概率论判断题 (第一周)

1 绪论

1.1 随机现象及基本概念

1.1.1 必然现象与随机现象

- （F）概率论是研究不确定现象的一个数学分支.
  -说明*: 概率论是研究随机现象的一个数学分支*
- （T）随机实验在同条件下具有可重复性.
  -说明*: 要大量重复实验才可以统计各个结果的频率*

1.1.2 样本空间

- （T）在实验中，称样本点构成的集合为实验结果.
  -说明*: 任何实验的所有结果都可以用样本点表示*
- （F）样本空间中样本点的个数越少，表达不同事件的能力越强.
  -说明*: 样本点的个数越多，表达不同事件的能力越强*

1.1.3 事件及运算

- （T）A - B 的含义是“A 和 B 中仅事件 A 发生”.
  -说明*: 根据减运算的定义可得出*
- （T）若 $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$, 称事件列 $\{A_n : n \geq 1\}$ 的极限存在.
  -说明*: 事件列 $\{A_n : n \geq 1\}$ 的极限存在, 记作 $\lim_{n\to\infty} A_n$*

1.1.4 事件类与 λ 类

- （F）设 A 为事件，取 $A \subset \Omega$，则 $\mathscr{C}$=$\{A, \bar{A}, \Omega, \varnothing\}$ 是 Ω 上最小的事件域.
  -说明*: 可验证 $\mathscr{C}$ 是事件域，而且是 Ω 上最第二小的事件域*
- (F) $\lambda(\mathscr{A})$ 是所有包含 $\mathscr{A}$ 的最小事件域.
  -说明*: 由引理 1.1.3 可知，$\sigma(\mathscr{A})$ 才是所有包含 $\mathscr{A}$ 的最小事件域*

概率论判断题 (第二周)

1 绪论

1.1 随机现象及基本概念

1.1.5 频率与概率

- （T）频率具有可加性.

  -说明: 根据频率的性质可得

- （F）在概率的频率学派定义中，可以精确描述概率的取值.

  -说明: 古典频率学派无法严格证明和精确描述概率的定义和取值

1.2 古典概型和几何概型

1.2.1 古典概型

- （T）若样本空间只有有限多个样本点且每个样本点是等可能发生的，则称该样本空间为古典概型.

  -说明: 根据古典概型定义可得

1.2.2 计数原理

- （T）从 n 个不同的元素中有重复地取 r 个, 不计顺序, 则不同的取法有 $\begin{pmatrix} n+r-1 \\ r \end{pmatrix}$ 种.

  -说明: r=$r_1+...+r_n$。于是有，上述重复组合等价于 (将 r 分配给 n 个不同元素 (将 r 分成 n 份))。采用隔板法：将 n-1 个隔板插入 r 中将 r 分成 n 份，用乘法原理：第 1 次插有 r+1 种可能，第 2 次插有 r+2 种可能，$\cdots$，第 n-1 次插有 r+n-1 种可能重复组合数 =(r+1)(r+2)$\cdots$*(r+n-1)/(n-1)!= (r+n-1, r)

- （F）C_n^k 为不重复排列.

  -说明:A_n^k 为不重复排列，n^r 为重复排列，C_n^k 为组合系数

1.2.3 古典概型的例子

- （F）摸球问题中，有放回和不放回这两种方式对应的是同样的概率模型.

  -说明: 对应的是不一样的概率模型

- (T) 对于同一问题背景下的事件，可以用不同的样本空间表示该事件.

  -说明: 摸球问题中，无论球是否可辨认，都不改变结果

1.2.4 几何概型的定义与例子

- (F) 几何概型对应的样本空间可以是不可测的.

  -说明: 由定义可知，几何概型的样本空间是 n 维欧氏空间可求“体积”的子集

概率论判断题 (第三周)

1　绪论

1.2　古典概型和几何概型

1.2.4　几何概型的定义与例子

- (F) 如果一个集合类中的事件互不相交且概率之和为 1, 那么这个集合类可以作为样本空间.

  -说明*: 构建样本空间的基本要求是: 所构建的样本空间能够描述随机现象中的所有事件，概率之和为 1 不一定能描述所有事件, 可能缺少一个零测集.*

2　概率空间

2.1　概率空间及简单性质

- (T) 若 $\mathbb{P}\left(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n\right)=\mathbb{P}\left(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n\right)$, 则 $\underline{\lim}_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)=\overline{\lim}_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)$.

