

# ALGEBRA

(appunti delle lezioni del professor Pellarin - con note/osservazioni aggiunte)

[https://open.spotify.com/playlist/3zMsGGKjUNlx3DFJ133ex?  
si=rGWujY5LSLy7B1vKdUTHnA&pi=e-SkW9gkIWTLG5](https://open.spotify.com/playlist/3zMsGGKjUNlx3DFJ133ex?si=rGWujY5LSLy7B1vKdUTHnA&pi=e-SkW9gkIWTLG5)



Si vuole creare una teoria generale che contenga come esempio  $\mathbb{Z}$  e le sue operazioni

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{-} \mathbb{Z} \quad \text{opposto}, \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{+} \mathbb{Z} \quad \text{somma e prodotto (binarie)}$$

l'altro modo di esprimere l'addizione



Ci sono diverse condizioni di compatibilità tra le operazioni:

$$\circ(b+c) = ab+ac, \quad a+b = b+a, \quad a+(b+c) = (a+b)+c$$

def ANELLO es.  $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

poi lo chiameremo solo A

Un anello (commutativo unitario) è il dato di una SESTUPLA  $(A, +, -, \cdot, 0_A, 1_A)$

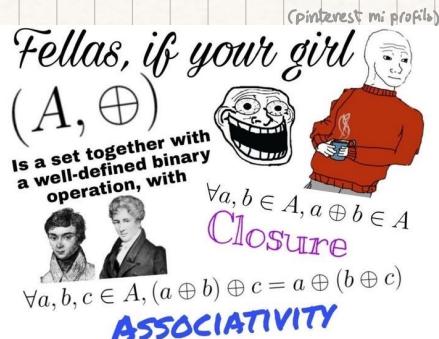
dove:

- $A \longrightarrow$  insieme non vuoto
- $+, - : A \times A \longrightarrow A$  operazioni binarie
- $- : A \longrightarrow A$  opposto
- $0_A \in A$  elemento neutro addizione
- $1_A \in A$  elemento neutro moltiplicazione

questi dati devono soddisfare 8 proprietà:

4 sull'addizione  $(A, +, -, 0_A, 1_A)$

- ①  $\forall a, b \in A, a+b = b+a$  COMMUTATIVITÀ
- ②  $\forall a, b, c \in A, (a+b)+c = a+(b+c)$  ASSOCIAZIATIVITÀ DELLA SOMMA
- ③  $\forall a \in A, a+0_A = 0_A+a = a$  EL. NEUTRO SOMMA
- ④  $\forall a \in A, a+(-a) = 0_A$  (OPPOSTO)



$\exists e \in A : \forall a \in A, e+a = a+e = a$   
An identity element  
 $\forall a \in A, \exists b \in A : a+b = b+a = e$   
Inverse elements  
 $\forall a, b \in A, a+b = b+a$  That's not your girl, that's an Abelian group!  
and Commutativity

queste 4 proprietà indicano che  $(A, +, -, 0_A)$  è un GRUPPO ABELIANO in notazione additiva (gruppi, p.57)

4 sul prodotto  $(A, +, -, \cdot, 0_A, 1_A)$ :

$$\textcircled{5} \quad \forall a, b, c \in A, a(b \cdot c) = (a \cdot b)c = abc \quad \text{ASSOCIAZIATIVITÀ DEL PRODOTTO}$$

$$\textcircled{6} \quad \forall a, b, c \in A, a(b+c) = ab+ac \quad \text{DISTRIBUTIVITÀ}$$

$$(a+b)c = ac+bc$$

$$\textcircled{7} \quad \forall a \in A, a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a \quad \text{EL. NEUTRO DEL PRODOTTO}$$

rende l'anello "UNITARIO"

$$\textcircled{8} \quad \forall a, b \in A, a \cdot b = b \cdot a \quad \text{COMMUTATIVITÀ DEL PRODOTTO}$$

rende l'anello "COMMUTATIVO"

l'anello  $A = \mathbb{Z}$  ha proprietà più specifiche:

#### BUON ORDINAMENTO E ORDINE TOTALE

- esiste il sottoinsieme  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} \subset \mathbb{Z}$  che permette di definire una relazione su  $\mathbb{Z}$ :

si scrive  $a > b \iff a - b \in \mathbb{N}^*$

$$\forall a \in \mathbb{Z} \text{ si ha: } \begin{cases} a \in \mathbb{N}^* & \text{è positivo} \\ a = 0 & \text{è nullo} \\ -a \in \mathbb{N}^* & \text{è negativo} \end{cases} \quad (\text{proprietà di tricotomia})$$

- Ogni sottoinsieme  $E \subset \mathbb{N}^*$  non vuoto possiede un più piccolo elemento per

$\langle \exists c \in E \text{ tc. } \forall e \in E \setminus \{c\} \text{ si ha } e > c \rangle \text{ BUON ORDINAMENTO}$

un anello commutativo e unitario che soddisfa le proprietà di tricotomia e buon ordinamento "è essenzialmente"  $\mathbb{Z}$

- se  $a < b \quad c < d$  allora  $a+c < b+d$  e  $-a > -b$  allora l'operazione + e > sono compatibili in modo simile, c'è compatibilità tra  $\circ$  e  $>$

legge di cancellazione in  $\mathbb{Z}$

Se  $ab = ac$  con  $a \neq 0$  allora  $b=c$ .

Infatti, supponendo  $a > 0$   
altrimenti basta moltiplicare per -1 entrambi le parti

Induzione su  $a \geq 1$

•  $a=1$  è chiaro perché 1 è l'el. neutro

• Supponiamo per ip. induttiva che  $a > 1$  e  $(a-1)b = (a-1)c$

Supponiamo x ass. che  $b \neq c$ . Allora  $\circ b > c \circ b < c$ . Supponiamo  $b > c \implies (a-1)b + b > (a-1)c + c$   
 tricotomia  
 $a-1b + b > a-1c + c$  premessa  $ab = ac$   
 $ab > ac$ , che è impossibile  
 quindi necessariamente  $b=c$

def ELEMENTI INVERTIBILI dato A anello  $1_A \neq 0_A$

$a \in A$  t.c.  $\exists b \in A : ab = ba = 1_A$  ( $a$ ) è detto elemento invertibile.

(si dice che  $b$  è inverso di  $a$  e si scrive  $b = a^{-1}$ ) es. se  $a$  è invertibile allora  $a^{-1}$  è unicamente determinato

inverso di  $a$ : el. che, moltiplicato per  $a$ , dà  $1_A$

es.  $1_A$  è invertibile di inverso  $1_A^{-1} = 1_A$

$$a \cdot b = a \cdot b' = 1 \text{ con } b, b' \in A$$

deve essere =

$$\begin{aligned} \text{allora } (a \cdot b) b' &= 1_A \cdot b' = b' \\ \text{quindi } (2) &\xrightarrow{(3)} \text{uguali} \\ (a \cdot b') b &= 1_A \cdot b = b \\ \text{allora } (a \cdot b) b' &= a(b \cdot b') = a(b' \cdot b) = ab' \cdot b \\ \text{quindi } (2) &\xrightarrow{(1)} \text{uguali} \end{aligned}$$

Si pone  $A^x = \{ \alpha \in A \text{ t.c. } \alpha \text{ è invertibile} \}$   $A^x$  è un gruppo

verificare ①  $A^x$  è non vuoto ② se  $\alpha \in A^x$  allora  $\alpha^{-1} \in A^x$

③ se  $a, b \in A^x$  sono invertibili, allora  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

④  $\mathbb{Z}^x = \{1, -1\}$

esercizio  $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1)$  è un anello (cu). Calcolare l'insieme degli elementi invertibili

risposta:  $\mathbb{Q}^x = \{r \in \mathbb{Q}; r \neq 0\}$   $[1] = [1_A]$

PICCOLI ESEMPI

①  $\forall \alpha \in A, \alpha \cdot 0_A = 0_A$

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0_A &= \underbrace{\alpha \cdot (0_A + (-0_A))}_{0_A \text{ (assioma)}} = \alpha \cdot 0_A + \alpha \cdot (-0_A) \\ &= \alpha \cdot 0_A + (-(\alpha \cdot 0_A)) \text{ elemento} + \text{il suo opposto quindi } \alpha \cdot 0_A = 0_A \\ &= 0_A \times \text{assioma} \end{aligned}$$

② Supponiamo  $0_A = 1_A$ .

Mostriamo che  $\forall \alpha \in A, \alpha = 0_A = 1_A$  ( $A = \{0_A\}$ )

$$\alpha \in A : 1_A = 0_A \implies \underbrace{\alpha \cdot 1_A}_{=\alpha} = \underbrace{\alpha \cdot 0_A}_{0_A} \text{ quindi, } \forall \alpha, \alpha = 0_A$$

③ se  $1_A \neq 0_A$  allora  $0_A \notin A^x$ .

Supponiamo per assurdo  $\exists x \in A^x$  t.c.  $1_A = x \cdot 0_A = 0_A$  contraddizione

gli assiomi implicano che  $0_A$  non è mai invertibile

Si pone  $A^\times = \{a \in A \text{ t.c. } a \text{ è invertibile}\}$   $A^\times$  è un gruppo

verificare ①  $A^\times$  è non vuoto ② se  $a \in A^\times$  allora  $a^{-1} \in A^\times$

③ se  $a, b \in A^\times$  sono invertibili, allora  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

④  $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$

①  $A^\times$  non è vuoto.

Abbiamo visto che  $1_A$  è sempre invertibile e  $1_A \in A$  per def. di omessa comm. un. (semplice)

quindi,  $1_A \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$

② se  $a \in A^\times$  allora  $a^{-1} \in A^\times$

vista in classe  
se  $a \in A^\times$ , vuol dire che  $\exists$  unicamente determinato  $b \in A : ab = ba = 1_A$ .

Supponiamo per assurdo che  $b \notin A^\times$ .

se  $b \notin A^\times$ ,  $\nexists x \in A \text{ t.c. } bx = xb = 1_A$ . ma questo è falso, esiste ed è  $a$ .

$\circ \forall x \in A, bx = xb \neq 1_A$  falso per  $a$

③ se  $a, b \in A^\times$ , allora  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \Leftrightarrow a^{-1}b^{-1} \cdot ab = 1_A \quad (\text{per definizione})$$

$$\Leftrightarrow a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot a \cdot b = 1_A \quad (\text{e, poiché unicamente determinato, se } a^{-1}b^{-1} \cdot ab = 1_A \text{ e } (a \cdot b)^{-1} \cdot ab = 1_A \text{ allora } (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1})$$

visto che  $a^{-1} \cdot a = 1_A$  e  $b^{-1} \cdot b = 1_A$

$$a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot a \cdot b \quad \begin{matrix} \text{commutatività} \\ \text{e associtività} \end{matrix} \quad (a \cdot a^{-1}) \cdot (b \cdot b^{-1}) = 1_A$$

$1_A \cdot 1_A = 1_A$  vero perché  $1_A$  il.

neutro della mult.

quindi  $x \cdot 1_A = 1_A$

④  $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$

• dimostriamo  $1, -1 \in \mathbb{Z}^\times$

① su  $\mathbb{Z}$ ,  $1_A = 1$ . Visto che  $1_A$  è sempre invertibile,  $1 \in \mathbb{Z}^\times$

②  $-1 = -(-1)$  se  $-1^{-1} = 1$ , allora  $-(-1^{-1}) = -(-1)$  moltiplica per  $-1$  da entrambe le parti  
quindi  $-1 \in \mathbb{Z}^\times$  e  $-1^{-1} = -1$

③ dimostriamo che  $\forall x \in \mathbb{Z}, x \notin \{1, -1\} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}^\times$

Supponiamo per assurdo  $x \in \mathbb{Z}, x \notin \{1, -1\}, x \in \mathbb{Z}^\times$

Allora  $x \cdot y = 1_A$ . su  $\mathbb{Z}$ ,  $1_A = 1$ , quindi  $x \cdot y = 1$

Ma, su  $\mathbb{Z}$ , le uniche coppie che moltiplicate danno 1 sono  $(-1, -1)$  e  $(1, 1)$

Per ipotesi,  $x \notin \{1, -1\}$ , quindi CONTRADDIZIONE

esercizio  $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1)$  è un anello (cu). Calcolare  $\mathbb{Q}^{\times} = \{x \in \mathbb{Q} : x \text{ è invertibile}\}$

- invertibili:  $\exists x \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } \exists y \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } xy = 1$

- in  $\mathbb{Q}^{\times}$ ,  $1_A = 1$ .

quindi  $\exists x \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } \exists y \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } xy = 1$

① dimostriamo che  $0 \notin \mathbb{Q}^{\times} \rightarrow 0 = 0_A \in \mathbb{Q}_A \text{ e } 0_A \text{ non è invertibile per definizione}$   
(ma, comunque, basta fare:  $0 \cdot y = 1$  impossibile perché  $0 \cdot y = 0$ )

② dimostriamo che  $\forall q \in \mathbb{Q}, q \neq 0, q \in \mathbb{Q}^{\times}$

$qx = 1 \iff x = \frac{1}{q} \text{ e } \frac{1}{q} \in \mathbb{Q}$ . Trovato  $x$  t.c.  $qx = 1$  (per vedere inviamente che  $x \neq 0$  non va)  
perché  $\frac{1}{0}$  impossibile  
(non sono sicura che questo basti, ngl.)

esercizio: c'è un unico elemento neutro

Siamo  $v, v'$  due elementi neutri per la moltiplicazione

$$\begin{array}{lll} \forall a \in A \quad av = ua = a & \text{con } a = v & vv' = v'u = v \\ \quad av' = u'a = a & \text{con } a = v' & v'u \cancel{=} vv' = v' \end{array} \quad \text{quindi } v = v'$$

Dedurre che anche l'elemento neutro per l'addizione è unicamente determinato

## Relazione di divisibilità

Introduciamo la relazione:  $a, b \in A : a|b \iff \exists c \in A \text{ t.c. } b = a \cdot c$

$$2|6 : 6 = 2 \cdot 3$$

• è una relazione **riflessiva**:  $\forall a \in A, a = a \cdot 1_A$

• è una relazione **transitiva**:  $a, b, c \in A$  supponiamo  $a|b \iff b = a \cdot a' \exists a' \in A$

• Non è simmetrica né antisimmetrica  
ma su  $N^*$  è antisimmetrica

$$b|c \iff c = b \cdot b' \exists b' \in A$$

$$\Rightarrow c = a \cdot a' \cdot b' = a(\underbrace{a' \cdot b'}_{a''}) \Rightarrow c = a \cdot a'' \iff a|c$$

• se  $a|b \wedge a|c$  allora  $a|b+c$  (compatibilità)

$$a|b \iff \exists a' \text{ t.c. } b = a \cdot a' \quad a|c \iff \exists a'' \in A \text{ t.c. } c = a \cdot a''$$

$$b+c = a \cdot a' + a \cdot a'' = a(\underbrace{a' + a''}_{a'''}) \iff a|b+c$$

più generalmente, se  $\alpha, \beta \in A$ ,  $\alpha|b, \alpha|c \Rightarrow \alpha|b+\beta c$  (la dimostrazione è banale)

$$\alpha b + \beta c = \alpha \cdot a \cdot a' + \beta \cdot a \cdot a'' = a(\underbrace{\alpha a' + \beta a''}_{a'''})$$

dim.  $\alpha, \beta \in A$

$$\alpha|b, \alpha|c \Rightarrow \alpha|\alpha b + \beta c$$

•  $\alpha|b \Rightarrow \alpha|\alpha b$  per def. di moltiplicazione

•  $\alpha|c \Rightarrow \alpha|\beta c$

per la dim. d. compatibilità,  $\alpha|\alpha b + \beta c$

In  $\mathbb{Z}$  la relazione di divisibilità è quasi antisimmetrica:

ignoriamo il caso  $0$

$$a, b \in \mathbb{Z} \quad a|b \wedge b|a \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z}^* \text{ t.c. } a = bc \quad (\text{ovvero } a \in \{b, -b\} \circ \{a, -a\} = \{b, -b\})$$

$$\textcircled{1} \mid 1 \Rightarrow 1 = \textcircled{0} \cdot b \quad \textcircled{0} \text{ non divide mai un el. non nullo} \quad \text{quindi possiamo supporre } a, b \neq \textcircled{0}$$

$$a|b, b|a \Rightarrow b = a \cdot a', a = b \cdot b' \exists a, b \in \mathbb{Z}$$

$$b = b \cdot a' \cdot b' \quad \text{con } b \neq \textcircled{0}, \text{ legge di cancellazione} \quad b' = b \cdot a' \cdot b' \Rightarrow 1 = a' \cdot b' \Rightarrow a' \cdot b' \in \{1, -1\}$$

$$\Rightarrow \{a, -a\} = \{b, -b\}$$

• non è simmetrica  $\rightarrow$  supponiamo  $a|b$  simmetrica. Allora  $a|b$  ( $\exists c \text{ t.c. } b = a \cdot c$ )  $\Rightarrow b|a$  ( $\exists c' \text{ t.c. } a = b \cdot c'$ )

$$\text{quindi, } b = b \cdot c' \cdot c \quad \text{con } b \neq \textcircled{0} \quad b = b \cdot c' \cdot c \iff 1 = c \cdot c' \iff (c, c') \in \{(1, 1), (-1, -1)\}$$

oppure, con esempio:  $2|4$  ma  $4 \not| 2$

• non è antisimmetrica: se fosse antisimmetrica,  $a|b \wedge b|a \Rightarrow a = b$

ma (ragionamento di prima)  $1 = c'c \iff (c, c') \in \{(1, 1), (-1, -1)\}$

$$\begin{cases} (c', c) = (1, 1) \Rightarrow b = a \\ (c', c) = (-1, -1) \Rightarrow b = -a \end{cases}$$

def elemento irriducibile

invertibili

$\alpha \in A \setminus A^\times$  è detto irriducibile se

$\forall b, c \in A, \alpha = bc \Rightarrow b \in A^\times \text{ o } c \in A^\times$

es.  $A = \mathbb{Z}$   $12 = 4 \cdot 3$  ma  $4, 3 \notin \mathbb{Z}^\times \Rightarrow 12$  non è irr.

$$7 = 1 \cdot 7 = 7 \cdot 1 = -1 \cdot -7 = -7 \cdot -1 \quad 7 \text{ è irriducibile}$$

$1 \in \mathbb{Z}$  non è irriducibile perché abbiamo definito  $\alpha \in A \setminus A^\times$

def numero primo

invertibili

$\alpha \in A \setminus A^\times, \alpha \neq 0$  è detto primo se

$\forall b, c \in A, \text{ se } \alpha | bc \Rightarrow \alpha | b \text{ oppure } \alpha | c$

Supponiamo  $A = \mathbb{Z}$

lemma  $p \in \mathbb{Z}$  primo  $\Rightarrow p$  è irriducibile

dim  $p$  primo, siano  $a, b \in \mathbb{Z}$  t.c.  $p = ab \Rightarrow p | a \cdot b$

$$ab = p \cdot 1$$

Supponiamo senza perdita di generalità  $p | a$

$$\text{sost. } a = p a'$$

$$p | a \Rightarrow a = p a' \exists a' \in \mathbb{Z} \Rightarrow p = p a' b \quad \begin{matrix} \text{legge di} \\ \text{concessione} \end{matrix} \quad p = p(a'b) \Leftrightarrow 1 = a'b \Rightarrow a', b \in \{+1, -1\} = \mathbb{Z}^\times$$

Se  $a' = 1$  allora  $a = p \Rightarrow p = pb \Rightarrow b = 1$

Se  $a' = -1$  allora  $a = -p \Rightarrow p = p - b \Rightarrow -b = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow p$  è irriducibile

!! ogni modo di scriverlo come  
 $p = ab$  porta ad  $a, b \in \{-1, 1\}$   
 $A^\times \text{ in } \mathbb{Z}$

def valore assoluto

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{1.1}} \mathbb{N} \quad a \in \mathbb{Z} \quad \bullet \text{ se } a = 0 \quad |a| = 0$$

• se  $a \neq 0, |a| =$  l'unico elemento di  $\mathbb{N}$  contenuto nell'insieme  
di due elementi  $\{a, -a\}$

## ALGORITMO DELLA DIVISIONE EUCLIDEA

$a, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$  allora esistono unicamente determinati

$q \in \mathbb{Z}, r \in \{0, \dots, |n|-1\}$  t.c.  $a = nq + r$

resto  
quoziente

è una riformulazione  
del principio del minimo su  $\mathbb{N}$

## def CONGRUENZA

b è il resto di  $\frac{2}{\sqrt{n}}$

$$a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid a - b$$

$$\iff \exists q \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } d-b = qn$$

ovvero, il resto della divisione escluse di  $a - b$  per  $n$  è 0

- La congruenza modulo  $n$  è di equivalenza

④ Transitivität:  $a \equiv b \pmod{n}$  und  $b \equiv c \pmod{n} \iff n \mid b-a$  und  $n \mid c-b$

$$n|\alpha: n|\beta \Rightarrow n|\alpha+\beta \quad n|c-b+b-a \Rightarrow n|c-a \Leftrightarrow a \equiv c \pmod{n}$$

Sov. vi rifl. e simm.

$$\mathbb{Z}_{\equiv \text{mod } n} = \left\{ \begin{matrix} n\mathbb{Z}, & n\mathbb{Z}+1, & \dots, & n\mathbb{Z}+n-1 \\ [0] & [1] & & [n-1] \\ & & & [n-1] \end{matrix} \right\}$$

② riflessiva :  $\delta = \delta \bmod n$        $n \mid \delta - \delta$  vero perché  $\forall x \in \mathbb{Z}, x \neq 0, x \mid 0$

$$\textcircled{3} \text{ simmetrico: } a \equiv_n b \implies b \equiv_n a \quad n | a - b \implies n | b - a$$

$$n > -b \iff a - b = qn \iff -(a - b) = -(qn) \iff b - a = -qn \quad \text{quindi } n | b - a$$

Esempi: congruenze moduli 2

$$\mathbb{Z} = \underbrace{2\mathbb{Z}}_{[0]} \sqcup \underbrace{2\mathbb{Z} + 1}_{[1]} \quad \mathbb{Z}/\equiv_{\text{mod}_2} = \{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} + 1\}$$

congruenza mod. 3

$$\mathbb{Z} \equiv_{\text{mod } 3} = \{ 3\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z} + 1, 3\mathbb{Z} + 2 \}$$

$$\mathbb{Z}/\equiv_n = \mathbb{Z}_{n\mathbb{Z}} \quad n > 0 \quad \text{insieme quoziente}$$

di  $\mathbb{Z}$  su congr. modulo  $n$

l'componente  
mod.  $n$

quindi  $\mathbb{Z}_{2\mathbb{Z}} = \{[0], [1]\}$   $\mathbb{Z}_{3\mathbb{Z}} = \{[0], [1], [2]\}$   $\mathbb{Z}_{1\mathbb{Z}} = \{[0]\}$

tutti gli interi

$[2]_3 = \{m \in \mathbb{Z} : m \equiv 2 \pmod{3}\} = \{m \in \mathbb{Z} : 3 | m-2\}$

