aglaia norza

Linguaggi di Programmazione

appunti delle lezioni
libro del corso: non usato, integrati con le dispense del professor Cenciarelli

06/10/2025

Contents

1. Algebre induttive

1.1. I numeri naturali

def. 1: Assiomi di Peano

L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali si può definire mediante i cinque **assiomi di Peano**:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{succ}(n) \in \mathbb{N}$
3. $\nexists n \in \mathbb{N} \mid 0 = \text{succ}(n)$
4. $\forall n, m\ \text{succ}(n) = \text{succ}(m) \Rightarrow n = m$ (iniettività)
5. $\forall S \subseteq \mathbb{N}\ (0 \in S \land (n \in S \Rightarrow \text{succ}(n) \in S) \Rightarrow S = \mathbb{N})$ (assioma di induzione)

assioma di induzione

L'assioma di induzione è necessario per evitare di equiparare ai numeri naturali insiemi che, essenzialmente, contengono una struttura come quella di $\mathbb{N}$, e un "qualcosa in più". (Se all'interno dell'insieme A che stiamo considerando esiste un altro sottoinsieme proprio che rispetta gli altri assiomi, A non rispetterà il quinto assioma di Peano).

In più, il quinto assioma di Peano ci fornisce essenzialmente una definizione insiemistica di induzione.

def. 2: Principio di Induzione

L'induzione può essere definita, basandosi sulle "proprietà" invece che sull' insiemistica, come segue:

$$\forall P \quad \frac{P(0), \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)}{\forall n\ P(n)}$$

(la notazione equivale a $P(0) \land (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n P(n)$)

Possiamo dimostrare che il quinto assioma di Peano è equivalente al principio di induzione (in quanto i concetti di "proprietà" e "sottoinsieme" sono equivalenti).

Infatti, ad ogni proprietà corrisponde un sottoinsieme i cui elementi sono esattamente quelli che soddisfano tale proprietà

Prendiamo quindi $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ è vera}\}$.

In questo modo, dire $P(0)$ equivale a dire $0 \in S$, e dire $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ equivale a dire $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$. E, allo stesso modo, dire $\forall n P(n)$ equivale a dire $\forall n, n \in S$, ovvero $S = \mathbb{N}$.

def. 3: Numeri di von Neumann

Un altro modo di descrivere i numeri naturali viene dal matematico **John von Neumann**, che definisce i numeri naturali (”numeri di von Neumann”, $\mathcal{N}$) in questo modo:

- $0_{\mathcal{N}} = \emptyset$ (ovvero $\{\}$)
- $1_{\mathcal{N}} = \{0_{\mathcal{N}}\}$ (ovvero $\{\{\}\}$)
- $2_{\mathcal{N}} = \{0_{\mathcal{N}}, 1_{\mathcal{N}}\}$ (ovvero $\{\ \{\}, \{\{\}\}\ \}$)
- ...

I numeri di von Neumann rispettano gli assiomi di peano! (dalle dispense)

dim!

1.2. Algebre, algebre induttive

nota: insieme unità e funzione nullaria

Ci è utile definire l'**insieme unità** $\mathbb{1} = \{*\}$. $\mathbb{1}$ è un insieme formato da un solo elemento (non ci interessa quale).

Un altro concetto che ci servirà è quello di **funzione costante** o **nullaria**. Una funzione nullaria f è tale che:

$$f : \mathbb{1} \to A \mid f() = a \quad a \in A$$

(chiaramente, essa è sempre iniettiva).

nota

Una funzione nullaria su un insieme A può essere vista come un elemento di A (un qualsiasi insieme A è isomorfo a all'insieme di funzioni $\mathbb{1} \to A$ (l'insieme di funzioni $\mathbb{1} \to A$ ha la stessa cardinalità di A), il che ci permette di **trattare gli elementi di un insieme come funzioni**.

def. 4: Algebra

Una **algebra** è una tupla (A, Γ), dove:

- A è l'insieme di riferimento (”carrier” o ”insieme sottostante”)
- $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i\}$, è l'insieme di funzioni chiamate ”operazioni fondamentali” o ”costruttori” dell'algebra

  la segnatura dei costruttori è: $\gamma_i : A^{\alpha_i} \times K_i \to A$.

nota

Tra le algebre, consideriamo anche le algebre eterogenee, che prendono argomenti da insiemi diversi da A.

def. 5: Chiusura di un insieme rispetto ad un'operazione

Sia $f : A^n \times K \to A$ un'operazione su A con parametri esterni $K = (K_1 \times \cdots \times K_m)$.

