

aglaia norza

# Linguaggi di Programmazione

appunti delle lezioni

libro del corso: non usato, integrati con le dispense del professor Cenciarelli

28/10/2025

thisisaglaia@gmail.com  
github.com/AglaiaNorza

# Contents

<b>1</b>	<b>Algebre induttive</b>	<b>3</b>
1.1	I numeri naturali . . . . .	3
1.2	Algebre, algebre induttive . . . . .	4
1.3	Omomorfismi, lemma di Lambek . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Espressioni, linguaggi</b>	<b>9</b>
2.1	Exp . . . . .	9
2.1.1	Semantica operativa . . . . .	10
2.2	Valutazioni Eager e Lazy . . . . .	12
2.3	Scoping . . . . .	14
2.3.1	Riassunto delle regole in <i>Exp</i> . . . . .	15
2.4	Fun . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Lambda calcolo</b>	<b>20</b>
3.1	Numeri di Church . . . . .	20
3.2	Semantica del lambda calcolo . . . . .	21

# 1. Algebre induttive

## 1.1. I numeri naturali

### Def. 1: Assiomi di Peano

L'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali si può definire mediante i cinque **assiomi di Peano**:

1.  $0 \in \mathbb{N}$
2.  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{succ}(n) \in \mathbb{N}$
3.  $\nexists n \in \mathbb{N} \mid 0 = \text{succ}(n)$
4.  $\forall n, m \text{ succ}(n) = \text{succ}(m) \Rightarrow n = m$  (iniettività)
5.  $\forall S \subseteq \mathbb{N} (0 \in S \wedge (n \in S \Rightarrow \text{succ}(n) \in S) \Rightarrow S = \mathbb{N})$  (assioma di induzione)

#### assioma di induzione

L'assioma di induzione è necessario per evitare di equiparare ai numeri naturali insiemi che, essenzialmente, contengono una struttura come quella di  $\mathbb{N}$ , e un “qualcosa in più”. (Se all'interno dell'insieme  $A$  che stiamo considerando esiste un altro sottoinsieme proprio che rispetta gli altri assiomi,  $A$  non rispetterà il quinto assioma di Peano).

In più, il quinto assioma di Peano ci fornisce essenzialmente una definizione insiemistica di induzione.

### Def. 2: Principio di Induzione

L'induzione può essere definita, basandosi sulle “proprietà” invece che sull' insiemistica, come segue:

$$\forall P \quad \frac{P(0), \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)}{\forall n \, P(n)}$$

(la notazione equivale a  $P(0) \wedge P(n) \wedge (P(0) \wedge (P(n) \Rightarrow P(n+1))) \Rightarrow \forall n P(n)$ )

Possiamo dimostrare che il quinto assioma di Peano è equivalente al principio di induzione (in quanto i concetti di “proprietà” e “sottoinsieme” sono equivalenti).

Infatti, ad ogni proprietà corrisponde un sottoinsieme i cui elementi sono esattamente quelli che soddisfano tale proprietà

Prendiamo quindi  $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ è vera}\}$ .

In questo modo, dire  $P(0)$  equivale a dire  $0 \in S$ , e dire  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  equivale a dire  $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$ . E, allo stesso modo, dire  $\forall n P(n)$  equivale a dire  $\forall n, n \in S$ , ovvero  $S = \mathbb{N}$ .

**Def. 3: Numeri di von Neumann**

Un altro modo di descrivere i numeri naturali viene dal matematico **John von Neumann**, che definisce i numeri naturali (“numeri di von Neumann”,  $\mathcal{N}$ ) in questo modo:

- $0_{\mathcal{N}} = \emptyset$  (ovvero  $\{\}$ )
- $1_{\mathcal{N}} = \{0_{\mathcal{N}}\}$  (ovvero  $\{\{\}\}$ )
- $2_{\mathcal{N}} = \{0_{\mathcal{N}}, 1_{\mathcal{N}}\}$  (ovvero  $\{\{\}, \{\{\}\}\}$ )
- ...

I numeri di von Neumann rispettano gli assiomi di peano! (dalle dispense)

**1.2. Algebre, algebre induttive****nota: insieme unità e funzione nullaria**

Ci è utile definire l'**insieme unità**  $\mathbb{1} = \{*\}$ .  $\mathbb{1}$  è un insieme formato da un solo elemento (non ci interessa quale).

Un altro concetto che ci servirà è quello di **funzione costante** o **nullaria**. Una funzione nullaria  $f$  è tale che:

$$f : \mathbb{1} \rightarrow A \mid f() = a \quad a \in A$$

(chiaramente, essa è sempre iniettiva).

**nota**

Una funzione nullaria su un insieme  $A$  può essere vista come un elemento di  $A$  (un qualsiasi insieme  $A$  è isomorfo a all'insieme di funzioni  $\mathbb{1} \rightarrow A$  (l'insieme di funzioni  $\mathbb{1} \rightarrow A$  ha la stessa cardinalità di  $A$ ), il che ci permette di **trattare gli elementi di un insieme come funzioni**.

**Def. 4: Algebra**

Una **algebra** è una tupla  $(A, \Gamma)$ , dove:

- $A$  è l'insieme di riferimento (“carrier” o “insieme sottostante”)
- $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i\}$ , è l'insieme di funzioni chiamate “operazioni fondamentali” o “costruttori” dell'algebra

la segnatura dei costruttori è:  $\gamma_i : A^{\alpha_i} \times K_i \rightarrow A$ .

**nota**

Tra le algebre, consideriamo anche le algebre eterogenee, che prendono argomenti da insiemi diversi da  $A$ .

**Def. 5: Chiusura di un insieme rispetto ad un'operazione**

Sia  $f : A^n \times K \rightarrow A$  un'operazione su  $A$  con parametri esterni  $K = (K_1 \times \dots \times K_m)$ .

Un insieme  $S \subseteq A$  si dice **chiuso** rispetto ad  $f$  quando:

$$a_1, \dots, a_n \in S \Rightarrow f(a_1, \dots, a_n, k_1, \dots, k_n) \in S$$

**nota!**

Data un'operazione  $f$  che prende solo elementi esterni all'insieme  $S$  (come per esempio la funzione nullaria  $\mathbb{1} \rightarrow A$ ), un insieme  $S$  si dice chiuso rispetto a  $f \iff \text{Im}(f) \subseteq S$ .

