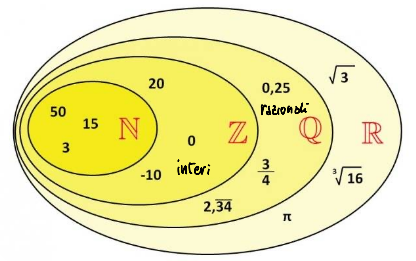
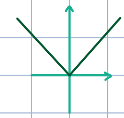


MODULO

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



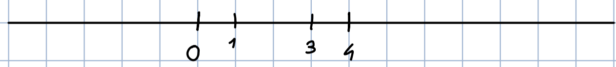
$|x - n| > z$ tutti i punti che distano più di z da n (non $-n$)

$ < z$ tutti i punti che distano meno di z da n

$|x-1| > 2$

$E = \{ x \in \mathbb{R} : |x-1| + |x-3| \leq 4 \}$

① numeri tali che la somma delle distanze da $+1$ e da $+3$ sia ≤ 4



quindi $[0; 4]$ — dista 3 da 1 + 1 da 3 = 4; dista 3 da 3 + 1 da 1 = 4

② oppure (metodo più accurato)

$$|x-1| \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{se } x-1 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

(non è necessario fare questo, posso metterli direttamente nella tabella)

$$|x \;\; 3| \begin{cases} x-3 & \text{se } x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{se } x-3 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3 & \text{se } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

$x < 1$	$1 \leq x < 3$	$x \geq 3$	
$-x+1$	$x-1$	$x-1$	①
$-x+3$	$-x+3$	$x-3$	②

① + ② ≤ 4

$$E = \begin{cases} -x+1-x+3 \leq 4 \\ x < 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1-x+3 \leq 4 \\ 1 \leq x < 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1+x-3 \leq 4 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + \cancel{4} \leq \cancel{4} \\ x < 1 \end{cases} \cup \begin{cases} 2 \leq 4 \\ 1 \leq x < 3 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x - 4 \leq 4 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x \leq 0 \\ x < 1 \end{cases} \cup \begin{cases} (2 \leq 4 \text{ sempre}) \\ 1 \leq x < 3 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x \leq 8 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 1 \end{cases} \cup \begin{cases} 1 \leq x < 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

se x è ≥ 0 e < 1

l'intervallo è $[0; 1) \cup [1; 3) \cup [3; 4]$

l'unione tra questi intervalli è $[0; 4]$

In generale

$|x-a| \leq b \iff -b \leq x-a \leq b$

$\iff a-b \leq x \leq a+b = [a-b; a+b]$

$|x-a| \geq b \iff x-a \geq b$

($\cup$) oppure $x-a \leq b$

INTERVALLI

Unione di due intervalli: $[0,1]$ $[2,3]$ non è un intervallo
$[1,3]$ $[2,5]$ sì $[0,1]$ $(1,6]$ sì

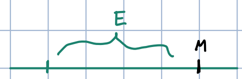
l'intersezione tra due intervalli è intervallo se non è vuota $[0,2] \cap [1,3] = [1,2]$ $[0,1] \cap [2,3] = \emptyset$

- intervallo degenere → c'è solo un numero nell'intervallo

MASSIMO E MINIMO

nelle unioni tra intervalli, sup e inf sono i più grande e piccolo

$\boxed{\text{massimo}}$: $\exists\ M \in E : M \geq x\ \forall x \in E$ $\quad E \subseteq \mathbb{R}$



M è l'elemento più grande di E

$E = [a,b]$ $\quad b = \max(E)$ $\quad F = (a,b)$ $\quad \nexists \max(F) \implies b$ è $\sup(F)$ ma non max

l'insieme $M(E)$ è l'insieme di numeri reali a destra di E

$E = [a,b]$ $\quad M(E) = [b, +\infty)$

$F = (a,b)$ $\quad M(F) = [b, +\infty)$ anche se b non è il max di F

sia $M(E)$ che $M(F)$ hanno un minimo: $\min M(E) = b \implies b = MAX(E)$
$\min M(F) = b \implies b = \sup(F)$

la stessa cosa vale per il $\boxed{\text{minimo}}$ (con $m(E)$ insieme di numeri a sinistra di E e $\max m(E) = \inf(E)$)
$\exists\ m \in E : m \leq x\ \forall x \in E$

limitatezza

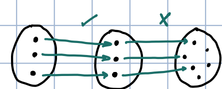
$\sup(E) = x$ limitato sup.
$\sup(E) = +\infty$ illimitato sup.

