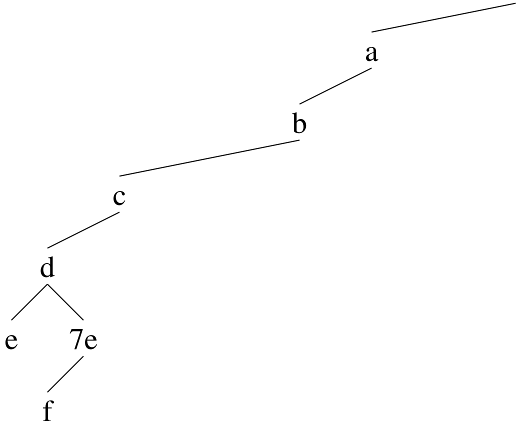


$$\{e \vee f, \neg e, f, e \vee \neg f\}$$

$$\{f, \neg f\}$$

Exemple

$$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

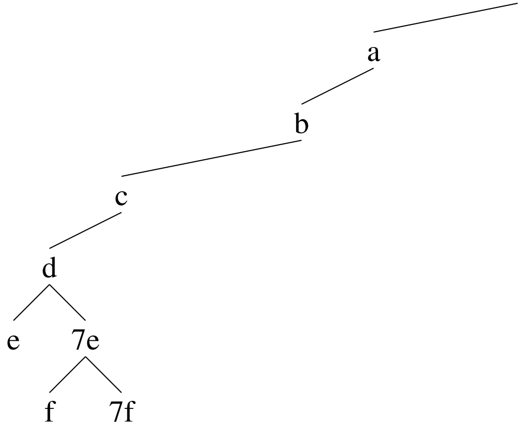


$$\{f, \neg f\}$$

$$\{\square\}$$

Exemple

$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$

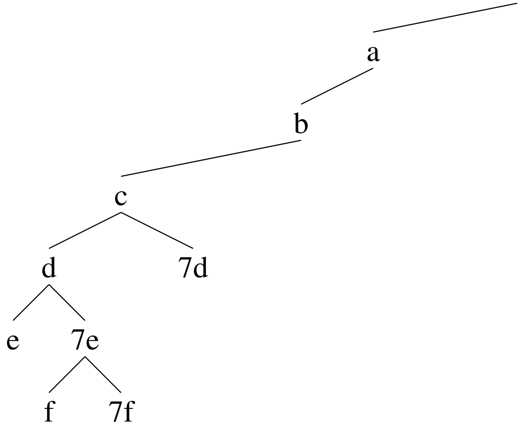


$\{f, \neg f\}$

$\{\square\}$

Exemple

$$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

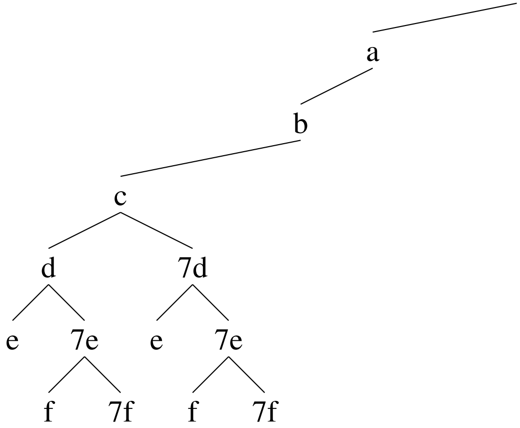


$$\{d \vee \neg e, e \vee f, \neg d \vee \neg e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

$$\{\neg e, e \vee f, e \vee \neg f\}$$

Exemple

$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$

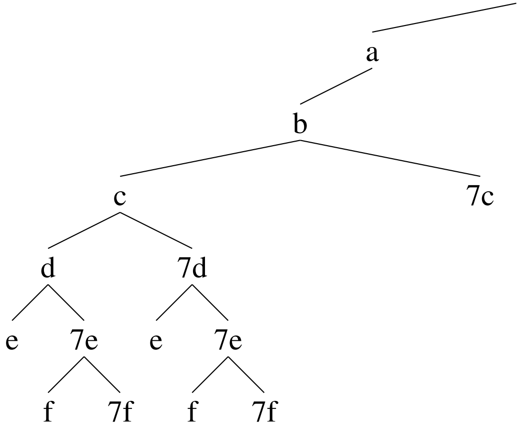


$\{\neg e, e \vee f, e \vee \neg f\}$

$\{\square\}$

Exemple

$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$

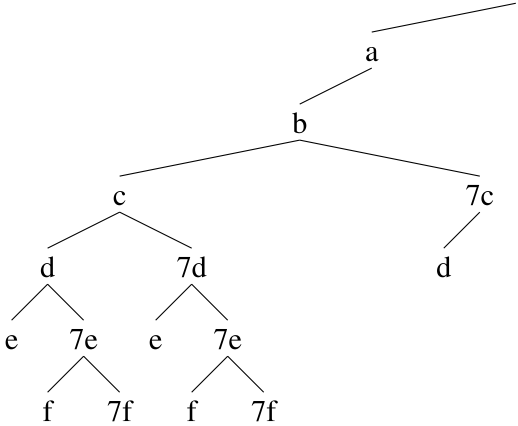


$\{d \vee \neg e, e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$

$\{d \vee \neg e, e \vee f, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$