  -说明*: 由练习 2.1.8 知*

  $$\mathbb{P}\left(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n\right)\leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)\leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)\leqslant \mathbb{P}\left(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n\right),$$

  结合题目有不等号全部取等.

- (T) 对 Ω 上事件域 $\mathscr{F}$, 若从 $\mathscr{F}$ 到实数空间上的映射 $\mathbb{P}$ 满足概率的三条公理，则称 $\mathbb{P}$ 为 $\mathscr{F}$ 上的概率测度, 简称为概率; 称 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 为概率空间.

  -说明*: 根据定义 2.1.1 可知.*

- (F) 几何概率空间是离散概率空间.

  -说明*: 在几何概率空间中，样本空间中有无穷多个样本点，每个样本点出现的概率都为 0, 这与离散概率空间不同.*

概率论判断题 (第四周)

2 概率空间

2.2 条件概率

2.2.1 条件概率的定义

- (T) 设 A, B 都是事件, 若 $P(A \mid B) = 1$, 证明 $P(\mid \bar{B} \mid \bar{A}) = 1$.

  -说明: 若 $P(A) > 0$, 要证 $P(AB \mid A) \geqslant P(AB \mid A \cup B)$. 上式左边等于 $P(AB)/P(A)$, 上式右边等于 $P(AB)/P(A \cup B)$. 因为 $A \cup B \supset A$, 所以 $P(A \cup B) \geqslant P(A)$, 故有右 $\leqslant$ 左.

2.2.2 乘法公式

- (T) 当多个事件相互独立时，乘法公式可以用于计算它们同时发生的概率.

  -说明: 如果事件 A 和事件 B 相互独立，那么它们同时发生的概率等于事件 A 发生的概率乘以事件 B 发生的概率. 这种情况下，乘法公式提供了一种简便的计算方法.

2.2.3 全概率公式

- (F) 使用全概率公式的条件必须是分割样本空间.

  -说明: 不一定, 条件可以放弱为 B_k 不互相容且 $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$

2.2.4 贝叶斯公式

- (T) 贝叶斯公式：若 $A_1 \cup A_2 \cup \cdot \cdot \cdot \cup A_n = \Omega$, 且 $A_i \cap A_j = \Phi, 1 \leq i \neq j \leq n$, 则对任一事件 B, 只要 $P(B) > 0$, 则 $P\left(A_j \mid B\right) = \frac{P(A_i)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$.

  -说明: 如果已知 B 发生了, 去探求是某原因 A_j 导致发生的可能性 (概率) $P\left(A_j \mid B\right)$ 则总是使用贝叶斯公式看这一原因占总的原因的比例.

2.3 事件的独立性

2.3.1 两个事件的独立性

- (T) 事件 A, B 相互独立的充要条件是 $P(A \mid B) = P(A \mid \bar{B})$.

  -说明: 必要性. 设 A, B 相互独立, 则 $A, \bar{B}$ 也相互独立, 从而知 $P(A \mid B) = P(A), P(A \mid \bar{B}) = P(A)$, 故 $P(A \mid B) = P(A \mid \bar{B})$.
  充分性. 设 $P(A \mid B) = P(A \mid \bar{B})$, 按定义此式即表示

  $$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}.$$

  由比例的性质得

  $$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(AB) + P(A\bar{B})}{P(B) + P(\bar{B})} = \frac{P(A(B \cup \bar{B}))}{1} = P(A).$$

  即 $P(AB) = P(A)P(B)$, 即 A, B 相互独立

2.3.2 多个事件的独立性

2.3.3 独立性在概率计算中的应用

2.3.4 随机事件的独立性

概率论判断题 (第五周)

2 概率空间

2.4 三门问题

- (F) 三门问题中，可以用古典概型来描绘不同策略下获得小汽车的条件概率.

  -说明: 错误的，不能误用概率来解答条件概率问题.

3 随机变量与随机向量

3.1 随机变量及其分布

3.1.1 随机变量的定义与等价条件

- (T) 每个随机试验都可以对应一个随机变量，随机试验的结果（样本点）对应其取值，随机事件对应其取值组成的集合（区间），而随机事件的概率对应随机变量取值落入此集合的概率.

