aglaia norza

Logica Matematica

appunti delle lezioni
libro del corso: tbd

10/10/2025

Contents

1. Logica Proposizionale

1.1. Introduzione

Definiamo alcuni concetti fondamentali

def. 1: Linguaggio proposizionale

Un linguaggio proposizionale è un insieme infinito $\mathcal{L}$ di simboli detti **variabili proposizionali**, tipicamente denotato come $\{p_i : i \in I\}$ (con I "insieme di indici").

def. 2: Proposizione

Una **proposizione** in un linguaggio proposizionale è un elemento dell'insieme PROP così definito:

1. tutte le variabili appartengono a PROP
2. se $A \in$ PROP, allora $\neg A \in$ PROP
3. se $A, B \in$ PROP, allora $(A \wedge B), (A \vee B), (A \implies B) \in$ PROP
4. nient'altro appartiene a PROP (PROP è il più piccolo insieme che contiene le variabili e soddisfa le proprietà di chiusura sui connettivi 1 e 2)

Per facilitare la leggibilità delle formule, definiamo le seguenti regole di *precedenza*: $\neg$ ha precedenza su $\wedge, \vee$, e questi ultimi hanno precedenza su $\implies$.

Per formalizzare le tavole di verità, introduciamo anche il concetto di assegnamento. Ogni riga di una tavola di verità corrisponde ad un assegnamento diverso.

Per un linguaggio $\mathcal{L}$, un **assegnamento** è una funzione

$$\alpha : \mathcal{L} \to \{0, 1\}$$

Estendiamo α ad $\hat{\alpha}$: PROP $\to \{0, 1\}$ in questo modo:

- $\hat{\alpha}(\neg A) = \begin{cases} 1 & A = 0 \\ 0 & A = 1 \end{cases}$
- $\hat{\alpha}(A \wedge B) = \begin{cases} 1 & \hat{\alpha}(A) = \hat{\alpha}(B) = 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$
- $\hat{\alpha}(A \vee B) = \begin{cases} 0 & \hat{\alpha}(A) = \hat{\alpha}(B) = 0 \\ 1 & altrimenti \end{cases}$

- $\hat{\alpha}(A \Rightarrow B) = \begin{cases} 0 & \hat{\alpha}(A) = 1 \wedge \hat{\alpha}(B) = 0 \\ 1 & altrimenti \end{cases}$

notazione

Utilizzeremo α al posto di $\hat{\alpha}$ per comodità di notazione.