**Def. 6: Algebra induttiva**

Un'algebra  $A, \Gamma$  si dice **induttiva** quando:

1. tutte le  $\gamma_i \in \Gamma$  sono iniettive
2.  $\forall i, j \mid i \neq j, \text{Im}(\gamma_i) \cap \text{Im}(\gamma_j) = \emptyset$ , ovvero tutte le  $\gamma_i$  hanno immagini disgiunte
3.  $\forall S \subseteq A$ , se  $S$  è chiuso rispetto a tutte le  $\gamma_i$ , allora  $S = A$  (ovvero il principio di induzione è rispettato)

**terza condizione**

La terza condizione pone quindi che  $A$  sia la più piccola sotto-algebra di se stessa (ovvero non abbia sotto-algebre diverse da se stessa).

**nota**

Le tre condizioni garantiscono quindi che:

- ci sia solo un modo per costruire ogni elemento dell'algebra (*i, ii*)
- non ci siano “elementi inutili” (*iii*)

Vediamo come possiamo costruire  $\mathbb{N}$  come algebra induttiva.

La definizione di algebra induttiva non considera il concetto di “elemento”, quindi, per il primo assioma di Peano, usiamo una *funzione costante*  $\mathbb{0}$ , con segnatura:

$$\mathbb{1} \times \mathbb{N} : x \rightarrow \mathbb{0}$$

Abbiamo quindi una tupla  $(\mathbb{N}, \{\text{succ}, \mathbb{0}\})$ .

Per dimostrare che questa tupla sia un'algebra induttiva, dobbiamo ora verificare le tre condizioni:

1. tutte le  $\gamma_i$  sono induttive:
  - $\mathbb{0}$  è necessariamente induttiva
  - $\text{succ}$  è induttiva per il secondo assioma di Peano
2. tutti i costruttori hanno immagini disgiunte:
  - grazie al terzo assioma di Peano ( $\nexists n \in \mathbb{N} \mid \mathbb{0} = \text{succ}(n)$ ), sappiamo che  $\text{succ}$  e  $\mathbb{0}$  hanno immagini disgiunte
3. principio di induzione:
  - è verificato dal quinto assioma di Peano ( $0 \in S$  corrisponde alla chiusura rispetto a  $\mathbb{0}$  e  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{succ}(n) \in \mathbb{N}$  corrisponde alla chiusura rispetto a  $\text{succ}$ )

## alberi binari come algebre induttive

L'insieme degli alberi binari finiti (B-trees, leaf, branch), dove:

- B-trees =  $\{t \mid t \text{ è una foglia, oppure } t = \langle t_1, t_2 \rangle \text{ con } t_1, t_2 \in \text{B-trees}\}$
- leaf:  $1 \rightarrow \text{B-trees}$  (foglia)
- branch:  $\text{B-trees} \times \text{B-trees} \rightarrow \text{B-trees} : (t_{sx}, t_{dx}) \rightarrow t$  (costruisce rami in modo che  $t_{sx}$  e  $t_{dx}$  siano i due sottoalberi di  $t$ )

è un'algebra induttiva.

## Theorem 1: numero di nodi di un albero binario

Un albero binario con  $n$  foglie ha  $2n - 1$  nodi

## proof!

Si può dimostrare per induzione strutturale sui costruttori degli alberi.

- (**caso base**): la proprietà è vera per l'albero formato da una sola foglia costruito con leaf ( $\circ$ ) - esso ha infatti  $n = 1$  foglie e  $2n - 1 = 1$  nodi.
- (**ipotesi induttiva**): ogni argomento dei costruttori rispetta la proprietà
- dobbiamo quindi verificare che il costruttore branch, dati due argomenti che rispettano la proprietà, la mantenga
- (**passo induttivo**): abbiamo  $t = \text{branch}(t_1, t_2)$ .

Sia  $n = n_1 + n_2$  il numero di foglie di  $t$ , dove le foglie di  $t_1$  sono  $n_1$  e quelle di  $t_2$  sono  $n_2$ .

Per ipotesi,  $t_1$  ha  $2n_1 - 1$  nodi e  $t_2$  ne ha  $2n_2 - 1$ . Dunque,  $t$  avrà  $(2n_1 - 1) + (2n_2 - 1) + 1$  nodi, ovvero  $2(n_1 + n_2) - 1 = 2n - 1$ , qed.

## liste finite come algebra induttiva

Dato un insieme  $A$ , indichiamo con  $A - list$  l'insieme delle liste finite di elementi di  $A$ .

La tupla  $(A - list, \text{empty}, \text{cons})$  è un'algebra induttiva, dove:

- empty:  $1 \rightarrow A - list$  è la funzione costante che restituisce la **lista vuota** " $\langle \rangle$ ".
- cons:  $A \times A - list \rightarrow A - list : \text{cons}(3, \langle 5, 7 \rangle) = \langle 3, 5, 7 \rangle$  è la funzione che **costruisce una lista** aggiungendo un elemento in testa

Si tratta di un'algebra induttiva (notiamo che i due costruttori hanno immagini chiaramente disgiunte, sono entrambi chiusi per  $A - list$ , e c'è un unico modo per costruire ogni lista).

## liste infinite

Le liste infinite non possono essere un'algebra induttiva, in quanto contengono una sotto-algebra induttiva (quella delle liste finite).

## i booleani come algebra non induttiva

Consideriamo l'algebra  $(B, \text{not})$ , dove  $B = \{0, 1\}$  e  $\text{not}: B \rightarrow B : b \rightarrow \neg b$ .

Notiamo che  $\text{not}$  è sicuramente iniettiva, e che, poiché è l'unico costruttore, anche la seconda caratteristica delle algebre induttive è rispettata.

Notiamo però che l'algebra non rispetta il terzo requisito. Se consideriamo infatti  $\emptyset \subseteq B$ , notiamo che  $\text{not}$  non è chiusa rispetto ad esso.