  -说明: 多次随机试验的结果具有频率稳定性，根据定义可得

- (T) 逆变换 ξ^{-1} 满足: $\xi^{-1}\left(\bigcup_n B_n\right)=\bigcup_n \xi^{-1}\left(B_n\right)$.

  -说明: 一方面对于任意的 n，若 $\xi \in B_n$ 则 $\xi \in \bigcup_n B_n$，$\xi^{-1}\left(B_n\right) \subset \xi^{-1}\left(\bigcup_n B_n\right)$，从而 $\bigcup_n \xi^{-1}\left(B_n\right) \subset \xi^{-1}\left(\bigcup_n B_n\right)$. 另一方面，由 $\xi^n \in \bigcup_n B_n$ 知存在 n 使 $\xi \in B_n$，从而 $\xi^{-1}\left(\bigcup_n B_n\right) \subset \bigcup_n^n \xi^{-1}\left(B_n\right)$. 至此得证.

- (F) 随机变量是一个样本空间向实数域的映射，而且这个映射是单射.

  -说明: 随机变量不一定是单射，如示性函数.

概率论判断题 (第六周)

3 随机变量与随机向量

3.1 随机变量及其分布

3.1.2 随机变量的离散化逼近

- (T) ξ 为随机变量, 则 $\forall a \in$R, $\{\xi < a\}$ 为事件.

  -说明:$\{\xi \leq a\}$ 必定为事件, 利用概率的连续性. 则 $\{\xi < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\xi \leq a - \frac{1}{n}\right\}$, 由事件域的可列并封闭性, 得证。

3.1.3 分布与分布函数

- (F) 波莱尔函数 g 是不可测函数.

  -说明:$\mathscr{B}$ 是可测空间, 波莱尔函数本身也是可测函数. 且任给随机变量 $\xi, g(\xi)$ 也是随机变量.

3.1.4 随机变量的独立性

- (T) $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ 为随机向量, 则称 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n)$ 为该随机向量的联合分布函数. 随机向量 $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ $1 \leq k \leq n-1, F$ 为联合分布, 则 $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ 的分布函数为 $\lim_{x_{k+1}, \ldots, x_n \to +\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, 称为 $\vec{X}$ 关于 $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ 的边缘分布。

  -说明: 随机向量 (X, Y) , 则 X 与 Y 独立的充要条件是联合分布等于关于每个分量的边缘分布的乘积, 即 $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ 。(F 为联合分布, F_X 为关于 X 的边缘分布分布)
  若 $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$, 则 $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$, 符合随机变量 X 与 Y 相互独立的定义。
  若 X 与 Y 独立, $P(X \leq x, Y \leq y) = F(x,y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) = F_X(x)F_Y(y)$.

3.1.5 离散型随机变量与连续型随机变量

- (F) 对连续型随机变量, 其在任意单点处取值的概率为非负实数, 即 $\forall a \in$R,P(X=a)$\neq 0$.

  -说明: 对于连续型随机变量, 若 f 非负, 满足 $\forall a < b, P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$, 则称 f 为 X 的概率密度函数, 简称密度。显然地, 密度要满足如下性质: 1、$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (利用概率的连续性证明) 2、$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)dx = 0$ (利用定积分第一中值定理) 根据以上性质, 可知连续性随机变量在任意单点处取值的概率为 0. 事实上, 对连续型随机变量 X ,

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b)$$

概率论判断题 (第七周)

3 随机变量与随机向量

3.1 随机变量及其分布

3.1.4 随机变量的独立性

- (T) 互不相容事件的示性函数的线性组合仍为随机变量

  -说明: 考虑互斥事件 $A_1, A_2, .., A_n$, 其线性组合 $\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega)$, 其中 $a_1, a_2, .., a_n$ 为实数, 现证 ξ 为随机变量. 因为 $\xi \leqslant x = \bigcup_{k: a_k \leqslant x} A_k$ 为事件, 即证 ξ 为随机变量..

3.1.5 离散型随机变量与连续型随机变量

- (T) 假设分布函数是分段可微连续函数，则该分布函数为连续型的.

  -说明: 设该分布函数为 $F(x)$, 由于 $F(x)$ 分段可微, 所以对任意的可微点 D, 存在

  $$p(x) = F'(x), F(x) = \int_D p(x)dx,$$

  而分段可微函数的不可微点仅为至多可数个, 是零测集, 即

  $$m(x \notin D) = 0, F(x) = \int_{D\cap(-\infty,x)} p(x)dx = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx,$$

  所以该分布函数是连续型的.

