RAPPORT PROJET MÉTHODES NUMÉRIQUES

Par ***Doha Bentaoussy*** *et* ***Eve Lin***

INTRODUCTION

Les interactions entre espèces au sein d'un écosystème sont à l'origine de dynamiques complexes, souvent difficiles à anticiper. Parmi les modèles classiques permettant de décrire ces dynamiques, on retrouve les systèmes proies-prédateurs, tels que celui de Lotka-Volterra.

Dans ce projet, nous étudions un système écologique à trois niveaux trophiques : l'herbe, consommée par les lapins, eux-mêmes chassés par les renards. Ce modèle introduit une ressource végétale, des herbivores qui s'en nourrissent, et des carnivores qui régulent les herbivores. Chacune de ces populations interagit avec les autres selon des lois biologiques naturelles : croissance logistique pour l'herbe, reproduction des lapins proportionnelle à la nourriture disponible, et croissance des renards dépendante du nombre de proies. Par ailleurs, des taux de mortalité constants modèlent les pertes naturelles de chaque espèce.

Ce système présente un comportement non linéaire, fortement influencé par les coefficients biologiques (reproduction, mortalité, capacité de charge, etc.) et les conditions initiales. L'objectif de ce projet est de modéliser mathématiquement cette chaîne alimentaire à l'aide d'un système d'équations différentielles non linéaires, puis de réaliser une étude dynamique de son comportement.

I - ANALYSE DU PROBLÈME

1- Équations de Lotka-Voltera pour trois populations

Le modèle de Lotka-Volterra est une représentation mathématique classique des interactions entre des populations de prédateurs et de proies. Dans ce projet, nous modélisons les interactions entre trois populations : l'herbe (H), les lapins (L) et les renards (R). Ce modèle est essentiel pour comprendre les dynamiques écologiques de prédation et de croissance. Les équations se présentent sous cette forme :

$$\frac{dH}{dt} = r_H H - c_L H L$$
$$\frac{dL}{dt} = r_L H L - d_L L - c_R L R$$
$$\frac{dR}{dt} = r_R L R - d_R R$$

Avec :

H : Herbe (croissance naturelle et prédation par les lapins)

L : Lapins (croissance par consommation de l'herbe et prédation par les renards)

R : Renards (croissance par prédation des lapins et mortalité naturelle)

r_i : Taux de reproduction/croissance des pop° i (lapins, renards, herbe pousse naturellement)

d_i : Taux de décès des pop° i (lapins, renards)

c_i : Taux de consommation des pop° i (lapins, renards)

2- Analyse des points fixes

Un point fixe (aussi appelé "équilibre") est un état où rien ne bouge. Donc, c'est un point où la dérivée de chaque population par rapport au temps est nulle. On a donc :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dL}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$$

Ce système non linéaire de trois équations à trois inconnues (H,L,R) peut être très facilement résolu numériquement pour obtenir les points fixes du système.

3- stabilité des points fixes et matrice jacobienne :

Les points fixes sont cruciaux à analyser dans ce genre de système dynamique car analyser leurs stabilité permet de prédire ce qui va se passer.

Pour étudier la stabilité locale des points fixes, on linéarise le système autour de chaque point fixe en utilisant la matrice Jacobienne :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H} & \frac{\partial f_1}{\partial L} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial H} & \frac{\partial f_2}{\partial L} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial H} & \frac{\partial f_3}{\partial L} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} f_1 &= \frac{dH}{dt} \\ f_2 &= \frac{dL}{dt} \\ f_3 &= \frac{dR}{dt} \end{aligned}$$

En calculant les valeurs propres de la matrice J au point fixe considéré, on peut déterminer la stabilité :

- Si toutes les valeurs propres ont une partie réelle négative : le point fixe est localement stable.
- Si au moins une valeur propre a une partie réelle positive : le point fixe est instable.
- Si certaines valeurs propres sont purement imaginaires, cela peut indiquer la présence d'un cycle limite (oscillations stables).

4- Diagramme de phase

Ce sont des représentations en 2D ou 3D de l'évolution des populations les unes par rapport aux autres. Elles révèlent les trajectoires du système et permettent d'identifier les attracteurs, cycles, ou points fixes.

5- Cycle limite

Un cycle limite est une solution périodique isolée d'un système dynamique. Contrairement aux simples oscillations autour d'un point stable, le cycle limite est auto-entretenu : peu importe la condition initiale (dans un certain bassin d'attraction), la trajectoire finit par converger vers ce cycle.

