(utili x esercizi, non approfondite o dimostrate)

FORMULE ALGEBRA

GENERALI

anello $(A, -, +, \cdot, 0_A, 1_A)$

$a+b = b+a$ comm +
$(a+b)+c = a+(b+c)$ ass. +
$a+0_A = 0_A+a = a$ el. neutro +
$a+(-a) = 0_A$ opposto
$a \cdot b = b \cdot a$ comm · (anello commutativo)
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ass ·
$a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a$ el neutro · (anello unitario)
$a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ distr

Cancellazione in un anello A

Se a non divisore di 0_A, $ab = ac \Rightarrow b = c$
(in $\mathbb{Z}$, se $a \neq 0$)

INVERTIBILI $ab = ba = 1_A$

prop. inversi: $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$
il prodotto di due invertibili è invertibile

N. PRIMO

$a \in A \setminus A^\times, a \neq 0$
$\forall b, c \in A,\ a \mid bc \Rightarrow a \mid b \circ a \mid c$

EL. IRRIDUCIBILE

$a \in A \setminus A^\times \quad \forall b, c \in A,$
$a = bc \Rightarrow b \circ c \in A^\times$

primo $\Longleftrightarrow$ irriducibile

CAMPO

A anello comm. un.
t.c $\forall a \in A \setminus \{0\}$
$a \in A^\times$

ogni campo è un dominio

nota: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ campo

(e, in $\mathbb{F}_p$, $([a]+[b])^p = [a]^p + [b]^p$)

DOMINIO

A anello $\neq \{0\}$ in cui l'unico divisore di zero è 0_A

CAMPO ALGEBRICAMENTE CHIUSO

K campo, se: $\forall F \in K[X] \setminus K$
$\exists x \in K$ t.c. x radice di F
(se ha almeno una radice in K)

- è alg. chiuso se e solo se i soli polinomi irr. monici sono di 1o grado

GRUPPO $(G, *, e)$

- $(a*b)*c = a*(b*c)$ assoc.
- $a*e = e*a = a$ el. neutro
- $a*a' = a'*a = e$ inverso

abeliano: $a*b = b*a$ commut.

not. additiva $(G, +, 0)$ moltiplicativa $(G, \cdot, 0)$

MONDO DELLA DIVISIBILITÀ

(div. euclidea) $a, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \quad \exists!\ q \in \mathbb{Z},\ r \in \{0, \dots, |n|-1\}$
t.c. $a = qn + r$ (utile! $r < n$)

è una rel di $\subset$: $a \mid b \Longleftrightarrow b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$

DIVISIBILITÀ E CONGRUENZA MOD N

$a \mid b \Longleftrightarrow b = a \cdot c$
b resto a/b

$a \equiv_n b \Longleftrightarrow n \mid a - b$

è una rel di equivalenza → utile! $a \equiv_n b \overset{\text{simm.}}{\Longleftrightarrow} b \equiv_n a$
$(n \mid a-b \Longleftrightarrow n \mid b-a)$

nota:
$a \equiv_n a',\ b \equiv_n b' \Rightarrow a+b \equiv_n a'+b'$
$ab \equiv_n a'b'$

utili!!

nel mondo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$[a] + [b] = [a+b]$
$[a] \cdot [b] = [ab]$

1. Gauss: se $MCD(a,b) = 1$
allora $a \mid bc \Rightarrow a \mid c$
$(a, b \in \mathbb{Z}^*, c \in \mathbb{Z})$

lemma: se $MCD(a, b, c) = 1$ (e $\in \mathbb{Z}$)
e $a, b \mid c$ allora $ab \mid c$

TEOREMA FONDAMENTALE ARITMETICA

$\forall a \in \mathbb{Z}^*$, ① l'insieme $I_a = \{p \text{ primo} : p \mid a\}$ è finito

② $a = \pm 1 \cdot \prod_p p^{v_p(a)}$ (unici e $\in \mathbb{N}$)
(ogni numero è una combinazione di primi elevati a qualcosa)

- $a \cdot b = \prod_p p^{v_p(a) + v_p(b)}$
- $p^{v_p(a)} \cdot p^{v_p(b)} = p^{v_p(a) + v_p(b)}$

FERMAT

$n^p \equiv_p n$ (p primo)
quindi: $n^{p-1} \equiv 1$

conseguenza: $[n]_p^{-1} = [n]^{p-2}$
- in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: $([a]+[b])^p = [a]^p + [b]^p$

MCD

$d = MCD(a, b)$ se
① $d \mid a$, $d \mid b$
② dato $d' \in \mathbb{N}$ t.c. $d' \mid a$ e $d' \mid b$
allora $d' \mid d$

