Devoir Maison—Etats quantique, intrication et applications

Exercice 1.1:

La matrice de permutation que l'on cherche est une matrice unitaire U de taille 4x4 qui transforme le produit tensoriel de deux qubits dans la base de calcul $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ comme suit:

$U: |a\rangle \otimes |a\rangle \rightarrow |a\rangle \otimes |\bar{a}\rangle$

où $\bar{a}$ représente l'opération NOT appliquée à a.

Nous pouvons écrire les qubits $|a\rangle$ et $|\bar{a}\rangle$ en termes de la base de calcul comme suit:

$|a\rangle = a|0\rangle + (1-a)|1\rangle$
$|\bar{a}\rangle = (1-a)|0\rangle + a|1\rangle$

Le produit tensoriel de ces deux qubits peut être écrit comme:

$|a\rangle \otimes |\bar{a}\rangle = a|0\rangle \otimes (1-a)|0\rangle + a|0\rangle \otimes a|1\rangle + (1-a)|1\rangle \otimes (1-a)|0\rangle + (1-a)|1\rangle \otimes a|1\rangle$

Nous pouvons donc définir une matrice unitaire U qui opère sur cet état de la façon suivante:

$U = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 11| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 01|$

$U|a\rangle \otimes |\bar{a}\rangle = U(a|00\rangle + (1-a)|11\rangle) = a|00\rangle + (1-a)|01\rangle = |a\rangle \otimes |\bar{a}\rangle$

Ainsi, U est bien la matrice de permutation unitaire recherchée.

Exercice 1.2:

1-

Supposons que on a $|a\rangle$ et $|b\rangle$ deux qubit, où $|a\rangle$ contient la valeur du bit que nous voulons copier (soit 0 ou 1) et $|b\rangle$ est initialement à l'état $|0\rangle$. L'état combiné est :

$|a\rangle \otimes |b\rangle = |a\rangle \otimes |0\rangle$.

Appliquer une porte CNOT sur ces deux qubits. La porte CNOT a le qubit $|a\rangle$ comme qubit de contrôle et le qubit $|b\rangle$ comme qubit cible. Donc :

CNOT: $|a\rangle \otimes |b\rangle \rightarrow |a\rangle \otimes |a \oplus b\rangle$,

et :

$|a\rangle \otimes |0\rangle \rightarrow |a\rangle \otimes |a \oplus 0\rangle = |a\rangle \otimes |a\rangle$.

Nous pouvons voir que la valeur de $|a\rangle$ a été copiée dans le qubit $|b\rangle$. Donc, la porte CNOT a effectué une copie conditionnelle de la valeur du qubit $|a\rangle$ dans le qubit $|b\rangle$.

2-

Supposons que nous ayons deux qubits, $|a\rangle$ et $|b\rangle$, où $|a\rangle$ est un qubit quelconque de la forme $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ et $|b\rangle$ est initialement à l'état $|0\rangle$. L'état combiné des deux est :

$|a\rangle \otimes |b\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |0\rangle$.

Nous appliquons une porte CNOT sur ces deux qubits, avec $|a\rangle$ comme qubit de contrôle et $|b\rangle$ comme qubit cible, La porte CNOT serait la suivante :

CNOT: $(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |0\rangle \rightarrow \alpha|0\rangle \otimes |0\rangle + \beta|1\rangle \otimes |1\rangle$.

Nous pouvons voir que le qubit cible $|b\rangle$ a été modifié et n'est plus une copie fidèle de $|a\rangle$

Donc le même processus ne fonctionne plus si le qubit x est superposé..

Exercice 1.3:

1-

Pour l'état initial $|00\rangle$:

a - Appliquer la porte logique CNOT avec le premier qubit comme contrôle et le deuxième qubit comme cible : CNOT $|00\rangle = |00\rangle$.

b - Appliquer ensuite la porte de Hadamard sur le premier qubit : H|00⟩ = |β00⟩, où |β00⟩ est l'état de Bell correspondant à l'état initial |00⟩.

Pour l'état initial |01⟩ :
a - Appliquer la porte logique CNOT avec le premier qubit comme contrôle et le deuxième qubit comme cible : CNOT |01⟩ = |11⟩.
b - Appliquer ensuite la porte de Hadamard sur le premier qubit : H|11⟩ = |β11⟩, où |β11⟩ est l'état de Bell correspondant à l'état initial |01⟩.

Pour l'état initial |10⟩ :
a - Appliquer la porte logique CNOT avec le premier qubit comme contrôle et le deuxième qubit comme cible : CNOT |10⟩ = |10⟩.
b - Appliquer ensuite la porte de Hadamard sur le premier qubit : H|10⟩ = |β10⟩, où |β10⟩ est l'état de Bell correspondant à l'état initial |10⟩.

Pour l'état initial |11⟩ :
a - Appliquer la porte logique CNOT avec le premier qubit comme contrôle et le deuxième qubit comme cible : CNOT |11⟩ = |10⟩.
b - Appliquer ensuite la porte de Hadamard sur le premier qubit : H|10⟩ = |β10⟩, où |β10⟩ est l'état de Bell correspondant à l'état initial |11⟩.

Ainsi, les états de Bell obtenus à partir des états de base |00⟩, |01⟩, |10⟩ et |11⟩ sont respectivement |β00⟩, |β11⟩, |β10⟩ et |β10⟩.

2-

Pour le montrer, nous pouvons calculer leurs produit scalaire.

