Université de Strasbourg
UFR de Mathématiques
et d'Informatique
Han-Ping LI

Année 2019/2020
L3
Statistique
Etude de cas

Chapitre III Intervalles de confiance

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de loi $\left\{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\right\}$.

Le paramètre θ est estimé par $\widehat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$.

On peut mesurer la qualité de l'estimateur en évaluant de manière probabiliste les écarts possible entre $\widehat{\theta}$ et θ.

Un estimateur permet de calculer une valeur sur un échantillon qui devrait être proche du paramètre θ sans pour autant savoir si cette valeur est totalement fiable.

C'est pourquoi on a introduit la notion d'intervalle de confiance : c'est un intervalle dans lequel se trouve le paramètre θ avec un faible risque α ou une grande probabilité $1-\alpha$. On peut en théorie choisir α aussi proche de 0 que l'on peut, mais alors l'intervalle de confiance devient très grand et imprécis. Il faut donc trouver un compromis entre précision de l'intervalle et sûreté (avec un **risque** α petit). La probabilité $1-\alpha$ est appelée **niveau de confiance**.

Pour construire un intervalle de confiance (IC), on utilise toujours une variable aléatoire U (ou T ou K^2), de loi connue, qui relie le paramètre θ à son meilleur estimateur, puis en déduire deux statistiques qui représentent les bornes aléatoires

$$BInf(X_1, \ldots, X_n) \text{ et } BSup(X_1, \ldots, X_n) \text{ tels que}$$

$$\mathbb{P}\Big(BInf(X_1,\ldots,X_n) \leq \theta \leq BSup(X_1,\ldots,X_n)\big) = 1-\alpha.$$

où α représente la marge d'erreur tolérée.

Critères :

- sans biais

- le plus précis

(mais pas forcément plus court)

3-1. IC (intervalle de confiance) de μ l' espérance d'une loi normal

On sait que

1) la loi de $\overline{X}$ est une loi $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ contenant deux paramètres inconnus ;

2) la loi de $(\overline{X} - \mu)$ est une loi $\mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ contenant un paramètre inconnu ;

3) alors que la variable $T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S_c}$ vérifie trois conditions suivantes :

i) elle lie le paramètre μ et son meilleur estimateur ;

ii) elle contient un seul paramètre ;

iii) elle est pivotale, c'est-à-dire que sa loi de probabilité ne dépend d'aucun paramètre.

Cette dernière est une fonction pivotale : c-à-d que la loi de $T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{S_c}$ est indépendante de deux paramètres μ et σ.

Comme T contient un seul paramètre μ, on peut trouver deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$\mathbb{P}\Big(C_1 \leq -T \leq C_2) = 1 - \alpha.$$

Mais

$$
\begin{aligned}
C_1 \le \frac{\sqrt{n}(\mu - \overline{X})}{S_c} \le C_2 \quad & \Longleftrightarrow C_1 S_c \le \sqrt{n}(\mu - \overline{X}) \le C_2 S_c \\
& \Longleftrightarrow \frac{C_1 S_c}{\sqrt{n}} \le (\mu - \overline{X}) \le \frac{C_2 S_c}{\sqrt{n}} \\
& \Longleftrightarrow \overline{X} + C_1 \frac{S_c}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + C_2 \frac{S_c}{\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