Infatti, l'implicazione  $x \in \emptyset \Rightarrow \text{not}(x) \in \emptyset$  risulta vera per falsificazione della premessa (non esistono elementi in  $\emptyset$ ).

$(\emptyset, \text{not})$  è quindi una sotto-algebra induttiva di  $B$ , che però è diversa da essa. L'implicazione della terza condizione  $(x \in \emptyset \Rightarrow \text{not}(x) \in \emptyset) \Rightarrow \emptyset = B$  è falsa, e  $(B, \text{not})$  non è quindi un'algebra induttiva.

## 1.3. Omomorfismi, lemma di Lambek

## digressione - teoria delle categorie

Facciamo una piccola parentesi che introduce alcune nozioni di teoria delle categorie (perché è molto interessante).

La teoria delle categorie studia in modo astratto le strutture matematiche. Una categoria  $\mathcal{C}$  consiste di:

- una classe  $\text{ob}(\mathcal{C})$ , i cui elementi sono chiamati **oggetti**
- una classe  $\text{mor}(\mathcal{C})$ , i cui elementi sono chiamati **morfismi** (o mappe o frecce); ogni morfismo  $f : a \rightarrow b$  ha associati un unico oggetto sorgente  $a$  e un unico oggetto destinazione  $b$ .
- per ogni terna di oggetti  $a, b, c \in \mathcal{C}$ , è definita una funzione  $\text{mor}(b, c) \times \text{mor}(a, b) \rightarrow \text{mor}(a, c)$  chiamata **composizione di morfismi**. La composizione di  $f : b \rightarrow c$  con  $g : a \rightarrow b$  si indica con  $f \circ g : a \rightarrow c$

la composizione deve soddisfare i seguenti assiomi:

(*associatività*): se  $f : a \rightarrow b$ ,  $g : b \rightarrow c$  e  $h : c \rightarrow d$ , allora  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

(*identità*): per ogni oggetto  $x$  esiste un morfismo  $\text{id}_x : x \rightarrow x$  chiamato **morfismo identità**, tale che per ogni morfismo  $f : a \rightarrow x$  vale  $\text{id}_x \circ f = f$  e per ogni morfismo  $g : x \rightarrow b$  si ha  $g \circ \text{id}_x = g$ .

Quindi, ogni oggetto è associato ad un unico morfismo identità. Questo permette di dare una definizione di categoria basata esclusivamente sulla classe dei morfismi: **gli oggetti vengono identificati con i corrispondenti morfismi identità**.

All'interno della teoria delle categorie, una funzione iniettiva  $f : B \rightarrow C$  si chiama **monomorfismo**. Visto che non si possono utilizzare gli elementi per definire l'iniettività, un monomorfismo è descritto come una funzione  $f$  tale che:

$$\forall A, \forall h, k : A \rightarrow B, \quad h \circ f = k \circ f \Rightarrow h = k$$

(se le funzioni  $h$  e  $k$  sono identiche ogni volta che vengono composte con  $f$ , significa che non ci sono valori in  $f$  che sono assunti da più di un elemento di  $B$ )

**Def. 7: Algebre con la stessa segnatura**

Due algebre  $(A, \Gamma_A)$  e  $(B, \Gamma_B)$  hanno la stessa segnatura se, sostituendo  $A$  con  $B$  in tutte le  $\gamma_i \in \Gamma_A$ , si ottiene  $\Gamma_B$ .

(La segnatura di un'algebra è data dalle signature delle sue operazioni).

**Def. 8: Omomorfismo**

Date due algebre con la stessa segnatura  $(A, \Gamma)$  e  $(B, \Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_k\})$ , un omomorfismo è una funzione  $f : A \rightarrow B$  tale che:

$$\forall i \quad f(\gamma_i(a_1, \dots, a_k, k_1, \dots, k_m)) = \delta_i(f(a_1), \dots, f(a_k), k_1, \dots, k_m)$$

(con  $k_1, \dots, k_m$  parametri esterni)

(definizione algebrica:  $\forall a, b \in A$ , date  $\circ$  operazione di  $A$  e  $\bullet$  operazione di  $B$ , si ha  $f(a \circ b) = f(a) \bullet f(b)$ )

un omomorfismo “rispetta le operazioni”

- nota: la composizione di due omomorfismi è a sua volta un omomorfismo

**Def. 9: Isomorfismo**

Un isomorfismo è un omomorfismo biiettivo.

(Due algebre sono isomorfe ( $\cong$ ) quando esiste un isomorfismo tra loro)

**Theorem 2: Omomorfismo tra algebre con stessa segnatura**

Sia  $A$  un'algebra induttiva. Per ogni algebra  $B$  (non necessariamente induttiva) con la stessa segnatura, esiste un **unico omomorfismo**  $A \rightarrow B$ .

**Theorem 3: Lemma di Lambek**

Due algebre induttive  $A$  e  $B$  con la **stessa segnatura** sono necessariamente **isomorfe**.

**proof!**

- Siccome  $A$  è un'algebra induttiva,  $\exists!$  omomorfismo  $f : A \rightarrow B$ .
- Allo stesso modo,  $\exists!$  omomorfismo  $g : B \rightarrow A$ .
- Componendo i due omomorfismi, si ottiene un omomorfismo  $g \circ f$  con segnatura  $A \rightarrow A$ .
- Sappiamo che per ogni algebra esiste l'omomorfismo “identità”.
- Sappiamo anche, per il teorema sopra, che esiste un unico omomorfismo  $A \rightarrow A$ .  
Ne segue necessariamente che  $g \circ f = \text{Id}_A$ . (lo stesso discorso si applica a  $f \circ g = \text{Id}_B$ )
- $g \circ f = \text{Id} \iff g = f^{-1}$ , quindi  $g$  e  $f$  sono funzioni invertibili (= biettive)  $\Rightarrow g, f$  sono isomorfismi  $\Rightarrow A \cong B$



## 2. Espressioni, linguaggi

Definiamo un **linguaggio**  $L$  come insieme di stringhe.