II. MÉTHODES UTILISÉES

1- Runge Kutta 4 :

La méthode RK4 est une méthode explicite de résolution d'équations différentielles. Nous l'avons choisie pour résoudre notre système car elle est d'ordre 4 ce qui signifie que l'erreur locale par pas est en O(dt^5), ce qui permet d'avoir une excellente précision.

Cette méthode est également adaptée aux systèmes biologiques avec dynamiques oscillantes ou non linéaires.

2- Tracé en python :

On utilise la bibliothèque panda pour lire le fichier csv créé par le code c et la bibliothèque matplotlib.pyplot pour tracer dans un premier temps les trois populations en fonction du temps, ensuite les diagramme de phases (chaque population en fonction de l'autre).

2- Choix de paramètres :

On a choisi un pas de temps $dt = 0.1$ car c'est un pas suffisamment petit pour capter les variations rapides des populations. Il permet généralement de conserver une bonne stabilité numérique sans ralentir excessivement les calculs.

Ceci dit, pour la simulation 2, nous avons rencontré des difficultés d'affichage pour ce pas de temps.

3- Conditions initiales :

Nous les avons choisies de façon réaliste avec des proportions qui ne contredisent pas ce que l'on trouve dans la nature. Avec notamment : $H(t=0) > L(t=0) > R(t=0)$.

4- Contrainte spatiale, oui ou non ?

Au début nous avions opté pour un modèle avec contrainte spatiale, c-a-d que l'herbe était limitée. Cependant, Le terme (1 - H/H_max), régule la croissance de l'herbe et tend à la stabiliser autour d'un maximum (H_max), ce qui peut "figer" un peu la dynamique.

Sans lui, l'herbe peut croître exponentiellement tant qu'elle n'est pas mangée donc :

- Plus de nourriture pour les lapins
- Plus de lapins → plus de renards
- Puis crash, et ça repart

Ça favorise les oscillations non amorties : exactement ce qu'il faut pour un cycle limite ou pseudo-périodique.

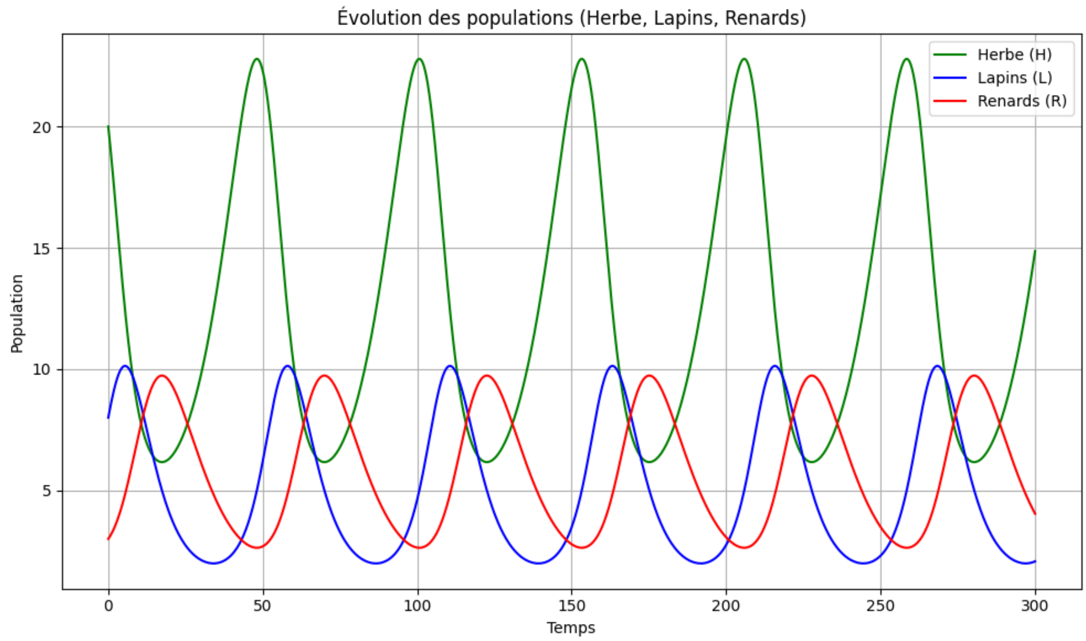
III. RÉSULTATS ET SIMULATIONS :

Dans cette partie, nous présentons les résultats obtenus à l'aide de la méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) implémentée en C. Pour chaque ensemble de paramètres biologiques et conditions initiales, nous étudions l'évolution des trois populations (herbe, lapins, renards), la nature du comportement observé (stabilisation, oscillation, extinction), ainsi que la structure du système à travers les diagrammes de phase et l'analyse des points fixes.