概率论判断题 (第八周)

3 随机变量与随机向量

3.2 贝努利实验及相关的离散型分布

3.2.1 二项分布

- (T) 二项分布的期望值是试验次数与单次试验成功概率的乘积.

  -说明: *二项分布的期望值 $E(\xi) = np$, 其中 n 是试验次数，p 是单次试验的成功概率.*

3.2.2 几何分布

- (F) 几何分布的记忆性质指的是已知至少进行了一次试验后，下一次成功的概率变化.

  -说明: *几何分布具有无记忆性，即已知进行了若干次试验后仍未成功，下一次试验成功的概率仍为 p.*

3.2.3 负二项分布

- (T) 负二项分布用于描述在第 r 次成功前需要进行的试验次数.

  -说明: *负二项分布是扩展的几何分布，描述的是在获得第 r 次成功之前进行的试验次数*

3.3 泊松分布

3.3.1 泊松粒子流及其分布

- (F) 泊松粒子流意味着在任意两个独立时间区间内，事件发生的概率是相互依赖的.

  -说明: *泊松粒子流的事件在不同时间区间内是独立的，即在任意两个不重叠的时间区间内事件发生的概率是相互独立的.*

3.3.2 泊松分布的性质

- (T) 泊松分布可以用来描述单位时间内随机事件发生的次数.

  -说明: *泊松分布常用于模型化单位时间或单位面积内独立随机事件的发生次数.*

3.4 常用的连续性分布

3.4.1 均匀分布

- (T) 均匀分布的所有值在其范围内都有相等的发生概率.

  -说明: *在均匀分布中，任何一个数值在定义区间内出现的概率是均等的.*

3.4.2 正态分布

- (T) 正态分布的图形总是对称的，无论其参数如何变化.

  -说明: *正态分布的图形是一个对称的钟形曲线，其对称中心位于平均值（或期望值）.*

3.4.3 Γ-分布与指数分布

- (T) 指数分布是 Γ 分布的一个特例，当 Γ 分布的形状参数 r=1 时，它就是指数分布.

  -说明: *Γ 分布当形状参数 r=1 时，转化为指数分布，其特性包括无记忆性，用于描述事件发生间的等待时间.*

概率论判断题 (第九周)

3 随机变量与随机向量

3.5 随机向量和联合分布

3.5.1 随机向量

- (F) 若随机向量 (ξ_1, ξ_2), 在每个坐标上的投影都是均匀分布，这意味着 (ξ_1, ξ_2) 必然是在某个矩形区域上的均匀分布.

  -说明: 虽然 ξ_1 和 ξ_2 每个单独的均匀分布意味着它们在自己的支撑集上均匀分布, 但这并不保证 (ξ_1, ξ_2) 在任何形状的矩形区域上均匀分布。它们的联合分布可能依赖于具体的关联结构或区域形状.

3.5.2 联合分布与联合分布函数

- (F) 如果随机向量 (ξ_1, ξ_2) 的联合分布函数 $F_{\xi_1,\xi_2}(x, y)$ 在某区域内部是连续的，则 ξ_1 和 ξ_2 必须是相互独立的.

  -说明: 联合分布函数的连续性并不能保证随机变量的独立性。独立性是更强的条件，需要联合分布函数可以分解为各自的边缘分布函数的乘积，仅依赖于连续性是不足以判断独立性的.

3.5.3 边缘分布

- (T) 即使 ξ_1 和 ξ_2 的联合分布非常复杂，ξ_1 的边缘分布函数总可以通过简化联合分布函数得到.

  -说明: 不管联合分布如何复杂，ξ_1 的边缘分布函数总是可以通过对 ξ_2 的可能值范围积分联合分布函数 $f_{\xi_1,\xi_2}(x, y)$ 来得到，这是边缘分布的定义.

3.5.4 独立随机变量性质

- (F) 如果随机变量 ξ_1 和 ξ_2 独立，并且它们都遵从同一分布，则 $\xi_1 + \xi_2$ 和 $\xi_1 - \xi_2$ 也必然独立.

  -说明: 即使 ξ_1 和 ξ_2 独立且同分布，$\xi_1 + \xi_2$ 和 $\xi_1 - \xi_2$ 的独立性并不是必然的。这两个新形成的随机变量通常日相关的，因为它们共享原始变量的部分.