Le operazioni: + - di  $\mathbb{Z}$  sono compatibili con  $\equiv_n$  ( $n > 0$ )

①  $\forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{Z}, \alpha \equiv \alpha' \pmod{n} \iff -\alpha \equiv -\alpha' \pmod{n}$  compatibilità con opposto

②  $\forall \alpha, \alpha', b, b' \in \mathbb{Z}, \alpha \equiv_n \alpha', b \equiv_n b' \Rightarrow \alpha + b \equiv_n \alpha' + b'$  comp. con somma

③  $\forall \alpha, \alpha', b, b' \in \mathbb{Z}, \alpha \equiv_n \alpha', b \equiv_n b' \Rightarrow \alpha b \equiv_n \alpha' b'$  comp. con prodotto

dim. ②

$$2 \mid 5-1 \quad \text{e} \quad 2 \mid 1-5$$

$$\alpha \equiv_n \alpha' \iff n \mid \alpha - \alpha' \quad \text{e} \quad n \mid \alpha' - \alpha$$

$$n \mid b' - b \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \underline{\alpha'} - \underline{\alpha} = nk$$

$$n \mid b' - b \iff \exists k' \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \underline{b'} - \underline{b} = nk'$$

Dove ottenere  $\alpha + b \equiv_n \alpha' + b'$

sommare le due formule

$$\Rightarrow \underline{\alpha'} + \underline{b'} - (\underline{\alpha} + \underline{b}) = n(k+k') \iff \alpha' + b' \equiv_n \alpha + b$$

quindi  $n(\alpha' + b') - \alpha + b$   
(perché  $n \cdot \text{qualcosa} = \text{quello}$ )

dim. ①

$$\forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{Z}, \alpha \equiv_n \alpha' \iff -\alpha \equiv_n -\alpha'$$

$$\alpha \equiv_n \alpha' \iff n \mid \alpha - \alpha' \iff \alpha - \alpha' = qn \iff -\alpha + \alpha' = -qn$$

dim. ③

$$\forall \alpha, \alpha', b, b' \in \mathbb{Z}, \alpha \equiv_n \alpha', b \equiv_n b' \Rightarrow \alpha b \equiv_n \alpha' b'$$

ovvero  $\alpha b - \alpha' b' = kn \quad \text{o} \quad \alpha b = kn + \alpha' b'$

$$\alpha = qn + \alpha' \quad \text{e} \quad b = q'n + b' \quad \text{quindi } \alpha b = (\alpha + qn)(b + q'n) = \alpha b' + n(q'b' + \alpha'q' + qq'n)$$

$\alpha b = \alpha' b' + n(k)$

### OPERATORI

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  definiamo  $[\alpha] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$   $[\alpha] = \alpha + n\mathbb{Z}$  insieme degli interi che si esprimono come  $\alpha +$  multiplo di  $n$  (interi che hanno come resto  $\alpha$ )

-  $[\alpha] := [-\alpha]$  questa funz.  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  è ben definita: opposto in  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

definiamo

•  $[\alpha] + [b] := [\alpha + b]$  ben definito (ovvero indipendente dalla scelta di rapp. di  $[\alpha] \in [b]$ )

$$\text{scelgiamo } \alpha' \in [\alpha] \quad \text{e } b' \in [b] \quad \text{e calcoliamo } [\alpha' + b'] = \left\{ m : n \mid m - \alpha' - b' \right\} = \left\{ m : n \mid m - (\alpha' + b') \right\}$$

per (2), perché  $[\alpha] = [\alpha']$   
quindi  $\alpha \equiv \alpha' \pmod{n}$   
e stessa cosa per  $b$

$\Leftrightarrow [\alpha + b] = [\alpha' + b']$  l'operazione + introdotta su  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  è ben definita

$$\text{esempi: } [1]_3, [2]_3 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \quad [1] + [2] = [3] = [0]$$

$$\text{altri rapp. } [1] = [4] \quad [2] = [-4]$$

$$\text{quindi } [4 + -4] = [0]$$

• definiamo inoltre  $[\alpha], [b] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$   $[\alpha] \cdot [b] = [\alpha b]$  ben definito

$$\text{scelgiamo } \alpha' \in [\alpha] \quad \text{e } b' \in [b], \quad [\alpha b] = \left\{ m : n \mid m - \alpha' b' \right\} \xrightarrow{\text{ma } \alpha' = n\alpha \text{ e } b' = nb} = \left\{ m : n \mid m - ab \right\}$$

- quindi, per (3)

$$\text{esempi: } [1]_3, [2]_3 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \quad [1] \cdot [2] = [2]$$

$$\text{e } [4 \cdot -4] = [-16] = [2] \quad \begin{aligned} &\text{- perché } \frac{2}{3} = 0 \text{ resto } 2 \\ &\text{e } \frac{-16}{3} = -6 \text{ resto } 2 \end{aligned}$$

### TEOREMA

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, -, \cdot, [0], [1])$  è un ANELLO (comm. un.)

è grande la voglia di calcolare l'insieme degli elementi invertibili (ma lo faremo dopo)

alcuni sottinsiemi di  $\mathbb{Z}$

•  $n\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ con } m = kn\}$  multipli di  $n$

•  $\mathbb{Z} \setminus \{0\} = \mathbb{Z}^*$

•  $\alpha\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} := \{m \in \mathbb{Z} : \exists k, k' \in \mathbb{Z} \text{ con } m = k\alpha + k'b\}$  multipli di  $\alpha +$  multipli di  $b$

$$2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \left\{ \begin{array}{c} 0, 2, 4, \\ \text{mod. 2} \end{array}, \begin{array}{c} 3, 6, 9, \\ \text{mod. 3} \end{array}, \begin{array}{c} 5, 8, \\ 2+3 \end{array}, \begin{array}{c} 7, -1, 1, \dots \\ 2+6 \end{array} \right\} = \mathbb{Z}$$

vedremo  $\alpha\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \text{MCD}(\alpha, b)\mathbb{Z}$

$$\text{in particolare } \text{MCD}(2, 3) = 1 \quad 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z}$$

• (visto dopo ma utile) invertibili in  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

con  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \left\{ [\alpha] : \alpha \in \mathbb{Z} \text{ e } \text{MCD}(\alpha, n) = 1 \right\}$$

le classi dei coprimi di  $n$

2	-7	-4	-1	2	5
0	-9	-6	-3	0	3
-2	-11	-8	-5	-2	1
-4	-13	-10	-7	-4	-1
-6	-15	-12	-9	-6	-3
-8	-17	-14	-11	-8	-5
-10	-19	-16	-13	-10	-7
-12	-21	-18	-15	-12	-9
-14	-23	-20	-17	-14	-11
-16	-25	-22	-19	-16	-13
-18	-27	-24	-21	-18	-15
-20	-29	-26	-23	-20	-17
-22	-31	-28	-25	-22	-19
-24	-33	-30	-27	-24	-21
-26	-35	-32	-29	-26	-23
-28	-37	-34	-31	-28	-25
-30	-39	-36	-33	-30	-27
-32	-41	-38	-35	-32	-29
-34	-43	-40	-37	-34	-31
-36	-45	-42	-39	-36	-33
-38	-47	-44	-41	-38	-35
-40	-49	-46	-43	-40	-37
-42	-51	-48	-45	-42	-39
-44	-53	-50	-47	-44	-41
-46	-55	-52	-49	-46	-43
-48	-57	-54	-51	-48	-45
-50	-59	-56	-53	-50	-47
-52	-61	-58	-55	-52	-49
-54	-63	-60	-57	-54	-51
-56	-65	-62	-59	-56	-53
-58	-67	-64	-61	-58	-55
-60	-69	-66	-63	-60	-57
-62	-71	-68	-65	-62	-59
-64	-73	-70	-67	-64	-61
-66	-75	-72	-69	-66	-63
-68	-77	-74	-71	-68	-65
-70	-79	-76	-73	-70	-67
-72	-81	-78	-75	-72	-69
-74	-83	-80	-77	-74	-71
-76	-85	-79	-76	-73	-70
-78	-87	-76	-73	-70	-67
-80	-89	-73	-70	-67	-64
-82	-91	-60	-57	-54	-51
-84	-93	-57	-54	-51	-48
-86	-95	-54	-51	-48	-45
-88	-97	-51	-48	-45	-42
-90	-99	-48	-45	-42	-39
-92	-101	-45	-42	-39	-36
-94	-103	-42	-39	-36	-33
-96	-105	-39	-36	-33	-30
-98	-107	-36	-33	-30	-27
-100	-109	-33	-30	-27	-24
-102	-111	-30	-27	-24	-21
-104	-113	-27	-24	-21	-18
-106	-115	-24	-21	-18	-15
-108	-117	-21	-18	-15	-12
-110	-119	-18	-15	-12	-9
-112	-121	-15	-12	-9	-6
-114	-123	-12	-9	-6	-3
-116	-125	-9	-6	-3	0
-118	-127	-6	-3	0	3
-120	-129	-3	0	3	6
-122	-131	0	3	6	9
-124	-133	3	6	9	12
-126	-135	6	9	12	15
-128	-137	9	12	15	18
-130	-139	12	15	18	21
-132	-141	15	18	21	24
-134	-143	18	21	24	27
-136	-145	21	24	27	30
-138	-147	24	27	30	33
-140	-149	27	30	33	36
-142	-151	30	33	36	39
-144	-153	33	36	39	42
-146	-155	36	39	42	45
-148	-157	39	42	45	48
-150	-159	42	45	48	51
-152	-161	45	48	51	54
-154	-163	48	51	54	57
-156	-165	51	54	57	60
-158	-167	54	57	60	63
-160	-169	57	60	63	66
-162	-171	60	63	66	69
-164	-173	63	66	69	72
-166	-175	66	69	69	75
-168	-177	69	69	72	78
-170	-179	72	72	75	81
-172	-181	75	75	78	84
-174	-183	78	78	81	87
-176	-185	81	81	84	93
-178	-187	84	84	87	96
-180	-189	87	87	90	102
-182	-191	90	90	93	105
-184	-193	93	93	96	108
-186	-195	96	96	99	111
-188	-197	99	99	102	114
-190	-199	102	102	105	117
-192	-201	105	105	108	120
-194	-203	108	108	111	123
-196	-205	111	111	114	126
-198	-207	114	114	117	129
-200	-209	117	117	120	132
-202	-211	120	120	123	135
-204	-213	123	123	126	138
-206	-215	126	126	129	141
-208	-217	129	129	132	144
-210	-219	132	132	135	147
-212	-221	135	135	138	150
-214	-223	138	138	141	153
-216	-225	141	141	144	156
-218	-227	144	144	147	159
-220	-229	147	147	150	162
-222	-231	150	150	153	165
-224	-233	153	153	156	168
-226	-235	156	156	159	171
-228	-237	159	159	162	174
-230	-239	162	162	165	177
-232	-241	165	165	168	180
-234	-243	168	168	171	183
-236	-245	171	171	174	186
-238	-247	174	174	177	189
-240	-249	177	177	180	192
-242	-251	180	180	183	195
-244	-253	183	183	186	198
-246	-255	186	186	189	201
-248	-257	189	189	192	204
-250	-259	192	192	195	207
-252	-261	195	195	198	210
-254	-263	198	198	201	213
-256	-265	201	201	204	216
-258	-267	204	204	207	219
-260	-269	207	207	210	222
-262	-271	210	210	213	225
-264	-273	213	213	216	228
-266	-275	216	216	219	231
-268	-277	219	219	222	234
-270	-279	222	222	225	237
-272	-281	225	225	228	240
-274	-283	228	228	231	243
-276	-285	231	231	234	246
-278	-287	234	234	237	249
-280	-289	237	237	240	252
-282	-291	240	240	243	255
-284	-293	243	243	246	258
-286	-295	246	246	249	261
-288	-297	249	249	252	264
-290	-299	252	252	255	267
-292	-301	255	255	258	270
-294	-303	258	258	261	273
-296	-305	261	261	264	276
-298	-307	264	264	267	279
-300	-309	267	267	270	282
-302	-311	270	270	273	285
-304	-313	273	273	276	288
-306	-315	276	276	279	291
-308	-317	279	279	282	294
-310	-319	282	282	285	297
-312	-321	285	285	288	300
-314	-323	288	288	291	303
-316	-325	291	291	294	306
-318	-327	294	294	297	309
-320	-329	297	297	300	312
-322	-331	300	300	303	315
-324	-333	303	303	306	318
-326	-335	306	306	309	321
-328	-337	309	309	312	324
-330	-339	312	312	315	327
-332	-341	315	315	318	330
-334	-343	318	318	321	333
-336	-345	321	321	324	336
-338	-347	324	324	327	339
-340	-349	327	327	330	342
-342	-351	330	330	333	345
-344	-353	333	333	336	348
-346	-355	336	336	339	351
-348	-357	339	339	342	354
-350	-359	342	342	345	357
-352	-361				

La divisibilità è una relazione di inclusione di sottoinsiemi

$$a, b \in \mathbb{Z}^* \quad a|b \iff b \mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} \quad \text{solo se i multipli di } b \text{ sono un sott. dei multipli di } a$$

• Supponiamo  $a|b$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } b = ka$$

se  $a|b$ , allora  
ogni multiplo di  $b$  può essere riscritto  
come  $b$ -qualcosa. Ma, per def di  $|$ ,  $b = a$ -qualcosa.  
quindi, un multiplo di  $b$  è un multiplo di  $a$

per definizione,  $b = ka \Rightarrow b' = \underbrace{l}_{l'} \underbrace{ka}_{k'} = l'a \iff b' \in a\mathbb{Z}$

dimostriamo  $b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} \Rightarrow a|b$

• Supponiamo  $b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$

Allora  $\forall b' \in b\mathbb{Z}, b' \in a\mathbb{Z}$ . Per definizione,  $b' \in a\mathbb{Z} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } b' = ka$

ma  $b' = lb$ . Quindi,  $lb = ka \iff b = \underbrace{k}_{k'} \underbrace{a}_{a} = k'a$  quindi  $b = ka$  ■

Lemma:  $E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$  con  $a, b \neq 0$ , allora  $\exists! \delta \in \mathbb{N}^*$  t.c.  $E = \delta\mathbb{Z}$

tutte le  
combinazioni sono  
multiple di un certo  
numero unico

dimostrazione

el. d:  $E > 0$

poniamo  $E^* := E \cap \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}^*$

• osserviamo che  $E^* \neq \emptyset$

- infatti, se  $a, b > 0$ , esiste una coppia  $(k, k') \in \mathbb{N}^2$  t.c.  $k_a + k'b > 0$

$\in E^*$

- se invece  $a > 0$  e  $b < 0$ ,  $\exists (k, k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  t.c.  $k_a + k'b > 0$

(e, per  $a < 0$ ,  $b > 0$   $\exists (k, k') \in -\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  e per  $a < 0$ ,  $b < 0$   $\exists (k, k') \in -\mathbb{N} \times -\mathbb{N}$ )

• poniamo  $\delta = \min(E^*)$  ben definito in  $\mathbb{N}^*$  (principio del minimo)

• osserviamo che  $\delta \leq |a|$  e  $\delta \leq |b|$

infatti  $|a| \in E^*$  (perché  $E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ )  $\subset \delta = \min(E^*)$

• per la DIVISIONE EUCLIDEA  $a = q\delta + r$ ,  $r \in \{0, 1, \dots, \delta-1\}$

notiamo che  $r = a - q\delta$

$a \in E$ ,  $\delta \in E^* \subset E \implies \delta = ua + vb$  con  $u, v \in \mathbb{Z}$

sempre per  
 $E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$

quindi  $r = a - q(ua + vb) \iff r = a - qua - qvb \iff r = a(\underbrace{1-qu}_k) + b(\underbrace{-qv}_{k'})$  quindi  $r = \delta k + \delta k' \iff r \in E$

Ci sono 2 opzioni: ①  $r = 0$ ,  $\delta | a$  ( $a = q\delta + r$ ) e abbiamo finito

per  $\delta = \min(E^*)$

② altrimenti,  $r > 0$  e  $r \in E^*$ . Se fosse vero,  $r \geq \delta$ . Ma questo è impossibile per  $a = q\delta + r$  con  $r \in \{0, 1, \dots, \delta-1\}$

$r \neq \delta$

quindi necessariamente  $r = 0$  e  $\delta | a$ . Per la stessa ragione,  $\delta | b$ .

•  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ,  $\delta | \alpha a + \beta b \implies E \subset \delta\mathbb{Z}$  per la dim sopra ( $a | b \iff b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$ )

d'altronde,  $\delta \in E \iff \delta = ka + kb$

$\forall l \in \mathbb{Z}$ ,  $l\delta = lk a + lk' b \implies l\delta \in E$

se i multipli di  $\delta$  sono

elementi di  $E$ , allora  $\Rightarrow \delta\mathbb{Z} \subset E$

$\delta\mathbb{Z}$  è contenuto in  $E$   
(per def  $=$ )

QUINDI, visto che  $E \subset \delta\mathbb{Z}$  e  $E \supset \delta\mathbb{Z}$ ,  $E = \delta\mathbb{Z}$

cosa abbiamo fatto? POSTI:  $E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$  con  $a, b \neq 0$  •  $E^* = E \cap \mathbb{N}^*$  (dimostrato  $E \neq \emptyset$ ) •  $\delta = \min(E^*)$

notiamo che

•  $a$  e  $b$  si può riscrivere come  $a = q\delta + r$ . Questo implica che  $r < \delta-1$  (per questioni resto)

• e che  $r \in E$ , perché  $\delta = ua + vb$  e  $r = a - q\delta \iff r = a - (ua + vb)$  che porta a  $r = a(1-qu) + b(-qv)$

•  $r$  può essere  $0 > 0 = 0$ . Ma se fosse  $> 0$ , dovrebbe essere anche  $< \delta-1$  per def resto e  $\delta = \min$ , il che è IMPOSSIBILE  
quindi,  $r = 0 \Rightarrow$  abbiamo dimostrato che  $\delta | a$  (e  $\delta | b$ )

$\delta$  divide i numeri di  $E$   $\iff$  formati da  $\alpha a + \beta b$

ora: visto che  $\delta | a$  e  $\delta | b$ ,  $\delta | a+b$  e  $\delta | \alpha a + \beta b$ . Questo implica  $\delta\mathbb{Z} \supset E$

e, visto che  $\delta \in E$  allora i suoi multipli  $\in E$ . Questo implica  $\delta\mathbb{Z} \subset E$

quindi,  $\delta\mathbb{Z} \subset E$  e  $\delta\mathbb{Z} \supset E \iff \delta\mathbb{Z} = E$

## MASSIMO COMUN DIVISORE

data  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  con  $(a, b) \neq (0, 0)$

def  $d \in \mathbb{N}$  è MCD di  $a$  e  $b$  se:

$$\textcircled{1} \quad d | a \text{ e } d | b$$

\textcircled{2} se  $d' \in \mathbb{N}$  t.c.  $d'|a$  e  $d'|b$ , allora  $d'|d$  ogni divisore di  $a$  e  $b$   
divide anche  $d$

lemma:

se  $d$  soddisfa \textcircled{1} e \textcircled{2}, allora è unico.

dim.

Supponiamo che  $d_1, d_2$  soddisfano \textcircled{1} e \textcircled{2}. Mostriamo che  $d_1 = d_2$ .