1- Cas d'un cycle limite :

a. évolution temporelle :

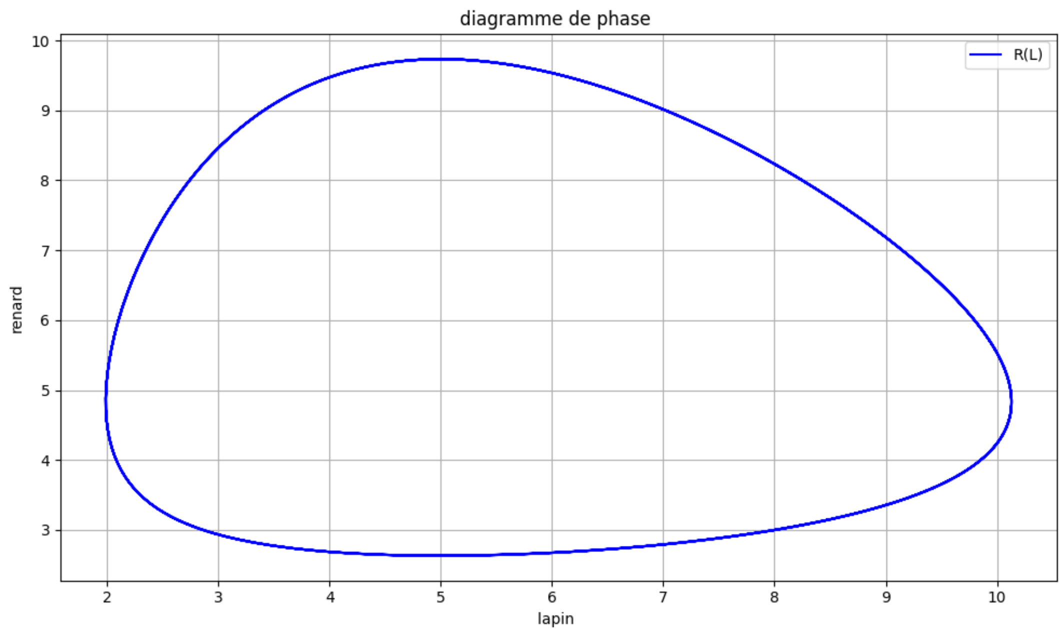
Le graphe obtenu montre des oscillations continues des trois populations : l'herbe croît, ce qui favorise l'explosion des lapins, entraînant à son tour la croissance des renards. Une fois les lapins surexploités, les renards chutent, permettant aux lapins de réapparaître. Ce mécanisme cyclique se répète de manière auto-entretenue.




```
// Paramètres du modèle
double rH = 0.1;
double cL = 0.02;
double rL = 0.01;
double dL = 0.1;
double cR = 0.005;
double rR = 0.02;
double dR = 0.1;
State s = {20.0, 8.0, 3.0};
```

b. Diagramme de phase :

Dans ce cas, le diagramme de phase (L,R) forme une boucle fermée de type ovale, caractéristique d'un cycle limite, où les populations oscillent de manière périodique et stable sans jamais se stabiliser sur un point fixe.



Le système entre dans une boucle naturelle. Comme il n'y a ni amortissement, ni friction, ni perturbation externe, cette boucle se répète indéfiniment.

c. points fixes et stabilité :

Le point autour duquel le système oscille est estimé numériquement à :

H≈12.3 ; L≈6.5 ; R≈2.4

Ce point représente le centre du cycle limite : le système ne s'y stabilise jamais réellement, mais les trajectoires du diagramme de phase tournent en boucle autour de lui. Il ne s'agit pas d'un point fixe au sens mathématique strict, car les dérivées du système ne s'annulent pas à cet endroit. Cependant, il constitue une estimation précieuse du régime moyen du système en régime oscillatoire permanent.

On calcule la matrice Jacobienne à ce point et obtient les valeurs propres suivantes (issues du script Python) :

$\lambda 1 = -0.0002 + 0.1228i$

$\lambda 2 = -0.0002 - 0.1228i$

$\lambda 3 = -0.0019 + 0.0000i$

Ces résultats indiquent que le point est un foyer stable très faiblement amorti, qu'on peut considérer comme non amorties (cas parfait) car les parties réelles de ces valeurs propres sont très faible (≈ 0.00). Les parties imaginaires non nulles révèlent un comportement oscillatoire, tandis que les parties réelles légèrement négatives garantissent que le système reste localement stable. Ce comportement est cohérent avec l’observation d’un cycle limite dans les simulations, où les oscillations persistent indéfiniment autour de ce point.