Per descrivere la sintassi di linguaggi formali (la grammatica), usiamo la BNF (Backus-Naur Form), con questa sintassi:

$$\langle \text{simbolo} \rangle ::= \_ \text{espressione} \_$$

**Esempio:** prendiamo come esempio questa grammatica:

$$M, N ::= 5 \mid 7 \mid M + N \mid M * N$$

Le espressioni che seguono questa grammatica, sono del tipo:

- “5” o “7”
- un’espressione  $M + N$  o  $M * N$ , in cui  $M$  e  $N$  rispettano a loro volta la grammatica

Introduciamo una funzione  $eval : L \rightarrow \mathbb{N}$ , che valuta le espressioni del linguaggio:

- $eval(5) = 5$
- $eval(7) = 7$
- $eval(M + N) = eval(M) + eval(N)$
- $eval(M * N) = eval(M) * eval(N)$

Possiamo notare subito che  $(L, eval)$  non è un’algebra induttiva. Infatti, una stringa come “ $5 + 7 * 5$ ” potrebbe essere stata generata in due modi diversi:  $(5 + 7) * 5$  e  $5 + (7 * 5)$ .

Possiamo però stipulare che sia induttiva. Ci basta infatti considerare  $+$ ,  $*$ , 5 e 7 come costruttori dell’algebra. In questo modo,  $(5 + 7) * 5$  risulta essere un oggetto diverso da  $5 + (7 * 5)$ . È quindi possibile dimostrare che  $(L, 5, 7, +, *)$  è un’algebra induttiva.

### 2.1. Exp

#### Def. 10: Linguaggio Exp

Introduciamo il linguaggio  $Exp$ , con grammatica:

$$M, N = k \mid x \mid M + N \mid \text{let } x = M \text{ in } N$$

dove:

- $k \in Val = \{0, 1, \dots\}$  è una costante
- $x \in Var$  è una variabile
- $M + N : Exp \times Exp \rightarrow Exp$  è la somma tra due espressioni
- $\text{let} : Var \times Exp \times Exp \rightarrow Exp$  assegna alla variabile  $x$  il valore  $M$  all’interno di  $N$

esempi:

- $let\ x = 3\ in\ x + x + 2$  viene valutata come 8
- $let\ x = 3\ in\ 12$  viene valutata come 12

Questo linguaggio causa però facilmente ambiguità. Per esempio, come valutiamo un'espressione come  $let\ x = 3\ in\ let\ y = x\ in\ let\ x = 5\ in\ y$ ?

Per esplicitare la struttura del termine, è necessario legare le occorrenze delle variabili alle dichiarazioni.

### Def. 11: Variabili libere, legate, scope

Si dice che un'occorrenza di una variabile  $x$  è **libera** in un termine  $t$  quando non compare nel corpo di  $N$  nessun sottoterminale di  $t$  nella forma  $let\ x = M\ in\ N$  (quindi, quando non le viene assegnato un valore).

Ogni occorrenza libera di  $x$  in un termine  $N$  si dice **legata** (bound) alla dichiarazione di  $x$  nel termine  $let\ x = M\ in\ N$ .

Lo **scope** di una dichiarazione è l'insieme delle occorrenze libere di  $x$  in  $N$ .

Lo **scope di una variabile** è la porzione di programma all'interno della quale una variabile può essere riferita.

Introduciamo una funzione  $free : Exp \rightarrow \mathcal{P}(Var)$ , che restituisce l'insieme delle variabili libere di un'espressione:

$$\begin{aligned} free(k) &= \emptyset \\ free(x) &= \{x\} \\ free(M + N) &= free(M) \cup free(N) \\ free(let\ x = M\ in\ N) &= free(M) \cup (free(N) - \{x\}) \end{aligned}$$

(eliminiamo la  $x$ , dalle variabili libere in  $N$  perché viene dichiarata dal  $let\ x$ , ma non la eliminiamo da  $M$  perché potrebbe comparire al suo interno come variabile libera, e  $M$  non fa parte dello scope di  $let\ x$  (esempio: in  $let\ x = x\ in\ x$ , la  $x$  è libera perché compare libera in  $= x$ ))

esempio:  $free(let\ x = 7\ in\ x + y) = \{y\}$

### 2.1.1. Semantica operativa

Vogliamo introdurre nel linguaggio  $Exp$  il concetto di “quanto fa?” (valutazione di un'espressione).

Per farlo, abbiamo bisogno di definire un ambiente all'interno del quale valutare le espressioni (stile operativo, “structural operational semantics”).

### Def. 12: Ambienti

Un **ambiente** è una funzione parziale (funzione non necessariamente definita su tutti gli elementi del dominio) con dominio finito che associa dei valori ad un insieme finito di variabili.

$$E : Var \xrightarrow{fin} Val$$

Scriviamo gli ambienti come insiemi di coppie. Per esempio, l'ambiente  $E$  in cui  $z$  vale 3 e  $y$  vale 9 è indicato con  $\{(z, 3), (y, 9)\}$ .

Notiamo che, essendo  $E$  una funzione parziale, il dominio  $dom(E)$  è un sottoinsieme finito di  $Var$ .

**Def. 13: Insieme di ambienti**

$Env$  è definito come l'insieme degli ambienti di  $Exp$ .

Gli ambienti si possono **concatenare** in questo modo:

$$(E_1 E_2)(x) = \begin{cases} E_2(x) & \text{se } x \in \text{dom}(E_2) \\ E_1(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per esempio,  $\{(z, 3), (y, 9)\}\{(z, 4)\}(z) = 4$  e  $\{(z, 3), (y, 9)\}\{(z, 4)\}(x)$  è indefinito.

**Def. 14: Semantica operativa di  $Exp$** 

La **semantica operativa** di  $Exp$  è una relazione

$$\rightsquigarrow \subseteq Exp \times Env \times Val$$

in cui  $(M, E, v) \in \rightsquigarrow \iff$  il programma  $M$ , nell'ambiente  $E$ , produce il valore  $v$ .