概率论判断题 (第十周)

3 随机变量与随机向量

3.6 随机变量的条件分布和母函数

3.6.1 条件分布

- (T) 设随机变量 ξ 与 η 独立，已知 ξ 的边缘分布，可以断言 ξ 和 η 的联合分布等于 ξ 的边缘分布乘以 η 的边缘分布.

  -说明：如果两个随机变量独立，则它们的联合分布函数等于各自边缘分布函数的乘积.

- (F) 如果随机变量 ξ 的条件分布给定 $\eta = a$ 时是均匀分布，那么不论 η 取什么值，ξ 的条件分布总是均匀分布.

  -说明：随机变量 ξ 的条件分布可能依赖于 η 的值。即使在某个特定的 $\eta = a$ 时 ξ 表现为均匀分布，也不能推断出对所有的 η 值 ξ 都是均匀分布.

3.6.2 母函数

3.7 随机变量函数的分布

3.7.1 离散型情形

- (T) 如果随机变量 ξ 是离散型的，并且取值为自然数，函数 $g(\xi) = \xi^2$ 的分布也必然是离散型的.

  -说明：随机变量 ξ 是离散型的，则由 ξ 衍生的任何函数，比如 $g(\xi) = \xi^2$ ，也将是离散型的，因为它只能取有限或可数无限个值.

- (T) 设随机变量 ξ 的取值为 $\{1, 2, 3\}$ ，且每个取值的概率相等。定义 $g(\xi) = \xi + 1$ ，则 $g(\xi)$ 的期望值等于 ξ 的期望值加一.

  -说明：由于 ξ 的每个取值的概率相等，且 $g(\xi) = \xi + 1$ 是线性函数，根据期望的线性性质，$g(\xi)$ 的期望值确实是 ξ 的期望值加一.

3.7.2 连续型情形

- (T) 如果随机变量 ξ 是连续型的，并且其密度函数 $f_\xi(x)$ 在区间 $a \leq x \leq b$ 上为正，则在此区间上函数 $g(\xi) = \sin(\xi)$ 的分布也是连续型的.

  -说明：随机变量 ξ 是连续型的，任何由 ξ 通过连续函数 g 得到的新变量 $g(\xi)$ 也是连续型的。因此，$g(\xi) = \sin(\xi)$ 的分布是连续的.

- (F) 设随机变量 ξ 的密度函数 $f_\xi(x)$ 为 $\frac{1}{2}$ 在区间 $[-2, 2]$ 上，函数 $g(\xi) = \xi^2$ 的分布是均匀分布.

  -说明：尽管 ξ 是均匀分布，但 $g(\xi) = \xi^2$ 导致的分布不是均匀的。变量 ξ^2 在较小的数值区间内概率密度更高，不满足均匀分布的定义.

概率论判断题 (第十一周)

3 随机变量与随机向量

3.7 随机变量函数的分布

3.7.1 离散型情形

- (T) 如果 ξ 是一个离散型随机变量，且 $\eta = g(\xi)$ ，其中 g 是一个非单射函数，那么 η 的概率质量函数可以表示为 $p_\eta(y) = \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} p_\xi(x)$.

  -说明：由于 g 是非单射，可能存在多个不同的 x 值映射到同一个 y 值。因此，计算 η 取特定值 y 的概率时，需要将所有 ξ 映射到 y 的 x 值的概率求和。这符合离散型随机变量函数的分布的计算方法.

- (T) 如果 ξ 是一个离散型随机变量，对于任意函数 g ，若存在某个 y ，使得 $g^{-1}(\{y\})$ 的元素个数为无限，那么 $\eta = g(\xi)$ 在 y 处的概率质量函数 $p_\eta(y)$ 可能为零.

  -说明：尽管 $g^{-1}(\{y\})$ 的元素个数无限，但如果这些元素在 ξ 的分布中的概率之和不足以达到一个有限的非零值，η 在 y 的概率可以为零。这种情况可能发生在 ξ 的概率分布非常分散，或者 $g^{-1}(\{y\})$ 包含大量概率极小的点.

3.7.2 连续型情形

- (T) 如果 ξ 是一个连续型随机变量，且 $\eta = g(\xi)$ ，其中 g 是一个单调函数，那么 η 的密度函数 $f_\eta(y)$ 可以通过 $f_\xi(x)$ 和 g 的导数 $g'(x)$ 求得.