$\inf(E) = x$ limitato inf.
$\inf(E) = -\infty$ illimitato inf.

FUNZIONI

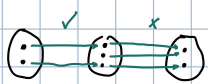
- al dominio è associato UN SOLO elemento del codominio

- suriettiva – ogni elemento del codominio è associato almeno a un elemento del dominio



sul grafico, tutte le rette orizzontali intersecano in almeno un punto

- iniettiva – se $x \neq y$, $f(x) \neq f(y)$



sul grafico, tutte le rette orizzontali intersecano in al più un punto

- biunivoca/biiettiva/invertibile – è sia suriettiva che iniettiva

- PARI $\quad \forall x \quad f(x) = f(-x)$ grafico simmetrico rispetto all'asse y $\quad$ es x^n con n pari

- DISPARI $\quad \forall x \quad f(-x) = -f(x)$ grafico simmetrico rispetto all'origine $\quad$ es. x^n con n dispari

DOMINI

- razionali intere $\mathbb{R}$
- razionali fratte $\quad$ denominatore $\neq 0$
- $\sqrt{\ }$ irrazionali
  - n pari $\quad x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$
  - n dispari $\quad$ dominio di $f(x)$
- logaritmiche $\quad f(x) > 0$ (argomento del log) $\quad$ base $\neq 1$ e > 0
- esponenziali $\quad y = [f(x)]^{g(x)}$ $\quad f(x) > 0 \cap$ dominio $g(x)$

  $f(x)^\alpha$ con α irrazionale
  - $f(x) \geq 0 \quad \alpha > 0$
  - $f(x) > 0 \quad \alpha < 0$

- seno e coseno $\mathbb{R}$
- tangente $\quad \mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \}\ k \in \mathbb{Z}$
- cotangente $\quad \mathbb{R} - \{ k\pi \}\ \ k \in \mathbb{Z}$
- arcsin e arccos $\quad [-1; 1]$
- arctan e arccot $\quad \mathbb{R}$

per più condizioni, intersezioni

LOGARITMI

- $\log_A(A^x) = x$
- $A^{\log_A(y)} = y \quad \forall\, y > 0$
- $\log_A 1 = 0$
- $\log_A\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_A(x)$
- PRODOTTO: $\log_A(x \cdot y) = \log_A x + \log_A y$
- RAPPORTO: $\log_A\left(\frac{x}{y}\right) = \log_A x - \log_A y$
- ESPONENTE: $\log_A x^n = n \cdot \log_A x$
- CAMBIO DI BASE: $\log_A(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$

- $n = a^{\log_a(n)}$ UTILE!!

$\log_4(x^2 - 5x + 7) \geq 0$

$4^{\log_4(x^2-5x+7)} \geq 4^0$

$x^2 - 5x + 7 \geq 1$

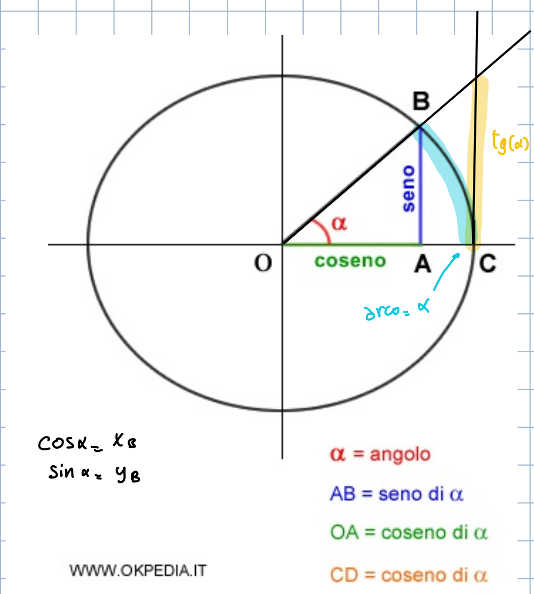
- $n = \log_a(a^n)$ $\quad 5 = \log_2(2^5)$