Un'asserzione di appartenenza  $(M, E, v) \in \rightsquigarrow$  viene chiamata *giudizio operativo*, e si scrive

$$E \vdash M \rightsquigarrow v$$

Questa relazione è definita dalle seguenti **regole**:

$$E \vdash k \rightsquigarrow k \quad [const]$$

(in ogni ambiente  $E$ , una costante  $k$  vale  $k$ )

$$E \vdash x \rightsquigarrow v \quad \text{se } v = E(x) \quad [var]$$

(una variabile  $x$  vale  $v$  se la funzione ambiente  $E(x)$  le associa il valore  $v$ )

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow v \quad E \vdash N \rightsquigarrow w}{E \vdash M + N \rightsquigarrow v + w} \quad [plus]$$

(se nello stesso ambiente  $M$  vale  $v$  e  $N$  vale  $w$ ,  $M + N$  varrà  $u + w$ )

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow v_1 \quad E\{(x, v_1)\} \vdash N \rightsquigarrow v_2}{E \vdash \text{let } x = M \text{ in } N \rightsquigarrow v_2} \quad [let]$$

(essenzialmente, per valutare una *let*, si:

- valuta  $M$  ( $E \vdash M \rightsquigarrow v_1$ )
- si “associa” il risultato  $v_1$  a  $x$ , concatenando  $(x, v_1)$  all'ambiente
- e si valuta  $N$  nel nuovo ambiente)

Notiamo che si utilizza la relazione  $\rightsquigarrow$  e non una funzione  $Exp \times Env \rightarrow Val$ , perché si potrebbe avere più di un risultato (per esempio nel caso del multithreading, in cui un diverso ordine di esecuzione di un programma dà output diversi), o anche nessun risultato (per esempio nel caso in cui in  $Exp$  compare una variabile  $x$ , che però  $Env$  non definisce), entrambi casi non accettati dalla definizione di funzione.

## precedenza

Introduciamo un concetto di “precedenza” nella valutazione di un’espressione potenzialmente ambigua; un’espressione del tipo:

$$\text{let } x = 3 \text{ in } \text{let } x = \text{let } y = 2 \text{ in } x + y \text{ in } x + 7 + x$$

in assenza di parentesi, va valutata “partendo dall’interno”.

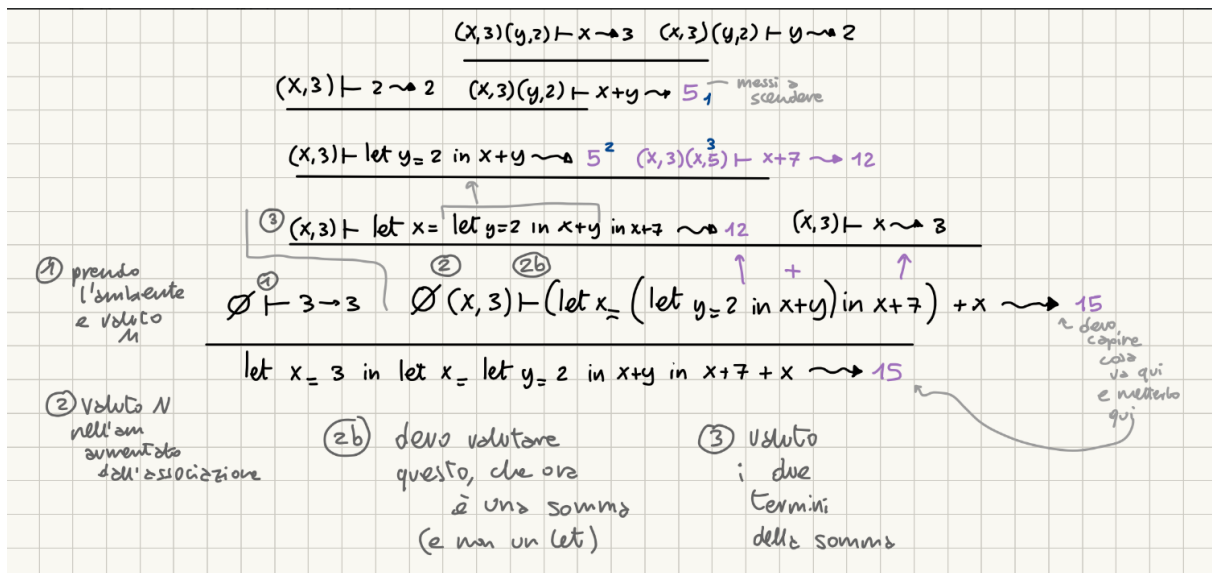
Corrisponde quindi a

$$\text{let } x = 3 \text{ in } [\text{let } x = (\text{let } y = 2 \text{ in } x + y) \text{ in } x + 7] + x$$

E si ha quindi che:

- la  $x$  in  $x + y$  e quella finale ( $+x$ ) sono quelle valutate dal  $\text{let}$  iniziale
- il valore della  $x$  in  $x + 7$  è invece dato dal risultato di  $\text{let } x = (\text{let } y = 2 \text{ in } x + y)$

Facciamo un esempio di valutazione di un’espressione:



(copierò appena ho tempo...)

## 2.2. Valutazioni Eager e Lazy

La valutazione utilizzata fino a questo momento viene definita **eager**, in quanto valuta  $N$  immediatamente (anche nel caso in cui non servisse veramente valutarlo).

Se infatti consideriamo un caso del tipo  $\text{let } = [\text{espressione lunghissima}] \text{ in } 7$ , notiamo immediatamente che la valutazione di  $N$  non è necessaria, in quanto l’espressione farà, in ogni caso, 7.

Introduciamo quindi un approccio **lazy**, che consiste nel valutare un termine solo quando (e se) ce n’è veramente bisogno.

La valutazione di  $N$  in un termine del tipo  $\text{let } x = N \text{ in } M$  viene rimandata, quindi, al momento in cui ad  $M$  (eventualmente) servirà il suo valore.

**Def. 15: Regole della semantica lazy di  $Exp$** 

- I termini non valutati subito vengono conservati in un “ambiente pigro” - estendiamo quindi  $Env$  in questo modo:

$$Env = Var \xrightarrow{fin} Exp$$

(gli ambienti contengono ora anche i termini non valutati, quindi non possiamo avere come codominio  $Val$ )

- la nuova regola per le variabili è:

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow v}{E \vdash x \rightsquigarrow v} \text{ se } E(x) = M$$

- la nuova regola per il  $let$  è:

$$\frac{E(x, M) \vdash N \rightsquigarrow v}{E \vdash let\ x = M\ in\ N \rightsquigarrow v}$$

Notiamo che però non sempre l’approccio lazy è più veloce: per esempio, per l’espressione  $let\ x = N\ in\ (x + x + x)$ ,  $N$  viene calcolata 3 volte con l’approccio lazy e una sola con quello eager.