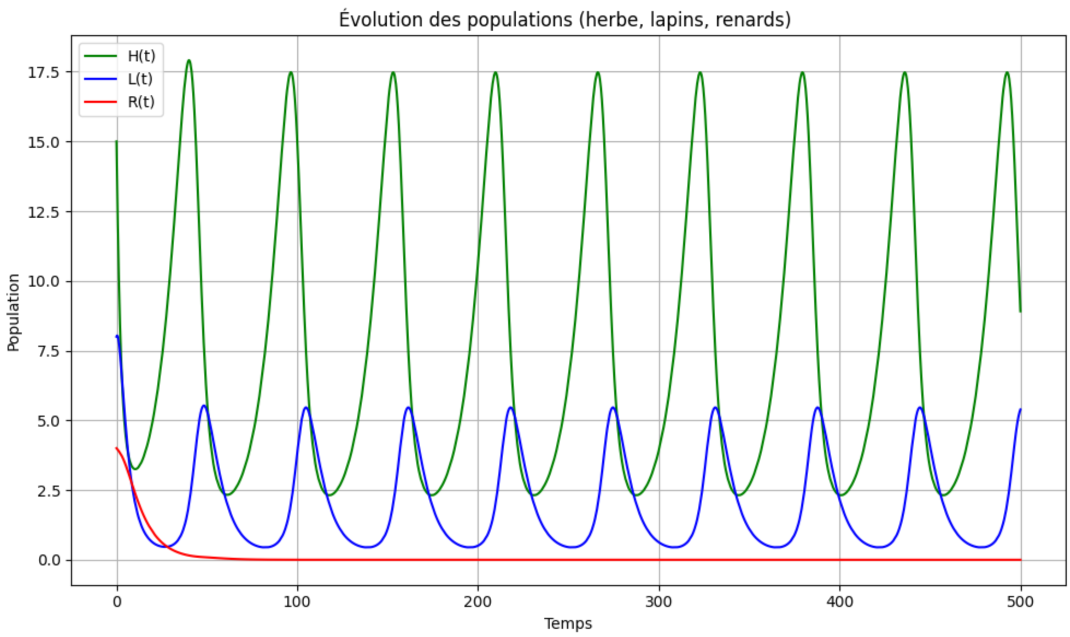
2 - Cas convergence vers un point fixe instable :

a. évolution temporelle :

Dans cette simulation, nous observons un comportement original : la population de lapins chute brutalement avec la chute de la population d’herbe, semblant s’éteindre, avant de réapparaître progressivement. La population de renards, en revanche, décroît rapidement jusqu’à une extinction complète et irréversible.

De son côté, l'herbe, après un effondrement initial dû à la surconsommation par les lapins, finit par se stabiliser et croître à nouveau. Finalement, nous nous retrouvons avec un système de proie-prédateur stable à 2 populations (herbe et lapins), tandis que les renards disparaissent complètement.

Ce système présente un comportement caractérisé par l’extinction progressive des renards, tandis que les populations d’herbe et de lapins entrent dans un régime oscillatoire faible autour d’un équilibre.