$d_2 = k \cdot d_1 \text{ e } d_1 = l \cdot d_2$  quindi  $d_1$  e  $d_2$  devono essere uguali o opposti

$$\text{Si ha } d_2 | d_1 \text{ e } d_1 | d_2 \Rightarrow \{d_1, -d_1\} = \{d_2, -d_2\} \Rightarrow d_1 = d_2$$

• Si scrive  $d = \text{MCD}(a, b)$

def COPRIMI  $\rightarrow$  Se  $\text{MCD}(a, b) = 1$ , si dice che  $a$  e  $b$  sono primi tra loro o coprimi

lemma

$$d = \text{MCD}(a, b) \quad a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z} \quad d > 0, a, b \neq 0$$

$$\left( \begin{array}{l} \cdot \text{ se } a=0, b \neq 0 \text{ allora } d = |b| > 0 \\ \cdot \text{ se } a \neq 0, b=0 \text{ allora } d = |a| > 0 \end{array} \right)$$

dim.

$$d\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} \supset a\mathbb{Z} \rightarrow d | a \\ \supset b\mathbb{Z} \rightarrow d | b \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{condizione } \textcircled{1} \\ \text{verificata} \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad (\text{mostro } d' | d \Leftrightarrow d\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z})$$

Ogni divisore di  
 $a$  e  $b$  divide il MCD

per la cond. \textcircled{2}: sia  $d' \in \mathbb{N}$  t.c.  $d' | a \text{ e } d' | b$

$$d' | a \Leftrightarrow a\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z} \quad \cdot \quad d' | b \Leftrightarrow b\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z}$$

$$\text{quindi } \underbrace{a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}}_{= d\mathbb{Z}} \subset \overbrace{d'\mathbb{Z} + d'\mathbb{Z}}^{= 2d'\mathbb{Z}} = d'\mathbb{Z}$$

$$d\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z} \Leftrightarrow d' | d \quad \text{cond. } \textcircled{2} \text{ verificata}$$

note: se  $a \neq 0$ ,  $\text{MCD}(a, 0) = a$

## ALGORITMO DI EUCLIDE x MCD

dati:  $a, b > 0$   $\delta = \text{MCD}(a, b)$

comincia con la divisione euclidea  $a, b$  ( $\circ$   $b, a - \text{è uguale}$ )

$$a = q_0 b + r_0 \quad (0 \leq r_0 < b) - x \text{ def. resto}$$

$$b = q_1 r_0 + r_1 \quad (0 \leq r_1 < r_0)$$

$$r_0 = q_2 r_1 + r_2 \quad (0 \leq r_2 < r_1)$$

$\therefore r_0, r_1, r_2 \dots$  decrescono - arriveranno  $\geq 0$

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n \quad (0 \leq r_n < r_{n-1})$$

$$r_{n-1} = q_n r_n + 0$$

$\delta !!$  (MCD)

### esercizio d'esempio

$$a = 3522, b = 321$$

$$3522 = 10 \cdot 321 + 312$$

$$321 = 1 \cdot 312 + 9$$

$$312 = 34 \cdot 9 + 6$$

$$9 = 1 \cdot 6 + 3$$

$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$

$$3522 = 10 \cdot 321 + 312$$

$$321 = 1 \cdot 312 + 9$$

$$312 = 34 \cdot 9 + 6$$

$$9 = 1 \cdot 6 + 3$$

$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$

$$3 = \text{MCD}(3522, 321)$$

ma, da qui, sappiamo che vale  $\delta \mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } 3 = 3522u + 321v$$

Come calcolare  $u$  e  $v$ ? IDENTITÀ DI BÉZOUT

se  $a, b \in \mathbb{Z}$  e  $d = \text{MCD}(a, b)$  allora  $\exists u, v \in \mathbb{Z}$   
t.c.  $au + bv = d$

Solviamo tra le  $\longrightarrow 3 = 9 - 1 \cdot 6$

iterazioni di euclide

e prendiamo

il resto

$$6 = 312 - 34 \cdot 9$$

$$3 = 9 - 1(312 - 34 \cdot 9) = 9 - 312 + 9 \cdot 34$$

$$3 = -312 + 35 \cdot 9$$

$$9 = 321 - 1 \cdot 312$$

$$3 = -312 + 35 \cdot (321 - 312) = 35 \cdot 321 - 312 \cdot 35$$

$$3 = 35 \cdot 321 - 312 \cdot 36$$

$$312 = 3522 - 10 \cdot 321$$

$$3 = 35 \cdot 321 - (3522 - 10 \cdot 321) \cdot 36 = 35 \cdot 321 - 3522 \cdot 36 + 321 \cdot 36 \cdot 10 \\ = 321(35 + 360) - 3522 \cdot 36$$

$$3 = 321 \cdot 395 - 36 \cdot 3522$$

abbiamo trovato  $v$  e  $u$  !! (bravi tutti)

Lemma di Gauss se  $a, b \in \mathbb{Z}^*$  e  $c \in \mathbb{Z}$  e se  $\text{MCD}(a, b) = 1$  allora  $a|bc \Rightarrow a|c$

dim.

$$\text{MCD}(a, b) = 1 \iff a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

Sono primi tra loro ( $\text{MCD} = 1$ )

$$\text{quindi } \exists u, v \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } au + bv = 1$$

$$au + bv = 1$$

$$\text{moltiplico tutto per } c \quad acu + bcv = c$$

$a|bc$  per ipotesi, quindi  $bc = ka$

$$acu + bcv = c \iff a(\underbrace{uc + bv}_{\exists 1 \text{ t.c. } c = 1}) = c \quad \text{quindi } a|c \quad \blacksquare$$

Lemma  $p \in \mathbb{N}, p > 1$ , allora  $p$  irriducibile  $\Rightarrow p$  primo

dimostrazione + claim se  $p$  è irriducibile e  $p \nmid a$ , allora  $a\mathbb{Z} + p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

infatti, altrimenti  $\exists \delta > 1$  t.c.  $\delta | a$ ,  $\delta | p$

ma visto che  $p$  irr.,  $\delta = p \Rightarrow p | a$  CONTRADDIZIONE

Supponiamo  $p | ab$  con  $p$  irriducibile. (Devo dim. che  $p | a$  o  $p | b$ )

Se  $p \nmid a$ , ho finito  $\rightarrow$  suppongo  $p \nmid b$ .

Ma allora  $a\mathbb{Z} + p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ . Moltiplico tutto per  $b$   $\rightarrow \underbrace{ab\mathbb{Z}}_{\text{div per } p} + \underbrace{pb\mathbb{Z}}_{\text{div per } p} = b\mathbb{Z}$  quindi  $b\mathbb{Z} \subset p\mathbb{Z} \Rightarrow p | b$  (perché  $\subset$  è una rel. di  $\subset$ )

fun fact del collega di Pellorin.

James P Jones, Daishachiro Sato, Hideo Wada, Douglas Wiens

$f(a, b, c, \dots, z)$  sostituendo le lettere (variabili) con elementi di  $\mathbb{N}$  ottengo elementi di  $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{N}^{26} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$$

$$f(\mathbb{N}^{26}) \subset \mathbb{Z} \quad \text{il teorema dice che } f(\mathbb{N}^{26}) \cap \mathbb{N}^* = \{x : x \text{ primo}\} = \{2, 3, 5, 7, \dots\} = \mathbb{P}$$

$$\text{per esempio } f^{-1}(\{13\}) = \emptyset$$

⑤ per ogni intero  $n$ ,  $2n^{17} + 2n^{15} + 3n^3 + 3n$  è divisibile per 5

• la classe mod 5 ( $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ) ha le stesse operazioni di  $\mathbb{Z}$

$$\left[ 2n^{17} + 2n^{15} + 3n^3 + 3n \right]_5 \text{ deve essere } [0]$$

oper. in  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$= [2] \cdot [n]^{17} + [2] \cdot [n]^{15} + [3] \cdot [n]^3 + [3] \cdot [n] = [0]$$

un intero  $n \pmod{5}$  ha resto da 1 a 4 (quindi mi basta verificare queste classi)

• se  $n \equiv_5 0 \iff [n] = [0]$  allora è chiaramente verificato

altr: così:

$\bar{n}$	$[n]^3$	$[n]^{15}$	$[n]^{17}$	$3[n]$	$3[n]^3$	$2[n]^{15}$	$2[n]^{17}$	$3[n] + 3[n]^3 + 2[n]^{15} + 2[n]^{17}$
$n \equiv 1$	$[1]$	$[1]$	$[1]$	$3[1]$	$3[1]^3$	$2[1]^{15}$	$2[1]^{17}$	$3[1] + 3[1]^3 + 2[1]^{15} + 2[1]^{17}$
	$[1] = [1 \cdot 1 \cdot 1] = [1]$	$[1] = [1 \cdot 1 \cdot 1]$	$[1] = [1]$	$3 \cdot 1$	$3 \cdot 1$	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 1$	$3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 10 = 0$
$n \equiv 2$	$[2]$	$[3]$	$[2]$	$[2]$	$[3] + [2]$	$[2] + [2]$	$[2] + [2]$	$[3] + [2] + [2] + [2] = 10 = 0$
	$[2] = [2 \cdot 2 \cdot 2]$	$[3] = [3 \cdot 2 \cdot 2]$	$[2] = [2]$	$3 \cdot 2 = 6$	$3 \cdot 3 = 9$	$2 \cdot 2 = 4$	$2 \cdot 2 = 4$	$3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 20 = 0$
$n \equiv 3$	$[3]$	$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[4] + [1]$	$[1] + [4]$	$[4] + [1]$	$[4] + [1] + [4] + [1] = 10 = 0$
	$[3] = [3 \cdot 3 \cdot 3]$	$[2] = [2 \cdot 2 \cdot 2]$	$[2] = [2]$	$3 \cdot 3 = 9$	$4 \cdot 1 = 4$	$1 \cdot 4 = 4$	$1 \cdot 4 = 4$	$3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 20 = 0$
$n \equiv 4$	$[4]$	$[4]$	$[4]$	$[4]$	$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[2] + [2] + [3] = 7 = 0$

studiando le potenze 2 mod 5

$$[2]^0 = [1] \quad [2]^1 = [2] \quad [2]^2 = [4] \quad [2]^3 = [3] \quad [2]^4 = [1]$$

è ciclico:

$$[2]^5 = [2] \cdot [2]^4 = [2] \cdot [1] = [2] \quad \text{il ciclo è lungo 4, quindi } [2]^m = [2]^{\frac{m}{4} \cdot 4 + r} = [2]^{\frac{m}{4} \cdot 4} \cdot [2]^r = [2]^r$$

$$[2]^6 = [2] \cdot [2]^5 = [4]$$

quindi per calcolare  $[2]^n$  basta calcolare  $[2]^r$  e resto div. per 4

potenze 3 mod 5:

$$[3]^0 = [1] \quad [3]^1 = [3] \quad [3]^2 = [4] \quad [3]^3 = [2] \quad [3]^4 = [1]$$

potenze 4 mod 5

$$[4]^0 = [1] \quad [4]^1 = [4] \quad [4]^2 = [1] \quad [4]^3 = [4] \quad [4]^4 = [1]$$

④ Calcolare  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$  con  $N \in \mathbb{N}$

$$\cdot A = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{\equiv_N}$$

$$\cdot [a] + [b] = [a+b] \quad e \quad [a] \cdot [b] = [ab] \quad (\text{premesse})$$

• con l'elemento  $[0]$  ( $= N\mathbb{Z}$ ) per l'elemento neutro per + e con l'elemento  $[1]$  ( $= N\mathbb{Z}+1$ ) per il neutro di  $\cdot$ , si ottiene che  $A$  è un anello unitario commutativo.

Si cerca

$$A^\times = \{[n] \text{ t.c. } \exists [m] \text{ con } [m] \cdot [n] = [1]\} \quad ("insieme delle unità")$$

③ Si  $\exists [a] \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ : esiste  $b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  t.c.  $[a] \cdot [b] = [1]$

$$[ab] = [1] \iff N \mid ab - 1 \quad \text{è invertibile} \iff \text{esiste un qualsiasi rapp. quando faccio } ab-1, \text{ è div per } N$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } kN = ab - 1$$

porta 1 e kn dall'altra parte

$$\iff ab - kN = 1 \quad \text{è un'identità di Bézout per } a, N$$

$\iff a \text{ e } N$  sono primi fra loro!

$$\text{quindi } (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times = \{[a] : a \in \mathbb{Z} \text{ e } \text{MCD}(a, N) = 1\} \quad \begin{matrix} \text{invertibili in } \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ \text{classi dei coprimi a } N \end{matrix}$$

Esiste quindi un'applicazione biiettiva  $\{r \in \{0, \dots, N-1\} \text{ t.c. } \text{MCD}(r, N) = 1\} \rightarrow (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$

$$r \mapsto [r]$$

$$N=24=2^3 \cdot 3 \quad \text{verificare che } (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times = \{r : z \mid r, 3 \nmid r\} \quad \text{tengo i coprimi}$$

$$\text{esempio } (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17}, \bar{18}, \bar{19}, \bar{20}, \bar{21}, \bar{22}, \bar{23}\}$$

che cosa si osserva quando  $N$  è primo?

$$\cdot N=p \text{ primo} : \quad \text{Si } r \in \{\bar{1}, \dots, \bar{p-1}\}$$

$$\text{MCD}(p, r) = 1 \quad . \quad \text{Altrimenti, qualora si avesse } d = \text{MCD}(p, r) > 1 \quad \text{avrà: } d \mid p, d \mid r \Rightarrow d = p$$

e si avrebbe  $p \mid r$ . Ma  $r < p$  (perché è resto)  $\rightarrow$  CONTRADDIZIONE  $\quad$  Quindi  $r$  coprimo  $p$

$$\text{Si ottiene } (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \{[r] : 1 \leq r \leq p-1\} \quad \forall r \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}, r \text{ è invertibile}$$

def CAMP

$A$  anello commutativo unitario t.c.  $\forall a \in A \setminus \{0\}$  invertibile  
si dice campo

in particolare,  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$  è un campo

## PICCOLO TEOREMA DI FERMAT

es. 5 dato  $p$  primo e  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n^p \equiv_p n$

Ricordiamo:

$$\bullet \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \#\{U \subset \{1, \dots, n\} : \#U = m\} \quad 0 \leq m \leq n$$

in  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  campo, ovvero  $\mathbb{F}_p^\times = \{[1], [2], \dots, [p-1]\}$   
non vero in  $\mathbb{Z}$

$$\bullet \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\bullet \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

$$\bullet ([a] + [b])^p = [a]^p + [b]^p \text{ con } [a], [b] \in \mathbb{F}_p$$

Sceglieremo rapp.  $a, b$  per le classi  $[a], [b]$

$$(a+b)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} b + \binom{p}{2} a^{p-2} b^2 + \dots + \binom{p}{p-2} a^2 b^{p-2} + \binom{p}{p-1} a b^{p-1} + b^p \quad (\text{NEWTON})$$

$\bullet 0 < i < p$  (non  $\leq \geq$  perché so che la rid. mod.  $p$  di  $0$  è  $0$ )

SCRIVIAMO  $\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!}$  \* perché è una cardinalità

$\bullet$  SUPPONIAMO  $1 \leq i \leq p-1$  e inoltre  $i! = i(i-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

quindi, siccome  $p > i$ , si ha  $p \nmid i$  (perché  $i$  si scompona in fattori tutti  $< p$  (quindi nessuno di questi è  $p$ ) e  $p$  non può essere il prodotto tra alcuni di questi perché è primo)

Similmente,  $p > p-i$  e quindi  $p \nmid (p-i)!$

$$\text{quindi, ho } p! = \underbrace{k}_{\geq} \cdot \underbrace{i!(p-i)!}_{b} \quad (\text{da qui } *) \quad \exists k \in \mathbb{N}^*$$

(visto che  $p \nmid i!$  e  $p \nmid (p-i)!$ ) ho anche  $p \nmid b$ .

ma  $p \mid ab = p!$  visto che  $p$  primo e  $p \nmid b$ , allora  $p \mid a$  per il lemma di Gauss.  
per def. fattoriale

$$\text{ma } a = k = \binom{p}{i} \quad \text{perché } p! = \underbrace{\frac{p!}{i!(p-i)!}}_{\text{per def. fattoriale}} \cdot \underbrace{i!(p-i)!}_{b}$$

$( \in [0] \text{ mod } p )$

quindi, tutti i coeff. "in mezzo" nello sv. di Newton (nello forma  $\binom{p}{i} \cdot \text{qualcosa}$ ) si riducono a 0 e rimangono solo  $a^p$  e  $b^p$ .

$\bullet$  ho dim. che se  $1 \leq i \leq p-1$  e  $p$  primo, si ha:  $\binom{p}{i} = \binom{p}{p-i} \equiv_p 0$

$$\text{e, riducendo, ottengo } ([a] + [b])^p = [a]^p + \binom{p}{1} [a]^{p-1} [b] + \dots + [b]^p \equiv_p [a]^p + [b]^p$$

TORNIAMO ALLA DIM. PRINCIPALE (PTF)

$$[0]^p = [0] \quad [2]^p = ([1] + [1])^p = [1]^p + [1]^p = [1] + [1] = [2]$$

$$[1]^p = [1] \quad [\bar{1}]^p = ([2] + [1])^p = [2]^p + [1]^p = [2] + [1] = [\bar{1}]$$

quindi, per induzione (ipotesi: fino a  $n-1$ ,  $[n-1]^p = [n-1]$ )

$$[n]^p = ([n-1] + [1])^p = [n-1]^p + [1]^p = [n-1] + [1] = [n]$$

which is very cool

if you ask me!!

quindi,  $\forall n \in \mathbb{Z}, n^p \equiv_p n$  (con  $p$  primo)



$$(x+y)^n = x^n + y^n$$



$$(x+y)^n \neq x^n + y^n$$



for a prime number  $n$ , if  $x$  and  $y$  are members of a commutative ring of characteristic  $n$  then  
 $(x+y)^n = x^n + y^n$

## PRECISAZIONE

Se  $[n] \neq [0]$ , ovvero se  $[n] \in \mathbb{F}_p$

allora  $[n]$  invertibile di inverso  $[n']$ .

$$\text{Per il PTF, so già che } [n] = [n]^p \quad \text{e} \quad [n'] [n^p] = [n'] [n] \stackrel{\substack{= \\ \text{def. inverso}}}{=} 1$$

$p$  primo  $\Rightarrow p \geq 2$  si può decomporre in  $p-1 \geq 1 + p$

$$[n'] [n]^p = [n'] [n] = [1]$$

$$\begin{array}{c} \text{Il } [n]^p \\ \text{è } \\ [n'] \cdot \underbrace{[n] [n]^{p-1}}_{\substack{\text{sono} \\ \text{inversi} \\ \text{quindi} = [1]}} = [n'] [n] = [1] \end{array}$$

$$\text{quindi } [1] [n]^{p-1} = [1] \quad \text{se } [n] \neq [0]$$

(il PTF ha dei difetti.)

- se  $[\alpha] \in \mathbb{F}_p^\times$ , calcolare  $[\alpha]^{-1}$  usando il PTF

$$\text{So che } [\alpha]^{p-1} = [1] \quad (\text{PTF}).$$

$$\begin{array}{c} \text{Scrivendo } [\alpha]^{p-1} = [\alpha]^{p-2} \cdot [\alpha] \\ \text{(quindi } [1] = \underbrace{[\alpha]^{p-2} \cdot [\alpha]}_{\text{inversi}}) \end{array}$$

$$\text{Dunque } [\alpha]^{-1} = [\alpha]^{p-2}$$

$$\text{es. } p = 689 \quad (\text{primo})$$

Voglio calcolare  $[2]^{-1}$ . "Basta" calcolare  $[2]^{p-2}$ , ovvero  $[2]^{689}$ .

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 333, 666, 641, 591, 491, 291, 582, 473, 255, 510, 329, 658, 625, 5  
 59, 427, 163, 326, 652, 613, 535, 379, 67, 134, 268, 536, 381, 71, 142, 284, 568, 445, 199, 398, 105, 2  
 10, 420, 149, 298, 596, 501, 311, 622, 553, 415, 139, 278, 556, 421, 151, 302, 604, 517, 343, 686, 681,  
 671, 651, 611, 531, 371, 51, 102, 204, 408, 125, 250, 500, 309, 618, 545, 399, 107, 214, 428, 165, 330  
 , 660, 629, 567, 442, 195, 390, 89, 178, 356, 21, 42, 84, 168, 336, 672, 653, 615, 539, 387, 83, 166, 3  
 32, 664, 637, 583, 475, 259, 518, 345, 690, 689, 687, 683, 675, 659, 627, 563, 435, 179, 358, 25, 50, 1  
 00, 200, 400, 109, 218, 436, 181, 362, 33, 66, 132, 264, 528, 365, 39, 78, 156, 312, 624, 557, 423, 155  
 , 310, 620, 549, 407, 123, 246, 492, 293, 586, 481, 271, 542, 393, 95, 190, 380, 69, 138, 276, 552, 413  
 , 135, 270, 540, 389, 87, 174, 348, 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 589, 487, 283, 566, 441, 191, 382  
 , 73, 146, 292, 584, 477, 263, 526, 361, 31, 62, 124, 248, 496, 301, 602, 513, 335, 670, 649, 607, 523,  
 355, 19, 38, 76, 152, 304, 608, 525, 359, 27, 54, 108, 216, 432, 173, 346, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128  
 , 256, 512, 333, 666, 641, 591, 491, 291, 582, 473, 255, 510, 329, 658, 625, 559, 427, 163, 326, 652, 6  
 13, 535, 379, 67, 134, 268, 536, 381, 71, 142, 284, 568, 445, 199, 398, 105, 210, 420, 149, 298, 596, 5  
 01, 311, 622, 553, 415, 139, 278, 556, 421, 151, 302, 604, 517, 343, 686, 681, 671, 651, 611, 531, 371,  
 51, 102, 204, 408, 125, 250, 500, 309, 618, 545, 399, 107, 214, 428, 165, 330, 660, 629, 567, 443, 195  
 , 390, 89, 178, 356, 21, 42, 84, 168, 336, 672, 653, 615, 539, 387, 83, 166, 332, 664, 637, 583, 475, 2  
 59, 518, 345, 690, 689, 687, 683, 675, 659, 627, 563, 435, 179, 358, 25, 50, 100, 200, 400, 109, 218, 4  
 36, 181, 362, 33, 66, 132, 264, 528, 365, 39, 78, 156, 312, 624, 557, 423, 155, 310, 620, 549, 407, 123  
 , 246, 492, 293, 586, 481, 271, 542, 393, 95, 190, 380, 69, 138, 276, 552, 413, 135, 270, 540, 389, 87,  
 174, 348, 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 589, 487, 283, 566, 441, 191, 382, 73, 146, 292, 584, 477,  
 263, 526, 361, 31, 62, 124, 248, 496, 301, 602, 513, 335, 670, 649, 607, 523, 355, 19, 38, 76, 152, 30  
 4, 608, 525, 359, 27, 54, 108, 216, 432, 173, 346, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 333, 666, 641  
 , 591, 491, 291, 582, 473, 255, 510, 329, 658, 625, 559, 427, 163, 326, 652, 613, 535, 379, 67, 134, 26  
 8, 536, 381, 71, 142, 284, 568, 445, 199, 398, 105, 210, 420, 149, 298, 596, 501, 311, 622, 553, 415, 1  
 39, 278, 556, 421, 151, 302, 604, 517, 343, 686, 681, 671, 651, 611, 531, 371, 51, 102, 204, 408, 125,  
 250, 500, 309, 618, 545, 399, 107, 214, 428, 165, 330, 660, 629, 567, 443, 195, 390, 89, 178, 356, 21,  
 42, 84, 168, 336, 672, 653, 615, 539, 387, 83, 166, 332, 664, 637, 583, 475, 259, 518, 345, 690, 689, 6  
 87, 683, 675, 659, 627, 563, 435, 179, 358, 25, 50, 100, 200, 400, 109, 218, 436, 181, 362, 33, 66, 132  
 , 264, 528, 365, 39, 78, 156, 312, 624, 557, 423, 155, 310, 620, 549, 407, 123, 246, 492, 293, 586, 481  
 , 271, 542, 393, 95, 190, 380, 69, 138, 276, 552, 413, 135, 270, 540, 389, 87, 174, 348, 5, 10, 20, 40,  
 80, 160, 320, 640, 589, 487, 283, 566, 441, 191, 382, 73, 146, 292, 584, 477, 263, 526, 361, 31, 62, 1  
 08, 216, 432, 173, 346, 1, 689' (689)

ma notiamo che le classi

sono cicliche - possiamo trovare

l'inverso molto prima di 689

- è quello precedente all'1,

perciò sappiamo che  $[n]^{p-1} = [1]$   
(e cerchiamo  $[n]^{p-2}$ )

questo funziona bene con 2, ma, per esempio, non con 3

③ Nessun intero in  $4\mathbb{Z} + 3$

calcoliamo le classi resto modulo 4 dei quadrati

$\bar{n}$	$\bar{n}^2$	la somma dei quadrati mod 4 può essere soltanto
0	0	
1	1	
2	0	
3	1	

	+	$\bar{0} \quad \bar{1}$	in particolare, non è mai $\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0} \quad \bar{0}$	
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1} \quad \bar{0}$	

no (si può vedere con la riduzione mod 8 e una tabella 3d)

Variante: è vero che ogni intero  $> 0$  è somma di 3 quadrati? Si può dimostrare che ogni intero  $> 0$  è somma di 4 quadrati (Lagrange)