Exemple

$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$

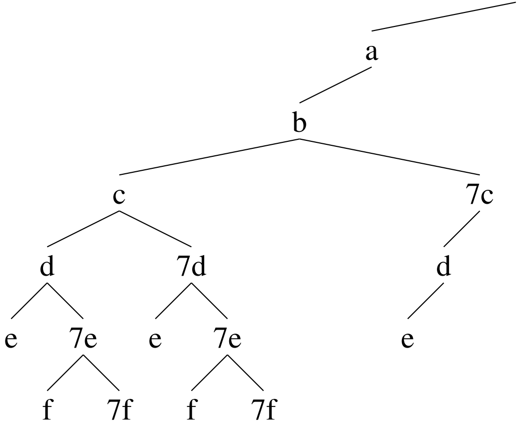


$\{d \vee \neg e, e \vee f, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$

$\{e \vee f, f, e \vee \neg f\}$

Exemple

$$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

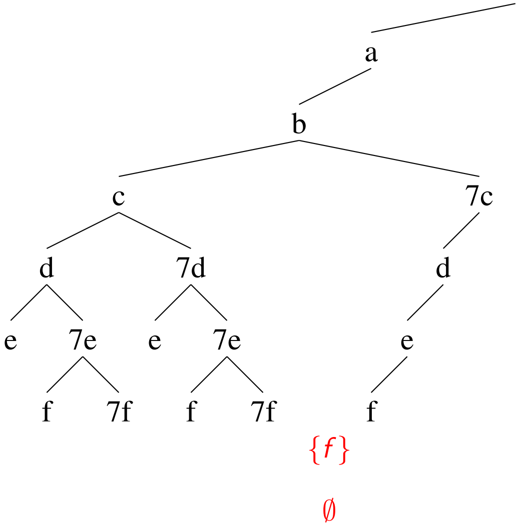


$$\color{red}\{e \vee f, f, e \vee \neg f\}$$

$$\color{red}\{f\}$$

Exemple

$$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$



Algorithme Davis-Putnam-Logemann-Loveland (DPLL)

Une version améliorée de l'algorithme de Quine

Algorithme Davis-Putnam-Logemann-Loveland (DPLL)

Une version améliorée de l'algorithme de Quine

Idée : réduire le nombre de points de choix

Algorithme Davis-Putnam-Logemann-Loveland (DPLL)

Une version améliorée de l'algorithme de Quine

Idée : réduire le nombre de points de choix

Mise en œuvre :

- exploitation des mono-littéraux
- exploitation des littéraux purs

Algorithme Davis-Putnam-Logemann-Loveland (DPLL)

- exploitation des mono-littéraux :

  si on a un mono-littéral ℓ pour la variable x_ℓ :

  - on instancie x_ℓ à 1 si $\ell = x_\ell$
  - on instancie x_ℓ à 0 si $\ell = \neg x_\ell$

Algorithme Davis-Putnam-Logemann-Loveland (DPLL)

- exploitation des mono-littéraux :

  si on a un mono-littéral ℓ pour la variable x_ℓ :

  - on instancie x_ℓ à 1 si $\ell = x_\ell$
  - on instancie x_ℓ à 0 si $\ell = \neg x_\ell$

- exploitation des littéraux purs :

  littéral pur = littéral n'apparaissant que sous une seule forme (positive ou négative)

Algorithme Davis-Putnam-Logemann-Loveland (DPLL)

- exploitation des mono-littéraux :

  si on a un mono-littéral ℓ pour la variable x_ℓ :

  - on instancie x_ℓ à 1 si $\ell = x_\ell$
  - on instancie x_ℓ à 0 si $\ell = \neg x_\ell$

- exploitation des littéraux purs :

  littéral pur = littéral n'apparaissant que sous une seule forme (positive ou négative)

  si on a littéral pur ℓ pour la variable x_ℓ :

  - on instancie x_ℓ à 1 si $\ell = x_\ell$
  - on instancie x_ℓ à 0 si $\ell = \neg x_\ell$

Algorithme Davis-Putnam-Logemann-Loveland (DPLL)

DPLL($\mathcal{V}, \mathcal{C}$)