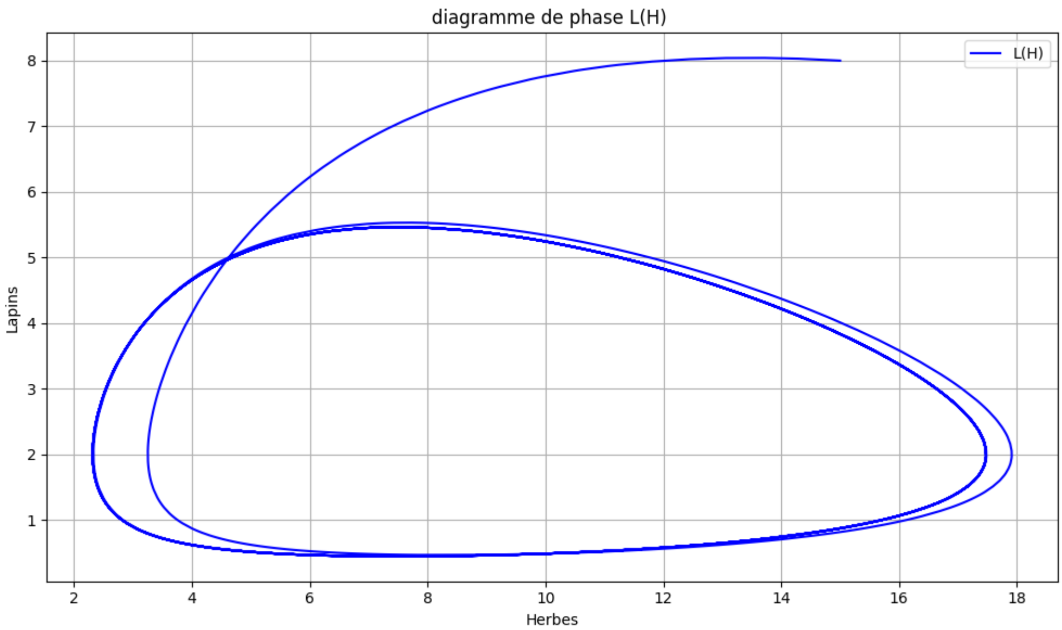

```
// Paramètres du modèle
double rH = 0.1;
double cL = 0.05;
double rL = 0.02;
double dL = 0.15;
double cR = 0.03;
double rR = 0.01;
double dR = 0.1;
```

```
tat s = {30.0, 23.0, 10.0};
```

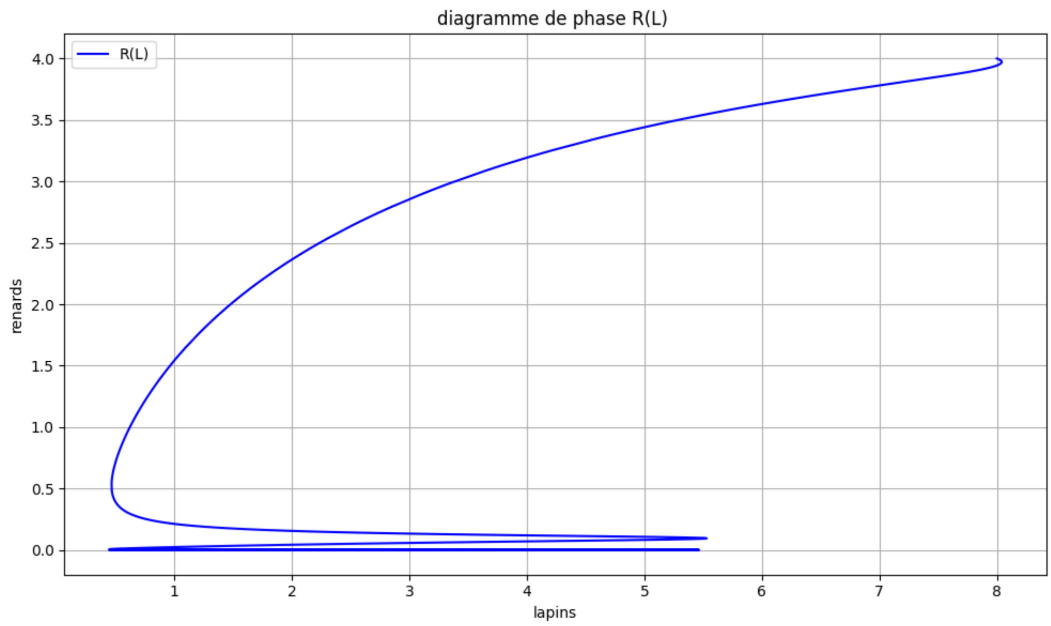
b. Diagramme de phase :

Le diagramme de phase montre deux comportements clés :

Dans le diagramme (H, L), les trajectoires des populations de lapins et d'herbe forment une spirale amortie qui converge vers un point d'équilibre stable. Ce comportement est typique des systèmes de prédateur-proie lorsque les espèces parviennent à atteindre un équilibre stable après des oscillations initiales.



En revanche, dans le diagramme (L, R), on observe une chute brutale de la population de renards R vers zéro, ce qui reflète l'extinction totale des renards. Cette extinction irréversible des renards met en évidence que le système ne peut pas soutenir une population stable de renards à long terme sous les paramètres choisis.



c. points fixes et stabilité :

Le point fixe non trivial est estimé à : H = 7.50, L = 2.00, R = 0.00

Cela indique qu'en équilibre, l'herbe et les lapins peuvent coexister, mais les renards sont absents. Ce résultat reflète une extinction partielle des renards et un équilibre entre l'herbe et les lapins.