  -说明：当 g 是单调的，可导的，则 η 的密度函数 $f_\eta(y)$ 可以通过变量变换公式 $f_\eta(y) = f_\xi\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{1}{g'(g^{-1}(y))}\right|$ 来计算.

- (F) 如果 ξ 是一个连续型随机变量，且 $\eta = g(\xi)$ 不是单调的，那么 η 没有密度函数.

  -说明：即使 g 不是单调的，η 依然可能 $\downarrow$ 变度函数。不单调意味着不能直接应用简单的变量变换公式，可能需要将 g 分解为几个单调区间，分别计算，然后求和.

3.7.3 统计量分布

- (T)T 样本均值和样本方差都是统计量.

  -说明：统计量是样本的函数，不依赖于任何未知参数。样本均值 $\bar{X}$ 和样本方差 S^2 都由样本数据计算得出，不涉及总体参数.

- (T) 如果样本来自正态分布，那么样本均值的分布也一定是正态分布.

  -说明：根据中心极限定理，即使样本大小较小，只要样本来自正态分布，样本均值的分布就是正态分布。这是因为正态分布的数学特性，即它的线性组合仍然是正态分布.

概率论判断题 (第十二周)

3 随机变量与随机向量

3.7 随机变量函数的分布

3.7.4 随机变量的存在性

- (F) 在任何试验中，只要有可能的结果，就一定存在随机变量.

  -说明：随机变量是定义在样本空间上的实值函数，用以量化试验结果。虽然在几乎所有试验中都可以定义随机变量，但其存在性取决于是否有明确的量化方式和明确的样本空间，而非仅仅试验中有可能的结果.

- (T) 任何随机变量都可以是离散的或连续的.

  -说明：随机变量根据其值域的性质可以分类为离散随机变量和连续随机变量。离散随机变量的值域是可数的，而连续随机变量的值域是不可数的，如实数区间.

3.7.5 随机数

- (F) 随机数可以完全随机，不存在任何模式或可预测性.

  -说明：理论上，真随机数不存在任何可预测的模式。然而，在实际应用中，由于物理或算法限制，生成的随机数可能存在微小的模式或偏差，特别是在算法生成的伪随机数中.

- (T) 电脑程序中生成的随机数都是伪随机数.

  -说明：计算机通过算法生成的随机数实际上是伪随机数，这意味着它们是通过确定性的算法产生的，依赖于初始种子值。尽管它们表现得像随机数，但在给定相同的种子时将再现相同的序列.

4 数字特征与特征函数

4.1 数学期望

4.1.1 数学期望的定义

- (T) 数学期望是随机变量取得所有可能值的概率加权平均.

  -说明：数学期望定义为随机变量取得各个可能值的概率加权和，相当于该随机变量的平均值或期望值.

- (F) 数学期望的计算仅适用于离散随机变量.

  -说明：数学期望不仅适用于离散随机变量，也适用于连续随机变量。对于连续随机变量，期望是通过积分而不是求和来计算的.

4.1.2 数学期望的性质

- (T) 如果随机变量 ξ 和 η 独立，则 $E(\xi+\eta)=E(\xi)+E(\eta)$.

  -说明：这是数学期望的一个重要性质，称为期望的线性性。如果，那么它们的期望的和等于它们各自期望的和.

- (F) 对任意两个随机变量 ξ 和 η，$E(\xi+\eta)$ 总是等于 $E(\xi)E(\eta)$.

  -说明：$E(\xi\eta)=E(\xi)E(\eta)$ 只在随机变量 X 和 Y 相互独立时成立。如果 X 和 Y 有依赖关系，这个等式通常不成立.

概率论判断题 (第十三周)

4 数字特征与特征函数

4.1 数学期望

4.1.3 数学期望的计算

- (T) 若随机变量 ξ 和 η 独立且 η 的数学期望为零，则 $\xi\eta$ 的数学期望也必为零.

  -说明：根据独立随机变量的性质，$E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta)$ 。由于 η 的数学期望为零，故 $E(\xi\eta) = E(\xi) \cdot 0 = 0$.

- (F) 若随机变量 ξ 和 η 满足 $E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta)$ ，则 ξ 和 η 必定独立.