Si $\mathcal{C} = \emptyset$ **Alors** Retourner 1
Sinon
  Si $\square \in \mathcal{C}$ **Alors** Retourner 0
  Sinon
    S'il existe un mono-littéral ou un littéral pur ℓ
    Retourner DPLL($\mathcal{V} - \{x_\ell\}, \mathcal{C} \cup \{\ell\}$)
    Sinon
      Choisir $x \in \mathcal{V}$
      Retourner DPLL($\mathcal{V} - \{x\}, \mathcal{C} \cup \{x\}$) $\vee$ DPLL($\mathcal{V} - \{x\}, \mathcal{C} \cup \{\neg x\}$)

Exemple

$$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

a

$$\{d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

Exemple

$$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

a

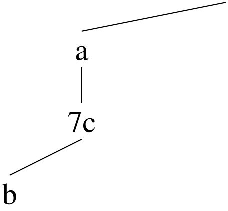
7c

$$\{d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

$$\{d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

Exemple

$$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

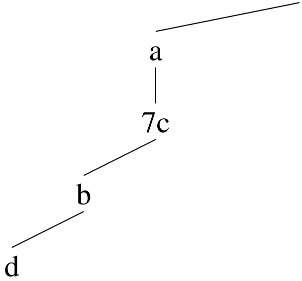


$$\{d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

$$\{d \vee \neg e, e \vee f, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

Exemple

$$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

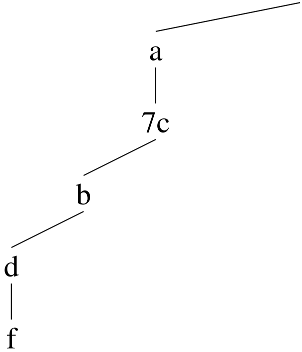


$$\{d \vee \neg e, e \vee f, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

$$\{e \vee f, f, e \vee \neg f\}$$

Exemple

$$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$

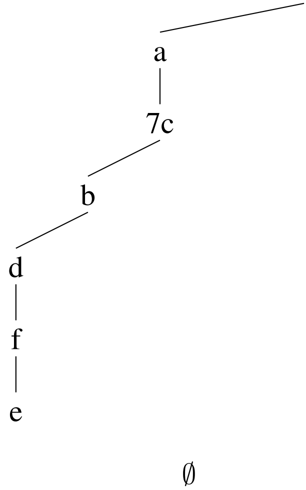


$$\{e \vee f, f, e \vee \neg f\}$$

$$\{e\}$$

Exemple

$$\{a \vee b \vee c, \neg a \vee d \vee \neg e, \neg b \vee e \vee f, \neg c \vee \neg d \vee \neg e, b \vee e, \neg d \vee f, e \vee \neg f\}$$



Améliorations

- Retour arrière intelligent / apprentissage,
- Redémarrages,
- Structures de données

Retour arrière intelligent / apprentissage

Analyse des conflits $\rightarrow$ production de clauses de conflits

Retour arrière intelligent / apprentissage

Analyse des conflits $\rightarrow$ production de clauses de conflits

Plusieurs techniques d'analyse possibles

Retour arrière intelligent / apprentissage

Analyse des conflits $\rightarrow$ production de clauses de conflits

Plusieurs techniques d'analyse possibles

Mémorisation de clauses

Retour arrière intelligent / apprentissage

Analyse des conflits $\rightarrow$ production de clauses de conflits

Plusieurs techniques d'analyse possibles

Mémorisation de clauses

Limitation du nombre de clauses apprises

Redémarrages

À effectuer quand la recherche s'éternise

Redémarrages

À effectuer quand la recherche s'éternise

Détection basée sur le nombre d'échecs

Redémarrages

À effectuer quand la recherche s'éternise

Détection basée sur le nombre d'échecs

Conservation d'une partie des clauses apprises

Redémarrages

À effectuer quand la recherche s'éternise

Détection basée sur le nombre d'échecs

Conservation d'une partie des clauses apprises

Introduction d'aléas

Redémarrages

À effectuer quand la recherche s'éternise

Détection basée sur le nombre d'échecs

Conservation d'une partie des clauses apprises

Introduction d'aléas

Problème de terminaison

Structures de données

Nécessité d'avoir des structures adéquates

Structures de données

Nécessité d'avoir des structures adéquates

Notamment pour la propagation unitaire

Structures de données

Nécessité d'avoir des structures adéquates

Notamment pour la propagation unitaire

Notion de littéral gardé

Structures de données

Nécessité d'avoir des structures adéquates

Notamment pour la propagation unitaire

Notion de littéral gardé

$a \vee \neg b \vee c \vee \neg d$

Structures de données

Nécessité d'avoir des structures adéquates

Notamment pour la propagation unitaire

Notion de littéral gardé

$\underline{a} \vee \neg b \vee c \vee \underline{\neg d}$

Structures de données

Nécessité d'avoir des structures adéquates

Notamment pour la propagation unitaire

Notion de littéral gardé

$a \vee \underline{\neg b} \vee c \vee \underline{\neg d}$ $\qquad I(a) = 0$

Structures de données

Nécessité d'avoir des structures adéquates

Notamment pour la propagation unitaire

Notion de littéral gardé

$a \vee \neg b \vee \underline{c} \vee \underline{\neg d}$ $\qquad I(a) = 0,\ I(b) = 1$