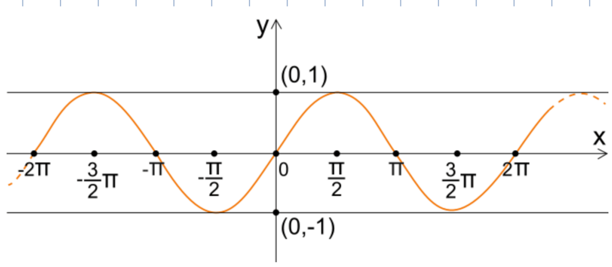
- INVERSIONE $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$\boxed{\text{DISEQ.}}$ $\log_3(x-8) \geq 2 \iff 3^{\log_3(x-8)} \geq 3^2 \iff x - 8 \geq 9$

con $\log(x) \geq$ qualcosa $\longrightarrow e^{\log(x)} \geq e^{\text{qualcosa}}$

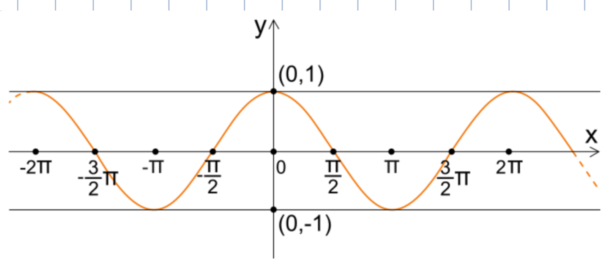
TRIG





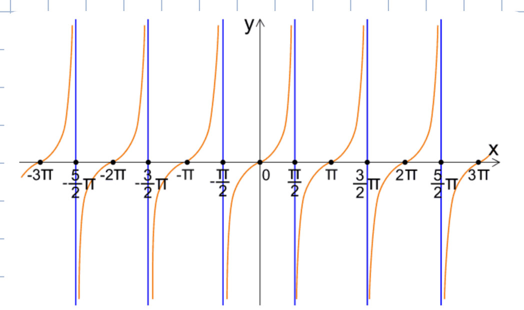
SENO $\quad -1 \leq \sin\alpha \leq 1 \quad |\sin\alpha| \leq 1$

è una funzione DISPARI $\quad$ periodo: 2π $\quad$ biunivoca in: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



COSENO $\quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1 \quad |\cos\alpha| \leq 1$

è una funzione PARI $\quad$ periodo = 2π $\quad$ biunivoca in $[0, \pi]$



	Dominio	Codominio	Periodo	Biunivoca tra
Seno	R	$[-1,1]$	2π	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
Coseno	R	$[-1,1]$	2π	$[0,\pi]$
Tangente	$R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\right\}$	R	π	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
Cotangente	$R - \{k\pi,\ k \in Z\}$	R	π	$(0,\pi)$

TANGENTE $\quad tg(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad D: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}\ k \in \mathbb{Z}$

è una funzione dispari $\quad$ è biunivoca in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

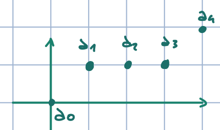
$f(x) = \sqrt{\sin(x) - \frac{1}{2}}$ $\quad$ C.E. $\sin(x) \geq \frac{1}{2} \longrightarrow$ da $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{5}{6}\pi$

quindi $2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\cos^2(x) < \frac{1}{4} \quad |\cos x| < \sqrt{\frac{1}{4}} \quad -\frac{1}{2} < \cos(x) < \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ o $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

SUCCESSIONI

Associano a ogni numero naturale n un numero reale $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to a_n$



- $\lim_{n \to +\infty} a_n$

- successione costante tende alla costante $a_n = 3$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 3$
- Successione che assume valori diversi $a_n \begin{cases} 3 & n \geq \text{qualcosa} \\ 0 & n < \text{qualcosa} \end{cases}$ è 3.
- Successione che "singhiozza" → non ammette limite $a_n \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$

rapporti tra numeri ed infiniti			
$\frac{a}{0} = \pm\infty \quad a \neq 0$	$\frac{a}{\pm\infty} = 0$	$\frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty$	$\frac{0}{\pm\infty} = 0$
somme, prodotti e rapporti tra numeri ed infiniti			
$+\infty \pm a = +\infty$	$-\infty \pm a = -\infty$	$\pm\infty \cdot a = \pm\infty$ ($a = 0$ F.I.)	$\frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty$
somme e prodotti tra infiniti			
$+\infty + \infty = +\infty$	$-\infty - \infty = -\infty$	$(\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = \pm\infty$	$+\infty - \infty$ F.I.
potenze con infiniti			
$+\infty^a = +\infty \quad a > 0$	$+\infty^a = 0 \quad a < 0$	$(-\infty)^n = +\infty \quad n \text{ pari}$	$(-\infty)^n = -\infty \quad n \text{ dispari}$
$+\infty^{+\infty} = +\infty$	$+\infty^{-\infty} = 0$	$0^{+\infty} = 0$	$0^{-\infty} = +\infty$