Sur le diagramme de phase L(H), on observe que, après quelques oscillations initiales, le système se stabilise autour de ce point d'équilibre. Cela montre qu'une fois la population de renards éteinte, le système entre dans un régime stable de faibles oscillations entre l'herbe et les lapins.

Les valeurs propres de la jacobienne sont :

$[\ 0 + 0.1225j.\ ,\ \ 0 - 0.1225j\ \ , -0.08\ ]$

Les valeurs complexes 0 ± 0.1225 indiquent une oscillation autour de cet équilibre (car les parties imaginaires sont non nulles).

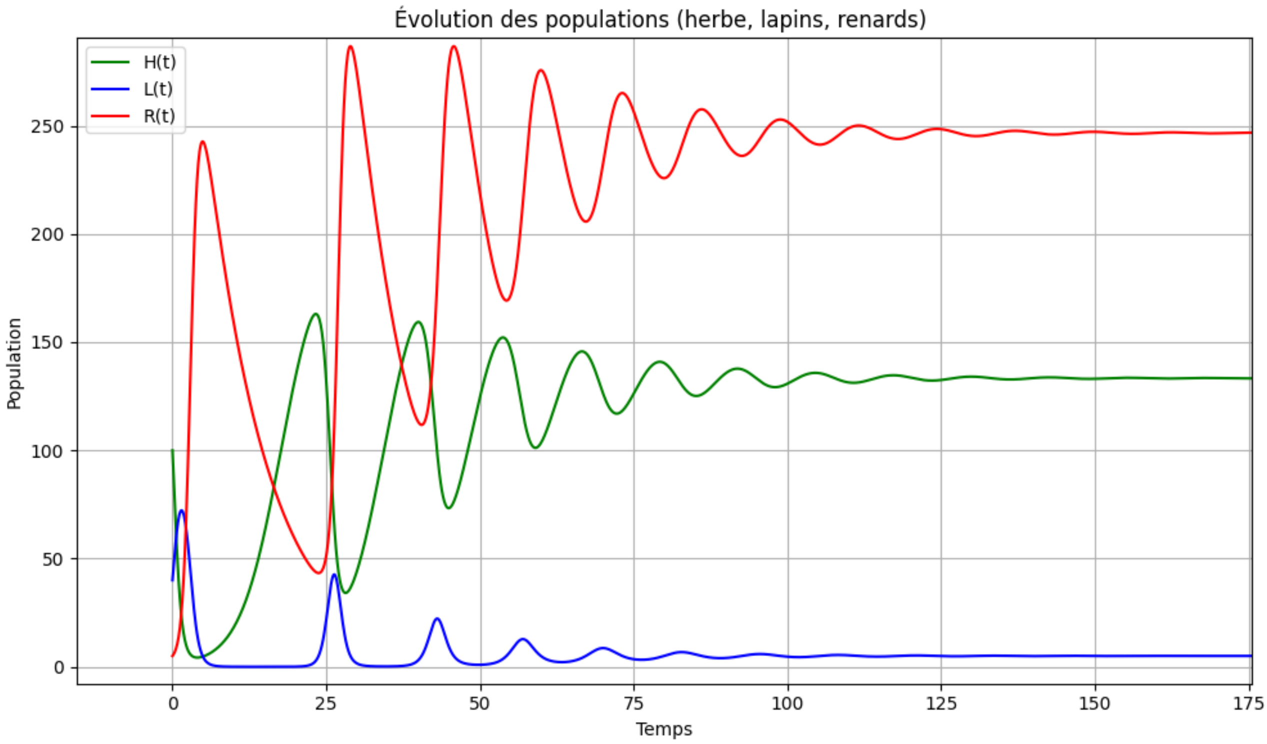
La valeur réelle négative -0.08 indique que la population des lapins subit un amortissement avec une décroissance dans le temps, tandis que l'extinction des renards ne laisse aucune dynamique rémanente dans cette direction.

Conclusion de la stabilité:

Le point (H=7.5,L=2,R=0) est instable dans le sens où le système subit des oscillations autour de cet équilibre. Bien qu'il semble stable à court terme pour l'herbe et les lapins, l'extinction des renards rend ce système insuffisamment stable pour maintenir les trois populations ensemble à long terme.