Un insieme $S \subseteq A$ si dice **chiuso** rispetto ad f quando:

$$a_1, \dots, a_n \in S \;\Rightarrow\; f(a_1, \dots, a_n, k_1, \dots, k_n) \in S$$

def. 6: Algebra induttiva

Un'algebra A, Γ si dice **induttiva** quando:

1. tutte le $\gamma_i \in \Gamma$ sono iniettive
2. $\forall i, j \mid i \neq j,\ \text{Im}(\gamma_i) \cap \text{Im}(\gamma_j) = \emptyset$, ovvero tutte le γ_i hanno immagini disgiunte
3. $\forall S \subseteq A$, se S è chiuso rispetto a tutte le γ_i, allora $S = A$ (ovvero il principio di induzione è rispettato)

terza condizione

La terza condizione pone quindi che A sia la più piccola sotto-algebra di se stessa (ovvero non abbia sotto-algebre diverse da se stessa).

nota

Le tre condizioni garantiscono quindi che:

- ci sia solo un modo per costruire ogni elemento dell'algebra (*i, ii*)
- non ci siano "elementi inutili" (*iii*)

Vediamo come possiamo costruire $\mathbb{N}$ come algebra induttiva.

La definizione di algebra induttiva non considera il concetto di "elemento", quindi, per il primo assioma di Peano, usiamo una *funzione costante* $\mathbb{0}$, con segnatura:

$$\mathbb{1} \times \mathbb{N} : x \to 0$$

Abbiamo quindi una tupla $(\mathbb{N}, \{\text{succ}, \mathbb{0}\})$.

Per dimostrare che questa tupla sia un'algebra induttiva, dobbiamo ora verificare le tre condizioni:

1. tutte le γ_i sono induttive:
   - $\mathbb{0}$ è necessariamente induttiva
   - succ è induttiva per il secondo assioma di Peano

2. tutti i costruttori hanno immagini disgiunte:

   • grazie al terzo assioma di Peano ($\nexists n \in \mathbb{N} \mid 0 = \text{succ}(n)$), sappiamo che succ e $\mathbb{0}$ hanno immagini disgiunte

3. principio di induzione:

   • è verificato dal quinto assioma di Peano ($0 \in S$ corrisponde alla chiusura rispetto a $\mathbb{0}$ e $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{succ}(n) \in \mathbb{N}$ corrisponde alla chiusura rispetto a succ)

liste finite come algebra induttiva

Dato un insieme A, indichiamo con $A - list$ l'insieme delle liste finite di elementi di A.

La tupla $(A - list,$ empty, cons$)$ è un'algebra induttiva, dove:

- empty: $\mathbb{1} \to A - list$ è la funzione costante che restituisce la **lista vuota** "$\langle\rangle$".
- cons: $A \times A - list \to A - list$: $\text{cons}(3, \langle 5, 7\rangle) = \langle 3, 5, 7\rangle$ è la funzione che **costruisce una lista** aggiungendo un elemento in testa

Il fatto che si tratti di un'algebra induttiva è piuttosto evidente, in quanto i due costruttori hanno immagini chiaramente disgiunte, sono entrambi chiusi per $A - list$, e c'è un unico modo per costruire ogni lista.

liste infinite

Le liste infinite non possono essere un'algebra induttiva, in quanto contengono una sotto-algebra induttiva (quella delle liste finite).

alberi binari come algebre induttive

L'insieme degli alberi binari finiti $(\texttt{B-trees},$ leaf, branch$)$, dove:

- $\texttt{B-trees} = \{t \mid t$ è una foglia, oppure $t = \langle t_1, t_2\rangle$ con $t_1, t_2 \in \texttt{B-trees}\}$
- leaf: $1 \to \texttt{B-trees}$ (foglia)
- branch: $\texttt{B-trees} \times \texttt{B-trees} \to \texttt{B-trees} : (t_{sx}, t_{dx}) \to t$ (costruisce rami in modo che t_{sx} e t_{dx} siano i due sottoalberi di t)

è un'algebra induttiva.

theorem 1: numero di nodi di un albero binario

Un albero binario con n foglie ha $2n-1$ nodi

proof!

Si può dimostrare per induzione strutturale sui costruttori degli alberi.