il limite di somma/differenza/prodotto/rapporto è "" del limite

- $\sqrt{n} \to +\infty$
- $\frac{n}{n+1} \to 1$

TEOREMI

es. sin/cos ma anche $(-1)^n$

- se a_n è limitata e $b_n \to 0$, $a_n \cdot b_n \to 0$

non amm. limite ma è limitata $(a\ -1;1)$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n+1} = \sin(n) \cdot \frac{1}{n+1} \to 0$ ($\frac{1}{n+1} \searrow 0$)

- teorema dei carabinieri

se $a_n \leq x_n \leq b_n$ $\quad a_n \to L$, $b_n \to L$ $\quad x_n \to L$

$0 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n+1}$

Chi diverge più velocemente?

$n^n \;@\; n! \;@\; B^n \;@\; A^n \;@\; n^\beta \;@\; n^\alpha \;\; [\log(n)]^\gamma \qquad 1 < A < B \qquad 0 < \alpha < \beta$

$\frac{n^3 \cdot 3^n}{8^n} = \frac{n^3 \cdot 3^n}{2^n \cdot 4^n} = \frac{n^3}{2^n} \cdot \frac{3^n}{4^n} = 0 \cdot 0$

$\frac{n^3 \cdot 3^n}{4^n} = \frac{n^3}{4/3^n} \to 0$

prodotto al num? prendiamo quello dei due che va più veloce e moltiplichiamo per qualcosa

$\frac{n^3 \cdot 3^n}{n!}$ devo trasf. in $\frac{n^2}{a_n} \cdot \frac{3^n \cdot a_n}{n!}$

se provo 3^n $\frac{n^2}{3^n} \cdot \frac{9^n}{n!} \to 0 \cdot 0$

- POLINOMI ⟶ An^K + pezzi di grado minore di K $\begin{cases} +\infty & A > 0 \\ -\infty & A < 0 \end{cases}$

perché isolando il termine di grado massimo esso tenderà a infinito, mentre i termini per cui verrà moltiplicato tenderanno il primo a ± 1 e gli altri a 0 ⟶ saranno in forma $\frac{1}{n}$

- POLINOMI/POLINOMI ⟶ $\frac{An^K + \text{pezzi di grado minore}}{Bn^h + \text{pezzi di grado minore}}$
  - grado num > grado den: $\frac{A}{B} < 0$ $-\infty$; $\frac{A}{B} > 0$ $+\infty$ (segni discordi)
  - $h = k$ ⟶ $\frac{A}{B}$
  - grado num < grado den ⟶ 0

per la messa in evidenza di n^K e n^h che divergono più velocemente

- NEPERO/STIRLING

attenzione! $[e^{-\text{qualcosa}}]^{+\infty} \to 0$ (perché è $\frac{1}{e^x}^{\infty}$)

se $b_n \to +\infty \implies \left(1 + \frac{A}{b_n}\right)^{b_n} = e^A$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}} = 1$

come b_n scelgo quella nella par.

$\left(1 + \frac{7n}{n^2+2}\right)^n = \left(1 + \frac{7n}{n^2+2}\right)^{n \cdot \frac{n^2+2}{n} \cdot \frac{n}{n^2+2}} =$ (perché $\frac{7n}{n^2+2}$)

$= \left[\left(1 + \frac{7n}{n^2+2}\right)^{\frac{n^2+2}{n}}\right]^{\frac{n^2}{n^2+2} \to 1} \to 1 \cdot e^7$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\; 3^n}{n^n} = \frac{n!}{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}} \cdot 3^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$

$= \frac{n!}{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{3^n}{e^n} \cdot \sqrt{2\pi n} = \underbrace{\frac{n!}{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}}}_{1} \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{e^n}\right)^n}_{+\infty} \cdot \underbrace{\sqrt{2\pi n}}_{+\infty} \longrightarrow 1 \cdot \infty \cdot \infty = +\infty$

$\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{2n} = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{2n \cdot \frac{n^3}{n^3}} = \left(\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3}\right)^{\frac{2n}{n^3} \to +\infty} \to e^{+\infty} = +\infty$

QUESTO VALE ANCHE A $-\infty$

TRAPPOLA!