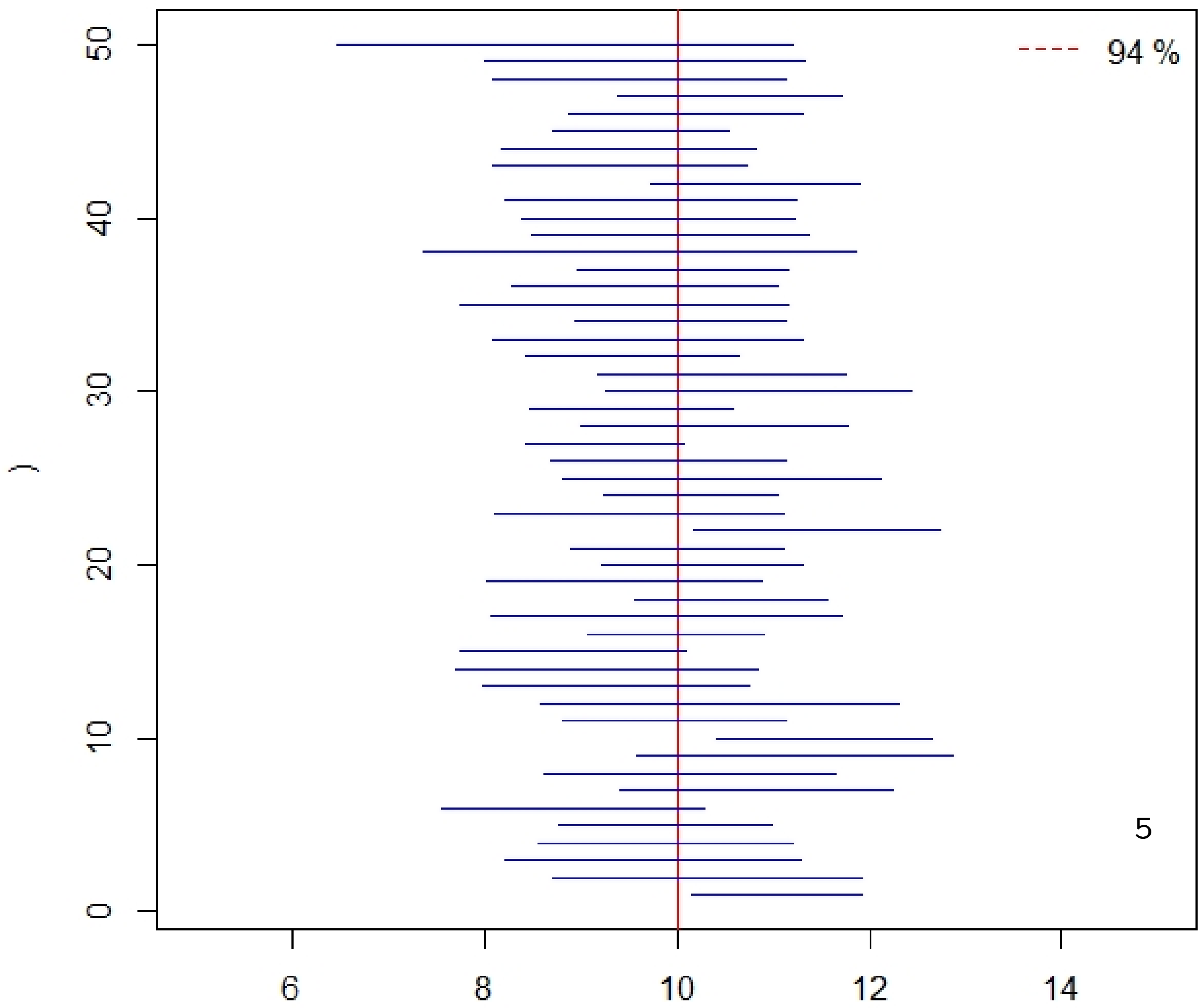
Se basant sur $\overline{X}$ le meilleur estimateur de μ, on utilise la fonction pivotale :

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S_c}$$

avec une loi de Student à (n-1) degrés de liberté, indépendant de deux paramètres μ et σ, on peut déterminer un quantile C_q tel que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S_c}\right| \leq C_q\right) = 1-\alpha$. Autrement dit,

$C_1 = -C_q$, et $C_2 = C_q$:

$$\begin{aligned} BInf &= \overline{X} - C_q \frac{S_c}{\sqrt{n}}, \\ BSup &= \overline{X} + C_q \frac{S_c}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$