Mettiamo i due approcci a confronto sull’espressione

$$let\ x = 2\ in\ let\ y = x\ in\ let\ x = 7\ in\ y \rightsquigarrow 3$$

- **approccio eager:**

$$\frac{\frac{(x, 2) \vdash x \rightsquigarrow 2 \quad (x, 2) \vdash 1 \rightsquigarrow 1}{(x, 2) \vdash x + 1 \rightsquigarrow 3} \quad \frac{(x, 2)(y, 3) \vdash 7 \rightsquigarrow 7 \quad (x, 2)(y, 3)(x, 7) \vdash y \rightsquigarrow 3}{(x, 2)(y, 3) \vdash let\ x = 7\ in\ y \rightsquigarrow 3}}{(x, 2) \vdash let\ y = x + 1\ in\ let\ x = 7\ in\ y \rightsquigarrow 3} \\ \emptyset \vdash let\ x = 2\ in\ let\ y = x + 1\ in\ let\ x = 7\ in\ y \rightsquigarrow 3$$

- **approccio lazy:**

$$\frac{\frac{(x, 2)(y, x + 1)(x, 7) \vdash 7 \rightsquigarrow 7}{(x, 2)(y, x + 1)(x, 7) \vdash x \rightsquigarrow 7} \quad (x, 2)(y, x + 1)(x, 7) \vdash 1 \rightsquigarrow 1}{(x, 2)(y, x + 1)(x, 7) \vdash x + 1 \rightsquigarrow 8} \\ \frac{(x, 2)(y, x + 1)(x, 7) \vdash y \rightsquigarrow 8}{(x, 2)(y, x + 1) let\ x = 7\ in\ y \rightsquigarrow 8} \\ \frac{(x, 2) \vdash let\ y = x + 1\ in\ let\ x = 7\ in\ y \rightsquigarrow 8}{\emptyset \vdash let\ x = 2\ in\ let\ y = x + 1\ in\ let\ x = 7\ in\ y \rightsquigarrow 8}$$

Notiamo che i due approcci ci danno risultati diversi.

Ciò è causato non dall’approccio valutativo, bensì dallo **scoping** utilizzato. Abbiamo infatti utilizzato quello che viene definito “scoping dinamico”, il che ha causato problemi perché, in  $Exp$ , lazy dinamico e eager non sono equivalenti.

## 2.3. Scoping

### Def. 16: Scoping

Lo **scoping** di un linguaggio è l'insieme di regole che determinano la visibilità di una variabile all'interno di un programma (ossia che consentono di associare una variabile a ciascun riferimento (= uso della variabile mediante un identificatore)).

### Def. 17: Scoping statico

Quando si usa lo **scoping statico**, i riferimenti ad una variabile sono risolti in base alla **struttura sintattica** del programma (tipicamente in base ad una dichiarazione).

Ovvero, durante la valutazione viene utilizzato l'**ambiente definito a tempo di interpretazione** (e non di valutazione).

### Def. 18: Scoping dinamico

Quando si usa lo **scoping dinamico**, i riferimenti ad una variabile sono risolti in base allo **stato di esecuzione** del programma (per esempio, una dichiarazione estende il suo effetto fino a che non si incontra un'altra dichiarazione di variabile con lo stesso nome).

Quindi, durante la valutazione viene utilizzato l'**ambiente definito a tempo di valutazione** stesso.

Dobbiamo quindi mantenere, oltre alle espressioni rimaste da valutare, anche gli ambienti in cui valutarle.

Per farlo, estendiamo nuovamente  $Env$  in questo modo:

$$Env_{LS} = Var \xrightarrow{fin} (Exp \times Env_{LS})$$

### Def. 19: Regole della semantica lazy statica di $Exp$

- I termini non valutati subito vengono conservati in un “ambiente pigro” - estendiamo quindi  $Env$  in questo modo:

$$Env = Var \xrightarrow{fin} Exp$$

(gli ambienti contengono ora anche i termini non valutati, quindi non possiamo avere come codominio  $Val$ )

- la nuova regola per le variabili è:

$$\frac{E' \vdash M \rightsquigarrow v}{E \vdash x \rightsquigarrow v} \text{ se } E(x) = (M, E')$$

- la nuova regola per il *let* è:

$$\frac{E(x, M, E) \vdash N \rightsquigarrow v}{E \vdash \text{let } x = M \text{ in } N \rightsquigarrow v}$$

Valutiamo la stessa espressione anche con questo approccio:

$$\begin{array}{c}
\frac{(x, 2, \emptyset) \vdash x \rightsquigarrow 2 \quad (x, 2, \emptyset) \vdash 1 \rightsquigarrow 1}{(x, 2, \emptyset) \vdash x + 1 \rightsquigarrow 3} \\
\frac{E(x, 7, E) \vdash y \rightsquigarrow 3}{(x, 2, \emptyset)(y, x + 1, (x, 2, \emptyset)) \vdash \text{let } x = 7 \text{ in } y \rightsquigarrow 3} \\
\frac{(x, 2, \emptyset) \vdash \text{let } y = x + 1 \text{ in let } x = 7 \text{ in } y \rightsquigarrow 3}{\emptyset \vdash \text{let } x = 2 \text{ in let } y = x + 1 \text{ in let } x = 7 \text{ in } y \rightsquigarrow 3}
\end{array}$$

In *Exp* non c'è, invece, differenza tra eager statico e eager dinamico.