- $d\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$

id Bézout $d = u \cdot a + v \cdot b \quad \exists u, v \in \mathbb{Z}$

Fibo e MCD: $MCD(F_m, F_{m+1}) = 1$

conseguenze

$a \mid b \Longleftrightarrow \forall p,\ v_p(a) \leq v_p(b)$

$MCD(a, b) = \prod_p p^{\min(v_p(a), v_p(b))}$

POLINOMI (sono domini)

def polinomio

$$P = \sum_{i \geq 0} a_i X^i$$

operazioni

$$P+Q := \sum_{i \geq 0} (a_i + b_i) X^i$$

$$P \cdot Q := \sum_{k \geq 0} c_k X^k \quad \text{(Cauchy)}$$

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

grado di un polinomio

- $\deg(0) = -\infty$ ($\deg(a) = -\infty \iff a = 0$)
- $\deg(P) = \max\{i \in \mathbb{N}, a_i \neq 0\}$

$\deg: K[X] \longrightarrow \mathbb{N} \sqcup \{-\infty\}$

- $\deg(a+b) \leq \max(\deg(a), \deg(b))$

($\deg(a+b) = \max(\deg(a), \deg(b))$ se $\deg(a) \neq \deg(b)$)

- $\deg(ab) = \deg(a) + \deg(b)$

POLINOMI MONICI

$P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$

con $a_n = 1$ (coeff. deg massimo)

- prodotto di monici è monico

C-VALORE ASSOLUTO

$|P|_c := c^{\deg(P)} \quad c > 1$

$|0| := 0 = c^{-\infty}$

- $|a|_c = 0 \iff a = 0$
- $|ab|_c = |a|_c \cdot |b|_c$
- $|a+b|_c \leq \max(|a|_c, |b|_c) \leq |a|_c + |b|_c$

FATTORIZZAZIONE UNICA

$\forall H \in A \setminus \{0\}$

$$H = \lambda \cdot \prod_{\substack{p \text{ irr.} \\ p \in A^+}} p^{v_p(H)}$$

con ($v_p(H) \in \mathbb{N}$ e $\{p : v_p(H) \neq 0\}$ finito)

(div. euclidea) $a, b \in A = K[X] \quad (a,b) \neq (0,0)$

$\exists!\ (q, r) \in A$ t.c. $a = qb + r$ con $\deg(r) < \deg(b)$

ovvero $|r|_c < |b|_c$

inversi

$A^\times = K^\times$

(sono le "costanti" invertibili del campo)

(anche qui vale $a|b,\ b|a \iff \exists\, \lambda \in A^\times$ t.c. $b = \lambda a$)

($A/HA = \{a + Ha : a \in A$ t.c. $\deg(a) < \deg(H)\}$ è anello c.u.)

(anche qui MCD)

VALUTAZIONE

$F \in K[X] = F_0 + F_1 X + \ldots + F_n X^n$

$ev_x(F) = F_0 + F_1 x + \ldots + F_n x^n$

$ev: K[X] \longrightarrow K$

- $ev_x^{-1}(\{0\}) = (X-x)A$

(pol. che si annullano in x)

polinomio coniugato

dato $F = f_0 + f_1 X + \ldots + f_n X^n$,

$\overline{F} = \overline{f_0} + \overline{f_1} X + \ldots + \overline{f_n} X^n$

FATTORIZZAZIONE

i polinomi irriducibili sono:

- in $\mathbb{C}[X]$: $\deg(P) = 1$ (forma $X - \alpha \quad \alpha \in \mathbb{C}$)
- in $\mathbb{R}[X]$ ① $\deg(P) = 1$

② $\deg(P) = 2$ e $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

polinomi noti:

$$n \geq 1 \quad X^n - 1 = \prod_{i=0}^{n-1} (X - x^i) \quad \text{con } x = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

- $P \in \mathbb{R}[X]$ di grado dispari ammette almeno una radice reale

in $K[X]$ (es. $\mathbb{Q}[X]$, K campo):

- $\deg(Q) = 1$ irriducibile
- $\deg(Q) = 2$ — irriducibile — $Q = P_1 P_2$ irr. deg 1
- $\deg(Q) = 3$ — irriducibile — $Q = P_1 P_2$ $\deg(P_1) = 1$, P_2 irr. deg 2
- $\deg(Q) = 4$ — irriducibile — $Q = P_1 P_2$ — $\deg(P_1) = 1$ $\deg(P_2) = 3$ — deg

(campo) **ALGEBRICAMENTE CHIUSO**

K campo, se: $\forall F \in K[X] \setminus K$

$\exists\, x \in K$ t.c. x radice di F

(se ha almeno una radice in K)

