Université de Strasbourg
UFR de Mathématique
et d'Informatique

L3 de Math-Eco
Étude de Cas
novembre 2018

Contrôle Continu N^0 2

Consignes

— Les documents sont autorisés, le courriel (e-mail) et le téléphone ne sont pas autorisés.
— La durée de l'épreuve : 60 minutes
— La rédaction et les commandes doivent être reportées sur la copie avec les résultats numériques éventuels.
— Le sujet est à rendre en même temps que la copie.

Responsable : H LI

NOM : Prénom : .

NOM : Prénom : .

Exercice 1. (10 pts) Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon d'une loi de densité

$$f_\gamma(x) = \sqrt{\frac{2}{\gamma\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2\gamma}\Big) \mathbf{1}\{x \geq 0\}$$

avec le paramètre inconnu $\gamma > 0$.

1. Déterminer l'estimateur $\hat{\gamma}_{MV}$ du maximum de vraisemblance de γ.

   (4 pts)

   On suppose dans les parties 2. et 3. que $\gamma = 5$.

2. Simuler $M = 1000$ réalisations d'une variable aléatoire de densité $f_\gamma(x)$ avec $\gamma = 5$ par la commande :
   ```
   > x=abs(rnorm(1000, mean=0, sd=sqrt(5)))
   ```
   Pour superposer la densité sur l'histogramme de x , quelle fonction f doit-on utiliser dans curve(..., add=T) ? Préciser le code en R de l'expression de f.

3. Simuler $M = 5000$ réalisations d'un échantillon de taille $n = 15$ de densité $f_\gamma(x)$ avec $\gamma = 5$. Comparer les qualités et les défauts des estimateurs suivants :

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 + \overline{X}^2 \qquad \hat{\gamma}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\hat{\gamma}_3 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \qquad \hat{\gamma}_4 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \overline{X}^2$$

$$\hat{\gamma}_5 = \frac{n^2}{n + \dfrac{2n(n-1)}{\pi}} \times \overline{X}^2$$

Exercice 2. (10 pts) On veut construire des intervalles de confiance pour les paramètres d'une loi normale.

1. Générer une réalisation d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de taille $n = 25$ d'une loi normale de moyenne $\mu = 15$ et de variance $\sigma^2 = 8$ puis construire l'intervalle de confiance de μ de niveau de confiance $1 - \alpha = 96\%$. Contient-il la valeur $\mu = 15$?

2. Générer $M = 3000$ réalisations de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de taille $n = 25$ d'une loi normale de moyenne $\mu = 15$ et de variance $\sigma^2 = 8$ puis construire 3000 réalisations de l'intervalle de confiance de μ de niveau de confiance $1 - \alpha = 96\%$. Quel est le pourcentage des réalisations qui ne contiennent pas le paramètre $\mu = 15$?

3. Générer une réalisations de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de taille $n = 37$ d'une loi normale de moyenne $\mu = 10$ et de variance $\sigma^2 = 9$ puis construire une réalisation de l'intervalle de confiance de σ^2 de niveau de confiance $1 - \alpha = 95\%$. Contient-il la valeur de $\sigma^2 = 9$?

4. Générer $M = 8000$ réalisations de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de taille $n = 37$ d'une loi normale de moyenne $\mu = 10$ et de variance $\sigma^2 = 9$ puis construire $M = 8000$ réalisations de l'intervalle de confiance de σ^2 de niveau de confiance $1 - \alpha = 95\%$. Quel est le pourcentage des réalisations qui ne contiennent pas le paramètre $\sigma^2 = 9$?

5. À partir des 8000 réalisations de l'échantillon de la question 4, construire les intervalles de confiance pour la variance définis pour $n = 37$ et $1 - \alpha = 95\%$ par
$$IC = \left[\frac{36 \times S_c^2}{59.04} ; \frac{36 \times S_c^2}{22.67}\right].$$
Quel est le pourcentage des réalisations qui ne contiennent pas le paramètre $\sigma^2 = 9$?

6. Calculer les largeurs moyennes des intervalles obtenus dans les questions 4 et 5 et commentez vos résultats.