Essenzialmente, in *Exp*:

	statico	dinamico
lazy	equiv	non equiv
eager	equiv (e uguali tra loro)	

#### “commutatività” in *Exp*

In *Exp*, si ha:

$$\text{let } x = (\text{let } y = M \text{ in } N) \text{ in } L \not\equiv \text{let } y = M \text{ in let } x = N \text{ in } L$$

- nella prima espressione,  $y$  è definita solo all'interno di  $N$
- nella seconda, è definita prima, ed è quindi visibile anche in  $L$
- quindi, le due espressioni sono equivalenti solo se  $y$  non compare libera (non ri-definita) in  $L$

### 2.3.1. Riassunto delle regole in *Exp*

#### eager

$$\begin{array}{c}
E \vdash k \rightsquigarrow k \quad [const] \\
\\
E \vdash x \rightsquigarrow v \quad \text{se } v = E(x) \quad [var] \\
\\
\frac{E \vdash M \rightsquigarrow v \quad E \vdash N \rightsquigarrow w}{E \vdash M + N \rightsquigarrow v + w} \quad [plus] \\
\\
\frac{E \vdash M \rightsquigarrow v_1 \quad E\{(x, v_1)\} \vdash N \rightsquigarrow v_2}{E \vdash \text{let } x = M \text{ in } N \rightsquigarrow v_2} \quad [let]
\end{array}$$

#### lazy statico

$$\begin{array}{c}
\frac{E' \vdash M \rightsquigarrow v}{E \vdash x \rightsquigarrow v} \quad \text{se } E(x) = (M, E') \quad [var] \\
\\
\frac{E(x, M, E) \vdash N \rightsquigarrow v}{E \vdash \text{let } x = M \text{ in } N \rightsquigarrow v} \quad [let]
\end{array}$$

(lazy dinamico)

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow v}{E \vdash x \rightsquigarrow v} \text{ se } E(x) = M \quad [var]$$

$$\frac{E(x, M) \vdash N \rightsquigarrow v}{E \vdash \text{let } x = M \text{ in } N \rightsquigarrow v} \quad [let]$$

esercizi



## 2.4. Fun

Introduciamo un nuovo linguaggio, *Fun*, che estende *Exp* con la nozione di **funzione**.

### Def. 20: *Fun*

La grammatica di *Fun* è:

$$M, N = k \mid x \mid M + N \mid \text{let } x = M \text{ in } N \mid \text{fn } x \Rightarrow M \mid MN$$

dove:

- le regole presenti in *Exp* (1-4) rimangono invariate, con gli appropriati cambi di dominio (es.  $\text{let} : \text{Var} \times \text{Fun} \times \text{Fun} \rightarrow \text{Fun}$ )
- $\text{fn} : \text{Var} \times \text{Fun} \rightarrow \text{Fun}$  è una **funzione** (anonima) con parametro  $x$ 
  - una funzione  $\text{fn } x \Rightarrow M$  si può rappresentare in maniera alternativa attraverso la sua **chiusura**,  $(x, M) \in \text{Var} \times \text{Fun}$
- $\cdot : \text{Fun} \times \text{Fun} \rightarrow \text{Fun}$  è l'**applicazione di funzioni**
  - il termine sinistro (che, perché l'espressione abbia semanticamente senso, deve necessariamente essere una funzione) viene applicato al termine destro (quindi  $MN = M(N)$ )
- l'insieme *Val* non coincide più con quello delle costanti, ma corrisponde a  $\text{Var} \cup (\text{Var} \times \text{Fun})$  (variabili  $\cup$  chiusure)

Quindi, per esempio:

- $(\text{fn } x \Rightarrow x + 1) 5 = 6$  (la funzione  $x + 1$  è applicata all'argomento 6)
- $(\text{fn } x \Rightarrow x 5)(\text{fn } y \Rightarrow y + 1) = 6$   
la funzione prende in input una funzione (in questo caso “successore”), e la applica a 5
- $(\text{fn } x \Rightarrow (\text{fn } y \Rightarrow y x)) 3 (\text{fn } z \Rightarrow z + 1) = 4$   
è una funzione che, presa in input un'altra funzione, la applica ad  $x$  - le passiamo la funzione “successore”, che, applicata a 3, dà 4.
- un'applicazione del tipo  $\text{fn } x \Rightarrow x 10$  “non ha semantica” (non è valutabile), in quanto 10 non è una funzione e non si può applicare a  $x$

### precedenza di *apply*

la precedenza nell'applicazione è a sinistra

$$MNL \equiv (MN)L$$

### Def. 21: Semantica eager dinamica di *Fun*

[*fn* dinamico eager]

$$E \vdash \text{fn } x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M)$$

[*apply* dinamico eager]

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, M') \quad E \vdash N \rightsquigarrow v \quad E(x, v) \vdash M' \rightsquigarrow v'}{E \vdash MN \rightsquigarrow v'}$$

Esempio: \_\_\_\_\_

esempio

**Def. 22: Semantica eager statica di  $Fun$** 

[fn statico eager]

$$E \vdash fn\ x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M, E)$$

[apply statico eager]

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, M', E') \quad E \vdash N \rightsquigarrow v \quad E'(x, v) \vdash M' \rightsquigarrow v'}{E \vdash MN \rightsquigarrow v'}$$

**Lemma 1: Eager dinamico e statico in  $Fun$** (Al contrario di  $Exp$ ), si ha che:

$$Fun \text{ eager dinamico} \neq Fun \text{ eager statico}$$

**Def. 23: Semantica lazy dinamica di  $Fun$** 

[fn lazy statico]

$$E \vdash fn\ x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M)$$

[apply lazy statico]

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, M') \quad E(x, N) \vdash M' \rightsquigarrow v}{E \vdash M\ N \rightsquigarrow v}$$

**Def. 24: Semantica lazy statica di  $Fun$** 

[fn lazy statico]

$$E \vdash fn\ x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, (M, E))$$

[apply lazy statico]

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, M', E') \quad E'(x, (N, E)) \vdash M' \rightsquigarrow v}{E \vdash M\ N \rightsquigarrow v}$$

Introduciamo un termine interessante -  $(fn\ x \Rightarrow xx)(fn\ x \Rightarrow xx)$  - e tentiamo di valutarlo con un approccio eager (dinamico)

$$\frac{\emptyset \vdash fn\ x \Rightarrow xx \rightsquigarrow (x, xx) \quad \emptyset \vdash fn\ x \Rightarrow xx \rightsquigarrow (x, xx) \quad \frac{(x, (x, xx)) \vdash x \rightsquigarrow (x, xx) \quad (x, (x, xx)) \vdash x \rightsquigarrow (x, xx) \quad (x, (x, xx)) \vdash xx \rightsquigarrow}{(x, (x, xx)) \vdash xx \rightsquigarrow}}{\emptyset \vdash (fn\ x \Rightarrow xx)(fn\ x \Rightarrow xx)}$$

Notiamo che il termine va in loop - infatti, si ha che, per valutare  $(x, (x, xx)) \vdash xx$ , bisogna prima valutare  $(x, (x, xx)) \vdash xx$  (se stesso).