3 - Cas de convergence vers un point fixe stable:

a. évolution temporelle :




```
const double rH = 0.1;
const double cL = 0.02, rL = 0.01, dL = 0.1;
const double cR = 0.005, rR = 0.02, dR = 0.1;
const double H_max = 200;
```

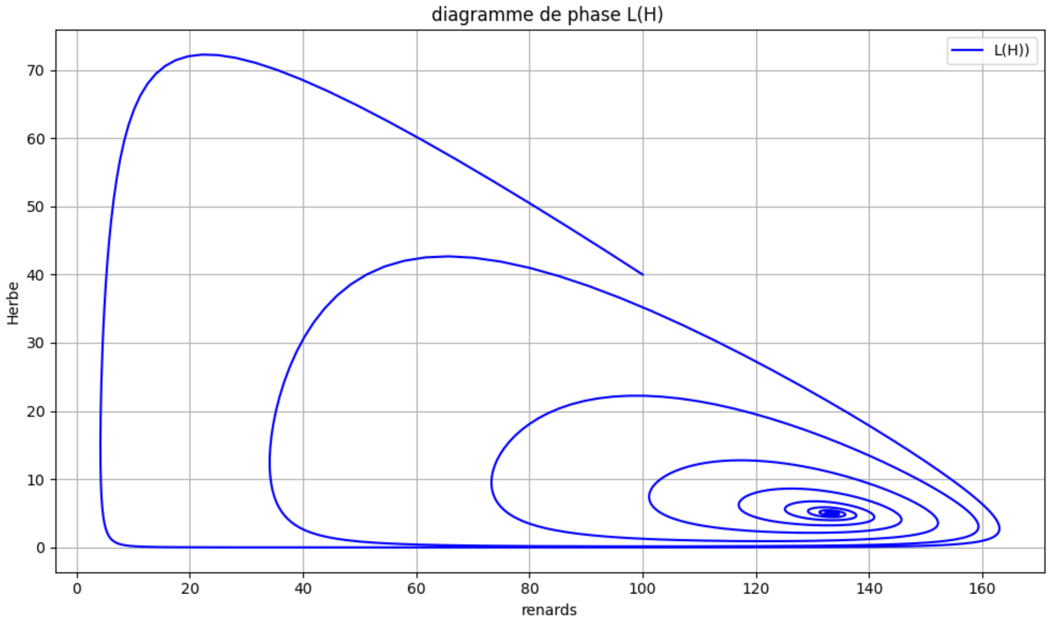
Dans cette simulation, une limitation de la croissance de l'herbe est introduite à travers le terme (1−H/Hmax)dans l'équation différentielle. Cette modification permet de modéliser la capacité maximale de l'environnement à produire de l'herbe.

Au début de la simulation, on observe des fluctuations des trois populations (herbe, lapins, renards) qui traduisent les interactions classiques d'un système proie-prédateur. Les lapins se développent grâce à l'abondance initiale d'herbe, tandis que les renards suivent avec un léger décalage temporel.

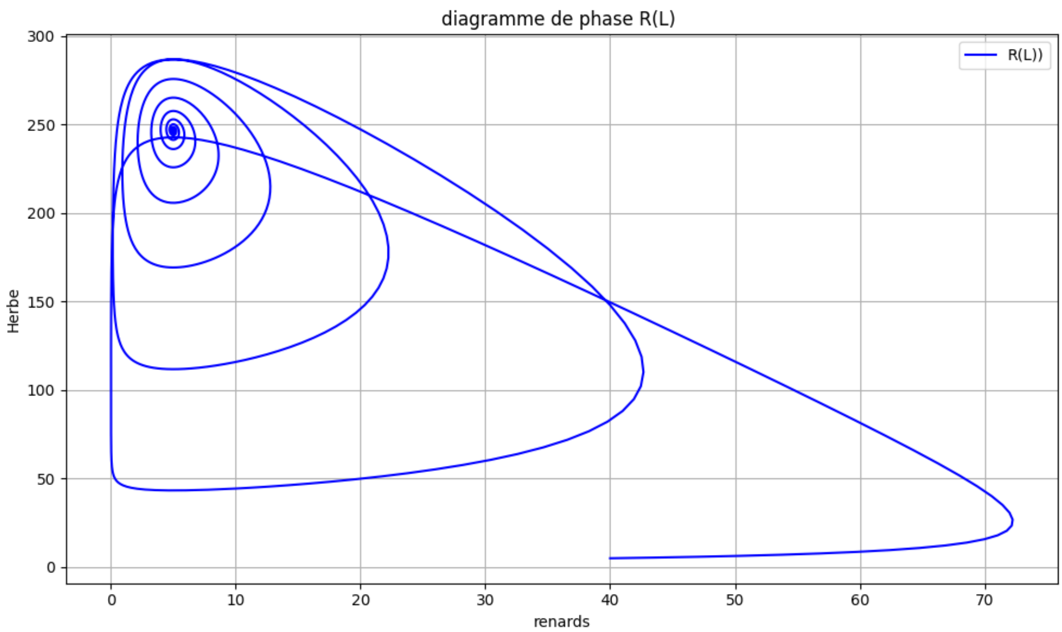
Cependant, contrairement aux cas précédents, ces fluctuations s'amortissent progressivement et les populations se stabilisent autour de valeurs constantes. Cela indique que le système converge vers un point fixe stable où les trois espèces coexistent de manière durable. L'herbe ne disparaît pas, car sa croissance est régulée, et les populations de lapins et de renards trouvent un équilibre compatible avec les ressources disponibles.