- (**caso base**): la proprietà è vera per l'albero formato da una sola foglia costruito con leaf ($\circ$) - esso ha infatti $n=1$ foglie e $2n-1=1$ nodi.
- (**ipotesi induttiva**): ogni argomento dei costruttori rispetta la proprietà
- dobbiamo quindi verificare che il costruttore branch, dati due argomenti che rispettano la proprietà, la mantenga
- (**passo induttivo**): abbiamo $t = \text{branch}(t_1, t_2)$.

  Sia $n = n_1 + n_2$ il numero di foglie di t, dove le foglie di t_1 sono n_1 e quelle di t_2 sono n_2.

  Per ipotesi, t_1 ha $2n_1-1$ nodi e t_2 ne ha $2n_2-1$. Dunque, t avrà $(2n_1-1)+(2n_2-1)+1$ nodi, ovvero $2(n_1+n_2)-1 = 2n-1$, qed.

i booleani come algebra non induttiva

Consideriamo l'algebra (B, not), dove $B = \{0,1\}$ e not: $B \to B : b \to \neg b$.

Notiamo che not è sicuramente iniettiva, e che, poiché è l'unico costruttore, anche la seconda caratteristica delle algebre induttive è rispettata.

Notiamo però che l'algebra non rispetta il terzo requisito. Se consideriamo infatti $\emptyset \subseteq B$, notiamo che not è chiusa rispetto ad esso.

Infatti, l'implicazione $x \in \emptyset \quad \Rightarrow \quad \text{not}(x) \in \emptyset$ risulta vera per falsificazione della premessa (non esistono elementi in $\emptyset$).

$(\emptyset, \text{not})$ è quindi una sotto-algebra induttiva di B, che però è diversa da essa. L'implicazione della terza condizione $(x \in \emptyset \ \Rightarrow\ \text{not}(x) \in \emptyset) \ \Rightarrow\ \emptyset = B$ è falsa, e (B, not) non è quindi un'algebra induttiva.

1.3. Omomorfismi, lemma di Lambek

digressione - teoria delle categorie

Facciamo una piccola parentesi che introduce alcune nozioni di teoria delle categorie (perché è molto interessante).

La teoria delle categorie studia in modo astratto le strutture matematiche. Una categoria $\mathcal{C}$ consiste di:

- una classe ob($\mathcal{C}$), i cui elementi sono chiamati **oggetti**
- una classe mor($\mathcal{C}$, i cui elementi sono chiamati **morfismi** (o mappe o frecce); ogni morfismo $f : a \to b$ ha associati un unico oggetto sorgente a e un unico oggetto destinazione b.
- per ogni terna di oggetti $a, b, c \in \mathcal{C}$, è definita una funzione mor$(b, c) \times$ mor$(a, b) \to$ mor(a, c) chiamata **composizione di morfismi**. La composizione di $f : b \to c$ con $g : a \to b$ si indica con $f \circ g : a \to c$

  la composizione deve soddisfare i seguenti assiomi:

  (*associatività*): se $f : a \to b,\ g : b \to a$ e $h : c \to d$, allora $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$

  (*identità*): per ogni oggetto x esiste un morfismo id$_x : x \to x$ chiamato **morfismo identità**, tale che per ogni morfismo $f : a \to x$ vale id$_x \circ f = f$ e per ogni morfismo $g : x \to b$ si ha $g \circ$ id$_x = g$.

Quindi, ogni oggetto è associato ad un unico morfismo identità. Questo permette di dare una definizione di categoria basata esclusivamente sulla classe dei morfismi: gli **oggetti vengono identificati con i corrispondenti morfismi identità**.

All'interno della teoria delle categorie, una funzione iniettiva $f : B \to C$ si chiama **monomorfismo**. Visto che non si possono utilizzare gli elementi per definire l'iniettività, un monomorfismo è descritto come una funzione f tale che:

$$\forall A,\ \forall h, k : A \to B, \quad h \circ f = k \circ f \ \Rightarrow \ h = k$$

(se le funzioni h e k sono identiche ogni volta che vengono composte con f, significa che non ci sono valori in f che sono assunti da più di un elemento di B)

def. 7: Algebre con la stessa segnatura

Due algebre (A, Γ_A) e (B, Γ_B) hanno la stessa segnatura se, sostituendo A con B in tutte le $\gamma_i \in \Gamma_A$, si ottiene Γ_B.