## FIBONACCI

$(F_n)$   $n \geq 0$  definito induttivamente:  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

proprietà

$$\text{MCD}(F_m, F_n) = F_{\text{MCD}(m, n)}$$

$$\text{in particolare, } \text{MCD}(F_m, F_{m+1}) = F_1 = 1$$

dim. x induzione con algoritmo di Euclideo

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$$\text{MCD}(F_n, F_{n+1}) = \delta_n$$

$$\mathbb{Z} F_n + \mathbb{Z} F_{n+1} = \mathbb{Z} \delta_n \quad \text{devo dimostrare} = 1\mathbb{Z}$$

||

$$\left\{ \exists F_n + b F_{n+1} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

|| def. Fibonacci

$$\left\{ \exists F_n + b(F_n + F_{n-1}) : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

ci serve

dimostrare

$$\mathbb{Z} F_{n-1} + \mathbb{Z} F_n \quad \text{così} \rightarrow \text{ipotesi induttiva: } \mathbb{Z} F_{n-1} + \mathbb{Z} F_n = \mathbb{Z}$$

(claim)

17/10

claim: = (serve che la funzione sia suriettiva)

$$\left\{ (\alpha+b) F_n + b F_{n-1} : \alpha, b \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{Z} F_{n-1} + \mathbb{Z} F_n = \left\{ u F_{n-1} + v F_n : u, v \in \mathbb{Z} \right\}$$

mi serve dim applicazione biiettiva:

$$f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$$

$$(\alpha, b) \longmapsto (\alpha+b, b) \quad \text{sia } f(\mathbb{Z}^2) \text{ l'immagine} = \{ u F_n, v F_{n-1} : (u, v) \in f(\mathbb{Z}^2) \}$$

se lo dimostro, dimostro che

ogni volta che prendo  $\alpha, b$  posso trovare  $u$  e  $v$  t.c.  $u = \alpha + b$ ,  $v = b$  e viceversa (basta che sia suriettiva)  
ma dimostriamo biiettiva

Mostriamo  $f$  suriettiva - questo basta per giustificare il claim

Possiamo mostrare che  $f$  biiettiva (+ forse)

Richiamo:  $A \xrightarrow{f} B$   $f$  biiettiva  $\iff \forall b \in B, f^{-1}(\{b\})$  singleton

prop del corso  $\Rightarrow f$  biiett.  $\iff \exists g: B \rightarrow A$  t.c.  $f \circ g = \text{Id}_B$  ( $\forall b \in B, f(g(b)) = b, \forall a \in A, g(f(a)) = a$ )

$$f(a, b) = (a+b, b) =: (u, v)$$

$$\begin{cases} a+b = u \\ b = v \end{cases}$$

unica soluzione (biiettività) (singleton  $f^{-1}$ )

inverso

$$\text{pongo } g: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2, \quad g(u, v) \mapsto (u-v, v)$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(u, v) &= f(g(u, v)) = f(u-v, v) = u-v+v, v = (u, v) \\ (g \circ f)(a, b) &= g(f(a, b)) = g(a+b, b) = (a+b-b, b) = (a, b) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{x fibonacchi indice } \geq 0 \\ \text{sono identità:} \\ f \text{ e } g \text{ biiettive} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Abbiamo dimostrato } \forall n > 0 \quad F_{n+1} \mathbb{Z} + F_n \mathbb{Z} &= F_n \mathbb{Z} + F_{n-1} \mathbb{Z} = F_{n-1} \mathbb{Z} + F_{n-2} \mathbb{Z} = \dots = F_1 \mathbb{Z} + F_0 \mathbb{Z} = \\ &= F_1 \mathbb{Z} + \{0\} = \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{ho dim. che } \forall n > 0 \quad F_n \mathbb{Z} + F_{n-1} \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \iff \text{MCD}(F_n, F_{n-1}) = 1 \quad \blacksquare$$

Esercizio 5 Dimostrare che  $2^n \not\equiv 1 \pmod{n}$   $\forall n > 1$  x CASA

$$2^n \not\equiv_n 1 \quad \forall n > 1$$

$$n^p \equiv_p n \quad \text{e } n^{p-2} \text{ inverso } n^p$$

$$n^{p-1} \equiv_p 1$$

2 casi:

$$\textcircled{1} \quad n \text{ primo} \rightarrow \text{Fermat: } [2^{n-1}]_n = [1]_n$$

$$[2^n] = [2^{n-1}] \cdot [2] = [1] \cdot [2] = [2]$$

$$\textcircled{2} \quad n \text{ non primo} \rightarrow n = a, b \text{ con } 1 < a < n, \quad 1 < b < n$$

$$\text{sicuramente } n = p \cdot k \text{ con } p \text{ primo e } 2^n = 2^{pk} = (2^p)^k$$

## TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ARITMETICA

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}^*$$

① l'insieme  $I = \{ p \text{ primo} : p | \alpha \}$  è finito (il numero di primi che dividono  $\alpha$  è finito)

②  $\alpha = (\pm 1) \cdot \prod_{\substack{p \\ \text{primo}}} p^{v_p(\alpha)}$  dove  $v_p(\alpha) \in \mathbb{N}$  unicamente determinato.

(ogni numero  $\neq 0$  è il prodotto di una certa combinazione di numeri primi elevati a un certo esponente  
- quelli che non vogliono saranno elevati a 0 -)

OSS

si sa che  $P = \{ p \in \mathbb{N}, p \text{ primo} \}$  è infinito.

Siccome

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}, I_\alpha \text{ è finito, } \prod_{\substack{p \\ \text{primo}}} p^{v_p(\alpha)} = \prod_{p \in I_\alpha} p^{v_p(\alpha)} \cdot \prod_{p \notin I_\alpha} p^{v_p(\alpha)}$$

*sarà 0 ("non ci servono")*

posso dividere i primi in divisori di  $\alpha$  e non-divisori di  $\alpha$  e suddividere la produttoria

esempio:

$$\begin{aligned} \alpha = 7! &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 7 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2^4 \end{aligned}$$

$$\text{quindi } v_p(\alpha) = \begin{cases} 1 & p=7 \\ 1 & p=5 \\ 2 & p=3 \\ 4 & p=2 \\ 0 & p>7 \end{cases}$$

OSS: dato  $\alpha = \prod_p p^{v_p(\alpha)}$  e  $b = \prod_p p^{v_p(b)}$

$$\begin{aligned} \alpha = 12 &= 2^2 \cdot 3 \\ b = 15 &= 5 \cdot 3 \end{aligned} \implies \begin{aligned} v_2(\alpha) &= 2 & v_2(b) &= 0 \\ v_3(\alpha) &= 1 & v_3(b) &= 1 \end{aligned}$$

$$\bullet \alpha \cdot b = \prod_p p^{v_p(\alpha)} \prod_p p^{v_p(b)} = \prod_p p^{v_p(\alpha) + v_p(b)}$$

$$v_5(\alpha \cdot b) = 0 \quad v_5(b) = 1$$

$$\bullet p^{v_p(\alpha)} p^{v_p(b)} = p^{v_p(\alpha) + v_p(b)}$$

$$v_p(\alpha \cdot b) = v_p(12 \cdot 15) = v_p(\alpha) + v_p(b)$$

(enunciato)  $\forall \alpha > 0, \exists$  un numero finito di primi distinti  $p_1, \dots, p_r$  t.c.  $\alpha = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$   
e questa fattorizzazione è unicamente determinata.

$$v_2(\alpha \cdot b) = 2 \quad v_3(\alpha \cdot b) = 2 \quad v_5(\alpha \cdot b) = 1 \quad v_p(\alpha \cdot b) = 0 \quad p \geq 7$$

dimostrazione teorema  $\Delta = (\pm 1) \prod_p p^{v_p(\Delta)}$

• posso supporre  $\Delta > 0$  senza perdita di generalità

① Supponiamo per assurdo  $\mathbb{P}_{\Delta}$  infinito - vuol dire che esiste una collezione infinita di primi t.c.  $p \mid \Delta$

ma  $p \mid \Delta \Rightarrow p \leq \Delta$  e impossibile infiniti interi  $\leq \Delta$  contr.

② Procediamo per induzione:

$$\cdot \Delta = 1 \quad V_p(1) = \emptyset \quad \forall p \quad 1 = \prod_p p^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$$

• Supponiamo  $\Delta > 1$ .

dove così ①  $\Delta$  primo  $\rightarrow$  allora  $\Delta = \prod_p p^{v_p(\Delta)} \quad V_p(\Delta) = \begin{cases} \emptyset & p \neq \Delta \\ 1 & p = \Delta \end{cases}$

②  $\Delta$  non primo,  $\Delta$  non è irriducibile

si può scrivere in fattori diversi da 1 e  $\Delta$

$$\Rightarrow \Delta = U \cdot V \quad \text{con} \quad 1 < U < \Delta \quad \& \quad 1 < V < \Delta$$

per ipotesi induttiva, visto che  $U, V < \Delta$  posso usare la formula del prodotto

posso scrivere  $U = \prod_p p^{v_p(U)}, \quad V = \prod_p p^{v_p(V)}$

$$\Delta = UV = \prod_p p^{v_p(U) + v_p(V)} \blacksquare$$

altre proprietà (in teoria esercizi ma mi sembrano più proprietà)

①  $a|b \iff \forall p, V_p(a) \leq V_p(b)$

dim • supponiamo  $V_p(a) < V_p(b)$

$$\iff V_p(b) - V_p(a) \geq 0 \in \mathbb{N}$$

poniamo  $k = \prod_p p^{V_p(b) - V_p(a)}$  è quindi un intero

osserviamo che  $V_p(b) - V_p(a) = 0$  per  $p$  abbastanza grande

$$k \cdot a = \prod_p p^{V_p(b) - V_p(a)} \prod_p p^{V_p(a)} = \prod_p p^{V_p(b) - V_p(a) + V_p(a)} = \prod_p p^{V_p(b)} = b$$

quindi  $b = k \cdot a \quad \exists k \in \mathbb{N}$  e quindi  $a|b$

• supponiamo  $a|b$

$$\implies b = k \cdot a \quad \exists k \in \mathbb{N}^*$$

per il teorema fondamentale:

$$\prod_p p^{V_p(b)} = \prod_p p^{V_p(k \cdot a)} = \prod_p p^{V_p(a)}$$

osservo che  
 $\geq 0$  perché  
k intero

quindi  $\prod_p p^{V_p(b)} = \prod_p p^{V_p(k \cdot a) + V_p(a)}$

per unicità della fattorizzazione:  $V_p(b) = \underbrace{V_p(k \cdot a) + V_p(a)}_{\geq 0} \iff V_p(a) = V_p(b) - V_p(k \cdot a)$

$$\forall p, V_p(b) \geq V_p(a) \blacksquare$$

②  $a, b \in \mathbb{N}^*, \quad \text{MCD}(a, b) = \prod_p p^{\min(V_p(a), V_p(b))}$

dim.  $\delta = \text{MCD}(a, b)$  è l'unico intero di  $\mathbb{N}^*$  t.c.

①  $\delta|a \quad e \quad \delta|b$

②  $\forall d' \in \mathbb{N} \quad d'|a \quad e \quad d'|b \implies d'|\delta$

considerando che  $\delta|b \iff \forall p, V_p(\delta) \leq V_p(b)$

③  $\forall p, V_p(\delta) \leq V_p(a) \quad e \quad V_p(\delta) \leq V_p(b)$

② Se  $\exists d' \text{ t.c. } \forall p \quad v_p(d') \leq v_p(a) \leftarrow v_p(d') \leq v_p(b)$

Allora  $\forall p, \quad v_p(d') \leq v_p(\delta)$ :

③  $\iff v_p(\delta) \leq \min(v_p(a), v_p(b))$

④  $\iff$  se  $d'$  è tale che  $v_p(d') \leq \min(v_p(a), v_p(b))$

Allora  $v_p(d') \leq v_p(\delta)$

$\forall p, \quad v_p(\delta)$  è il più grande degli interi  $n$  t.c.  $n \leq \min(v_p(a), v_p(b))$

quindi  $v_p(\delta) = \min(v_p(a), v_p(b))$  (se è il massimo tra  $i \leq, i \neq$ )

### Esercizio

$$a, b, c \in \mathbb{N}^* \quad \text{MCD}(a, b, c) \mid \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c)$$

pongo  $x, y, z = v_p(a), v_p(b), v_p(c)$  (per comodità)

$$\text{MCD}(a, b, c) \mid \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c) \iff \exists n \text{ t.c. } \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c) = n \cdot \text{MCD}(a, b, c)$$

Come dimostrare la lezione:

$$\bullet \text{MCD}(a, b, c) = \prod_p p^{\min(x, y, z)} \quad \bullet \text{MCD}(a, c) = \prod_p p^{\min(x, z)} \quad \bullet \text{MCD}(b, c) = \prod_p p^{\min(y, z)}$$

$$\bullet \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c) = \prod_p p^{\min(x, z) + \min(y, z)}$$

$$\text{quindi } \text{MCD}(a, b, c) \mid \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c) \iff \prod_p p^{\min(x, z) + \min(y, z)} = \prod_p p^{\min(x, y, z)} \cdot \prod_p p^k$$

$$\iff \min(x, z) + \min(y, z) = \min(x, y, z) + k$$

3 casi:

$$\textcircled{1} \min = z$$

$$\textcircled{2} \min = x$$

$$\textcircled{3} \min = y$$

$$\begin{aligned} \text{qui } \min(x, z) &= z \text{ e } \min(y, z) = z \\ \text{e } \min(x, y, z) &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{qui } \min(x, z) &= x \\ \text{e } \min(y, z) &= z \circ y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{qui } \min(y, z) &= y \\ \text{e } \min(x, z) &= x \circ z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{quindi } z+z &= z+k \\ \text{ovvero } k &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+z &= x+k \\ \text{ovvero } k &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y &= x+k \\ \text{ovvero } k &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y &= y+k \\ k &= x \\ k &= z \end{aligned}$$

$$\text{quindi } n = \prod_p p^k \text{ con } k \text{ definito sopra}$$

## DIVISORI DI ZERO

in  $\mathbb{Z}_{/6\mathbb{Z}}$ ,  $\{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$ dato  $A$  snello

$[2] \cdot [3] = [0]$  con  $[2], [3] \neq [0]$

ma in  $\mathbb{Z}$  non succededef  $\alpha \in A$  è divisore di zerose  $\exists b \in A \setminus \{0\}$  t.c.  $\alpha b = 0_A$ in  $A$  qualiasi (tranne se  $1_A = 0_A$ ,  $A = \{0\}$ )  $0_A$  è divisore di  $0$ 

- se  $A = K$  CAMPO (es.  $A = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$ )

cioè  $\forall \alpha \in K \setminus \{0\}$ ,  $\alpha$  invertibile  $K^\times = K \setminus \{0\}$ L'unico divisore di zero in  $K$  è  $0_K$ dim • Supponiamo  $\alpha$  divisore di zero:da qui in poi usiamo  $0$  per  $0_K$ 

$\exists b \neq 0$  t.c.  $\alpha b = 0$

però  $b$  è invertibile  $\rightarrow \exists b^{-1} \in K^\times$  t.c.  $b \cdot b^{-1} = 1_K$ quindi posso moltiplicare termine  $\alpha$  termine per  $b^{-1}$ 

$$\underbrace{\alpha b b^{-1}}_1 = \underbrace{0}_0 b^{-1}$$

$$\alpha = 0$$

in  $\mathbb{Z}$ in  $\mathbb{Z}$ , se  $\alpha$  è divisore di  $0$ , allora  $\alpha = 0$  (anche se  $\mathbb{Z}$  non è un campo)dim • sia  $\alpha$  divisore di zero  $\iff \exists b \in \mathbb{Z}^* \text{ t.c. } \alpha b = 0 \quad (-\alpha)(-\alpha) = \alpha b = 0$ Senza perdita di generalità, supponiamo  $\alpha \geq 0$ 

$$\exists b \text{ t.c. } \alpha b = 0 \iff 0 = \alpha b = \underbrace{b + b + b + \dots + b}_{\alpha \text{ volte}} \geq b > 0$$

questo è impossibile se  $\alpha > 0$ .quindi,  $\alpha = 0$  ■def dominiodato  $A$  snello,  $A \neq \{0\}$ , si dice che  $A$  è un dominio se l'unico divisore di zero in  $A$  è  $0_A$ .

- Ogni campo è un dominio, e  $\mathbb{Z}$  è un dominio

es) mostrare che  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  è un dominio  $\iff N$  primo ( $\iff$  campo) (noi non ho capito se basta dimostrare dominio  $\iff N$  primo visto che abbiamo già visto in classe che  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  campo)

• dimostriamo  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  dominio  $\rightarrow N$  primo

Supponiamo  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  dominio. Allora, l'unico divisore di  $0_{k_N}$  è  $0_{k_N}$

Supponiamo per assurdo  $N$  non primo  $\rightarrow \exists a, b, 1 < a < n, 1 < b < n$  t.c.  $N = ab$

quindi,  $[a] \cdot [b] = [ab] = [0]$ .  $k_N$  non è dominio. CONTRAD.

• dimostriamo che  $N$  primo  $\rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  dominio

( $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  dominio  $\iff \forall [a], [b]$  t.c.  $[a] \cdot [b] = [0]$ , o  $[a] = [0]$  o  $[b] = [0]$ )

Supponiamo  $\exists [a], [b] \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  t.c.  $[a] \cdot [b] = [0]$

$[a] \cdot [b] = [ab] = [0]$ , significa  $N | ab$  (il resto è 0)

Ma, se  $N | ab$ , poiché  $N$  primo, o  $N | a$  o  $N | b$ . (per def. primo)

Ma, se  $N | a$ ,  $[a] = [0]$  e se  $N | b$ ,  $[b] = [0]$

Quindi, uno dei due divisori è zero

- Se  $\alpha \in A$  non è divisore di zero ( $\forall b \in A \setminus \{0\}, \alpha b \neq 0$ ) e  $\alpha x = 0_A \implies x = 0_A$

Lemma legge di cancellazione (in  $A$  snello)

Se  $\alpha \in A$  non divisore di zero, allora  $\alpha b = \alpha c \implies b = c$

dim:

$$\alpha b = \alpha c \iff \alpha(b-c) = 0 \quad \text{visto che } \alpha \text{ non è divisore di } 0 \implies b-c = 0 \iff b = c$$

$\alpha \neq 0$

OSSERVAZIONE: Questo implica la legge di cancellazione in  $\mathbb{Z}$  (dominio) ( $\alpha \neq 0$  perché  $0$  unico divisore di  $0$  in  $\mathbb{Z}$ )

risoluzione di equazioni in  $A$  (in particolare  $A = \mathbb{Z}$ ,  $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ )

$$\alpha X = b \quad \alpha, b \in A$$

$X$  indeterminato (può essere un valore o un insieme)  
mentre  $x$  (minuscolo) è un valore

- in  $A = \mathbb{Z}$  una soluzione di  $\alpha X = b$  esiste  $\iff \alpha | b$

infatti, se l'insieme delle soluzioni  $\neq \emptyset$  e se  
 $x$  soluzione, si ha  $\alpha x = b \iff \alpha | b$  (def. | )

Se, invece,  $\alpha | b \implies \exists k \in \mathbb{Z}$  t.c.  $b = \alpha k$  e prendo  $k = x$

esempio:  $2x = 3$  insieme delle soluzioni  $= \{x \in \mathbb{Z} : 2x = 3\} = \emptyset$  vorrebbe dire  $2 | 3$  - impossibile

$$2x = 6 \quad \{x \in \mathbb{Z} : 2x = 6\} = \{3\} \quad \text{osserviamo } 6 = 2 \cdot 3 \quad \text{quindi } 2x = 2 \cdot 3 \implies x = 3$$

- $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\alpha X = b$$

- Nel caso in cui  $A$  è un anello qualsiasi e  $\alpha \in A^\times$  di inverso  $\alpha^{-1}$ , posso moltiplicare termine  $\alpha$  termine per  $\alpha^{-1}$

$$\underbrace{\alpha^{-1} \alpha}_1 X = \alpha^{-1} b \quad \text{quindi l'eq. ha l'unica soluzione } X = \alpha^{-1} b$$

(es  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$ )

- Se per esempio  $A = K$  campo

$$\alpha X = b \quad \text{con } \alpha \neq 0 \quad \text{ammette sempre l'unica soluzione } X = \alpha^{-1} b$$

proposizione  $\exists X = b \quad \exists, b \in A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

ammette soluzioni  $\iff \text{MCD}(\alpha, n) \mid \beta$  con  $\alpha = [\alpha] \quad b = [\beta] \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

dim:

• Dimostro ammette soluzioni  $\implies \text{MCD}(\alpha, n) \mid \beta$

$$[\alpha][x] - [\beta] = [0]$$

quindi  $\exists n \in \mathbb{Z}$  quindi multiplo  
di  $n$

Sia  $[x]$  soluzione:  $\alpha[x] = b$  quindi  $[\alpha][x] = [\beta] \iff \alpha x - \beta \in n\mathbb{Z}$

$$\iff \alpha x - \beta = nk \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff \alpha x - nk = \beta \implies \beta \in \alpha\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \delta\mathbb{Z} \iff \delta \mid \beta$$

$\beta \in \text{multiplo}$   
 $\text{di } \delta$

• Ora dimostro  $\text{MCD}(\alpha, n) \mid \beta \implies$  ammette soluzioni

Sappiamo  $\delta = \text{MCD}(\alpha, n) \mid \beta \iff \beta = \delta x \implies \beta \in \alpha\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$

$$\iff \exists u, v \text{ t.c. } \beta = u\alpha + vn \iff \beta - u\alpha = vn$$

$\times$  def congr. mod

$$\iff \beta \equiv_n u\alpha \iff [\beta] = [u][\alpha]^{=\delta} \quad b = x\delta$$

esempio:  $[3]X = \emptyset$  in  $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$$\alpha = 3, \beta = \emptyset, n = 6 \quad \text{MCD}(\alpha, n) = 3 \mid \emptyset = \beta$$

ci sono soluzioni.  $X = [2]$  è soluzione ( $[3] \cdot [2] = [6] = [0] \text{ in } \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ )

$X = [4]$  è soluzione ( $[3] \cdot [4] = [12] = [0]$ )

o anche  $[3] \cdot [2] \cdot [2] = [0] \cdot [2] = [0]$ )

$X = [0]$  è soluzione ( $[3] \cdot [0] = [0]$ )

l'insieme delle soluzioni è  $\{[0], [2], [4]\} \subset A$

parentesi tutoraggio: equazioni diofantee

Risolvere la seguente equazione diofantea:  $\frac{858}{a}x + \frac{253}{b}y = \frac{33}{c}$