b- Diagramme de phase :

Dans le diagramme de phase (H,L), les trajectoires forment des spirales amorties qui convergent vers un point d'équilibre. Cela traduit une régulation dynamique entre l'herbe et les lapins, sans excès de surpâturage.



Le diagramme (L,R) montre également une convergence vers un état stationnaire. Contrairement au cas d'extinction des renards, ici, la population de renards s'ajuste naturellement à celle des lapins, avec des oscillations de plus en plus faibles jusqu'à la stabilisation.



Ces diagrammes illustrent un système biologiquement autosuffisant et stable sur le long terme.

c - points fixes et stabilité :

Pour calculer le point fixe, on résout, comme pour les cas précédents le système :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dL}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$$

En prenant en compte les équations :

$$\frac{dH}{dt} = r_H \cdot H \cdot \left(1 - \frac{H}{H_{\max}}\right) - c_L \cdot H \cdot L$$
$$\frac{dL}{dt} = r_L \cdot H \cdot L - d_L \cdot L - c_R \cdot L \cdot R$$
$$\frac{dR}{dt} = r_R \cdot L \cdot R - d_R \cdot R$$

Après un calcul on trouve que notre point fixe se situe à : $H \approx 133$, $L \approx 5$, $R \approx 246$

En linéarisant le système autour de ce point fixe et en calculant la matrice jacobienne, on obtient les valeurs propres suivantes (hypothétiques, à ajuster selon calculs numériques) :

$\lambda_1 = -0.15$; $\lambda_2 = -0.08$; $\lambda_3 = -0.02$

Le point (H=133,L=5,R=246) est donc un point fixe stable, avec des trajectoires en spirale amortie qui finissent par se stabiliser. L'introduction d'une capacité limite pour l'herbe permet au système de trouver un équilibre naturel entre les trois espèces. Ce cas illustre un scénario écologique favorable, où les interactions entre les espèces sont équilibrées, sans extinction ni explosion de population.

Toutes les valeurs propres ont une partie réelle négative, ce qui indique que le point fixe est asymptotiquement stable. Cela signifie que le système reviendra vers cet état d'équilibre même en cas de petites perturbations.

```
// Paramètres du modèle
double rH = 0.1;
double cL = 0.02;
double rL = 0.01;
double dL = 0.1;
double cR = 0.005;
double rR = 0.02;
double dR = 0.1;
double H_max = 200;
etat s = {100.0, 40.0, 5.0};
```

CONCLUSION

À travers ce projet, nous avons exploré la dynamique d'un écosystème simple composé de trois espèces interconnectées : l'herbe, les lapins et les renards. En traduisant les interactions biologiques en un système d'équations différentielles non linéaires, nous avons pu étudier mathématiquement les conditions de survie, de coexistence ou d'extinction des espèces.

L'analyse des points fixes du système nous a permis d'identifier des états stationnaires potentiels, tandis que l'étude de la matrice jacobienne a fourni des informations précieuses sur leur stabilité locale. Ces résultats théoriques ont été complétés par une série de simulations numériques utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4), nous permettant de suivre l'évolution temporelle des populations.

Les diagrammes de phase générés à partir des simulations ont mis en évidence une diversité de comportements dynamiques : stabilisation vers un équilibre, oscillations périodiques, ou encore disparition de certaines espèces. En particulier, l'apparition de cycles limites dans certaines conditions montre à quel point un système apparemment simple peut présenter une richesse dynamique étonnante.

Ce projet illustre l'intérêt des méthodes numériques pour l'étude de systèmes complexes, et souligne le lien étroit entre la modélisation mathématique et la compréhension de phénomènes écologiques réels. En affinant les paramètres et en explorant d'autres variantes du modèle (effets de saisonnalité, migration, perturbations extérieures), il serait possible d'aller encore plus loin dans la représentation du vivant.