Domaine Sciences et Technologies
MASTER 1 INFORMATIQUE

Aspects probabilistes pour l'informatique : TD 1
Code UE: SINB19AL

Année 2020-2021

Probabilités discrètes

Exercice 1 Montrer les propriétes suivantes : (a) $P(A^c) = 1 - P(A)$, (b) $A \subseteq B$ implique $P(A) \leq P(B)$, (c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exercice 2 Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une hasard, et on considère les événements suivants :
— A : ≪ on tire un nombre pair ≫
— B : ≪ on tire un multiple de 3 ≫.
Les événements A et B sont-ils indépendants ? Et si l'urne contient en fait 13 boules ?

Exercice 3 On jette deux dés. Quelle est la probabilité que qu'au moins un d'entre eux montre 6, sachant que les deux résultats sont différents ?

Exercice 4 Une compagnie d'assurance répartit les gens en trois classes : personnes à *bas risque*, *risque moyen* et *haut risque*. Ses statistiques indiquent que la probabilité que des gens soient impliqués dans un accident sur une période d'un an est $0,05$ pour les personnes à bas risque, $0,15$ pour les personnes à risque moyen et $0,30$ pour les personnes à haut risque. On estime que 20% de la population est à bas risque, 50% est à risque moyen et 30 % est à haut risque.

1. Quelle proportion des gens ont un accident ou plus au cours d'une année donnée ?
2. Si l'assuré A n'a pas eu d'accident sur l'année, quelle est la probabilité qu'il fasse partie de la classe à bas risque (à moyen risque) ?

Exercice 5 Dans une ville, 36% des familles possèdent un chien et 22% de celles que ont un chien possèdent aussi un chat. De plus, 30% des familles possèdent un chat. Quelle est

1. La probabilité qu'une famille sélectionnée au hasard possède un chien et un chat ?
2. La probabilité conditionnelle qu'une famille possède un chien sachant qu'elle a un chat ?

Exercice 6 Chacun des 7 jurés d'un jury d'assises prend une décision correcte avec une probabilité de 0,7. Sachant que la décision du jury est prise par vote majoritaire (au moins 4 votes) :

1. Quelle est la probabilité que le jury prenne la bonne décision ?
2. Quelle est la probabilité que le jury prenne la bonne décision sachant que exactement 4 jurés sont d'accord ?

Exercice 7 On choisit deux boules au hasard d'une urne en contenant 8 blanches, 4 noires et 2 oranges. Supposons que l'on reçoive 2€ pour chaque boule noire tirée et que l'on perde 1€ pour chaque boule blanche tirée. Désignons les gains nets par X.

1. Quelles sont les valeurs a possibles pour la variable aléatoire X ?
2. Quelles sont les probabilités $P[X = a]$ associées à ces valeurs ?
3. Dessinez le graphe de cette loi de probabilité, avec X en abscisse et $P[X = a]$ en ordonnée. Représenter la fonction de répartition de X sur le même graphe.
4. Quelle est la probabilité que le gain X soit négatif (c'est-à-dire, une perte) ?
5. Quel est le gain espéré, c'est-à-dire $\mathbf{E}(X)$?

Exercice 8 On sait que les vis fabriquées par une certaine société sont affectées d'un défaut avec probabilité $0,01$; l'état d'une vis est indépendant de celui des autres. La société accepte de rembourser les paquets de 10 vis qu'elle vend si strictement plus d'une vis du paquet présente un défaut. Quelle proportion des paquets vendus la société s'expose-t-elle à devoir rembourser ?

Exercice 9 Un examen est administré sous forme d'un questionnaire de 5 questions à 3 choix multiples chacune. Quelle est la probabilité qu'un étudiant obtienne 4 bonnes réponses ou plus en répondant au hasard ?

Exercice 10 On dispose de 3 composants électriques C_1, C_2 et C_3 dont les probabilités de fonctionnement sont de 0,9, 0,8 et 0,7 respectivement, et dont le fonctionnement est totalement indépendant les uns des autres. Donner la probabilité de fonctionnement du circuit :

1. si les composants sont disposés en série.
2. si les composants sont disposés en parallèle.
3. si le circuit est mixte : C_1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

Exercice 11 Un industriel achète les transistors par lots de 20. Sa stratégie consiste à tester seulement 4 transistors par lot, pris au hasard, et à n'accepter le lot que si tous sont en bon état. La probabilité pour un transistor isolé d'être défectueux est 0,1, ceci indépendamment de l'état des autres transistors.

1. Quelle proportion des lots sera refusée par l'industriel ?
2. Quel est le nombre espéré de transistors défectueux par lot ?
3. Quelle est la variance du nombre de transistors défectueux par lot ?

Exercice 12
1. Démontrer que la variance d'une variable aléatoire uniforme est $\frac{n^2-1}{12}$.
2. Démontrer que la variance d'une variable de Poisson est λ. Utiliser le fait que $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 13
1. Le roi vient d'une famille de 2 enfants. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une soeur ?
2. Un couple a deux enfants. Quelle est la probabilité que les deux soient filles sachant que l'aînée en est une ?

Exercice 14 On considère une roue de roulette comprenant 38 cases numérotées 0, 00 et de 1 à 36. Smith parie régulièrement sur la sortie des numéros 1 à 12.

1. Quelle est la probabilité qu'il perde ses 5 premiers paris ?
2. Quelle est la probabilité que son premier gain survienne lors du quatrième tirage ?

Exercice 15 On pose deux questions au participant d'un jeu télévisé. Il peut choisir l'ordre dans lequel il va répondre à ces questions, numérotées 1 et 2. S'il répond juste à la première question, il est autorisé à continuer avec la seconde, sinon il doit s'arrêter. Il recevra $V_1 = 200$€ pour une bonne réponse à la question 1 et $V_2 = 100$€ pour une bonne réponse à la question 2. S'il répond aux deux questions, il gagnera 300€. Supposons que la probabilité avec laquelle il répondra juste à la question 1 est de $P_1 = 0,6$, et de $P_2 = 0,8$ pour la question 2.

1. A quelle question doit-il répondre d'abord pour maximiser son gain prospectif ? On admet que les deux questions sont indépendantes.
2. Pour quelles valeurs de V_1, V_2, P_1 et P_2 il vaut mieux commencer par la question 1 ?

Exercice 16 A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs identiques. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion a le plus de chances d'arriver à destination (en fonction de la valeur de p) ?