Faculté des Sciences
Aix Marseille Université

Année universitaire 2022/2023

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1[er] semestre ☐ 2[ème] semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : M1 Nom du diplôme : Informatique
Code du module : Libellé du module : Algorithmique et Recherche Opérationnelle
Calculatrices autorisées : oui Documents autorisés : OUI, notes de cours/TD/TP

Ce sujet contient trois exercices indépendants sur 13 points (12 points plus 1 points de bonus). Les exercices peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.

1 Méthode simplex (6 points)

On se donne le programme linéaire (P_1) suivant :

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Maximiser} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{sous les contraintes} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 11 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
 & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 & &
\end{array}$$

Question 1. Appliquer la méthode simplex pour résoudre le programme linéaire (P_1). Extraire une solution optimale du dual à partir du dernier dictionnaire.

Question 2. Ecrire le programme linéaire dual et appliquer le théorème des écarts complémentaires pour déterminer si la solution $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 1)$ est une solution optimale de (P_1). Si c'est le cas, vous préciserez quel est la solution optimal du dual qui permet de le vérifier.

2 Transport d'écoliers (3 points)

Considérons le problème d'une commune dans laquelle il y a 3 quartiers $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, 2 écoles $E = \{e_1, e_2\}$ et 2 centres de loisirs $L = \{l_1, l_2\}$. L'école e_1 a une capacité de 150 élèves alors que l'école e_2 a une capacité de 130 élèves. Il y a 80 élèves dans le quartier q_1, 60 dans le quartier q_2 et 90 dans le quartier q_3 . Après l'école, la municipalité souhaite que tous les élèves puissent bénéficier d'activités culturelles et sportives dans les centres de loisirs. Le centre de loisirs l_1 a une capacité de 150 enfants alors que le centre de loisirs l_2 a une capacité de 100 enfants.

Les distances entre les quartiers et les écoles ainsi que les distances entre les écoles et les centres de loisirs sont données dans le tableau ci-dessous :

	q_1	q_2	q_3	l_1	l_2
e_1	2 km	1 km	5 km	2 km	1 km
e_2	3 km	4 km	2 km	3 km	2 km

L'objectif est d'envoyer tous les enfants dans l'une des écoles puis dans un centre de loisirs tout en minimisant la distance totale parcourue par les enfants.

Question 1. Modéliser ce problème sous la forme d'un problème de flot maximum de coût minimum. Dessiner le graphe en précisant quel est le sommet source, quel est le sommet puits et donner le coût et la capacité de chacun des arcs.

(Tournez la page SVP)

3 Modélisation (3 points + 1 pts)

Une raffinerie produit deux types de produits pétroliers : P_1, P_2. Ces produits ont deux caractéristiques importantes : leur indice de résistance à l'explosion (IRE) et leur indice de volatilité (IV). Ces deux caractérisques ainsi que la production de la raffinerie en barrils par jour sont donnés par la table suivante :

	IRE	IV	Production
P1	102	8	4000 barils/j.
P2	96	4	2500 barils/j.

Ces produits finis peuvent être vendus purs au tarif de 4.5 euros par baril ou mélangés pour obtenir un carburant dont l'indice de résistance à l'explosion est au moins 100 et l'indice de volatité est au plus 7. Le prix de ce mélange est alors de 6 euros par baril.

Les indices IRE et IV de chaque mélange sont simplement les moyennes pondérées des indices de leurs constituants. Par exemple, la compagnie pétrolière pourrait adopter la stratégie suivante :

- mélanger 4000 barils de $P1$ avec 2000 barils de $P2$ pour obtenir 6000 barils de carburant dont les indices seront :

$$\text{IRE} = \frac{(4000 \times 102) + (2000 \times 96)}{6000} = 100$$

et

$$\text{IV} = \frac{(4000 \times 8) + (2000 \times 4)}{6000} = \frac{20}{3}. \leq 7$$

- vendre 500 barils de $P2$ brut.

La profit total serait alors

$$(6000 \times 6) + (500 \times 4,5) = 36000 + 2250 = 38250 \text{ euros}$$

Question 1. Formuler le problème du calcul d'une stratégie maximisant le profit comme un programme linéaire sous forme standard. (*Indication* : introduire deux variables x_1 et x_2 qui représentent les quantités de produit P_1 et P_2 dans le mélange.)

Question 2. Ecrire le dual (D) du programme linéaire (P).

Question 3. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, déterminer si le plan de production donné ci-dessus est optimal.

Question 4. (bonus) Quel serait l'impact sur l'optimum si la capacité de production passait de 4000 à 4100 pour le produit P1 ? Idem si la capacité de production passait de 2500 à 2600 pour le produit P2 ?