94 %
5
)
0
10
20
30
40
50
6
8
10
12
14

3-2. IC de σ^2 la Variance d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Se basant sur S_c^2 est le meilleur estimateur de σ^2, on utilise la fonction pivotale :

$$\frac{(n-1)S_c^2}{\sigma^2}$$

avec une loi de Khi-deux à (n-1) degrés de liberté, indépendant de deux paramètres μ et σ. On détermine deux quantile C_1 et C_2 tels que

$$\mathbb{P}\left(C_1 \leq \frac{(n-1)S_c^2}{\sigma^2} \leq C_2\right) = 1 - \alpha.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} BInf &= \frac{(n-1)S_c^2}{C_2}, \\ BSup &= \frac{(n-1)S_c^2}{C_1}. \end{aligned}$$

Ayant un niveau de confiance donnée,

$$\mathbb{P}\Big(\frac{(n-1)S_c^2}{\sigma^2} < C_1\Big) = \mathbb{P}\Big(\frac{(n-1)S_c^2}{\sigma^2} > C_2\Big) = \frac{\alpha}{2}.$$

fournissent un choix simple à calculer, et proche du choix optimal.

Le choix optimal n'est pas celui qui préconise l'intervalle le plus court. Voir un exemple.

Exemple : On s'intéresse à la taille du lobe frontal des crabes (Leptograpsus variegatus). On prend 200 valeurs de la variable la taille du lobe frontal "FL" du fichier "crabs" de la librairie "MASS" comme population. On note μ et σ^2 la moyenne théorique et la variance théorique de la variable FL. Après une étude statistique préalable (test de la normalité), on suppose raisonnablement que la population admet une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec les deux paramètres inconnus.

1)install.packages("MASS") ; library(MASS)

2) Sauvegarder ces 200 valeurs de "FL" du fichier "crabs" dans une variable nommée **Population**.

3) Générer une réalisationn de l'échantillon (X1...Xn) n=28 , puis construire l'intervalle de confiance de μ et de avec un niveau de confiance 1- alpha = 95

Intervalle de confiance de l'espérance μ = 15.583 au niveau de 95 % :

Si $\alpha = 0.05$, alors $C_q = qt(0.975, df = n-1) = 2.051831$

$\overline{x} - C_q \frac{s_c}{\sqrt{n}} = 14.23836$; $\overline{x} + C_q \frac{s_c}{\sqrt{n}} = 16.63307$.

$$\mathbb{P}(14.23836 \leq \mu \leq 16.63307) = 0.95.$$

mais $\mu =$ `mean(Population)` =15.583.

Intervalle de confiance de l'espérance $\sigma^2 = 12.2173$ au niveau de 95% :