① Calcolo l'MCD ( $a, b$ )

$$858 = 3 \cdot 253 + 99$$

$$253 = 2 \cdot 99 + 55$$

$$99 = 1 \cdot 55 + 44$$

$$55 = 1 \cdot 44 + 11$$

$$44 = 4 \cdot 11 + 0$$

$$d = \text{MCD}(858, 253) = 11$$

② Mi assicuro che l'MCD divide c

(altrimenti, l'eq. non ha soluzioni)

$$11 | 33 ? \text{ sì}$$

③ Calcolo l'identità di Bézout

(il tutor lo fa da sopra e usando  $a, b$  invece dei numeri corrispondenti)

$$99 = 858 - 3 \cdot 253 = a - 3b$$

$$55 = 253 - 2 \cdot 99 = b - 2(a - 3b) = -2a + 7b$$

$$44 = 99 - 55 = a - 3b - (-2a + 7b) = 3a - 10b$$

$$11 = 55 - 44 = -2a + 7b - (3a - 10b) = -5a + 17b$$

$$\text{quindi } 11 = -5a + 17b$$

④ Devo trovare  $\underline{\underline{33}} = x\underline{a} + yb$ : moltiplico a dx e sx per arrivare al numero che cerco

$$11 = -5a + 17b$$

$$\underline{x^3} \quad 33 = 3(-5a + 17b) = -15a + 51b = \underbrace{-15}_{x_0} \cdot 858 + \underbrace{51}_{y_0} \cdot 253$$

ho trovato  $x_0$  e  $y_0$  soluzioni particolari dell'equazione

⑤ Trovo le soluzioni generali

(Soluzioni intere dell'omogeneo associato)

(termine non moltiplicato da  $x_0$ )

$$x = x_0 + \frac{b}{\text{MCD}(a, b)} K \quad K \in \mathbb{Z}$$

$$y = y_0 - \frac{a}{\text{MCD}(a, b)} K$$

$$\text{quindi } x = -15 + \frac{253}{11} K = -15 + 23K$$

$$K \in \mathbb{Z}$$

$$y = 51 - \frac{858}{11} K = 51 - 78K$$

## Lemma

$a, b, c \in \mathbb{Z}$   $a, b | c$  e  $\text{MCD}(a, b) = 1$  allora  $ab | c$

dim:

$$a, b | c \iff c = ak = bh \quad (\exists h, k \in \mathbb{Z})$$

$$\implies a | bh \quad (\text{o anche } b | ah, \text{ ma sceglieremo } a | bh)$$

• Devo dimostrare  $\text{MCD}(a, b) = 1 \implies a | h^*$   $\implies ab | c$  moltiplicando per  $b$   
da entrambi i lati ( $c = bh$ )

•  $\text{MCD}(a, b) = 1 \iff b$  è invertibile modulo  $a$

$$\iff \exists b' \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } bb' \equiv 1 + a\mathbb{Z}$$

( $b$  invertibile se  $by \equiv 1$  ovvero  $by - 1 \equiv 0$   
 $\iff by - k \equiv 1 \quad \text{MCD}(a, b) = 1 \iff ax + by = 1$   
prendo  $x = -k$  e queste cose sono uguali)

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Dicendo } a | bh &\implies a | b' | b'b h = (1 + ak)h \iff a | b' = h + ak \\ &\iff ab' - ahk = h \iff a(b' - hk) = h \quad \text{quindi } a | h \blacksquare \end{aligned}$$

III secolo dal matematico Sun Tsu! ( $\neq$  the art of war Sun Tsu)

## TEOREMA CINESE DEI RESTI

Poniamo  $r_1, \dots, r_s \in \mathbb{N}^*$  e supponiamo  $\text{MCD}(r_i, r_j) = 1 \quad \forall i \neq j$   $\Rightarrow$  due coprimi

Consideriamo inoltre  $c_1, \dots, c_s \in \mathbb{Z}$

Allora il sistema

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} x \equiv c_1 \pmod{r_1} \\ x \equiv c_2 \pmod{r_2} \\ \vdots \\ x \equiv c_s \pmod{r_s} \end{array} \right. \text{ ha un'unica soluzione modulo } R := r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_s$$

ovvero l'insieme  $E_* = \{x \text{ soluzione in } \mathbb{Z} \text{ di } (*)\}$  è  $x_0 + R\mathbb{Z}$

Come calcolare una soluzione particolare  $x_0$  di  $(*)$ ?

$$\bullet R = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_s \quad \bullet \text{ poniamo } R_i = \frac{R}{r_i} = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \overset{\text{"non } c_i \text{ in "}}{r_i} \cdot \dots \cdot r_s = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{i-1} \cdot r_{i+1} \cdot \dots \cdot r_s$$

e notiamo che  $\text{MCD}(R_i, r_i) = 1$  (perché  $r_i, r_j$  ecc primi fra loro e in  $R_i$  "manca" proprio  $r_i$ )

Visto che sono primi fra loro, questa proprietà può essere riformulata dicendo che  $[R_i]$  classe di  $R_i$  in  $\mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}$

è invertibile di inverso  $[s_i] \in \mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}$   $[R_i][s_i] = [1]$

Quindi,  $\underbrace{[R_i]}_{[1]} \underbrace{[s_i]}_{[y_i] \in \mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}} [c_i] = [c_i]$  quindi abbiamo costruito elementi  $[y_1], \dots, [y_s] \in \mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}$  formati dall'inverso di  $R_i$  e  $c_i$

• Ora, dimostriamo che  $x_0 = \sum_{i=1}^s y_i R_i \in \mathbb{Z}$  è soluzione di  $(*)$

\* credo che "basti" il lemma di Gauss? Sospendo e  $\text{MCD}(a, b) = 1$   
 $a | bh$  e  $\text{MCD}(a, b) = 1$  allora  $a | bc \Rightarrow a | c$   
allora  $a | h$   
(combinano i vincoli, per Gauss  $a, b \in \mathbb{Z}^*$   
e non  $\mathbb{Z}$ , ma non credo ci sarebbe  
perdita di generalità chiedere  
al prof.)

$x_0 = \sum_{i=1}^s y_i R_i \in \mathbb{Z}$  è soluzione di (\*)

infatti, se  $i \neq j$ ,  $r_i | R_j$  perché  $R_j$  è il prodotto di tutti "gli  $r$ " tranne  $r_i$ ,  
quindi l'unico che non lo divide è  $r_i$

Quindi  $x_0 = \sum_{j=1}^s y_j R_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s y_j R_j + y_i R_i$  isoliamo il termine non divisibile per  $r_i$  (quindi il resto)  
il tutto è quindi  $\equiv_{r_i} y_i R_i$   
(definito come)  
 $\equiv_{r_i} c_i$  quindi abbiamo trovato  $x_0$   
congruente a  $c_i \text{ mod } r_i$

Questo è valido  $\forall i = 1, \dots, s$  dunque  $x_0 = \sum_j y_j R_j$  è una sol. particolare di (\*)

### Sistema omogeneo associato

$$\begin{aligned} *_{(H)}: \quad & \left\{ \begin{array}{l} x \equiv 0 \pmod{r_1} \\ x \equiv 0 \pmod{r_2} \\ \vdots \\ x \equiv 0 \pmod{r_s} \end{array} \right. \\ & x \equiv_r 0, \quad i=1 \dots s \end{aligned}$$

Soluzioni?  $x \equiv_{r_1} 0 \iff r_1 | x$   
 $x \equiv_{r_2} 0 \iff r_2 | x$

ma  $r_1, r_2$  sono primi fra loro, quindi (x lemma)  $r_1 r_2 | x$  (Si può andare avanti fino a  $r_s$ :  
 $x \equiv_{r_3} 0 \iff r_3 | x$ ,  $\text{MCD}(r_1, r_2, r_3) = 1 \Rightarrow r_1 r_2 r_3 | x$  ecc..)

Iterando, ottengo che  $R := r_1 \dots r_s | x$

Quindi, l'insieme delle soluzioni di  $(*_{(H)})$  è  $E_H = R\mathbb{Z}$  (i multipli di  $R$ )

### proposizione

L'insieme delle soluzioni di (\*),  $E_*$  è dato da  $x_0 + R\mathbb{Z}$

dim: •  $E_* \supset x_0 + R\mathbb{Z}$  è chiaro. Infatti, se  $x \in x_0 + R\mathbb{Z}$ , allora  $x = x_0 + Rk \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

ma  $Rk \equiv_{r_i} 0 \quad \forall i = 1 \dots s$  ( $r_i | Rk$ , perché  $r_i | R$  -  $R$  è il prodotto di tutti gli  $r_i$ )

• Addizionando con  $x_0$ , che è soluzione particolare, ottengo  $x \equiv_{r_i} c_i + 0 \equiv c_i \text{ mod } r_i$   
 $\Leftrightarrow x \equiv_{r_i} x_0$

• Dimostriamo  $E_* \subset x_0 + R\mathbb{Z}$

$$x \equiv_{r_i} c_i \iff x - c_i \equiv_{r_i} 0$$

(old sistema)

Sia  $x$  soluzione dr (\*). Allora,  $x - x_0 \equiv_{r_i} 0 \quad \forall i = 1 \dots s$

$\Rightarrow x - x_0 \in R\mathbb{Z}$  x Lemma ( $r_i | x - x_0$ , quindi  $r_1 r_2 \dots r_s | x - x_0$ , quindi  $x - x_0$  multiplo di  $R$ )

$\Rightarrow x \in x_0 + R\mathbb{Z} \Rightarrow E_* \subset x_0 + R\mathbb{Z}$

piccola parentesi pratico: quello che ci hanno detto al TUTORAGGIO sul teorema cinese del resto

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{11} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \cdot r_1 = 11, \quad r_2 = 5, \quad r_3 = 2 \\ \text{se sono coprimi, ammette un'unica soluzione modulo R} \end{array}$$

$$\bar{x} = R_1 \bar{x}_1 + R_2 \bar{x}_2 + R_3 \bar{x}_3 + Rk \quad k \in \mathbb{Z}$$

con  $R = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$  e  $R_i = \frac{R}{r_i}$  e  $\bar{x}_i$  t.c.  $R_i x \equiv c \pmod{r_i}$

①  $r_1 = 11 \quad r_2 = 5 \quad r_3 = 2$  sono coprimi? sì.

②  $R = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 11 \cdot 5 \cdot 2 = 110$  ricordiamo  $c_1 = 1 \quad c_2 = 2 \quad c_3 = 1$

$$R_1 = \frac{11 \cdot 5 \cdot 2}{11} = 10 \quad R_2 = \frac{11 \cdot 5 \cdot 2}{5} = 22 \quad R_3 = \frac{11 \cdot 5 \cdot 2}{2} = 55$$

③  $\bar{x}_i = R_i x \equiv_r c$

•  $\bar{x}_1 = 10x \equiv 1 \pmod{11}$

è un'equazione diofantea di tipo

$10x - 11h = 1$  che posso scrivere  
(per non avere il -)

con  $y = -h \quad 10x + 11y = 1$  (cerco solo  $x$ )

risolvo l'eq.: •  $\text{MCD}(10, 11) = 1$

Bézout  $1 = 10 \cdot \underline{-1} + 11 \cdot 1$

(ho trovato)

$x_0$  particolare

$22 = 4 \cdot 5 + 2$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$

quindi (Bézout)

$1 = 5 - 2 \cdot 2$

$1 = 5 - 2 \cdot (22 - 4 \cdot 5)$

$1 = \underline{-2} \cdot 22 + 9 \cdot 5$

•  $\bar{x}_3 = 55x \equiv 1 \pmod{2}$

55 è dispari, quindi

$\equiv 1 \pmod{2}$

$1x \equiv 1 \pmod{2}$

$[x_3] \equiv [1] \pmod{2}$

• metto l' $x$  particolare  $x = x_0 + \frac{b}{\text{MCD}(a, b)} k$   
nella formula

$$x = -1 + \frac{11}{1} k$$

$k$  deve essere  $0 \leq k \leq d-1$  (MCD)

• quindi  $k \in \{0\} \rightarrow x = -1 + 0 = -1$

ma qui cerchiamo  $= 2^*$

quindi moltiplico per 2

$$2 = -4 \cdot 22 + 18 \cdot 5$$

$$x = -4 + \frac{5}{1} k$$

Siamo in  
 $\pmod{11}$

quindi  $[x_1] \equiv [-1] \equiv [10]$

$k \in \{0\} \quad [x_2] \equiv [4] \equiv [1]$

④ metto tutto nella formula finale  $(\bar{x} = R_1 \bar{x}_1 + R_2 \bar{x}_2 + R_3 \bar{x}_3 + Rk)$

$177 - 110$

$$[x] = 10 \cdot 10 + 22 \cdot 1 + 55 \cdot 1 + 110k = 177 + 110k = 67 + 110k$$

### Esercizio 8 (foglio 3)

Esercizio 8. Trovare tutti gli interi  $x \in \mathbb{Z}$  che soddisfino

- (i)  $4x \equiv 7 \pmod{15}$
- (ii)  $6x \equiv 8 \pmod{9}$
- (iii)  $\begin{cases} 1025x \equiv 5312065 \pmod{8} \\ 36x \equiv 322 \pmod{5} \\ 4x \equiv 7 \pmod{3} \end{cases}$
- (iv)  $4x \equiv 3 \pmod{385}$ .

### METODO PELLARIN CRT

$$\textcircled{1} \quad 4x \equiv 7 \pmod{15}$$

① calcolo l'MCD tra 4 e 15

$$\text{MCD}(4, 15) = 1 \iff [4] \text{ invertibile mod. 15}$$

$$\exists n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } 4 \cdot n \equiv_1 1 \quad (\text{es. } n=4)$$

lo faccio perché voglio che quel  $4x$  diventa un  $(1)x$

② trasformo  $4x$  in  $x \rightarrow$  moltiplico entrambi i lati per 4

$$4 \cdot 4x \equiv_{15} 28$$

$$x \equiv_{15} 13$$

(moltiplichi con resto 13)

$$\text{quindi, le sol. sono } \mathcal{E} = 15\mathbb{Z} + 13$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} 1025x \equiv 5312065 \pmod{8} \\ 36x \equiv 322 \pmod{5} \\ 4x \equiv 7 \pmod{3} \end{cases}$$

① notiamo che  $r_1, r_2, r_3$  sono primi tra loro ✓

② semplifichiamo le congruenze

$$\textcircled{4} \pmod{8} \quad 1025 = 1024 + 1 = 2^{10} + 1 = \underbrace{(2^3)^2 \cdot 2}_{\equiv_8 0 \text{ perciò}} + 1 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$\cdot 5312065$$

$$\textcircled{5} \quad 8 \mid 40 \quad \text{quindi } 8 \mid 40 \cdot 10\mathbb{Z}$$

$$\text{notiamo che } 5312065 = 4000000 + 1312065$$

$$\text{visto che } 8 \mid 4 \cdot 10^6 \quad 5312065 \equiv_8 1312065$$

$$8 \mid 1200000 \equiv_8 112065 \quad 8 \mid 120000 \equiv_8 -7935$$

$$8 \mid 8000 \equiv_8 65 \equiv_8 1$$

il sistema diventa quindi

$$\begin{cases} x \equiv_8 1 \\ x \equiv_5 2 \\ x \equiv_3 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \quad \text{calcoliamo le altre cose: } R = 3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$$

$$R_1 = r_2 r_3 = 15$$

$$R_2 = r_1 r_3 = 24$$

$$R_3 = r_1 r_2 = 40$$

$$\textcircled{2} \quad 6x \equiv 8 \pmod{9}$$

notiamo che 6 e 9 non sono coprimi.

$$6x \equiv_9 8 \iff 6x - 8 = 9 \cdot k$$

$$\iff 8 = \underbrace{6x - 9k}_{\text{ma questo è impossibile}}$$

notiamo che questi sono divisibili per 3 (MCD 3, 9)

mentre 8 non lo è

$$\mathcal{E} = \emptyset$$

$$\textcircled{2} \cdot 36 \equiv_5 1$$

$$\cdot 322 \quad 5 \mid 320 \quad \equiv_5 2$$

$$\textcircled{3} \cdot 4 \equiv_3 1$$

$$\cdot 7 \equiv_3 1$$

④ troviamo gli inversi  $S_i$ :

$$R_1 = 15 \text{ è invertibile modulo } r_1 = 8 \quad 7 \cdot 15 \stackrel{-1}{\equiv} 1 \text{ di inverso } S_1 = 7$$

$$R_2 = 24 \quad 24 \cdot 4 \stackrel{-1}{\equiv} 1 \quad S_2 = 4$$

$$R_3 = 40 \quad 40 \cdot 1 \stackrel{-1}{\equiv} 1 \quad S_3 = 1$$

⑤ calcoliamo  $y_i = S_i c_i$  e li inseriamo nella formula finale

i	$S_i$	$c_i$	$y_i$
1	7	1	7
2	4	2	$8 \stackrel{-1}{\equiv} 3$
3	1	1	1

$$X_0 = \sum_{i=1}^3 y_i R_i = 7 \cdot 15 + 3 \cdot 24 + 1 \cdot 40 = 217 \quad \text{soltuzione particolare}$$

$$\text{Soltuzione generale: } E = 217 + 120Z$$

POLINOMI in una indeterminata  $\Rightarrow$  coeff in un campo

$K$  campo =  $\mathbb{F}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Un polinomio in  $X$  a coefficienti in  $K$  è definito come

$$P = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^i \quad \text{con } \alpha_i \in K \text{ coefficienti, } n \in \mathbb{Z} \text{ (dipende dal polinomio)}$$

$\alpha_i = 0 \quad \forall i > 0$  (abbastanza grande)

esempio

$$K = \mathbb{R}, \quad 0, \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i \quad K = \mathbb{F}_2 \quad [1]x^5 + [0]x^4 + [2]x^3 + [6]x^2 + [1]x + [1] = x^5 + x + [1]$$

### → insieme di polinomi

(OSSERVAZIONE: è quindi possibile che un insieme finito es.  $K = \mathbb{F}_p$  ne "generi" uno infinito -  $K[X]$ )

$A = K[X]$  è l'insieme dei polinomi (ogni  $P \in A$ )

L'insieme di polinomi ha una struttura ad anello (comm. un.)  $(A, -, +, \cdot, 0, 1)$

Definiamo infatti le operazioni di somma e prodotto:

$$\text{con } P = \sum_{i \geq 0} \alpha_i X^i \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i > 0 \quad Q = \sum_{i \geq 0} b_i X^i \quad b_i = 0 \quad \forall i > 0$$

- $P + Q := \sum_{i \geq 0} (\alpha_i + b_i) X^i$

prodotto di Cauchy

- $P \cdot Q := \sum_{k \geq 0} c_k X^k \quad \text{con } c_k = \sum_{i+j=k} \alpha_i b_j \quad \begin{array}{l} \text{(qui si nota che } c_k = 0 \quad \forall k > 0 \\ \text{- per numeri abbastanza grandi,} \\ \alpha_i e b_j saranno 0 \end{array}$

### → grado di un polinomio

$$P \in A[X] \quad P = \sum_{i \geq 0} \alpha_i X^i \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i > 0 \quad \text{con } P \neq 0 \quad (\text{ovvero } \{i \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \alpha_i \neq 0\} \text{ finito non vuoto})$$

$$\deg(P) = \max \{i \in \mathbb{N}, \alpha_i \neq 0\} \quad \text{grado massimo} \quad \bullet \text{ Si pone } \deg(0) := -\infty$$

Quindi, l'insieme dei gradi è  $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$   $\deg: K[X] \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$

- elementi di grado zero  $\{P \in K[X] : \deg(P) = 0\} = K^\times$  ↗ sono gli invertibili del campo, ovvero (per def campo) tutti gli el del campo tranne 0 (quindi sono le "costanti")

Lemmas

$$\textcircled{1} \quad \deg(\alpha) = -\infty \iff \alpha = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \deg(\alpha b) = \deg(\alpha) + \deg(b)$$

$$\textcircled{3} \quad \deg(\alpha + b) \leq \max(\deg(\alpha), \deg(b))$$

$$\text{e } \deg(\alpha + b) = \max(\deg(\alpha), \deg(b)) \text{ se } \deg(\alpha) \neq \deg(b)$$

se i gradi sono uguali gli el. di grado maggiore si potrebbero annullare e il grado sarebbe < (es.  $(x^3+x) + (-x^3+2)$ )

$$\text{es. } \alpha = x^2 + x + 1 \quad \deg = 2 \quad b = x + 1 \quad \deg = 1 \quad \alpha + b = x^2 + 2x + 2 \quad \deg = 2$$

# ANALOGIE TRA I POLINOMI E $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} \quad A = K[X]$$

anello di polinomi  
Compone

operazioni:

$$\begin{array}{c} \cdot \mathbb{Z} \xrightarrow{1:1} \mathbb{N} \text{ val assoluto} \\ \alpha \longrightarrow \begin{cases} \alpha & \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \alpha \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

proprietà

- ①  $|\alpha| = 0 \iff \alpha = 0$
- ②  $|\alpha b| = |\alpha| \cdot |b|$
- ③  $|\alpha + b| \leq |\alpha| + |b|$  diseg. triangolare

$$\cdot A \xrightarrow{\deg} \mathbb{N} \sqcup \{-\infty\} \text{ grado polinomio}$$

$$\textcircled{1} \deg(\alpha) = -\infty \iff \alpha = 0$$

$$\textcircled{2} \deg(\alpha b) = \deg(\alpha) + \deg(b)$$

$$\textcircled{3} \deg(\alpha + b) \leq \max(\deg(\alpha), \deg(b))$$

ci sono delle corrispondenze, ma serve qualcosa di più vicino

def c-valore assoluto di un polinomio

Dato un polinomio  $P \in A \setminus \{0\}$

Scegliamo  $c > 1$

$$|P|_c := c^{\deg(P)} \quad (\text{dipende da } c)$$

Allora proprietà

$$\textcircled{1} |\alpha|_c = 0 \iff \alpha = 0$$

$$\textcircled{2} |\alpha b|_c = |\alpha|_c \cdot |b|_c$$

$$\textcircled{3} |\alpha + b|_c \leq \max(|\alpha|_c, |b|_c) \leq |\alpha|_c + |b|_c$$

invece, se  $P = 0$

$$|0|_c := 0 = c^{-\infty}$$

$$\text{Per } \textcircled{2} \quad |\alpha b|_c = c^{\deg(\alpha b)} = c^{\deg(\alpha) + \deg(b)} = |\alpha|_c \cdot |b|_c$$

$$\text{Per } \textcircled{3} \quad |\alpha + b|_c = c^{\deg(\alpha + b)} \leq c^{\max(\deg(\alpha), \deg(b))} \leq c^{\deg(\alpha)} + c^{\deg(b)}$$