(La segnatura di un'algebra è data dalle segnature delle sue operazioni).

def. 8: Omomorfismo

Date due algebre con la stessa segnatura (A, Γ) e $(B, \Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_k\})$, un omomorfismo è una funzione $f : A \to B$ tale che:

$$\forall i \;\; f(\gamma_i(a_1, \dots, a_k, k_1, \dots, k_m)) = \delta_i(f(a_1), \dots, f(a_k), k_1, \dots, k_m)$$

(con $k_1, \dots, k_m$ parametri esterni)

(definizione algebrica: $\forall a, b \in A$, date $\circ$ operazione di A e $\bullet$ operazione di B, si ha $f(a \circ b) = f(a) \bullet f(b)$)

un omomorfismo "rispetta le operazioni"

- nota: la composizione di due omomorfismi è a sua volta un omomorfismo

def. 9: Isomorfismo

Un isomorfismo è un omomorfismo biettivo.

(Due algebre sono isomorfe ($\cong$) quando esiste un isomorfismo tra loro)

theorem 2: Omomorfismo tra algebre con stessa segnatura

Sia A un'algebra induttiva. Per ogni algebra B (non necessariamente induttiva) con la stessa segnatura, esiste un **unico omoformismo** $A \to B$.

theorem 3: Lemma di Lambek

Due algebre induttive A e B con la **stessa segnatura** sono necessariamente **isomorfe**.

proof!

- Siccome A è un'algebra induttiva, $\exists!$ omomorfismo $f : A \to B$.
- Allo stesso modo, $\exists!$ omomorfismo $g : B \to A$.
- Componendo i due omomorfismi, si ottiene un omomorfismo $g \circ f$ con segnatura $A \to A$.
- Sappiamo che per ogni algebra esiste l'omomorfismo "identità".
- Sappiamo anche, per il teorema sopra, che esiste un unico omomorfismo $A \to A$.

  Ne segue necessariamente che $g \circ a = \text{Id}_A$. (lo stesso discorso si applica a $f \circ g = \text{Id}_B$)
- $g \circ f = \text{Id} \iff g = f^{-1}$, quindi g e f sono funzioni invertibili (= biettive) $\Rightarrow g, f$ sono isomorfismi $\Rightarrow A \cong B$

1.4. Espressioni

Definiamo un **linguaggio** L come insieme di stringhe.

Per descrivere la sintassi di linguaggi formali (la grammatica), usiamo la BNF (Backus-Naur Form), con questa sintassi:

```
<simbolo> ::= __espressione__
```

Esempio: prendiamo come esempio questa grammatica:

$$M, N ::= 5 \mid 7 \mid M + N \mid M * N$$

Le espressioni che seguono questa grammatica, sono del tipo:

- ”5” o ”7”
- un’espressione $M + N$ o $M * N$, in cui M e N rispettano a loro volta la grammatica

Introduciamo una funzione $eval : L \to \mathbb{N}$, che valuta le espressioni del linguaggio:

- $eval(5) = 5$
- $eval(7) = 7$
- $eval(M + N) = eval(M) + eval(N)$
- $eval(M * N) = eval(M) * eval(N)$

Possiamo notare subito che $(L, eval)$ non è un’algebra induttiva. Infatti, una stringa come ”$5 + 7 * 5$” potrebbe essere stata generata in due modi diversi: $(5 + 7) * 5$ e $5 + (7 * 5)$.

Possiamo però stipulare che sia induttiva. Ci basta infatti considerare $+,\ *,\ 5$ e 7 come costruttori dell’algebra. In questo modo, $(5 + 7) * 5$ risulta essere un oggetto diverso da $5 + (7 * 5)$. È quindi possibile dimostrare che $(L, 5, 7, +, *)$ è un’algebra induttiva.

1.5. Exp

def. 10: Linguaggio Exp

Introduciamo il linguaggio Exp, con grammatica:

$$M, N = k \mid x \mid M + N \mid let\ x = M\ in\ N$$

dove:

- k è una costante
- x è una variabile ($\in Var$)
- $M + N : Exp \times Exp \to Exp$ è la somma tra due espressioni
- $let : Var \times Exp \times Exp \to Exp$ assegna alla variabile x il valore M all’interno di N

esempi:

- $let\ x = 3\ in\ x + x + 2$ viene valutata come 8
- $let\ x = 3\ in\ 12$ viene valutata come 12

free