- État de Bell |β00⟩ :
  |β00⟩ = H|00⟩

La porte de Hadamard est définie comme suit :
H = 1/√2 * (|0⟩⟨0| + |0⟩⟨1| + |1⟩⟨0| - |1⟩⟨1|) = 1/√2 * (|00⟩ + |01⟩ + |10⟩ - |11⟩)

- État de Bell |β11⟩ :
  |β11⟩ = H|01⟩

En utilisant la définition de la porte de Hadamard et en effectuant les calculs :

|β11⟩ = 1/√2 * (|0⟩⟨0| + |0⟩⟨1| + |1⟩⟨0| - |1⟩⟨1|) |01⟩

= 1/√2 * (|00⟩ + |01⟩ - |10⟩ + |11⟩)

- État de Bell $|\beta 10\rangle$:

En utilisant la définition de la porte de Hadamard et en effectuant les calculs:

$|\beta 10\rangle = 1/\sqrt{2} * (|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)\ |10\rangle$

$= 1/\sqrt{2} * (|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$

- État de Bell $|\beta 01\rangle$:

En utilisant la définition de la porte de Hadamard et en effectuant les calculs :

$|\beta 01\rangle = 1/\sqrt{2} * (|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)\ |11\rangle$

$= 1/\sqrt{2} * (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$

Nous pouvons constater que les états de Bell $|\beta 00\rangle$, $|\beta 11\rangle$, $|\beta 10\rangle$ et $|\beta 01\rangle$ sont orthogonaux, car leurs produits scalaires sont nuls.

3-

Pour obtenir la probabilité d'obtenir 0 lors de la mesure du premier qubit, on doit calculer le carré de l'amplitude de probabilité correspondant à l'état $|0\rangle$ pour le premier qubit, c'est-à-dire la partie de $|\beta 01\rangle$ qui est projetée sur $|0\rangle$:

P(0 sur le premier qubit) $= |\langle 0|\beta 01\rangle|^2$

$= |\langle 0|(\ |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle\ )\ /\ \sqrt{2}|^2$

$= |1/\sqrt{2}|^2$

$= 1/2$

Ainsi, la probabilité d'obtenir 0 lors de la mesure du premier qubit de $|\beta 01\rangle$ est de 1/2.

- la probabilité d'obtenir 0 pour le deuxième qubit dépendra du résultat de la mesure du premier qubit et sera soit 1 ou 0, en fonction de l'état du premier qubit après la mesure.

Exercice 1.4

1- L’´etat de deux qubits r´esultant de l’action sur le qubit de Alice

Pour la paire de bits classiques "00", Alice applique l'opérateur d'identité (I) qui n'affecte pas l'état du qubit, donnant ainsi un état résultant de $|\beta 00\rangle$ pour les deux qubits.

Pour la paire de bits classiques "01", Alice applique l'opérateur X qui inverse l'état du qubit, donnant un état résultant de $|\beta 10\rangle$.

Pour la paire de bits classiques "10", Alice applique l'opérateur Z qui inverse la phase de l'état du qubit, donnant un état résultant de $|\beta 01\rangle$.

Enfin, pour la paire de bits classiques "11", Alice applique l'opérateur ZX qui effectue à la fois une inversion de bit et une inversion de phase de l'état du qubit, donnant un état résultant de $|\beta 11\rangle$.

Ainsi, l'état de deux qubits résultant dépendra de la paire de bits classiques que Alice transmet à Bob, et pourra être l'un des états suivants : $|\beta 00\rangle$, $|\beta 10\rangle$, $|\beta 01\rangle$, ou $|\beta 11\rangle$.

2 -

- Pour la paire de bits classiques "00", Bob obtient l'état résultant $(1/\sqrt{2})(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle$.

- Pour la paire de bits classiques "01", Bob obtient l'état résultant $(1/\sqrt{2})(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle$.

- Pour la paire de bits classiques "10", Bob obtient l'état résultant $(1/\sqrt{2})(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle$.

- Pour la paire de bits classiques "11", Bob obtient l'état résultant $(1/\sqrt{2})(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle$.

3-

En mesurant l'état obtenu par Bob dans la base de calcul après avoir appliqué les opérateurs C-Not et Hadamard, on peut retrouver la paire de bits classique d'origine transmise par Alice avec une probabilité de 100%.

:

Exercice 1.5 :

- Initialisation du registre quantique de 3 qubits à l'état |000⟩, où chaque qubit est à l'état |0⟩.
- Application de l'opérateur d'Hadamard (H) sur chaque qubit pour créer une superposition équilibrée de tous les états possibles du registre :

$H(0) \otimes H(1) \otimes H(2) |000\rangle = 1/\sqrt{8} (|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle)$

- Ensuit utilisant l'opérateur d'oracle (Uf) pour marquer l'élément cherché dans la liste. Supposons que l'élément cherché soit |101⟩. L'opérateur d'oracle agit comme une porte de contrôle, inversant l'amplitude de l'état cherché.

- Après application de l'opérateur d'amplification (D) pour augmenter la probabilité de trouver l'élément cherché :

  $D = H(0) \otimes H(1) \otimes H(2) \otimes Uf \otimes H(0) \otimes H(1) \otimes H(2)$

La probabilité de trouver l'élément cherché avec l'algorithme de Grover n'est pas exacte à 100% en une seule itération, mais plus on répète les étapes, plus la probabilité de trouver l'élément cherché s'approche de 100%.