## ALGORITMO DELLA DIVISIONE EUCLIDEA SUI POLINOMI

Teorema  $\alpha, b \in A = K[X] \quad (\alpha, b) \neq (0, 0)$

Esiste unica  $(q, r) \in A \times A$  t.c.  $\alpha = qb + r$  dove  $\deg(r) < \deg(b)$  ovvero  $|r|_c < |b|_c$

divisione in colonne

$$\begin{array}{l} \alpha = x^4 + x + 1 \\ b = x^3 - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^4 + \\ x^3 - 2 \\ \hline x^4 \end{array} \quad \begin{array}{r} x+1 \\ -2x \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 \quad -2 \\ \hline X \end{array} \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} x^4/x^3 \\ \textcircled{2} \text{ moltiplico per } (x^3 - 2) \\ \textcircled{3} \text{ scrivo qui} \\ \textcircled{4} \text{ sottraggo} \\ \text{grado} < \text{quindi fine} \end{array} \quad q = x, \quad r = 3x + 1$$

$\mathbb{Z}$  $A = K[x]$ 

inter:	polinomi	TABELLA ANALOGIE TRA $\mathbb{Z}$ e $K[x]$
divisione euclides	divisione euclides	(il grande ripasso delle proprietà di $\mathbb{Z}$ )
valore assoluto	$  \cdot  _c \circ \deg$	

 $\mathbb{N}^*$   
("positivi")

$A^+ = \{ \text{polinomi monici} \}$   
 in forma  $P = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$   
 con  $a_n \neq 0$  (coeff. grado massimo)  
 il prodotto di monici è monico  
 (ma la somma non necessariamente)

 $\mathbb{Z}^\times = \{ \pm 1 \}$ 

inversi sui polinomi:

$$\begin{aligned} A^\times &= K^\times \\ \text{sia } a \in A^\times \exists b \in A^\times \text{ t.c. } ab &= 1 \\ \implies \deg(a) + \deg(b) &= 0 \quad (\deg(ab) = 0 = \deg(a) + \deg(b)) \\ \implies \deg(a) = \deg(b) &\in \mathbb{N} \text{ (o avrei } -\infty) \\ \implies \deg(a) = \deg(b) &= 0 \\ \implies a, b \in K^\times &(\text{"costanti" diverse da } 0) \end{aligned}$$

divisibilità in  $\mathbb{Z}$ 

$$\begin{aligned} a|b &\iff \exists H \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } b = ah \\ a|b &\iff b \in a\mathbb{Z} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } b &= ak \\ \iff b &\in a\mathbb{Z} \\ \iff b\mathbb{Z} &\subset a\mathbb{Z} \\ \iff ba &\subset aA \end{aligned}$$

proprietà di  $|$  su  $A$ 

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ riflessiva} \\ \textcircled{2} \text{ transitiva} \\ a|b, b|c \iff c \in aA &\iff aA \subset bA \subset cA \\ \iff cA &\subset aA \iff a|c \\ \textcircled{3} \text{ quasi riflessiva ma non:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a, b \in A. \text{ Supponiamo } a|b \wedge b|a \\ \iff \exists u \in A \text{ t.c. } b = au, \exists v \in A \text{ t.c. } a = bv \\ \text{quindi } a = uv \iff \deg(a) = \deg(u) + \deg(v) + \deg(a) \\ \text{possiamo supporre } a, b \neq 0 \\ \deg(a) = \deg(a) + \deg(u) + \deg(v) \iff 0 = \deg(u) + \deg(v) \\ \iff \deg(u) = \deg(v) = 0 \\ \iff u = \lambda \in K^\times, v = \mu \in K^\times \quad (\text{sempre per la questione } \deg(0) = \text{"costante" } \neq 0) \end{aligned}$$

Quindi  $\exists \lambda \in K^\times = A^\times \text{ t.c. } b = \lambda a$

Lemmas  $A = K[X]$  è un dominio d'integrità

$\mathbb{Z}$  è un dominio d'integrità

dim Sia  $P \in A$  divisore di zero

$$\exists Q \in A \setminus \{\emptyset\} \text{ t.c. } PQ = \emptyset$$

$$\deg(PQ) = \deg(\emptyset) = \deg(P) + \deg(Q) = -\infty$$

impossibile somma due numeri  $\in \mathbb{N} = -\infty$

$$\text{Quindi } \deg(P) = -\infty \iff P = \emptyset$$

$$a \equiv b \pmod{n}$$

$$\iff n | a - b$$

$$a, b \in A, H \in A \setminus \{\emptyset\}$$

$$a \equiv b \pmod{H} \text{ rel d'eq.}$$

es. transitività  $a \equiv_H b, b \equiv_H c$

$$\iff H | a - b \wedge H | b - c$$

$$\iff a - b = Hv \quad \exists v \in A, b - c = Hw \quad \exists w \in A$$

$$a - b + b - c = H(v + w)$$

$$\iff H | a - c \iff a \equiv_H c$$

$$A/H \text{ snello}$$

commutativo unitario

$$A/H = \{[x] : x \in A\} = \{x + HA : \deg(x) < \deg(H)\}$$

$$a \in A, [a] = a + HA \subset A$$

$$\text{Sistema compl. Rapp. mod } H = \{a \in A : \deg(a) < \deg(H)\}$$

de: MCD in  $\mathbb{Z}$

de: MCD in  $A$

Bézout in  $\mathbb{Z}$ :

$$a, b \in A, \text{ poniamo } aA + bA = \{m \in A \text{ t.c. } \exists u, v \in A \text{ con } m = ua + vb\}$$

Lemmas Bézout in  $A = K[X]$

$$a, b \in A \text{ t.c. } (a, b) \neq (0, 0)$$

$$\text{allora } aA + bA = \Delta A \quad \exists! \delta \in A^+$$

dimostri che  $\mathcal{E}^+$  contiene un el. di grado minimo unico ( $\delta$ )

(mostrare non vuoto  $(a, b) \neq \emptyset$ , principio Minimo)

$$\mathcal{E} = aA + bA, \quad \mathcal{E}^+ = \{m \in \mathcal{E} \text{ t.c. } m \in A^+\}$$

monico  
(notiamo che infatti è l'insieme "analogo" a  $\mathbb{N}^*$  in  $A$ )

MCD

$$(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

prop.  $\exists! d \in \mathbb{N}^* \text{ t.c.}$

$$\textcircled{1} \quad d | a \wedge d | b$$

\textcircled{2} se  $d' \in A$  t.c.

$$d' | a \wedge d' | b \Rightarrow d' | d$$

MCD

$$(a, b) \in A^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

prop.  $\exists! d \in A^+ \text{ t.c.}$

$$\textcircled{1} \quad d | a \wedge d | b$$

\textcircled{2} se  $d' \in A$  t.c.

$$d' | a \wedge d' | b \Rightarrow d' | d$$

$$\text{inoltre } d = \delta = \text{MCD}(a, b)$$

$$\text{inoltre } d = \delta = \text{MCD}(a, b)$$

$$\text{coprimi } a, b \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \text{MCD}(a, b) = 1$$

$$\text{coprimi } a, b \in A \text{ t.c. } \text{MCD}(a, b) = 1$$

irriducibile  $a \in A \setminus A^\times$

$a$  irriducibile se  $\forall b, c \in A : a = bc$

$$\text{allora } a = b \cdot c \in A^\times \cdot A^\times$$

primo  $a \in A \setminus A^\times, a \neq 0$

primo se  $a | bc \Rightarrow a | b \vee a | c$

irriducibile  $P \in A \setminus A^\times \quad (\deg(P) > 0)$

$P$  è irriducibile se, scrivendo  $P = QR$

allora si ha  $0 < Q \in A^\times \wedge R \in A^\times \subset K^\times$

osservazione:

$X - x$  è irriducibile  $\forall x \in K$

$$X - x = U \cdot V$$

$$\deg(X - x) = \deg(U) + \deg(V)$$

$$\Rightarrow \{\deg(U), \deg(V)\} = \{0, 1\} \text{ almeno uno è invertibile (di grado 0)}$$

Lemmas: primo  $\iff$  irriducibile

Lemmas:  $P$  irriducibile  $\iff$   $P$  primo

Teorema Fondamentale Aritmetica

$\forall a \in \mathbb{Z}^*$   $a$  si decomponga  
in modo unico come:

$$d = (\pm 1) \cdot \prod_{p \text{ primo}} p^{v_p(a)}$$

$v_p(a) \in \mathbb{N}$ ,  $\{p : v_p(a) \neq 0\}$  finito

Teorema della Fattorizzazione Unica

Ogni  $H \in A - \{\emptyset\}$  si decomponga  
in modo unico come prodotto:

$$H = \lambda \cdot \prod_{\substack{P \text{ irr.} \\ P \in A^+}} P^{v_P(H)} \quad v_P(H) \in \mathbb{N} \text{ e} \\ \{P : v_P(H) \neq 0\} \text{ finito}$$

### FATTORIZZAZIONE

in  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  la fattorizzazione è "facile" (è facile caratterizzare i polinomi irriducibili), invece in  $K = \mathbb{F}_p, \mathbb{Q}$  la fattorizzazione è difficile

#### teorema

• in  $\mathbb{C}[x]$  i monici irriducibili sono tutti i polinomi nella forma  $X - \alpha : \alpha \in \mathbb{C}$  (polinomi di primo grado)

• in  $\mathbb{R}[x]$ , se  $P$  monico irriducibile, allora o: ①  $\deg(P) = 1$  ( $X - \alpha : \alpha \in \mathbb{R}$ )

② se  $\deg(P) = 2$

$$(P = X^2 + \alpha X + b) \text{ allora } \Delta = \alpha^2 - 4b < 0$$

#### def VALUTAZIONE

dati  $k \in K$ ,  $F \in K[X] = F_0 + F_1X + \dots + F_nX^n$

la valutazione di  $F$  in  $x$

è  $ev_x(F) = F_0 + F_1x + \dots + F_nx^n$  (è la "sostituzione" di  $X$ )

$$ev: K[X] \longrightarrow K$$

OSSERViamo:

$$\textcircled{1} ev_x(F+G) = ev_x(F) + ev_x(G)$$

$$\textcircled{2} ev_x(F \cdot G) = ev_x(F) \cdot ev_x(G)$$

$$\textcircled{3} \lambda \in k, ev_x(\lambda) = \lambda \text{ (costanti) e non invertibili perché vale per 0}$$

• Si dice che  $ev_x: K[X] \longrightarrow K$  è un <sup>OMO</sup>MORFISMO DI ANELLI

esempio:  $F = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ ,  $x=1$ ,  $ev_x(F) = X^2 + 1 = 2$

Lemma Sia  $x \in K$

allora  $ev_x^{-1}(\{0\}) = (X-x)A$   $\curvearrowleft K[X]$   $(x \in K \text{ tali che sostituire danno 0})$   
polinomi che si annullano in  $X$

dim:

• dimostra  $ev_x^{-1}(\{0\}) \supset (X-x)A$   $\curvearrowleft$

Sia  $Q = (X-x)H$ . Allora  $ev_x(Q) = ev_x(X-x) \cdot ev_x(H) = 0$   
 $\implies Q \in ev_x^{-1}(\{0\})$

• dimostra  $ev_x^{-1}(\{0\}) \subset (X-x)A$

Sia  $P \in A$  t.c.  $ev_x(P) = 0$ .

per l'algoritmo di divisione euclidea per  $X-x$   $\exists! (q, r) \in A \times A$  t.c.  $P = q(X-x) + r$   $\deg(r) < \deg(X-x)$   $\deg(r) \in \{-\infty, 0\} \iff r \in K$   
 $r = 0, r \text{ const} \neq 0$

$$ev_x(P) = ev_x(q(X-x) + r) = ev_x(q) \underbrace{ev_x(X-x)}_{0 \text{ per ipotesi}} + ev_x(r)$$

$P$  ha una radice in  $x$

$$\implies ev_x(r) = 0 \text{ e, per ③ } r = ev_x(r) = 0 \text{ quindi } X-x | P \iff P \in (X-x)A \blacksquare$$

( $P$  ha una radice in  $x \iff X-x | P$ ,  $ev_x(P) = 0$ )

es. 1 scheda

Fattorizzare (non c'è una tecnica universale)

- $X^2 + X + 6$  in  $\mathbb{R}[X]$  un polinomio di grado 1 in  $K[X]$  è sempre irriducibile.

In  $\mathbb{R}[X]$  anche i polinomi di grado 2 (SOLO) con  $\Delta < 0$  sono irriducibili

nessuna radice reale

$$\textcircled{4} \quad \Delta(bx^2 + bx + c) = b^2 - 4ac = 1 - 24 = -23 < 0 \quad \text{è irriducibile} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \exists v_x (x^2 + x + 6) \neq 0$$

essendo irriducibile, la sua fattorizzazione è uguale a se stesso: " $X^2 + X + 6$ "

- $X^3 - 6x^2 + 11x - 6$  in  $\mathbb{R}[X]$

per i polinomi grado 3 si può andare a tentativi

·  $\exists v_0$  no ( $c'è -6$ )

$$\exists v_1 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 12 - 6 - 6 = 0$$

1 è radice, quindi il pol. irriducibile  $x-1$  divide il polinomio  $\iff x-1 \mid x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 

calcolo il quoziente:

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x-1 \\ \hline X^3 - X^2 & X^2 - 5x^2 + 6 \\ -5x^2 + 11x - 6 & \\ \hline -5x^2 + 5x & \\ 6x - 6 & \\ \hline 6x - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

poi uso la formula quadratica:

$$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$$

quindi:  $x_i = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \quad (\text{entrambi dividono } x-1 \text{ e sono coprimi, quindi il loro prodotto divide } (x-1)^2)$$

$$\text{quindi: } P = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

Avrei anche potuto provare  $\exists v_1, \exists v_2, \exists v_3$  e vedere che avrebbe funzionato

- $X^2 - 2X + 2$  in  $\mathbb{C}[X]$   $C = \{x+iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \text{ ovvero } i^2 = -1\}$

pensiamo prima in  $\mathbb{R}[X]$  un'eventuale fattorizzazione rimarrebbe in  $\mathbb{C}[X]$  (al massimo da affinare)

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \quad \text{è irriducibile in } \mathbb{R}[X]$$

ma si fattorizza in  $\mathbb{C}[X]$  perché ommette le radici

$$x_1 = \frac{2+2i}{2} = i+1 \quad x_2 = \frac{2-2i}{2} = i-1$$

$$F = (x - (i+1))(x - (i-1))$$

■  $F = x^3 - 1$  si ha  $\text{ev}_1(F) = 0$  per qualunque campo

$F = (x-1) G$  div.  
escludes  
FALCA  $= (x-1)(x^2+x+1)$  ha  $\Delta < \emptyset$ , irriducibile  
(anche in  $\mathbb{Q}$  - se lo è in  $\mathbb{R}$ )

La fattorizzazione in  $\mathbb{R}[x]$  è  $(x-1)(x^2+x+1)$  (idem in  $\mathbb{Q}[\mathbb{R}]$ )

in  $\mathbb{C}$ : radici  $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$   $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$

la fatt. in  $\mathbb{C}[x]$  è  $F = (x-1)(x-x_1)(x-x_2)$

$\mathbb{C}$

## NUMERI COMPLESSI

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$i := \sqrt{-1}$  caratterizzato dalla condizione  $i^2 = -1$

possiamo anche scrivere  $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$

realizzazione cartesiana di  $\mathbb{C}$

Operazioni: posti  $z = x + iy$      $z' = x' + iy'$

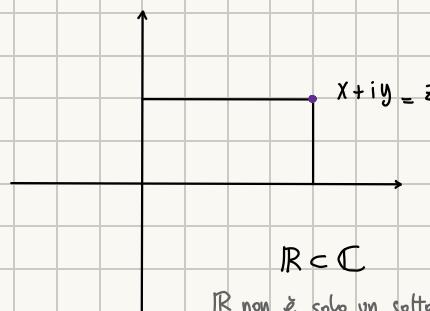
$$\bullet -z := -x + i(-y) \in \mathbb{C} \quad \text{opposto}$$

$$z + z' := (x + x') + i(y + y') \in \mathbb{C} \quad \text{somma}$$

$$\bullet zz' := (x + iy)(x' + iy') = xx' + ix'y + ix'y' + i^2yy' = \\ = xx' - yy' + i(x'y + xy') \in \mathbb{C} \quad \text{prodotto}$$

• NUOVA operazione: CONIUGAZIONE COMPLESSA sopra

•  $(\mathbb{C}, -, +, \cdot, 0, 1)$  è unello commutativo unitario



la parte reale  $\operatorname{Re}(z) = x$   
la parte immaginaria  $\operatorname{Im}(z) = y$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{R}$  non è solo un sottoinsieme,  
ma un SOTTOCAMPO (sottoinsieme campo di un campo)

→ esponenziale di Euler

$$e^{iy} := \cos(y) + i \sin(y) \in \mathbb{C} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad y \mapsto e^{iy}$$

Euler ha notato che, se  $\theta, \eta \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} e^{i\theta} \cdot e^{i\eta} & \xlongequal{\text{prop. potenze}} & e^{i(\theta+\eta)} \\ || & & || \end{array}$$

$$\begin{aligned} & [\cos(\theta) + i \sin(\theta)] \cdot [\cos(\eta) + i \sin(\eta)] \\ & \quad || \\ & \cos(\theta)\cos(\eta) + \cos(\theta)i\sin(\eta) + i\sin(\theta)\cos(\eta) + i^2\sin(\theta)\sin(\eta) \\ & \quad (i^2 = -1) - \sin(\theta)\sin(\eta) \\ & \quad || \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos(\theta) + i \sin(\theta) \\ \text{con } \theta &= \theta + \eta \end{aligned}$$

raggruppo parte reale e immaginaria

$$\begin{aligned} & \cos(\theta)\cos(\eta) - \sin(\theta)\sin(\eta) \quad \xlongequal{\quad} \cos(\theta+\eta) + i \sin(\theta+\eta) \\ & + i (\cos(\theta)\sin(\eta) + \cos(\eta)\sin(\theta)) \quad \cdot \cos(\theta)\cos(\eta) - \sin(\theta)\sin(\eta) = \cos(\theta+\eta) \\ & \quad \cdot \cos(\theta)\sin(\eta) + \cos(\eta)\sin(\theta) = \sin(\theta+\eta) \end{aligned}$$

• in modo simile si trova  $(e^{iy})^n = e^{iny} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

non l'ha fatto ma l'ha trovata su internet  
(+ formula di de Moivre:  $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ )

Esempi numeri complessi (Eulero, De Moivre)

$$e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1 + i0 = 1$$

$$e^{i\cdot 0} = \cos(0) + i \sin(0) = 1 + i0 = 1$$

$$1 = e^{i2\pi} = e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot 3} = \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^3 \quad \text{poniamo } x = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$x^3 = 1$  quindi  $x$  è radice di  $x^3 - 1$   $\operatorname{ev}_x(x^3 - 1) = 0$

• Osserviamo  $1 = 1^2 = \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{3 \cdot 2} = \left(e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot 2}\right)^3 = \left(e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)^3$  quindi anche  $x^2$  è radice di  $x^3 - 1$

$$\cdot x^0 = e^{\frac{0\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{0\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0\pi}{3}\right) = 1$$

$$\cdot x^1 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\cdot x^2 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

L'insieme  $\{x^0, x^1, x^2\} = R$  ha 3 elementi distinti e

$$\forall y \in R, \operatorname{ev}_y(x^3 - 1) = 0 \implies x^3 - 1 = (x - x^0)(x - x^1)(x - x^2)$$

$$\text{in (4)} \quad e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad e^{\frac{4\pi i}{3}} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

## CONIUGAZIONE COMPLESSA nuova operazione di $\mathbb{C}$

Per  $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\bar{z} = x - iy \quad \text{cambio segno alla parte immaginaria}$$

poniamo anche  $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $h(z) = \bar{z}$

proprietà

$$\textcircled{1} \quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad (h(z+z') = h(z) + h(z'))$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'} \quad (h(zz') = h(z)h(z'))$$

$$\textcircled{3} \quad \overline{-z} = -\bar{z} \quad (h(-z) = -h(z))$$

$$\textcircled{4} \quad h \text{ è una biiezione} \quad h^{-1} = h$$

es. mostrare \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4}:  $z = x + iy$      $z' = x' + iy'$

$$\textcircled{1} \quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

$$\overline{z+z'} = \overline{(x+x') + i(y+y')} = \overline{x+x' - i(y+y')} = \bar{z} + \bar{z'} = x - iy + x' - iy' = (\text{raccogliendo}) x + x' + i(y + y')$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{xx' - yy' + i(xy' + xy)} = xx' - yy' - i(xy' + xy) \quad \bar{z} \cdot \bar{z'} = x - iy \cdot (x' - iy') = xx' - ixy' - ix'y + i^2yy' = xx' - yy' - i(xy' + xy)$$

$$\textcircled{3} \quad \overline{-z} = -\bar{z}$$

$$-\bar{z} = -x + i(-y) = -x - i(-y) \quad -\bar{z} = -(x - iy) = -x - i(-y)$$

reali e  $\bar{z}$

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$$

nei reali,  $z = \bar{z}$   
(i numeri reali non hanno parte immaginaria)

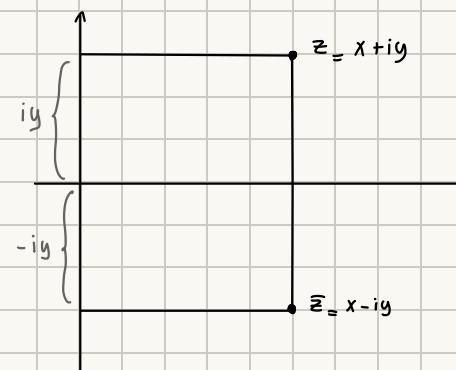
$$z = x + i0 \iff z = x - i0$$

come isomorfismo  
gruppi, ma con anelli vedi p.57

omomorfismo: dati  $(G, \cdot)$ ,  $(H, \odot)$   
strutture algebriche dello stesso tipo  
un omomorfismo è  $f: G \rightarrow H$   
tale che  $f(g \cdot h) = f(g \odot h) \quad \forall g, h \in G$

isomorfismo: omomorfismo biiettivo

$h$  è un  
isomorfismo  
di anelli



graficamente,  $(-)$  corrisponde alla riflessione rispetto all'asse  $\mathbb{R}$   
 $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $z \mapsto \bar{z}$