Structures de données

Nécessité d'avoir des structures adéquates

Notamment pour la propagation unitaire

Notion de littéral gardé

$a \vee \neg b \vee \underline{c} \vee \underline{\neg d}$ $\qquad I(a) = 0,\ I(b) = 1,\ I(d) = 1$

Structures de données

Nécessité d'avoir des structures adéquates

Notamment pour la propagation unitaire

Notion de littéral gardé

$a \vee \neg b \vee \underline{c} \vee \underline{\neg d}$ $\qquad I(a) = 0,\ I(b) = 1,\ I(d) = 1 \Rightarrow I(c) = 1$

Structures de données

Nécessité d'avoir des structures adéquates

Notamment pour la propagation unitaire

Notion de littéral gardé

$a \vee \neg b \vee \underline{c} \vee \underline{\neg d}$

Du point de vue pratique

Il existe de nombreux solveurs :

- Posit, Satz, zChaff,
- LySat, Minisat, Sat4J, Glucose, Lingeling,
- Satzilla,
- ...

Du point de vue pratique

Il existe de nombreux solveurs :

- Posit, Satz, zChaff,
- LySat, Minisat, Sat4J, Glucose, Lingeling,
- Satzilla,
- ...

Pour une comparaison expérimentale, voir le site des compétitions (http://www.satcompetition.org/)

Plan

Méthodes incomplètes

- Algorithme du British Museum
- Hill-Climbing
- Recherche taboue
- Recuit simulé
- Algorithmes génétiques
- Réparation locale

Méthodes incomplètes

Par rapport aux CSP, on remplace :

- les affectations par des interprétations

Méthodes incomplètes

Par rapport aux CSP, on remplace :

- les affectations par des interprétations
- les solutions par des modèles

Méthodes incomplètes

Par rapport aux CSP, on remplace :

- les affectations par des interprétations
- les solutions par des modèles

Interprétation voisine de I : une interprétation dont la valeur d'une variable diffère par rapport à I

Méthodes incomplètes

Par rapport aux CSP, on remplace :

- les affectations par des interprétations
- les solutions par des modèles

Interprétation voisine de I : une interprétation dont la valeur d'une variable diffère par rapport à I

Le critère de proximité s'exprime en terme de nombre de clauses non satisfaites.

WalkSat

A chaque étape :

- choix aléatoire d'une clause c non satisfaite,
- choix d'une variable x de c à changer de valeur
- changement de la valeur de x

WalkSat

A chaque étape :

- choix aléatoire d'une clause c non satisfaite,
- choix d'une variable x de c à changer de valeur
- changement de la valeur de x

Choix de la variable selon une probabilité :

- soit celle dont le changement satisfait le plus de clauses
- soit aléatoire

Plan

Comparaisons SAT - CSP

Deux formalismes très proches

Comparaisons SAT - CSP

Deux formalismes très proches

Intérêts de SAT :

- un formalisme simple

Comparaisons SAT - CSP

Deux formalismes très proches

Intérêts de SAT :

- un formalisme simple
- aucune différence dans la représentation des clauses selon leur arité

Comparaisons SAT - CSP

Deux formalismes très proches

Intérêts de SAT :

- un formalisme simple
- aucune différence dans la représentation des clauses selon leur arité
- un problème important pour la logique du premier ordre

Comparaisons SAT - CSP

Deux formalismes très proches

Intérêts de SAT :

- un formalisme simple
- aucune différence dans la représentation des clauses selon leur arité
- un problème important pour la logique du premier ordre

Intérêts de CSP :

- une expression plus concise des problèmes

Comparaisons SAT - CSP

Deux formalismes très proches

Intérêts de SAT :

- un formalisme simple
- aucune différence dans la représentation des clauses selon leur arité
- un problème important pour la logique du premier ordre

Intérêts de CSP :

- une expression plus concise des problèmes
- le pouvoir d'expression des contraintes

Comparaisons SAT - CSP

Résolution :

- Quine et BT sont équivalents
- DPLL et FC sont équivalents

Comparaisons SAT - CSP

Résolution :

- Quine et BT sont équivalents
- DPLL et FC sont équivalents

Possibilité d'adapter la plupart des techniques