Université de Strasbourg
UFR de Mathématiques
et d'Informatique

Licence 3ème année
Étude de cas
octobre 2019

Contrôle continu N°1

Les notes de cours et de travaux dirigés sont autorisées,
le courriel (e-mail) et le téléphone ne sont pas autorisés.
Durée de l'épreuve : 60 minutes

La rédaction et les commandes doivent être reportées sur la copie avec les résultats numériques éventuels.
Le sujet est à rendre en même temps que la copie.

Responsable : H LI

NOM : Prénom :

NOM : Prénom :

Exercice 1 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre $p \in]0;1[$:

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p,\ k \geq 1$$

1. Soit $(1,1,2,1,3)$ une réalisation d'un échantillon $(X_1, ..., X_5)$ de loi $\mathcal{G}(p)$. Simplifiez l'expression suivante :

$$L(p) = \mathbb{P}\left(X_1 =, 1X_2 = 1, X_3 = 2, X_4 = 1, X_5 = 3\right)$$

2. Calculez les valeurs de $L(\lambda)$ pour $p = 0.5$, 0.3 et 0.1.
3. On définit :
   (a) $\overline{X} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$,
   (b) $S_c^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$.

   Ces deux variables sont elles des statistiques ? Sont-elles indépendantes ? Pourquoi ?
4. On simule $N = 10000$ réalisations d'un échantillons de taille 5 d'une loi géométrique de paramètre $p = 2/3$ à l'aide de la fonction `rgeom(N,p)+1`. Dans le but d'estimer $\theta = \frac{1}{p^2}$ $(= 2.25)$, comparez, en vous basant sur ces 10000 réalisations, les performances des estimateurs suivants :
   (a) $S_c^2 + \overline{X}$,
   (b) $\dfrac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)^2}{n(n-1)}$,

(c) $\dfrac{n\overline{X}^2+\overline{X}}{n+1}$.

Exercice 2 :

1. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme continue sur l'intervalle $[0;1]$. On définit une seconde variable aléatoire $X=-\dfrac{log(1-U)}{\lambda}$ où $\lambda>0$ est un paramètre.
   (a) Calculez la fonction de répartition de X, c'est à dire :
   $$F_X(x)=\mathbb{P}(X\leq x).$$
   (b) Montrez que sa dérivée $F'(x)$ est égale à la la densité de probabilité d'une loi exponentielle de paramètre λ :
   $$f_\lambda(x)=\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x>0}$$
2. (a) En exploitant les résultats précédents, utilisez la fonction `runif(...)` pour simuler $N=1000$ réalisations d'un échantillon $(X_1,...,X_{50})$ $(n=50)$ d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda=1/4$.
   Rappel : si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$, alors $\mathbb{E}(X)=\frac{1}{\lambda}$ et $Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$.
   (b) Sauvez les 1000 réalisations associées des statistiques suivantes :
      i. $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$. Quelle est la moyenne de $N=1000$ réalisations de $\overline{X}$? Si On augmente la taille N à 10^9, 10^{90}, ..., quelle sera la valeur limite ? En vertu de quel théorème ?
      ii. $S_c^2=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X}-X_i\right)^2$. Quelle est la moyenne de $N=1000$ réalisations de S_c^2 ? Si On augmente la taille N à 10^9, 10^{90}, ..., quelle sera la valeur limite ? En vertu de quel théorème ?
      iii. $Z=\dfrac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{\sigma}$,
      iv. $T=(n-1)\dfrac{S_c^2}{\sigma^2}$.
   La variable aléatoire T est-elle une statistique ? Connaissez vous la loi de T ? Si oui, laquelle ?
3. À l'aide de la fonction `hist(...,probability=TRUE)`, affichez l'histogramme de $Z/1000$.
4. Superposez-lui le graphe de la densité d'une loi normale aux paramètres bien choisis à l'aide des fonctions `curve` et `dnorm`. Justifiez vos choix de paramètres.
5. Quel théorème venez-vous d'illustrer ? Énoncez-le.
6. À l'aide des fonctions `mean` et `var`, estimez l'espérance et la variance de X en vous basant sur ces 1000 réalisations. Ces résultats sont-ils cohérents avec les points 2.(b)i. et 2.(b)ii. ? avec le rappel en 2.(a)i. ?