## Formule fondamentali

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2$$

$= 0 \iff x = y = 0$   
 $> 0 \iff z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

valore assoluto complesso

•  $\mathbb{C}$  è un campo

(uso l'inverso di  $z\bar{z}$  per trovare quello di  $z$ )

dim: dato  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , prendo  $z\bar{z} = x^2 + y^2$  e lo moltiplico per il suo inverso:  $(x^2 + y^2)^{-1}$

$$\underbrace{z\bar{z} (x^2 + y^2)^{-1}}_{\text{inverso di } z} = 1 \quad \text{quindi ogni elemento non nullo di } \mathbb{C} \text{ è invertibile} \blacksquare$$

"Sui libri si trova:"

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{(x^2 + y^2)} = 1$$

esempi:

$$\cdot z = 2 = 2+i0 \in \mathbb{R} \quad \bar{z} = 2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

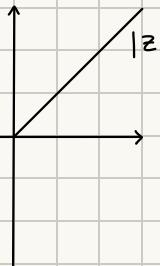
$$\cdot z = i = 0+1 \cdot i \quad \bar{z} = -i \quad x^2 + y^2 = 1 \quad z^{-1} = \frac{-i}{1} = -i$$

$$\cdot z = 1+i \quad \bar{z} = 1-i \quad z\bar{z} = 2 \quad z^{-1} = \frac{1-i}{2} \quad (1+i) \frac{1-i}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

## Valore assoluto complesso

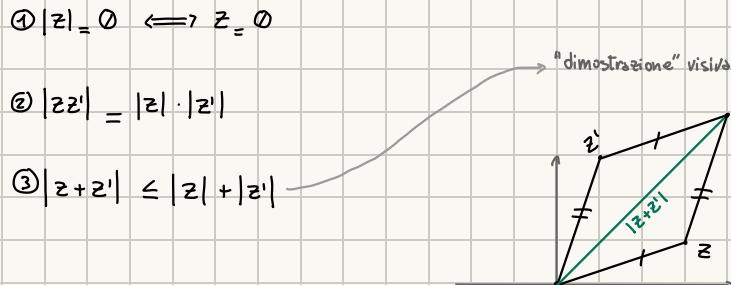
proprietà

$$\textcircled{1} |z| = 0 \iff z = 0$$



$$\textcircled{2} |zz'| = |z| \cdot |z'|$$

$$\textcircled{3} |z+z'| \leq |z| + |z'|$$



per le proprietà dei triangoli:  
lunghezza lato < somma 1. altri lati

## Proprietà / esercizio

$$\forall g \in \mathbb{R} \quad \textcircled{1} |e^{ig}| = 1 \quad \textcircled{2} (e^{ig})^{-1} = \overline{e^{ig}} = e^{-ig}$$

dim:

$$\textcircled{1} e^{ig} = \cos(g) + i \sin(g) \quad \left| e^{ig} \right| = \sqrt{\underbrace{\cos(g)^2 + \sin(g)^2}_{=1 \text{ (prop sin, cos)}}} = \sqrt{1} = 1$$

•  $e^{ig} \neq 0$ , quindi è invertibile

$$e^{ig} \cdot e^{-ig} = e^{ig} e^{-ig} \quad \text{con } \eta = -g = e^{i(g-\eta)} = e^{i0} = 1 \quad \text{quindi } e^{-ig} = (e^{ig})^{-1} \text{ (inverso)}$$

$$\overline{e^{ig}} = \overline{\cos(g) + i \sin(g)} = \frac{\overline{e^{ig}}}{\cos(g)^2 + \sin(g)^2} = \frac{\overline{e^{ig}}}{1} \quad \text{ma anche } \frac{\overline{e^{ig}}}{|\overline{e^{ig}}|^2} \quad \text{quindi } \frac{1}{\overline{e^{ig}}} \quad \text{quindi } \overline{e^{ig}} = (e^{ig})^{-1}$$

## RAPPRESENTAZIONE POLARE

i numeri complessi possono essere rappresentati in due modi: • rappresentazione complesso ( $z = x+iy$ ) - utile per la somma

• rappresentazione polare (trigonometrica) - utile per il prodotto

dati  $z \in \mathbb{C}^*$      $z = x+iy$ ,  $\rho = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{R}_{>0}$   
 $z \neq 0$  è un unicum ( $z=0 \rightarrow \rho=0$ ;  $\exists g'$ )

distanza euclidea

(dall'origine)

### Lemma

- $\exists g \in \mathbb{R}$  t.c.  $z = \rho e^{ig}$
- inoltre,  $g + 2\pi\mathbb{Z}$  è unicamente determinato

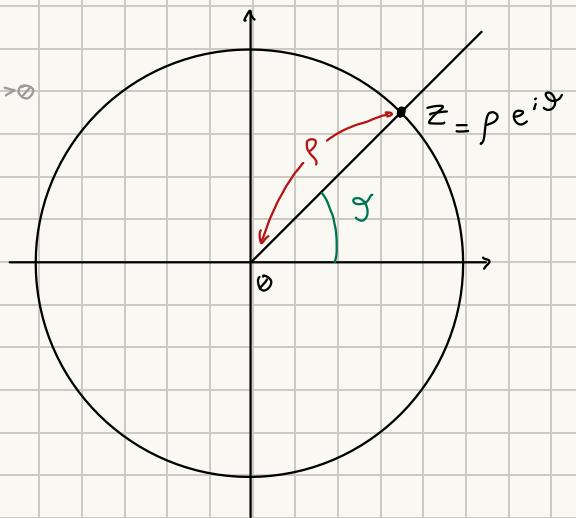
dim (di g...)

$$\rho = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}, \quad z' := \rho^{-1} \cdot z \quad \text{"componente angolare"} \quad z' = \rho^{-1} z = e^{ig}$$

$$\cdot z' = x' + iy' \quad \exists g \text{ t.c. } x' = \cos(g) \quad y' = \sin(g) \quad \textcircled{1}$$



$$\Rightarrow (\text{sostituendo in } z' = x' + iy') \quad z' = \cos(g) + i \sin(g) = e^{ig} \quad \text{quindi (per } z' = \rho^{-1} z) \quad z = \rho e^{ig} \quad \text{quindi esiste } g.$$



Le soluzioni di  $\textcircled{1}$  sono esattamente gli elementi di  $g + 2\pi\mathbb{Z}$  per un certo  $g \in [0, 2\pi)$

• Su  $\mathbb{R}$  c'è la relazione di congruenza mod.  $2\pi$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha \equiv \beta \pmod{2\pi} \iff \alpha - \beta \in 2\pi\mathbb{Z} \quad (\text{che è una rel. di equivalenza})$$

da cui  $g + 2\pi\mathbb{Z}$  è una classe di equivalenza e si identifica con un elemento di  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  (anche se non è un quelllo)

OSS:  $z \in \mathbb{C}$  è della forma  $e^{ig} \iff |z| = 1$ . Viceversa, se  $|z| = 1$ , la sua distanza dall'origine è 1  
 quindi giace sul cerchio delle unità. ( $\rho = 1$ )

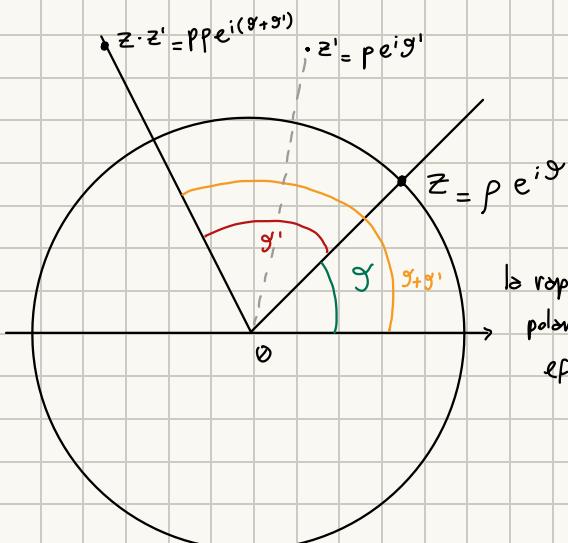
OSS: il coniugato di  $z$  è il suo inverso se  $\rho = 1$  ( $z \in$  cerchio unità)

dim (fatto al QnA)

$$\bar{z} = \overline{\rho e^{ig}} = \overline{\rho} \overline{e^{ig}} = \rho (\cos(g) - i \sin(g)) = \rho (\cos(-g) + i \sin(-g)) = \rho e^{-ig}$$

$$z^{-1} = (\rho e^{ig})^{-1} = \rho^{-1} e^{-ig}$$

$$\text{Quindi, } z^{-1} = \bar{z} \iff \rho e^{-ig} = \rho^{-1} e^{-ig} \iff \rho = 1$$



la rappresentazione  
polare è utile per  
effettuare moltiplicazioni  
di numeri complessi

in cui,  
visto che:  $z' \bar{z}' = \rho^{-1} z \bar{\rho^{-1} z} = \rho^{-2} z \bar{z} = \rho^{-2} \cdot \rho^2 = 1$

$$z \bar{z} = 1, \quad \text{quindi } \sqrt{z \bar{z}} = 1$$

OSS (al QnA): si ha che

$$\bar{z} = -z \iff z \in i\mathbb{R} \quad (y=0)$$

$$\bar{z} = -z \iff x - iy = -x - iy \iff x = 0$$

## def ALGEBRICAMENTE CHIUSO

$K$  campo è detto algebricamente chiuso se:  $\forall F \in K[X] \setminus K$  non el.  
del campo ("costanti")

$$\exists x \in K \text{ t.c. } x \text{ è radice di } F \iff \exists x \in K : X-x \mid F$$

(se ha almeno una radice in  $K$ )

### Lemme

$K$  è algebricamente chiuso se e solo se i soli polinomi irriducibili e monici sono i polinomi  $X-x$ ,  $x \in K$  (grado 1)

### dimostrazione

• ( $\Rightarrow$  lemma) Sia  $P \in K[X]$  irriducibile e monico.

Siccome  $K$  è chiuso algebricamente (per ipotesi)  $\exists x \in K$  t.c.  $X-x \mid P$

$$P = (X-x)Q \text{ con } Q \in K[X] \setminus \{\emptyset\}$$

$\deg(P) = 1 + \deg(Q)$  · se  $P$  è di grado 1, ho già dimostrato.

· se  $\deg(P) \geq 2$  allora  $\deg(Q) \geq 1$ . Quindi,  $Q \notin K[X]^* = K^*$  ( $= K \setminus \{\emptyset\}$ )

ma anche  $(X-x) \notin K[X]^*$ . Questo contraddice  $P$  irriducibile  $\implies \deg(P) = 1$   
 $\implies P = X-x$

• ( $\Leftarrow$  lemma) Supponiamo  $\{P \in K[X] \text{ monico irriducibile}\} = \{X-x : x \in K\}$

Sia  $P$  monico  $\deg \geq 1$ . Allora  $P = \prod_{\substack{Q \text{ irr.} \\ \in K \\ \text{monico}}} Q^{v_Q(P)}$  i soli irr. e monici hanno  $\deg = 1$

$\prod_{x \in K} (X-x)$

Sia  $x \in K$  t.c.  $v_{X-x}(P) \neq 0$ . Allora  $X-x \mid P \iff v_{X-x}(P) = 0$   
 $\iff x \text{ è radice di } P \blacksquare$

### Corollario: MOLTEPLICITÀ

$K$  algebricamente chiuso  $\implies \forall F \in K[X] \setminus \{\emptyset\}$  si scrive in modo unico come

$$F = \lambda \prod_{x \in K} (X-x)^{v_x(F)}$$

$v_x(F)$  è la MOLTEPLICITÀ di  $F$  in  $x$

$$\text{Si ha che } \{x : v_x(F) \neq 0\} = \{x : v_x(F) = 0\} = \{x \text{ radice di } F\} = R$$

chiaramente un pol.  
si decomponi solo con  
le sue radici

Questo insieme ha cardinalità  $\leq \deg(F) := n$

$$\deg(F) = \sum_{x \in K} v_x(F) = \sum_{x \in R} v_x(F) \geq \sum_{x \in R} 1 = \text{cardinalità di } R \quad (\text{ovvero, perché un pol. di grado } n \text{ ha } \leq n \text{ soluzioni})$$

esp. dei polinomi  
in cui si scomponete

## Teorema (fondamentale dell'algebra)

$\mathbb{C}$  è algebricamente chiuso

(dim. omessa perché usa elementi dell'analisi)

### Teorema

$\forall K$  campo esiste sempre un altro campo algebricamente chiuso che lo contiene

esempio  $\mathbb{R}$  non è algebricamente chiuso ma  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$(x^2 + 1 \Delta < 0 \text{ è irr. e non ha grado 1})$

31/10

### FATTORIZZAZIONE DI VARI POLINOMI

- $X^n - 1 \quad (n \leq 5)$

il polinomio  $X^n - 1$  ha sempre radice 1 (e  $X-1 \mid X^n - 1$ )

$$X^n - 1 = (X-1)Q \quad \begin{matrix} \deg(Q) = n-1 \\ \text{unicamente determinata} \end{matrix}$$

più precisamente  $Q = X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1$

↓

$$\text{infatti } (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1) = X^n + X^{n-1} + \dots + X^2 + X - (X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1) = X^n - 1$$

- $n=3 \quad X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1) \quad \text{fattorizzazione in } \mathbb{R}[X]$

$$\text{in } \mathbb{C}[X] \quad X^2 + X + 1 = \left(X + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(X + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

(io che ragiona...)

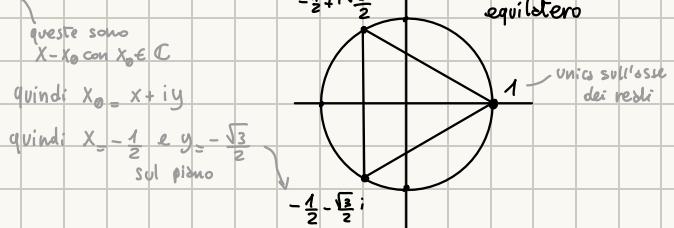
per la rapp. polare,  $\exists \vartheta$  t.c.  $z = \rho e^{i\vartheta}$

nel cerchio delle unità,  $\rho = 1$ ,  $z = e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)$

quindi  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$  sono  $\cos \vartheta$  e  $\sin \vartheta$  di un  $\vartheta$  - quale?

$$\cos(\vartheta) = -\frac{1}{2} \quad \text{se } \vartheta = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \sin(\vartheta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{se } \vartheta = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{7\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\vartheta = \frac{2\pi}{3} \quad \text{quindi } z = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad (\text{per } -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ è } \frac{4\pi}{3})$$



$$-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = x = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad \text{①} \quad -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = x^2 = (e^{\frac{2\pi i}{3}})^2 = (e^{\frac{2\pi i}{3}})^{-1} \cdot (e^{\frac{2\pi i}{3}})^{-1} \quad \text{②}$$

$$\text{② } -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4\pi i}{3}} = e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot 2} = (e^{\frac{2\pi i}{3}})^2$$

② abbiamo già dimostrato P.49 che  $(e^{i\vartheta})^{-1} = \overline{(e^{i\vartheta})} = e^{-i\vartheta}$

quindi basta che  $e^{\frac{4\pi i}{3}} = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$  → questo è vero per periodicità:

$$\frac{4\pi i}{3} = -\frac{2\pi i}{3} + 2\pi i$$

OSSERVAZIONE: n pari ha anche la radice -1 (perché  $(-1)^n = 1$ )

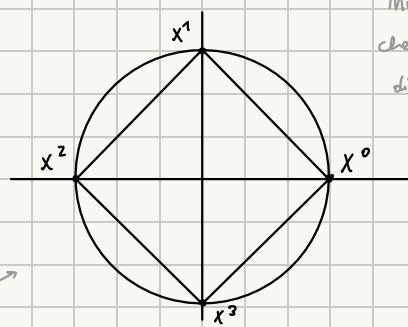
- $n=4 \quad X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i) \text{ in } \mathbb{R}[X]$

$(X-1)(X+1)(X-i)(X+i) \text{ in } \mathbb{C}[X]$

$$X^4 = (X - x^0)(X - x^1)(X - x^2)(X - x^3)$$

$$\text{con } x = e^{\frac{2\pi i}{4}} = e^{\frac{\pi i}{2}} = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_0 + i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_1 = i$$

$$= (X - i^0)(X - i^1)(X - i^2)(X - i^3) = (X-1)(X-i)(X+1)(X+i)$$



Iniziamo ad osservare

che se  $\alpha$  è radice

di  $X^4 - 1$ , allora

$\alpha \in \mathbb{R}$

o anche  $\bar{\alpha}$  è radice

$$\blacksquare \quad n=5 \quad X^5 - 1 = (X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) \quad \text{in } \mathbb{R}[X]$$

prodotto di due quadratici irriducibili monici

i due quadrati irriducibili (in  $\mathbb{R}$ ) monici:

$$P_1 = (X-x)(X-\bar{x}) \in \mathbb{R}[X]$$

$$P_2 = (X-x^2)(X-\bar{x}^2) \in \mathbb{R}[X]$$

(e non quattro di primo grado perché c'è un fattore di grado 1  $\iff$  c'è una radice reale)

e in  $X^5 - 1$  c'è solo 1)

$$\text{infatti, } P_1 = (X-x)(X-\bar{x}) = X^2 - (x+\bar{x})X + x\bar{x}$$

$$P_2 = (X-x^2)(X-\bar{x}^2) = X^2 - (x^2+\bar{x}^2) + |x^2|^2$$

con:

$$\bullet \quad x = \alpha + i\beta \quad \therefore \bar{x} = \alpha - i\beta \quad \therefore x + \bar{x} = 2\alpha \in \mathbb{R} = 2 \operatorname{Re}(x^2) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

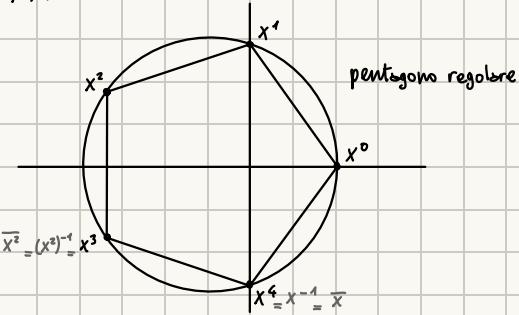
$$\bullet \quad x\bar{x} = x^2 + \beta^2 \geq 0 = 1 \quad (\text{ricorda } z\bar{z} = 1) \quad \therefore x^2 + \bar{x}^2 = 2 \operatorname{Re}(x^2) = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \quad \therefore |x^2|^2 = 1$$

$$P_1 = X^2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1 \quad , \quad P_2 = X^2 - 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X + 1 \quad \text{fatt. in } \mathbb{R}[X] = (X-x^0)P_1P_2$$

• in  $\mathbb{C}[X]$ ,  $X^5 - 1$  ha le radici distinte  $\left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)^k$  con  $k = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\left(\left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)^k\right)^5 = \left(e^{\frac{2\pi i}{5} \cdot 5}\right)^k = \left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)^k = 1$$

$$\text{sono distinte perché } \left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)^k = \cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right) \quad \text{x De Moivre}$$



$$\text{quindi } X^5 - 1 = \prod_{i=0}^4 (X-x^i) = (X-x^0) \left[ (X-x) \left( \frac{X-x^4}{X-x^2} \right) \right] \left[ (X-x^2) \left( \frac{X-x^4}{X-x^3} \right) \right]$$

$$\text{osservazione: con } n \geq 1, \quad X^n - 1 = \prod_{i=0}^{n-1} (X-x^i) \quad \text{con } x = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$



## def POLINOMIO CONIUGATO

Dato  $F = f_0 + f_1 X + \dots + f_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ , poniamo  $\bar{F} = \bar{f}_0 + \bar{f}_1 X + \dots + \bar{f}_n X^n$

OSSERVAZIONE:  $F \in \mathbb{R} \iff F = \bar{F}$  in  $\mathbb{R}$ ,  $x = \bar{x}$

Inoltre, se  $F \in \mathbb{R}[X]$  e  $\text{ev}_z(F) = 0$ , allora  $\text{ev}_{\bar{z}}(F) = 0$

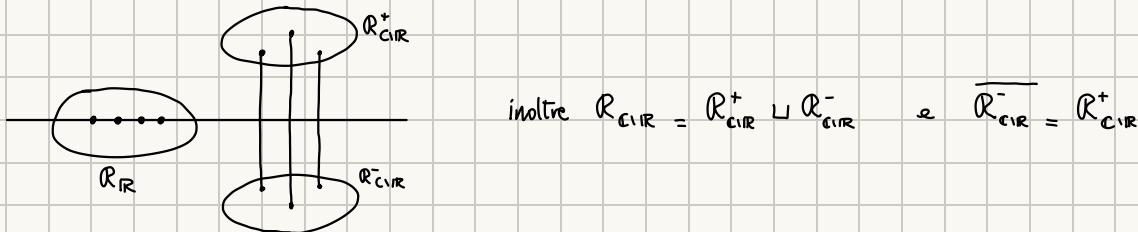
dim:  $\text{ev}_z(F) = \text{ev}_{\bar{z}}(\bar{F})$  e, siccome la somma complessa è compatibile con  $+$ ,  $-$ .

$$= \overline{\text{ev}_z(F)} = \bar{0} = 0$$

Lemma Dato  $F \in \mathbb{R}[X]$

detto  $R$  l'insieme delle sue radici, allora  $R = R_{\mathbb{R}} \cup R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^+ \cup R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^-$  dove  $R_{\mathbb{R}} = R \cap \mathbb{R}$

$R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^+ = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ t.c. } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \operatorname{Im}(z) > 0 \text{ e scrivendo } z = \sum_{i \in \mathbb{R}} x_i + iy, y > 0\}$ ,  $R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^- = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ t.c. } \operatorname{Im}(z) < 0\}$



Lemma già dimostrato utilizzato

$X^2 + \beta X + \gamma \in \mathbb{R}[X]$  è irriducibile  $\iff \Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$

dim

Supponiamo  $P$  irriducibile.