$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ n non tende a 0!! $= \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} = \left(\frac{n+1-1}{n-1}\right)^{-n} = \left(\frac{n-1}{n-1} + \frac{1}{n-1}\right)^{-n} =$

$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{\frac{n}{n-1} \to 1}} \longrightarrow \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e}$

FORME INDETERMINATE

- $\lim_{n \to +\infty} \text{polinomio} = +\infty - \infty$
- $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \dfrac{\infty}{\infty}$

- $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{A} - \sqrt{B} = +\infty - \infty$ $\qquad (\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B$

  quindi moltiplico e divido per $\sqrt{A} + \sqrt{B}$

- $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = +\infty - \infty$ $\qquad \left(\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}\right)\left[\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{AB} + \left(\sqrt[3]{B}\right)^2\right] = A - B$

  quindi moltiplico e divido per $\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{AB} + \left(\sqrt[3]{B}\right)^2$

- $0 \cdot \infty \longrightarrow$ o limiti notevoli, o scomposizione

- $\dfrac{0}{0} \longrightarrow$ limiti notevoli

$$\left.\begin{array}{l} e^{a_n} - 1 \to 0 \\ \ln(1 + a_n) \to 0 \\ \sin(a_n) \to 0 \\ \tan(a_n) \to 0 \\ \arcsin(a_n) \to 0 \\ \arctan(a_n) \to 0 \end{array}\right]$$

Una qualsiasi di queste, divisa per a_n, tende a 1

SOLO SE $a_n \to 0$!!!

ricorda $\dfrac{\sin(n)}{n} = 0$

$$\begin{array}{l} e^{a_n} - 1 \simeq a_n \\ \ln(1 + a_n) \simeq a_n \\ \sin(a_n) \simeq a_n \\ \tan(a_n) \simeq a_n \\ \arcsin(a_n) \simeq a_n \\ \arctan(a_n) \simeq a_n \end{array}$$

$1 - \overset{\cos(a_n) \to 1}{\cos(a_n)} \to 0 \qquad \dfrac{1 - \cos(a_n)}{a_n^2} \to \dfrac{1}{2} \qquad 1 - \cos(a_n) \simeq \dfrac{a_n^2}{2}$ o $\dfrac{1}{2} \cdot a_n^2$

RICORDA! PER $\lim_{x \to 0}$, i limiti notevoli valgono così come sono

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

modello esercizio:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\arctan\left(\frac{8^n}{n!}\right)}{1 - \cos\left(\frac{5}{2^n}\right)}$$

① dato che $8^n/n! \to 0$, $\arctan(8^n/n!) \simeq 8^n/n!$

② dato che $5/2^n \to 0$, $1 - \cos 5/2^n \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2^n}\right)^2 = \frac{25}{2 \cdot 4^n}$

pertanto $\dfrac{\arctan(8^n/n!)}{8^n/n!} \cdot \underbrace{\dfrac{8^n/n!}{25/2 \cdot 4^n}}_{\frac{8^n}{n!} \cdot \frac{2 \cdot 4^n}{25}} \cdot \dfrac{25/2 \cdot 4^n}{1 - \cos(5/2^n)} =$

$= \dfrac{\arctan(8^n/n!)}{8^n/n!} \cdot \dfrac{32^n}{n!} \cdot \dfrac{2}{25} \cdot \dfrac{25/2 \cdot 4^n}{1 - \cos(5/2^n)} \longrightarrow 1 \cdot 0 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

SUCCESSIONI MONOTONE e LIMITATEZZA

- successione — monotona crescente $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ↗
  - monotona decrescente $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ↘

$a_n = \frac{n}{n+1} \qquad a(n+1) = \frac{n+1}{n+1+1} = \frac{n+1}{n+2}$

$\frac{n+1}{n+2} \overset{?}{\geq} \frac{n}{n+1}$ moltiplico a croce

$(n+1)^2 \overset{?}{\geq} n(n+2) \qquad n^2+2n+1 \overset{?}{\geq} n^2+2n$ SEMPRE