Si $\alpha = 0.05$, alors

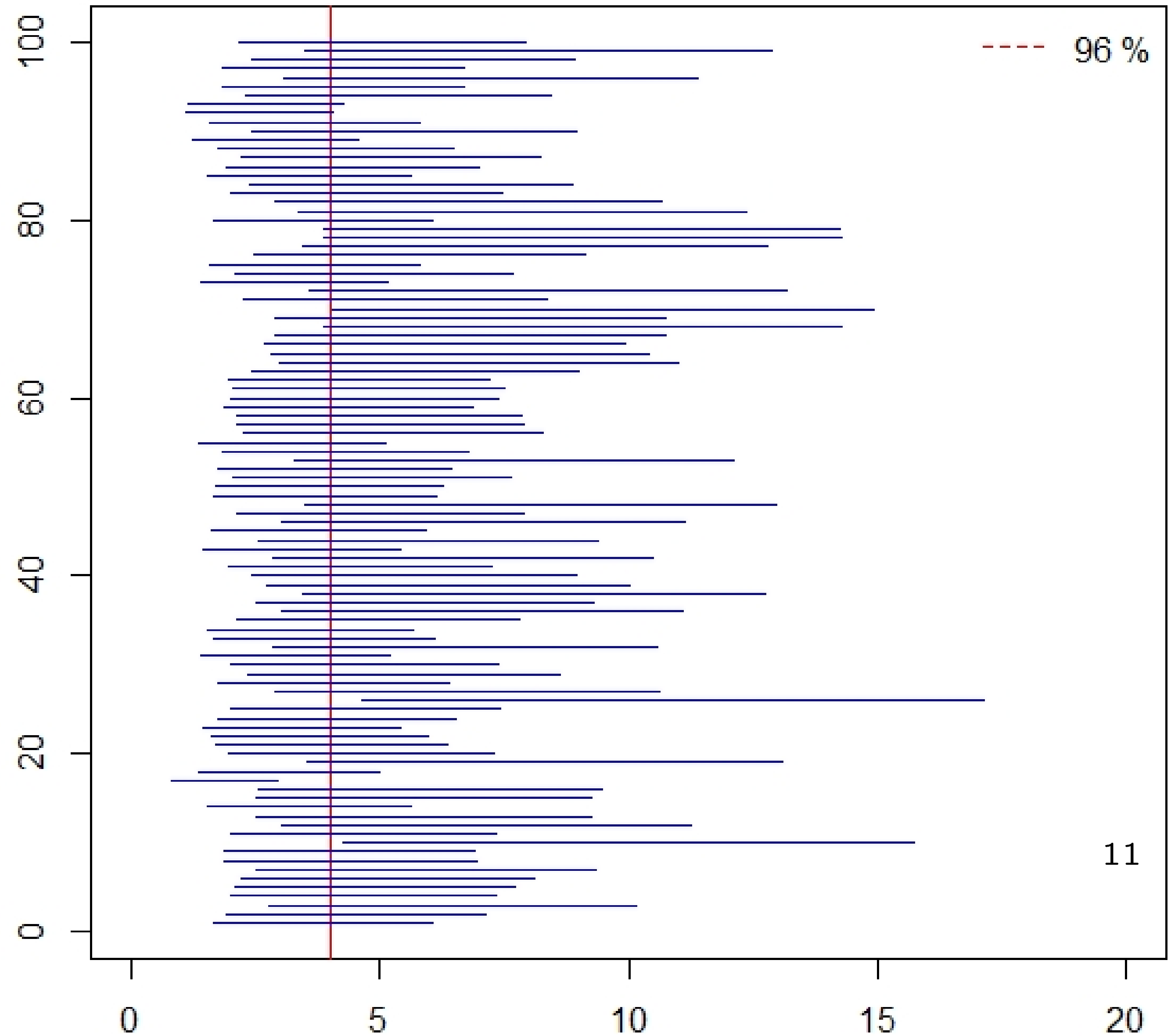
$C_1 =$`qchisq(0.025, df=n-1)` ; $C_2 =$ `qchisq(0.975, df=n-1)`.

Intervalle de confiance de la variance

$\frac{(n-1)*\texttt{var}(\text{echan})}{C_1} = 5.960116$, $\frac{(n-1)*\texttt{var}(\text{echan})}{C_2} = 17.66538$.