- è alg. chiuso se e solo se i soli polinomi irr. monici sono di 1o grado

↳ **MOLTEPLICITÀ**

K algebricamente chiuso $\Longrightarrow \forall F \in K[X] \setminus \{0\}$

si scrive in modo unico come:

$$F = \lambda \prod_{x \in K} (X-x)^{v_x(F)}$$

($v_x(F)$ è la molteplicità di F in x)

insieme radici

$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathbb{R}} \sqcup \mathcal{R}^+_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} \sqcup \mathcal{R}^-_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}$

fatt in $\mathbb{R}[X]$ $\forall F \in \mathbb{R}[X]$,

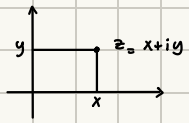
$$F = \lambda \prod_{x \in \mathbb{R}} (X-x)^{v_x(F)} \prod_{z \in \mathbb{R}^+_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}} \underbrace{\left[(X-z)(X-\bar{z})\right]}_{\text{deg 2 irr in } \mathbb{R}[X]}^{v_z(F)}$$

NUMERI COMPLESSI

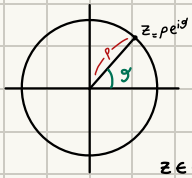
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$ è un campo

- $\mathbb{C} = \{ x+iy : x,y \in \mathbb{R} \}$ $i: \sqrt{-1}$ caratterizzato come $i^2 = -1$
  $= \mathbb{R} + i\mathbb{R}$

numero complesso: $z = \overbrace{x}^{\text{parte reale}} + i \underbrace{y}_{\text{parte immaginaria}}$



RAPPRESENTAZIONE POLARE



$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

OSS: cerchio delle unità

$z \in \mathbb{C}$ è della forma $z = e^{i\vartheta}$

$\iff |z| = 1$ quindi giace sul cerchio delle unità

e $\exists \vartheta$ t.c. $z = \cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)$

operazioni: $-z = -x + i(-y)$ opposto

$z + z' = (x+x') + i(y+y')$

$zz' = xx' - yy' + i(x'y + xy')$

CONIUGAZIONE COMPLESSA

$\overline{z} = x - iy$

- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
- $\overline{-z} = -\overline{z}$

$\overline{\ }: h$ biiettiva $h^{-1} = h$
ed è un isomorf. di anelli

formule fondamentali:

$z\overline{z} = x^2 + y^2$

resti $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$

VAL. ASS. COMPLESSO

$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$

- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|zz'| = |z| \cdot |z'|$
- $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

- $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso
  (teorema fond. algebra)

esponenziale di Eulero

$e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)$

- $(e^{i\vartheta})^n = e^{i\vartheta n}$
- $\left[\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)\right]^n = \cos(n\vartheta) + i\sin(\vartheta)$

proprietà: $\forall\, \vartheta \in \mathbb{R}$

- $|e^{i\vartheta}| = 1$
- $(e^{i\vartheta})^{-1} = \overline{e^{i\vartheta}} = e^{-i\vartheta}$

inverso

$z \cdot \overline{z}\,(x^2+y^2)^{-1} = 1$

GRUPPI

GRUPPO $(G, *, e)$

- $(a*b)*c = a*(b*c)$ assoc.
- $a*e = e*a = a$ el. neutro
- $a*a' = a'*a = e$ inverso

abeliano: $a*b = b*a$ commut

not. additiva $(G,+,0)$ moltiplicativa $(G,\cdot,0)$

omomorfismo di gruppi

$f: G_1 \to G_2$ t.c. $f(a\cdot b) = f(a)\circ f(b)$

($f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$, $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$)

isomorfismo: omom. biiettivo

SOTTOGRUPPO

$H \subset G$ t.c. $\forall a,b \in H$ $a*b^{-1} \in H$

$1_G = 1_H \in H$, $ab \in H$

KERNEL

$f: G_1 \to G_2$ omom.

$H = \{g \in G_1 : f(g) = 1_{G_2}\} = f^{-1}(\{1_{G_2}\})$ (el G_1 che portano a 1_{G_2})

- $\ker(f) = \{1_{G_1}\} \iff f$ iniettiva

IMMAGINE

$f: G_1 \to G_2$ omom.

$f(G_1) < G_2$

$= \{y \in G_2 : \exists x \in G_1 \text{ con } f(x) = y\}$

SOTTOGRUPPI CONIUGATI

dati $H < G$, $g \in G$

$H^g := \{g' \in G : \exists h \in H \text{ t.c. } g' = g^{-1}hg\}$

- se G abeliano, $H^g = H$ $(g^{-1}\cdot g = 1_G)$

SOTTOGR. GENERATO da $I \subset G$

$\langle I \rangle := \bigcap_{\substack{H<G: \\ I \subset H}} H$

$\langle g \rangle = \bigcap_{\substack{H<G: \\ g \in H}} H = g^{\mathbb{Z}}$ $\quad \langle g \rangle = \bigcap_{i \in G} H$

se G finito, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ $\langle g \rangle = g^{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/\text{ord}(g)\mathbb{Z}$

sottogruppi di $\mathbb{Z}$:

sono o $\{0\}$ o $n\mathbb{Z}$

SG. NORMALE $H \lhd G$

- $xH = Hx$ $\forall x \in G$
- $gh = h'g$ $\forall g \in G, \forall h \in H, \exists h' \in H$
- $H^g = H$ $\forall g \in G$