è monotona crescente

· vero $\forall n$ → mon cr. falso $\forall n$ → decr

sennò → non è monotona

calcolare sup e inf e dire se sono max e min

$a_n \nearrow \quad E = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \sup(E) = \lim_{n \to +\infty} a_n$

$\inf(E) = a_0$ è sempre min (è il primo elemento)

$a_n \searrow \quad E = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \sup(E) = a_0$ è sempre max (è il primo elemento)

$\inf(E) = \lim_{n \to +\infty} a_n$

inf e sup sono min e max se $\in E$

quindi uguagliare inf/sup a a_n e vedere se l'equazione dà risultati

$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n+3}{2n+5} \nearrow = 1 \qquad \frac{2n+3}{2n+5} = 1 \iff 2n+3 = 2n+5 \iff 3 = 5$ FALSO! $\nexists \max(E)$

COSE STUPIDE CHE DOVREI SAPERE

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$ax^2 + bx + c = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- pure → $ax^2 + c$

  $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

- spurie → $ax^2 + bx$

  $x_1 = 0 \qquad x_2 = -\frac{b}{a}$

- monomie → $ax^2 = 0$

  $x_1 = x_2 = 0$

frazioni equivalenti			
può essere utile ricordare alcune operazioni che si possono compiere sulle frazioni per applicare i limiti notevoli			
$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}}$	$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{n} \cdot n}{\frac{b}{m} \cdot m}$	$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$	$\frac{a}{b} = \frac{a+n-n}{b+m-m}$
$\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}$	$\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{\frac{a \cdot b}{n}}{\frac{d \cdot c}{n}}$	$\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{a \cdot b \cdot n}{c \cdot d \cdot n}$	$\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{a \cdot b + n - n}{c \cdot d + m - m}$
$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c+d} + \frac{b}{c+d}$	$\frac{a+b}{c+d} = \frac{\frac{a}{n} + \frac{b}{n}}{\frac{c}{n} + \frac{d}{n}}$	$\frac{a+b}{c+d} = \frac{(a+b) \cdot n}{(c+d) \cdot n}$	$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a+b+n-n}{c+d+m-m}$
$\frac{a \cdot b}{c+d} = a \cdot \frac{b}{c+d}$	$\frac{a \cdot b}{c+d} = \frac{\frac{a \cdot b}{n}}{\frac{c}{n} + \frac{d}{n}}$	$\frac{a \cdot b}{c+d} = \frac{a \cdot b \cdot n}{(c+d) \cdot n}$	$\frac{a \cdot b}{c+d} = \frac{a \cdot b + n - n}{c+d+m-m}$
$\frac{a+b}{c \cdot d} = \frac{a+b}{c} \cdot \frac{1}{d}$	$\frac{a+b}{c \cdot d} = \frac{\frac{a}{n} + \frac{b}{n}}{\frac{c \cdot d}{n}}$	$\frac{a+b}{c \cdot d} = \frac{(a+b) \cdot n}{c \cdot d \cdot n}$	$\frac{a+b}{c \cdot d} = \frac{a+b+n-n}{c \cdot d + m - m}$

· per diseq. come $(x-6)(x-7)(x-8) \leq 0$ o $\frac{x-2}{x-3} \leq 0$
per scrivere gli intervalli considera
gli "elementi" ≥ 0 $(x \geq 6,\ x \geq 7,\ x \geq 8)$ e $(x \geq 2,\ x \geq 3)$
poi fai schema
e prendi i pezzi in cui TUTTO è ≤ 0

Continuità $\longrightarrow \lim_{x \to x_0^+} = \lim_{x \to x_0^-} = f(x_0)$

ESISTENZA DEGLI ZERI

con $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

se $f(a) \cdot f(b) < 0$ esiste uno zero

(valori discordi agli estremi) — anche con i LIMITI

$(-\infty; 0]$

$f(0) = 0$ — discordi

$\lim_{x \to -\infty} = -\infty$

ROLLE $\longrightarrow$ $f(x)$ continua e derivabile in $[a,b]$

se $f(a) = f(b)$ esiste un punto interno ad $[a,b]$ in cui $f'(x) = 0$

LAGRANGE $\longrightarrow$ $f(x)$ cont. in $[a,b]$ e der. in (a,b)

in $[a,b]$ esiste un punto in cui la derivata = coeff. angolare della retta che congiunge a e b