  -说明：$E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta)$ 是独立的充分条件，但不是必要条件。某些非独立的随机变量也可能满足这个等式.

4.2 其他数字特征

4.2.1 方差

- (F) 若随机变量 ξ 的方差存在且非零，则 ξ^2 的方差也存在且非零.

  -说明：虽然 ξ 的方差存在且非零，但 ξ^2 的方差可能由于 ξ 的分布特性导致发散。例如，对于重尾分布，ξ^2 的方差可能不存在.

- (T) 若随机变量 ξ 和 η 独立且具有相同的方差，则 $\xi + \eta$ 的方差等于 $2 \cdot \mathrm{D}(\xi)$.

  -说明：独立随机变量的方差相加，$\mathrm{D}(\xi + \eta) = \mathrm{D}(\xi) + \mathrm{D}(\eta) = 2 \cdot \mathrm{D}(\xi)$.

4.2.2 协方差与方差矩阵

- (F) 对于随机变量 ξ 和 η ，若 ξ 与 η 的协方差为零，则 ξ 与 η 必定独立.

  -说明：协方差为零是独立的必要条件，但不是充分条件。即使协方差为零，ξ 与 η 也可能存在非线性依赖关系.

- (F) 若随机变量 ξ 和 η 的协方差矩阵的特征值为零，则 ξ 和 η 必定是常数.

  -说明：协方差矩阵的特征值为零仅说明存在线性依赖关系，但不能断定 ξ 和 η 是常数。随机变量可能存在其他形式的关系.

概率论判断题 (第十四周)

4 数字特征与特征函数

4.3 其他数字特征

4.3.3 相关系数

- (T) 若随机变量 ξ 和 η 独立，则它们的条件系数 $\rho(\xi|\eta) = 0$.
  -说明：当随机变量 ξ 和 η 独立时，ξ 的条件分布不依赖于 η，因此条件系数 $\rho(\xi|\eta)$ 为 *0*.
- (F) 如果随机变量 ξ 和 η 的条件期望 $E(\xi|\eta)$ 存在，那么 $D(\xi|\eta)$ 一定等于 $D(\xi)$.
  -说明：$D(\xi|\eta)$ 是随机变量 ξ 在给定 η 的情况下的方差，而 $D(\xi)$ 是 ξ 的整体方差，通常情况下两者是不相等的.

4.3.4 矩

- (T) 若随机变量 ξ 的所有矩（即期望值的各阶幂）都存在且有限，则 ξ 的概率分布唯一确定.
  -说明：根据概率论中的一个重要定理，即若随机变量的所有矩都存在且有限，则这些矩唯一确定其概率分布.
- (F) 如果随机变量 ξ 和 η 的矩相同，那么它们一定是同分布的.
  -说明：矩相同的随机变量并不一定是同分布的。相同的矩并不能完全确定分布，除非是所有阶的矩都相同.

4.4 条件数学期望和最优预测

4.4.1 条件数学期望及性质

- (T) 条件数学期望 $E(\xi|\eta)$ 是随机变量 η 的函数.
  -说明：根据条件数学期望的定义，$E(\xi|\eta)$ 是在给定 η 的条件下，随机变量 ξ 的期望值，因此 $E(\xi|\eta)$ 是 η 的函数.
- (F) 对任意的随机变量 ξ 和 η，$E(\xi|\eta)$ 一定是 ξ 的线性函数.
  -说明：$E(\xi|\eta)$ 是 ξ 在给定 η 的条件下的期望，未必是 ξ 的线性函数，它是 η 的函数.

4.4.2 条件数学期望的应用

- (T) 在回归分析中，条件数学期望用于描述响应变量对解释变量的平均响应.
  -说明：在回归分析中，条件数学期望 $E(\eta|\xi = x)$ 用于描述响应变量 η 在解释变量 ξ 取某一特定值时的平均响应.
- (T) 在马尔可夫链中，下一步状态的期望值可以用当前状态的条件数学期望来表示.
  -说明：马尔可夫链的一个基本性质是无记忆性，下一步状态的期望值仅取决于当前状态，而不取决于之前的状态，因此可以用当前状态的条件数学期望来表示.