$$\mathbb{P}(5.960116 \leq \sigma^2 \leq 17.66538) = 0.95.$$

$\sigma^2 =$`var(Population)` $=12.2173$



100
80
60
40
20
0
0
5
10
15
20
96 %
11

3-3. Intervalle de confiance d'une proportion p inconnue

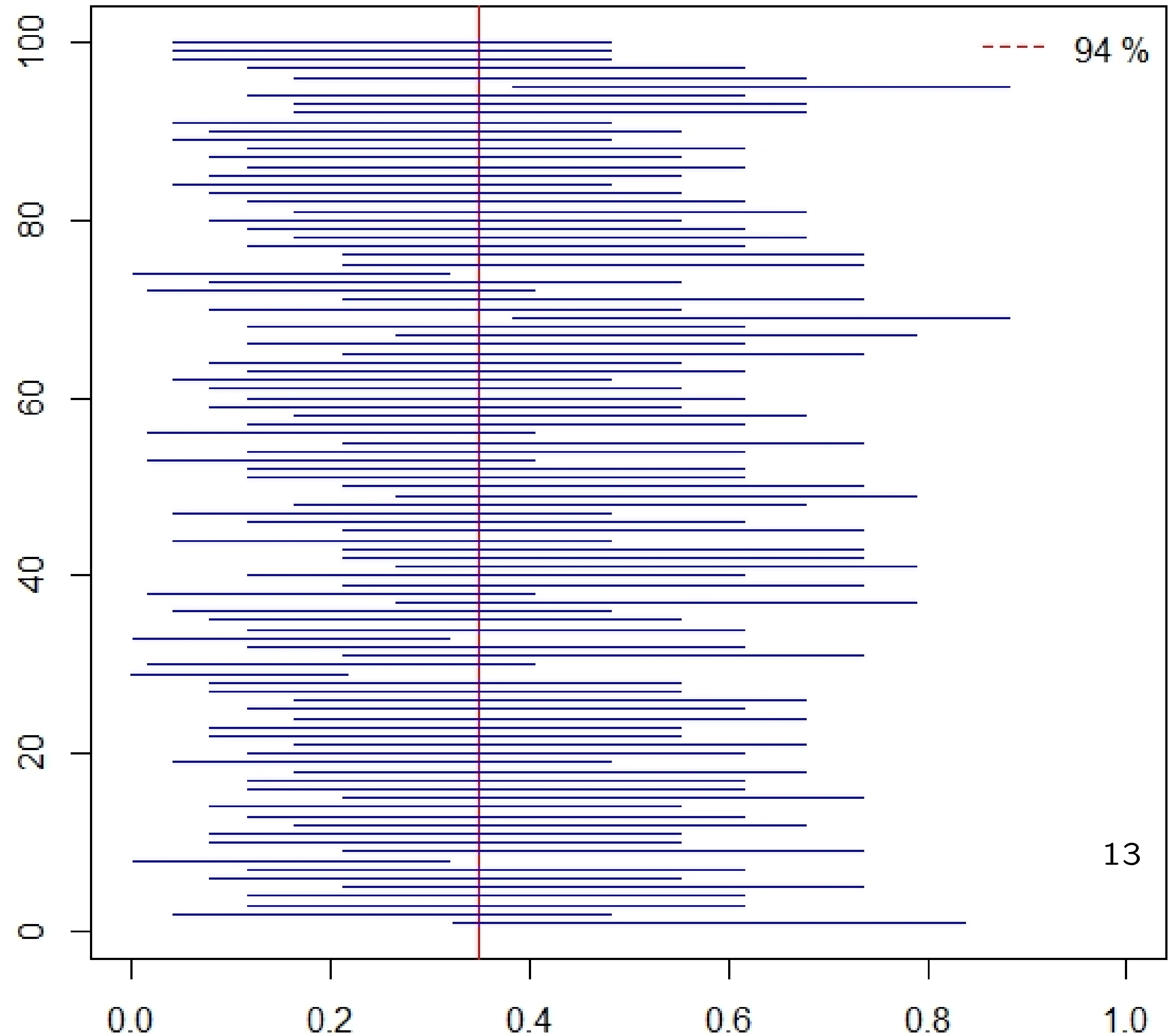
On s'intéresse à la proportion p d'individus possédant une certaine caractéristique dans une population. On prélève d'un échantillon de taille n avec $X_j = 1$ ou 0 selon. $\overline{X}$ représente la proportion calculée sur l'échantillon.

On sait comment déterminer l'intervalle de confiance du paramètre p optimal (la méthode "exacte") par une procédure relativement complexe.

