Algorithmique et Recherche Opérationnelle (ARO)

Site : Luminy et Saint Jérôme
Examen du second semestre, durée : 2h
Documents autorisés : notes de cours, TD, TP

1 Méthode simplex (6 points)

On se donne le programme linéaire (P_1) suivant :

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{Maximiser} & 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{sous les contraintes} & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
 & & & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & & & \leq & 3 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Question 1. (4 pts) Résoudre (P_1) par l'algorithme du simplex.

Question 2. (2 pts) Justifier l'optimalité de la solution trouvée en utilisant la solution duale extraite du dernier dictionnaire ou calculer lors de la dernière itération de la méthode simplex matricielle.

2 Dualité (3 points)

Considérons le programme linéaire suivant.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & + & 2x_4 & & \\
 & & & & & & & & & \\
\text{sous les contraintes} & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 1 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 1 \\
 & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Question 1. Ecrire son programme linéaire dual.

Question 2. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, déterminer si la solution $(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ est une solution optimale du programme linéaire primal.

3 Flot maximum avec multiplicateurs (3 points)

Étant donné un réseau (S, A, c, m, s, t) où S est un ensemble de sommets, A est un ensemble d'arcs, pour tout arc $ij \in A$, c_{ij} est la capacité de l'arc ij et m_{ij} son multiplicateur, $s \in S$ est la source du flot et $t \in S$ sa destination. Un problème de flot avec multiplicateurs se distingue d'un problème de flot classique par le fait que la quantité de flot qui sort d'un arc ij est égal à la quantité de flot qui entre dans l'arc ij multipliée par m_{ij}. Si $m_{ij} < 1$ (resp. $m_{ij} > 1$) la quantité de flot qui sort de l'arc ij est inférieure (resp. supérieure) à la quantité de flot qui entre dans cet arc. Si $m_{ij} = 1$ pour tout arc $ij \in A$ alors on obtient un problème de flot classique (sans multiplicateur). Le problème de flot maximum avec multiplicateurs consiste à trouver un flot avec multiplicateurs entre s et t tel que la somme des valeurs des flots qui arrivent dans le sommet destination t est maximum.

Question 1. En adaptant la formulation du problème de flot maximum vu en cours, formuler le problème de flot maximum avec multiplicateurs en tant que programme linéaire (indication : vous pourrez utiliser pour chaque arc ij un variable x_{ij} qui représente la quantité de flot qui entre dans l'arc ij).

4 Un problème de change (3 points)

Un investisseur dispose de 100000 euros qu'il souhaite échanger contre des dollars. Pour cela, il dispose des possibilités de changes résumées dans le tableau suivant. Il peut subdiviser ce montant, utiliser des devises intermédiaires et faire autant d'opérations de changes qu'il le souhaitent à condition de ne pas dépasser le montant maximum de chacune des opérations de changes.

66,7 roupies	contre 1 dollar	(au plus 5000 dollars)
113,4 yens	contre 1 dollar	(au plus 4000 dollars)
0,015 dollars	contre 1 roupie	(au plus 50000 roupies)
126,8 yens	contre 1 euro	(au plus 7000 euros)
75,96 roubles	contre 1 euro	(au plus 5000 euros)
0,59 roupies	contre 1 yen	(au plus 50000 yens)
0,0079 euros	contre 1 yen	(au plus 60000 yens)
0,60 rouble	contre 1 yen	(au plus 60000 yens)
0,0147 dollar	contre 1 rouble	(au plus 30000 roubles)
1,67 yen	contre 1 rouble	(au plus 40000 roubles)

Question 1. Construire le graphe orienté des échanges de devises

Question 2. Formuler le problème de maximiser le montant en dollars qu'il peut obtenir à partir des 100000 euros comme un problème de flot maximum avec multiplicateurs. Vous préciserez l'ensemble des sommets du graphe, l'ensemble des arcs avec leurs multiplicateurs et leurs capacités, ainsi que la source et la destination du flot.