- $\cap$ sottogr è un sottogr.
- ($\cup$ sottogr. non per forza)

- G abeliano e $H < G \Rightarrow H \lhd G$
- se $f: G_1 \to G_2$ omom, $\ker(f) \lhd G_1$

inoltre, se $H \lhd G$, allora $H = \ker(\pi_H)$ ($g \mapsto [g]$, $G \mapsto G/H$)

ORDINE DI UN EL

G finito e $g \in G$,

$\text{ord}(g) = \min\{d \in \mathbb{N}^* \text{ t.c. } g^d = 1_G\}$

TEOREMA DI LAGRANGE

G finito, $H < G$

allora $\#H \mid \#G$

GRUPPI CICLICI

G gr, $g \in G$ $\text{ord}(g) = n \geq 1$

$\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\forall d \mid n, \exists!\ H_d < \langle g \rangle$ t.c. $\#H_d = d$

PERMUTAZIONI

$\mathcal{E}$ finito, $S(\mathcal{E}) = \{f: \mathcal{E} \to \mathcal{E} : f \text{ bi}\}$

$(S(\mathcal{E}), \circ, \text{Id}_{\mathcal{E}})$ è un gruppo (di perm.)

- $f, g \in S(\mathcal{E}) \to g\circ f \in S(\mathcal{E})$

permutazione $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$

n-ciclo: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{s-1} & a_s & a_{s+1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_s & a_{s+1} \end{pmatrix}$

fisso gli el. $\notin \{a_1 \dots a_s\}$, mando gli altri: $a_i \to a_{i+1}$, tranne $a_s \to a_1$

notazione $(a_1 a_2 a_3 \dots a_s)$

nota: $(a_1 a_2 a_3) = (a_3 a_1 a_2)$ (shift ciclico) $\neq (a_2 a_1 a_3)$ (rimescolone no)

trasposizione: 2-ciclo

INVERSIONE

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 4 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

ciclo $(1\,2\,3)^{-1} = (3\,2\,1)$

COMPOSIZIONE (PRODOTTO)

$\sigma\circ\tau$: si applica τ, poi σ

$\sigma = (1\,3\,4\,2)$, $\tau = (1\,5\,3\,2\,4)$

$\sigma\circ\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow\tau & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ \downarrow\sigma & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

cicli a supporti disgiunti

$(a_1 \dots a_s)$, $(b_1 \dots b_s)$,

se $\{a_1 \dots a_s\} \cap \{b_1 \dots b_s\} = \emptyset$

↓

ogni $\sigma \in S_n$ può essere decomposta in prod. di cicli a supp. disg. (UNICAMENTE DET, e che commutano)

anche: ogni permutazione si può decomporre in un prodotto di trasposizioni

ORD(σ)

$\text{ord}(\sigma) = \text{mcm}(\text{ord}(c_1), \dots, \text{ord}(c_n))$

cicli a supp. disgiunti

- σ n-ciclo, $\text{ord}(\sigma) = n$

quindi $\sigma^n = 1_S$

SEGNO DI UNA PERM

s numero di trasposizioni in cui si decompone σ

$\varepsilon_\sigma = (-1)^s \in \mathbb{Z}^\times$ (+1 pari, −1 disp)

- σ n-ciclo $\Rightarrow \varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-1}$
- $S_n \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}^\times$ omom. gruppi

n-Ciclo

- $\sigma = (a_1\, a_2 \dots a_n) = (a_n\, a_{n-1})(a_n\, a_{n-2}) \dots (a_n\, a_1)$ ($n-1$ fattori)

PRODOTTO CART. DIRETTO GRUPPI (è gruppo)

$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) : g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$

op: $(g_1, g_2) + (g_3, g_4) = (g_1+g_3, g_2+g_4)$

neutro $0_{G_1\times G_2} = (0_{G_1}, 0_{G_2})$

- è abeliano se G_1, G_2 lo sono

relazione $\sim$

$H < G$, $x, x' \in G$ $\quad x \sim x' \iff x(x')^{-1} \in H$

è di equivalenza

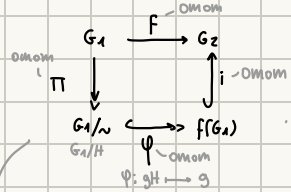
GRUPPO $G/\sim = G/H$

classi laterali

- $[g] = gH = Hg$
- $1_{G/H} = H$

1o TEOR. OMOM. GRUPP.

f omom $\Rightarrow f = i \circ \varphi \circ \pi$ (omom)



SPAZI VETTORIALI