**Termine  $\omega$** Chiamiamo  $\omega$  termine appena introdotto:

$$\omega = (fn\ x \Rightarrow xx)(fn\ x \Rightarrow xx)$$

Qui emerge una grande differenza tra valutazione eager e lazy: con un approccio eager, un'espressione del tipo *let x = ω in 7* va in loop, mentre con una valutazione lazy viene valutata correttamente.

### Def. 25: Curryficazione

La **curryficazione** (o “applicazione parziale”) è la tecnica che consiste nel tradurre una funzione che accetta più argomenti in una sequenza di famiglie di funzioni, ciascuna delle quali accetta un singolo argomento.

Partendo da una funzione  $f : (X \times Y) \rightarrow Z$  che prende due argomenti, la sua curryficazione tratta il primo argomento come un parametro, e crea una famiglia di funzioni  $f_x : Y \rightarrow Z$  tale che, per ogni  $x \in X$ , c'è esattamente una funzione  $f_x$  tale che  $\forall y \in Y, f_x(y) = f(x, y)$ .

$$\text{curry} : [ (X \times Y) \rightarrow Z ] \rightarrow [ X \rightarrow (Y \rightarrow Z) ]$$

$$f \mapsto h : f(x, y) = h(x)(y)$$

Si trasforma quindi una funzione che prende due argomenti in una funzione ad un argomento che ritorna un'altra funzione t.c.  $\text{curry}((f))(x)(y) = f(x, y)$ .

(Il processo inverso prende il nome di **dec Curryficazione**).

### Curryficazione in *Fun*

La curryficazione ci permette di introdurre una notazione contratta del *fn*:

$$[ \text{fn } xy \Rightarrow ] \equiv [ \text{fn } x \Rightarrow (\text{fn } y \Rightarrow ) ]$$

Possiamo così introdurre **funzioni a più argomenti** all'interno del linguaggio *Fun*.

## 3. Lambda calcolo

### 3.1. Numeri di Church

Tra i diversi modi di rappresentare i numeri naturali, ci interessa presentare quello di Alonzo Church.

Per Church, il cui mondo è fatto di funzioni, un numero naturale  $n$  corrisponde all'applicare  $n$  volte una funzione  $x$  su un argomento  $y$ .

Possiamo, per esempio, rappresentare il numero 2 “di Church” in  $Fun$  in questo modo:

$$fn\ x\ y \Rightarrow x\ (x\ y) \equiv fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x\ (x\ y)$$

(ovvero, presa una funzione  $x$  e un valore  $y$  di partenza, si applica due volte la funzione  $x$  (prima al valore stesso “ $(x\ y)$ ”, e poi al risultato di questa applicazione - “ $x(“x(“x(“y))”)$ ”)))

#### Def. 26: Numeri di Church in $Fun$

Più in generale, indicando con  $M^n N$  il termine  $M(M(\dots(MN)\dots))$  (in cui si ripete  $n$  volte  $M$ ), un numero  $c_n$  di Church si può rappresentare, con la sintassi di  $Fun$ , in questo modo:

$$c_n \equiv fn\ x\ y \Rightarrow x^n\ y$$

Possiamo rappresentare anche altri concetti essenziali come la funzione “successore”, la somma e il prodotto tramite numeri di Church.

#### Def. 27: “Succ” di Church

La funzione successore di Church, seguendo lo stesso ragionamento, dovrà ricevere un numero di Church  $z$  in ingresso, e restituire il numero di Church che applica  $x$  a  $y$ ,  $z + 1$  volte:

$$succ \equiv fn\ z\ x\ y \Rightarrow x\ (z\ x\ y)$$

$$succ \equiv fn\ z \Rightarrow fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x\ (z\ x\ y)$$

essenzialmente, dato  $z$  numero di Church di cui calcolare il successore (che vuole quindi come parametri  $x$  funzione e  $y$  valore di partenza), si applica una volta in più  $x$ .

La funzione si può scrivere anche, equivalentemente, in questo modo:

$$fn\ z\ x\ y \Rightarrow z\ x\ (x\ y)$$

“anticipando” essenzialmente il  $+1$  (prima si applica  $x$  una volta “in più”, e poi le altre  $z$  volte)

Facciamo un esempio concreto:

$$\begin{aligned} succ\ c_1 &= fn\ x\ y \Rightarrow x\ (c_1\ x\ y) \\ &= fn\ x\ y \Rightarrow x\ ((fn\ x\ y \Rightarrow xy)\ x\ y) \\ &= fn\ x\ y \Rightarrow x\ (x\ y) \end{aligned}$$

che corrisponde al due di Church !

### 3.2. Semantica del lambda calcolo

La semantica di  $Fun$  si può esprimere in termini del linguaggio (più elementare) del lambda calcolo.

```
val zero = fn x => fn x => y;
```

è il false di church

```
fun zero x y = y;
```

operatore di ricorsione = linguaggio inconsistente type-wise

```
val succ = fn w => (fn x => fn y => x(w x y));
```

(faccio w volte x su y, più un'altra volta ( x()))

```
val plus = fn u => fn v => (u succ v);
val plus u v x y = v x(u x y)
```

in cui u, v numeri di church, x funzione, y da cui parto  $x(u \ x \ y) \ succ$

```
val times = fn u => fn v => (u (fn z => (plus z v)) zero);
```

passo a u la funzione che fa u volte la funzione che somma v, a partire da zero (di church)