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

WEIERSTRASS + VALORI INTERMEDI

- Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ allora esistono max e min di $f(x)$ in $[a,b]$

- la funzione assume tutti i valori tra M e m (massimo e minimo)
  - l'immagine $f[a,b] = [m, M]$

GENERALIZ. VALORI INTERMEDI

per $f((a,b)) = (\lim_{x \to a^+}, \lim_{x \to b^-})$

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, limiti a $\pm\infty$:
  - due $+\infty \longrightarrow$ ha un minimo
  - due $-\infty \longrightarrow$ ha un massimo
  - infiniti discordi $\longrightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ è suriettiva

PUNTI MIN/MAX

- estremi intervallo
- punti stazionari
- punti in cui la der. non esiste

TAYLOR

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}_{\text{polinomio grado } \leq n} + \underbrace{o((x-x_0)^n)}_{\text{infinitesimo di ordine superiore a } n}$$

$$= \underbrace{f(x_0)}_{T_0} + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{T_1} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}_{T_2} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$\boxed{e^t}$

$$T_n(e^x; 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$= \underbrace{1}_{T_0} + \underbrace{x}_{T_1} + \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{T_2} + \underbrace{\frac{x^3}{6}}_{T_3} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$\boxed{\sin x}$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$= \underbrace{x}_{T_1, T_2} - \underbrace{\frac{x^3}{3!}}_{T_3, T_4} + \underbrace{\frac{x^5}{5!}}_{T_5, T_6} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \dots$$

$\boxed{\cos x}$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

$$= \underbrace{1}_{T_0, T_1} - \underbrace{\frac{x^2}{2!}}_{T_2, T_3} + \underbrace{\frac{x^4}{4!}}_{T_4, T_5} - \underbrace{\frac{x^6}{6!}}_{T_6, T_7} + \frac{x^8}{8!} \dots$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x}}$$

- $$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$-1^k (-x)^k$

- $$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + o(x^n)$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

- $$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k + o(x^{2n})$$

$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\boxed{\log x}$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k + x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

DERIVATE

DERIVATA: limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L$$

→ se $L \in \mathbb{R}$ (il limite è finito), la funzione è derivabile in x_0

DERIVATE FONDAMENTALI

- SOMMA / DIFFERENZA → somma/differenza delle derivate

- PRODOTTO $[f(x) \cdot g(x)]' \longrightarrow f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ der prima · seconda + prima · der seconda

  PRODOTTO CON COSTANTE $[A \cdot f(x)]' = A \cdot f'(x)$ costante · derivata funz.

- RAPPORTO $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ $\quad \frac{\text{der. prima} \cdot \text{seconda} - \text{prima} \cdot \text{der. seconda}}{\text{seconda al quadrato}}$

- RECIPROCO $\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$ $\quad -\frac{\text{derivata del den}}{\text{den al quadrato}}$

- COMPOSTA $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ derivata $f(g)$ · derivata $g(x)$

  · $e^{2x} = \underbrace{2}_{\text{der. } 2x}\underbrace{e^{2x}}_{\text{der. } e^{2x}}$

es. $[\ln x^3]' = \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\text{der } \ln x^3} \cdot \underbrace{3x^2}_{\text{der } x^3}$

· $[(2x+5)^3]' = [(2x+5)^3]' \cdot [2x+5]' = 3 \cdot (2x+5)^2 \cdot 2 = 6(2x+5)^2$

- COSTANTE $f'(c) = 0$

- POLINOMIO I GRADO $[Ax + B]' = A$ (coeff. della variabile)

- $[x]' = 1$

- $[x^2] = 2x$

- POTENZA $[x^\alpha]' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$ (potenza · base alla (potenza − 1))

- RADICE QUADRATA $[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- RADICE GENERICA $\left[\sqrt[n]{x^m}\right]' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$

- ESPONENZIALE $[a^x]' = a^x \ln a$

- con e $[e^x]' = e^x$

- LOGARITMO $[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$

- con ln $[\ln x]' = \frac{1}{x}$

- SENO $[\sin x]' = \cos x$

- COSENO $[\cos x]' = -\sin x$

- TANGENTE $[\tan x] = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

- COTANGENTE $[\cot x]' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$