Si p est très proche de 0 ou 1 ou si n n'est pas assez grand, alors on utilise R directement pour obtenir l'intervalle de confiance :

```
install.packages("binom"); library("binom")
```

```
binom.confint(sum(echant),n, conf.level=0.95,method="exact")
```



94 %
13
0
20
40
60
80
100
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Si n est assez grand, et p n'est pas trop proche de 0 ou 1, alors la loi de $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}}$ est approximativement $N(0,1)$ car $\mu = \mathbf{E}(X_i) = p$ et $\sigma^2 = \mathbf{Var}(X_i) = p(1-p)$. Plus précisément

1) Si $0.1 \le p \le 0.9$, il faut

$$n \ge 30, \; np \ge 5, \text{ et } \; n(1-p) \ge 5.$$

2) Si $p < 0.1$ ou $p > 0.9$, il faut alors

$$n \ge 50, \; np \ge 10, \text{ et } \; n(1-p) \ge 10.$$

Remarque : on peut utiliser la distance de Kolmogorov pour étudier la qualité d'approximations. Voir la fiche TD 3.

$$\mathcal{L}\Big(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}}\Big) \text{ est approximativement } \mathcal{N}(0,1).$$

On choisit une constante $C_q = qnorm(1-\frac{\alpha}{2})$ telle que

$$\mathbf{P}\Big(\mathcal{N}(0,1) \leq C_q\Big) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \mathbf{P}(\Big|\mathcal{N}(0,1)\Big| \leq C_q) = 1-\alpha$$

Ainsi avec une probabilité approximativement $1-\alpha$, on a

$$\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}}\right| \leq C_q$$

Or, Comme $\lim_{n\to\infty} \overline{X} = p$ Ainsi avec une probabilité 100%, on a aussi

$$\mathcal{L}\Big(\frac{\sqrt{n}(\overline{X} - p)}{\sqrt{\overline{X}(1 - \overline{X})}}\Big) \text{ est approximativement } \mathcal{N}(0,1).$$

Ainsi avec une probabilité approximativement $1 - \alpha$, on a

$$\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X} - p)}{\sqrt{\overline{X}(1 - \overline{X})}}\right| \leq C_q$$

De cette deuxième approximation, on en déduit qu'avec une probabilité approximativement $1 - \alpha$, (méthode de Wald)

$$
\begin{aligned}
BInf &= \overline{X} - C_q\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}, \\
BSup &= \overline{X} + C_q\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}.
\end{aligned}
$$

3-4. Intervalle de confiance de la loi de Poisson (n est assez grand

On s'intéresse au paramètre λ de la loi de Poisson. On prélève d'un échantillon de taille n. $\overline{X}$ représente la moyenne d'échantillon.

Si n est assez grand, et $n\lambda$ n'est pas petit, alors

la loi de $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\lambda)}{\sqrt{\lambda}}$ est approximativement $N(0,1)$ car $\mu = \mathbf{E}(X_i) = \lambda$ et $\mu = \mathbf{Var}(X) = \lambda$. Plus précisément

Si $n\lambda \geq 15$,

$$\mathcal{L}\Big(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\Big) \text{ est approximativement } \mathcal{N}(0,1).$$

Ainsi avec une probabilité approximativement $1-\alpha$, on a

$$\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right| \leq C_q$$

Or, Comme $\lim_{n\to\infty} \overline{X} = \lambda$ Ainsi avec une probabilité 100%, on a aussi

$$\mathcal{L}\Big(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\lambda)}{\sqrt{\overline{\overline{X}}}}\Big) \text{ est approximativement } \mathcal{N}(0,1).$$

Ainsi avec une probabilité approximativement $1-\alpha$, on a

$$\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p)}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}\right| \leq C_q$$

De cette deuxième approximation, on en déduit qu'avec une probabilité approximativement $1-\alpha$,

$$\begin{aligned} BInf &= \overline{X} - C_q\sqrt{\frac{\overline{X}}{n}}, \\ BSup &= \overline{X} + C_q\sqrt{\frac{\overline{X}}{n}}. \end{aligned}$$