4.5 特征函数

4.5.1 特征函数的定义与基本性质

- (T) 随机变量 ξ 的特征函数 $f_\xi(t)$ 是其概率分布的傅里叶变换.
  -说明：随机变量 ξ 的特征函数 $f_\xi(t) = E(e^{it\xi})$ 实际上是其概率分布的傅里叶变换，这是特征函数的基本定义.
- (T) 特征函数的模一定小于等于 1.
  -说明：特征函数 $f_\xi(t) = E(e^{it\xi})$ 的模小于等于 *1*，因为 $e^{it\xi}$ 的模为 *1*，而期望值的模不会超过 *1*.

概率论判断题 (第十五周)

4 数字特征与特征函数

4.4 特征函数

4.4.2 反演公式与唯一性定理

- (F) 若两个随机变量 ξ 和 η 的特征函数 $f_\xi(t)$ 和 $f_\eta(t)$ 满足 $|f_\xi(t) - f_\eta(t)| \le e^{-|t|}$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 成立，则 ξ 和 η 具有相同的概率分布.

  -说明：尽管 $f_\xi(t)$ 和 $f_\eta(t)$ 的差异被一个衰减函数 $e^{-|t|}$ 所控制，但这并不保证 ξ 和 η 的特征函数完全相同，因此它们的分布也不一定相同。唯一性定理要求特征函数完全一致.

4.4.3 联合特征函数

- (F) 若随机变量 ξ 和 η 的联合特征函数 $f_{\xi,\eta}(t_1,t_2)$ 满足 $f_{\xi,\eta}(t_1,t_2) = e^{i(t_1+t_2)}$. 则 ξ 和 η 是独立的.

  -说明：联合特征函数 $f_{\xi,\eta}(t_1,t_2) = e^{i(t_1+t_2)}$ 不表示 ξ 和 η 是独立的。独立性要求联合特征函数能够分解为单个特征函数的乘积形式 $f_\xi(t_1) \cdot f_\eta(t_2)$.

4.5 多元正态分布

4.5.1 密度函数与特征函数

- (T) 设随机向量 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ 服从二维正态分布，且协方差矩阵为 $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$，则其特征函数 $f_\xi(\mathbf{t})$ 为 $f_\xi(\mathbf{t}) = e^{i\mu^\top \mathbf{t} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \mathbf{\Sigma} \mathbf{t}}$.

  -说明：多元正态分布的特征函数为 $f_\xi(\mathbf{t})$ 为 $f_\xi(\mathbf{t}) = e^{i\mu^\top \mathbf{t} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \mathbf{\Sigma} \mathbf{t}}$, 在此情形下，$\xi$ 的均值向量 μ 和协方差矩阵 $\mathbf{\Sigma}$ 被明确给出，特征函数形式符合上述表达.

4.5.2 多元正态分布的性质

- (F) 若随机向量 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ 服从二维正态分布且 ξ_1 和 ξ_2 的协方差为零，则 ξ_1 和 ξ_2 独立.

  -说明：对于多元正态分布，零协方差并不一定意味着独立，除非随机变量是正态分布的。对于其他类型的分布，零协方差不一定表示独立性。虽然在正态分布的特定情况下零协方差意味着独立，但题目中并未明确这一点.

概率论判断题 (第十六周)

5 大数定律与中心极限定理

5.1 大数定律

- (T) 大数定律表明，随着样本量增加，样本均值将几乎必然收敛于总体均值.

  -说明：当样本量 n 增加时，样本均值将几乎必然接近于总体均值。这意味着在足够大的样本量下，样本均值可以用来估计总体均值，并且样本均值和总体均值之间的差距会随着样本量的增加而减小。大数定律有两种形式：弱大数定律和强大数定律，后者给出了几乎必然收敛的更强保证.

- (F) 大数定律可以保证单个样本值会无限接近总体均值.

  -说明：大数定律保证的是样本均值（而不是单个样本值）随着样本量的增加会接近总体均值。单个样本值由于随机性的影响，可能会偏离总体均值。大数定律不适用于预测单个样本值的行为，它强调的是样本均值的行为.

5.2 中心极限定理

- (T) 中心极限定理表明，无论样本分布如何，当样本量足够大时，样本均值的分布将接近正态分布.

  -说明：当样本量 n 足够大时，来自任意分布的独立同分布随机变量的样本均值分布将趋近于正态分布，即使原始变量的分布不是正态分布.

- (F) 中心极限定理适用于样本量很小的情况.

  -说明：中心极限定理适用于样本量较大的情况。当样本量较小时，样本均值的分布未必接近正态分布。.