$R_{\mathbb{R}} = \emptyset$ , quindi  $R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} = \{z, \bar{z}\}$ ,  $R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^+ = \{z\}$ ,  $R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^- = \{\bar{z}\}$

$$P = (X-z)(X-\bar{z}) = X^2 - (z+\bar{z})X + z\bar{z} \\ \stackrel{z \in \mathbb{R}}{=} z^2 - 2zX + |z|^2$$

$$\Delta = (z+\bar{z})^2 - 4z\bar{z} = z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 - 4z\bar{z} = (z-\bar{z})^2$$

$$\text{scrivo } z = x+iy \quad z-\bar{z} = 2iy, \quad \text{quindi } (z-\bar{z})^2 = (2iy)^2 = 4i^2y^2 = 4y^2 \cdot -1 = -4y^2 < 0$$

Lemma

Ogni  $F \in \mathbb{R}[X]$  si spezza in  $\mathbb{R}[X]$  in prodotto  $F = \lambda \prod_{x \in R_{\mathbb{R}}} (X-x)^{v_x(F)} \prod_{z \in R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}} \underbrace{[(X-z)(X-\bar{z})]}_{v_z(F)}$

dim: siccome  $C$  è algebricamente chiuso,

$$F = \lambda \prod_{z \in C} (X-z)^{v_z(F)} = \lambda \prod_{z \in R_{\mathbb{R}}} (X-z)^{v_z(F)} \prod_{z \in R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}} (X-z)^{v_z(F)}$$

se  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  si ha  $\bar{z} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Quindi, possiamo scegliere, senza perdita di generalità,  $z = x+iy$  con  $y > 0$  e  $\bar{z}$  appartenente a  $\mathbb{R}$

Sì conclude osservando che  $R = R_{\mathbb{R}} \cup R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^+ \cup R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^-$

Lemma (in teoria esercizio ma mi sembra più un lemma)

Sia  $P \in \mathbb{R}[x]$  di grado dispari. Allora  $P$  ammette almeno una radice reale.

$$\text{questo implica } \deg(P) = \# R_{\mathbb{R}} + \# R_{C \setminus \mathbb{R}} = \underbrace{\# R_{\mathbb{R}}}_{p} + \underbrace{2 \# R_{C \setminus \mathbb{R}}}_{s}$$

(card. i coniugati)

Siccome  $P$  è di grado dispari,  $\deg(P) = 2n+1 = \# R_{\mathbb{R}} + 2s$  Ma allora  $2n+1 = r + 2s \iff r = 2n - 2s + 1$   $\iff r \equiv 1 \pmod{2} \implies r \neq 0$

c'è servito il teorema dei valori intermedi (dell'Analisi)

se  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è continua t.c.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$

allora  $\exists x_0 \in \mathbb{R}$  t.c.  $h(x_0) = 0$

$$P = X^{2n+1} + \alpha_{2n} X^{2n} + \dots + \alpha_0 \in \mathbb{R}[X] \text{ dispari}$$

sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione  $f(x) = ev_x(P)$ : è continua e soddisfa  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  da cui  $\exists x_0 \in \mathbb{R}$  t.c.  $f(x_0) = 0 \iff x_0$  radice di  $f$

esercizio 1

$$P = X^4 - 10X^2 + 1 \quad \text{in } (\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$$

• in  $\mathbb{C}$

$$\text{tentiamo le radici. pongo } Y = X^2 \quad P = Y^2 - 10Y + 1$$

$$\Delta > 0, \text{ radici } y_1 = 5 - 2\sqrt{6} > 0, \quad y_2 = 5 + 2\sqrt{6} > 0$$

$$5 > 2\sqrt{6} \iff 25 > 4 \cdot 6$$

$$y^2 - 10y + 1 = (x^2 - 5 + 2\sqrt{6})(x^2 - 5 - 2\sqrt{6}) = (x + \sqrt{5+2\sqrt{6}})_{\alpha_1} (x + \sqrt{5-2\sqrt{6}})_{\alpha_2} (x - \sqrt{5-2\sqrt{6}})_{\alpha_3} (x - \sqrt{5+2\sqrt{6}})_{\alpha_4} \quad \text{è l.o. fatt. in } \mathbb{R}[X] \text{ e anche in } \mathbb{C}[X]$$

in  $\mathbb{Q}$

POSSIBILI FATTORIZZAZIONI IN IRR. DI POLINOMI IN  $\mathbb{Q}[X]$

$Q \in \mathbb{Q}[X]$  (uguale per un campo qualsiasi)

•  $\deg(Q) = 1$  è irriducibile

•  $\deg(Q) = 3$  ②  $\mathbb{Q}$  irriducibile

•  $\deg(Q) = 4$  ③  $\mathbb{Q}$  irriducibile

②  $Q = P_1 P_2$   $\deg(P_1) = 1, \deg(P_2) = 3$  irriducibili c'è radice

•  $\deg(Q) = 2$  ④  $\mathbb{Q}$  irriducibile

②  $Q = P_1 P_2$  dove  $\deg(P_1) = 1, \deg(P_2) = 2$  irriducibile

③  $Q = P_1 P_2$   $\deg(P_1) = \deg(P_2) = 2$  irriducibili non c'è radice

②  $Q = P_1 P_2$  con  $P_1, P_2$  irriducibili di grado 1

④  $Q = P_1 P_2 P_3$   $\deg(P_1) = \deg(P_2) = 2, \deg(P_3) = 1$  c'è radice

## TEORIA DEI GRUPPI

### GRUPPI

Dato  $G$  insieme  $\neq \emptyset$  con  $*$  operazione binaria su  $G$ , ovvero:  $G \times G \rightarrow G$   
 $(a, b) \rightarrow a * b$ , seleziono un elemento distinto  $e$ .  
 el. neutro

La terna  $G = (G, *, e)$  è un gruppo se:

- non per forza distinti

①  $\forall a, b, c \in G \quad (a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c$  associazività

②  $\forall a \in G \quad a * e = e * a = a$  elemento neutro per l'operazione binaria

③  $\forall a \in G \quad \exists a' \in G$  t.c.  $a * a' = a' * a = e$  inverso per l'op. binaria

add-on: INVERSIONE NEI GRUPPI

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in G \quad & (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \\ & (abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1} \text{ ecc} \\ & (\text{inversi dei singoli, in ordine inverso}) \end{aligned}$$

Inoltre, se

④  $\forall a, b \in G, \quad a * b = b * a$ , allora  $G$  è un gruppo abeliano (o commutativo)

Quindi - come avevamo visto - le prime 4 condizioni di un anello descrivono un gruppo abeliano.

### gruppi in notazione additiva

$(G, +, 0)$  si scrive  $+$  per l'operazione  
e  $0_G$  per l'el. neutro  
si dice in notazione additiva

**OSS:** di solito i gruppi in notazione additiva sono commutativi

In notazione additiva, l'inverso di  $a \in G$   
si chiama opposto e si scrive  $-a$

### gruppi in notazione moltiplicativa

$(G, \cdot, 1)$  si scrive  $\cdot$  per l'operazione  
e  $1_G$  per l'el. neutro  
si dice in notazione moltiplicativa

**OSS:** Per questi gruppi, non è garantita la commutatività.

In notazione moltiplicativa, l'inverso di  $a \in G$  si scrive  $a^{-1}$

ESEMPI  $(A, -, +, 0_A, 1_A)$  Anello

Allora  $(A, +, 0_A)$  gruppo abeliano in nat. additivo

$\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, 0) \quad \mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, 0), \quad \mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, 0)$

o anche  $K = (K, +, 0)$  con  $K$  qualunque campo

ESEMPI  $(A, -, +, 0_A, 1_A)$  Anello

Allora  $A^{\times} = (A^{\times}, \cdot, 1_A)$  gruppo in nat. moltiplicativa  
infatti abbiamo visto

① il prodotto di el. invertibili è invertibile

② il prodotto è associativo

③ se  $a, b \in A^{\times}$  allora  $ab \in A^{\times}$  e  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

inoltre,  $A^{\times}$  è abeliano (se  $A$  è commutativo?)

### def SOTTOGRUPPO

Dato un gruppo  $G$  e un sottoinsieme  $H \subset G$  non vuoto

Si dice che  $H$  è un sottogruppo di  $G$  se:

not.  
multiplicativa  $\forall a, b \in H, \quad$  si ha  $a \cdot b^{-1} \in H$  so che  $\in G$ , ma se  $\in H$ , è sottogruppo

$\forall a, b \in H, \quad$  si ha  $a \cdot b \in H$  not. additivo

Si scrive  $H < G$

OSSERVAZIONE  $H$  è stabilizzato (rispetto al prodotto)

$a \cdot b^{-1} \text{ con } b = a$

• Se  $a \in H, \quad a \cdot a^{-1} = 1_G \in H$

$a \cdot a^{-1} \text{ con } a = 1_G$

• Ma allora,  $\forall b \in H \quad 1_G \cdot b^{-1} \in H$  quindi  $b^{-1} \in H$  e  $1_G = 1_H$

• Infine, se  $a, b \in H, \quad b^{-1} \in H, \quad a \cdot (b^{-1})^{-1} = a \cdot b \in H$

(quindi un sottogruppo  $H$  contiene anche gli inversi e i prodotti dei suoi el.)  
e anche l'el. neutro del gruppo di cui è sottogruppo

### def OMOMORFISMI DI GRUPPI

Dati  $G_1, G_2$  gruppi (in notazione moltiplicativa)

Sia  $f: G_1 \rightarrow G_2$  un'applicazione:

$f$  è un omomorfismo di gruppi se

$$\textcircled{1} f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$$

$$\textcircled{2} \forall a \in G_1, f(a^{-1}) = f(a)^{-1} \quad \begin{matrix} \text{inversione} \\ \text{in } G_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{inversione} \\ \text{in } G_2 \end{matrix} \quad (\text{ma basta solo la } \textcircled{3} - \text{che implica le altre})$$

$$\textcircled{3} \forall a, b \in G_1, f(a \cdot b) = f(a) f(b) \quad \begin{matrix} \text{operazione} \\ \text{di } G_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{operazione} \\ \text{di } G_2 \end{matrix} \quad (\text{in modo più chiaro: } \circ \text{ op. } G_1, \circ \text{ op. } G_2)$$

(l'ordine conta! non si sa se è abeliano)

esercizio: mostrare che  $f: G_1 \rightarrow G_2$  è un omomorfismo  $\iff \forall a, b \in G_1, f(a \cdot b^{-1}) = f(a) f(b)^{-1}$

$\Rightarrow$  supponiamo  $f$  omomorfismo.

$$\text{Allora } f(ab) = f(a)f(b) \quad (\textcircled{3}) \quad \text{quindi } f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1}.$$

$$\text{Ma (per } \textcircled{2} \text{)} f(b^{-1}) = f(b)^{-1}$$

$$\text{Quindi } f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1}$$

$\Leftarrow$  supponiamo  $f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1}$

$$\cdot f(1_{G_1}) = 1_{G_2} \quad \text{dim: pongo } a = b \quad f(b \cdot b^{-1}) = f(b)f(b)^{-1} = 1_{G_2}$$

$$\cdot f(a^{-1}) = f(a)^{-1} \quad \text{dim: pongo } a = 1_{G_1} \quad f(1_{G_1} \cdot b^{-1}) = f(1_{G_1})f(b)^{-1} = 1_{G_2} f(b)^{-1} = f(b)^{-1} \quad \text{per } \textcircled{1}$$

$$\cdot f(a \cdot b) = f(a)f(b) \quad \text{dim: pongo } b = b^{-1} \quad f(a \cdot (b^{-1})^{-1}) = f(a)f(b^{-1})^{-1} = f(a)f((b)^{-1})^{-1} = f(a)f(b) \quad \text{per } \textcircled{2}$$

### def ISOMORFISMO

Sia  $f: G_1 \rightarrow G_2$  omomorfismo di gruppi

Se  $f$  è biiettiva, allora si dice che  $f$  è un isomorfismo

esercizio

$f: G_1 \rightarrow G_2$  isomorfismo. Supponiamo che  $f$  biiettiva  $\iff \exists f^{-1}: G_2 \rightarrow G_1$  biiettiva t.c.  $f \circ f^{-1} = \text{Id}_{G_2}, f^{-1} \circ f = \text{Id}_{G_1}$

DIMOSTRARE CHE  $f^{-1}$  È UN ISOMORFISMO

Inoltre,  $G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3$  con  $f, g$  omom. di gr.

Allora anche  $g \circ f: G_1 \rightarrow G_3$  omom. di gr.

e in più  $f, g$  sono isomorfismi e anche  $g \circ f$ , di inverso  $f^{-1} \circ g^{-1}$

ESEMPI

$$m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} : \forall a, b \in m\mathbb{Z}, a-b \in m\mathbb{Z}$$

$$\exists x, \beta \text{ t.c. } a = xm, b = \beta m$$

$$\text{quindi } a-b = (\alpha-\beta)m \in m\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \quad \text{notazione additiva}$$

con  $f(n) := mn$  applicazione

è un isomorfismo di gruppi

Infatti ①  $f(n-n') = m(n-n') = mn - mn' = f(n) - f(n')$  è omomorfismo di gruppi.

② iniettivo  $f(p) = f(q) \iff pm = qm \iff m(p-q) = 0 \iff p=q$

③ suriettivo  $y \in m\mathbb{Z}$ .  $\exists k \in \mathbb{Z}$  t.c.  $y = mk$ . Ponendo  $x=k$  si ha  $f(x) = mk = y$

(Esempio che mischia le notazioni +, ·)

$G_1 = \mathbb{R}$  con +,  $G_2 = \mathbb{R}_{>0}$  con · notare che  $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{R}^\times : a, b \in \mathbb{R}_{>0} \quad a > 0, b > 0, b^{-1} > 0 \quad ab^{-1} > 0 \quad \text{quindi } ab^{-1} \in \mathbb{R}^\times$

poniamo:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \quad f(x) := e^x$$

$$f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) := \underset{\ln}{\log}(x) \quad e^{\log(\cdot)} = \text{Id}_{\mathbb{R}} \quad \log(e^{\cdot}) = \text{Id}_{\mathbb{R}}$$

Sono due isomorfismi di gruppi, uno l'inverso dell'altro  $f^{-1} = g \quad g^{-1} = f$

$$f(0) = e^0 = 1 = 1_{G_2} \in G_2$$

$$g(1) = 0$$

$$f(-x) = e^{-x} = (e^x)^{-1} \text{ inverso}$$

$$g(y^{-1}) = \log(y^{-1}) = -g(y)$$

$$\begin{aligned} f(x-x') &= e^{x-x'} = e^x e^{-x} \\ &= f(x) f(x')^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(y'y^{-1}) &= g(y') - g(y) \\ &= \log\left(\frac{y'}{y}\right) \end{aligned}$$

es. 2 foglio sett. 4

(iii)  $P = X^3 + X^2 - 6x + 1 \quad Q = X^4 - 2x^3 - 2x - 1$  MCD e Bézout  
con  $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  campo ( $\mathbb{F}_2$ )

$\mathbb{F}_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  dove questi simboli rappresentano le classi corrispondenti in  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$   
posso anche usare altri interi per rappresentare elementi di  $\mathbb{F}_2$ , estraiendoli dalle classi (cls. 8=1)

abbiamo visto che  $\mathbb{F}_2^\times$  è un gruppo (abeliano) in notazione.

Tavola di moltiplicazione in  $\mathbb{F}_2^\times$

•	1	2	3	4	5	6	(lo usiamo per trovare facilmente gli inversi)
1	1	2	3	4	5	6	
2	2	4	6	1	3	5	
3	3	6	2	5	1	4	ogni volta che c'è un 1, i due numeri sono inversi
4	4	1	5	2	6	3	
5	5	3	1	6	4	2	• Ogni riga contiene uno e un solo 1 → ogni el. del gruppo è invertibile di inverso unic. det.
6	6	5	4	3	2	1	

quindi  $P = X^3 + X^2 - 6x + 1 \quad Q = X^4 - 2x^3 - 2x - 1$

ALGO EUCLIDE

$$\begin{array}{r|rrr}
X^4 - 2x^3 & -2x & -1 & X^3 + X^2 + X + 1 \\
X^4 + X^3 + X^2 + X & & & X + 4 \\
\hline
-3x^3 - X^2 + 4x - 1 & & & \\
4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 & & & \\
\hline
2x^2 & + 2 & &
\end{array} \quad \begin{aligned} X^4 - 2x^3 - 2x - 1 &= \underbrace{(X+4)}_{Q} \underbrace{(X^3 + X^2 + X + 1)}_{\text{quoziente}} + \underbrace{2(X^2 + 1)}_{\text{resto}} \\ \deg(2(X^2 + 1)) &= 2 < \deg(P) = 3 \\ \text{mentre } \deg(2(X^2 + 1)) &> \deg(\text{quoziente}) \quad (\text{non sono interi}) \end{aligned}$$

continuiamo: divisione di P per il resto

$$\begin{array}{r|rr}
X^3 + X^2 + X + 1 & 2x^2 + 2 \\
X^3 + X & 4x + 4 \\
\hline
X^2 + 1 & \\
X^2 + 1 & \\
\hline
0 &
\end{array} \quad \begin{aligned} &\text{devo dividere } X^2 + 1 \text{ per } 2x^2 + 2 \\ &\text{ho quindi: } X^2 \text{ e } 2x^2 \rightarrow \text{basta mult.} \\ &\text{per } 2^{-1} = 4 \quad (\text{calcolato nella tavola}) \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{l'ultimo resto non nullo è quindi: } 2x^2 + 2 \\ &\text{ma l'MCD deve essere monico} \rightarrow \text{moltiplico per un invertibile: } 4 \\ &4 \text{ inverso di } 2, \text{ quindi: } X^2 + 1 \text{ è MCD} \end{aligned}$$

• IDENTITÀ DI BÉZOUT

abbiamo  $X^4 - 2x^3 - 2x - 1 = \underbrace{(X+4)}_Q \underbrace{(X^3 + X^2 + X + 1)}_P + \underbrace{2(X^2 + 1)}_{\text{resto}}$

trovare  $\alpha, \beta$  in  $\mathbb{F}_2$  t.c.  $\alpha P + \beta Q = \delta = X^2 + 1$

$$2(X^2 + 1) = Q - (X+4)P \quad \text{l'identità che abbiamo è buona, ma serve eliminare il 2 prima dell'MCD (2 è inv. moltiplichiamo per l'inverso)}$$

$$4 \cdot 2(X^2 + 1) = 4Q - 4(X+4)P$$

$$X^2 + 1 = 4Q + (3x + 5)P$$

## COSTRUZIONI CANONICHE DI UN SOTTOGRUPPO

Note: un gruppo qualsiasi ha due sottogruppi evidenti:

- $\{1_G\}$  • sé stesso

$\otimes$  not. additivo

### Lemma costruzione del kernel / nucleo

Sia  $f: G_1 \rightarrow G_2$  omomorfismo di gruppi

$$H = \left\{ g \in G_1 : f(g) = 1_{G_2} \right\} = f^{-1}(\{1_{G_2}\}) \subset G_1$$

elementi di  $G_1$  che puntano all'el neutro di  $G_2$

è un sottogruppo:  $H < G_1$  si chiama NUCLEO di  $f$  e si scrive  $H = \text{Ker}(f)$

dim:  $a, b \in H$  con  $f(a) = f(b) = 1_{G_2}$

$$f(ab^{-1}) = f(a)f(b^{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} f(a)f(b)^{-1} = 1_{G_2} 1_{G_2}^{-1} = 1_{G_2} \text{ quindi } ab^{-1} \in H$$

(in  $H$  ci sono gli el. che puntano a  $1_{G_2}$ )

### Lemma

Sia  $f: G_1 \rightarrow G_2$  omomorfismo di gruppi

"kernel banale" è banale perché, per def. omomorfismo di gruppi,  $f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$

si ha che  $\text{Ker}(f) = \{1_{G_1}\} \iff f$  è iniettiva

è il più piccolo sottogruppo di  $G_1$ , (HA DETTO CHE METTERÀ QUESTA DOMANDA NELLA)

PROVA IN ITINERE: L'INSIEME VUOTO

NON PUÒ ESSERE UN

GRUPPO

dim

$\implies$  Supponiamo  $\text{Ker}(f) = 1_G$  ( $= \{x \in G_1 : f(x) = 1_{G_2}\}$ )

$$\text{Siano } x, x' \in G_1 \text{ t.c. } f(x) = f(x') \iff \underbrace{f(x)f(x)^{-1}}_{\text{diviso}} = 1_{G_2} \\ = f(x x^{-1}) \quad (\times \text{omomorfismo})$$

$$\iff x(x')^{-1} \in \text{Ker}(f) = \{1_{G_1}\} \text{ quindi } \iff x(x')^{-1} = 1_{G_1}$$

$$\text{ma per } x' \quad \underbrace{x(x')^{-1} x'}_1 = 1_{G_1} x' \iff x' = x \quad f \text{ iniettiva}$$

$\iff$  Supponiamo  $f$  iniettiva

Sia  $x \in \text{Ker}(f)$ . Allora  $f(x) = 1_{G_2}$

Ma  $f$  è un omomorfismo di gruppi, da cui deduco  $f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$

Siccome  $f(x) = f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$  e  $f$  iniettiva, si deve avere  $x = 1_{G_1} \implies \text{Ker}(f) = \{1_{G_1}\}$

• costruzione del SOTTOGRUPPO IMMAGINE

$f: G_1 \rightarrow G_2$  e  $f$  omomorfismo,  $f(G_1) \subset G_2$

$f(G_1) < G_2 = \{y \in G_2 : \exists x \in G_1 \text{ con } f(x) = y\}$  è il sottogruppo immagine.

dim (sottogruppo)

devo dimostrare che se  $y, y' \in f(G_1)$ , allora  $y(y')^{-1} \in f(G_1)$

$\exists x, x' \in G_1$  t.c.  $f(x) = y, f(x') = y'$

$$y(y')^{-1} = f(x)f(x')^{-1} \underset{\text{OMOMORFISMO}}{=} f(xx'^{-1}) = f(z)$$

$$\exists z \in G_1 \text{ t.c. } f(z) = y(y')^{-1} \iff y(y')^{-1} \in f(G_1)$$

• costruzione dei SOTTOGRUPPI CONIUGATI

$G$  gruppo. Scegliamo  $H < G$  e  $g \in G$

$$\text{definisco } H^g := \{g' \in G \text{ t.c. } \exists h \in H \text{ t.c. } g' = g^{-1}hg\} = g^{-1}Hg \quad \begin{array}{l} \text{notazione} \\ \text{semplificata} \end{array}$$

OSSERVAZIONE. se  $G$  abeliano,  $H^g = H \forall g$  ( $g^1 = g^{-1}hg \iff g' = \underbrace{g^{-1}g}_{1}h \iff g' = h$ )

Lemma:  $H^g < G$

In generale  $gH, Hg, Hg^{-1}, g^{-1}H \notin G$

dim dati  $a, b \in H^g$

$$a = g^{-1}a'g \quad \exists a' \in H, \quad b = g^{-1}b'g \quad \exists b' \in H$$

$$\cdot b^{-1} = (g^{-1}b'g)^{-1} = g^{-1}b'^{-1}g \quad \begin{array}{l} \text{inversione in } G: (abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1} \\ \text{perciò } H^g \end{array}$$

$$ab^{-1} = g^{-1}a'g \cdot g^{-1}(b')^{-1}g = g^{-1}\underbrace{a'(b')^{-1}}_{\in H}g \Rightarrow ab^{-1} \in H^g \quad \forall a, b \in H^g \Rightarrow H^g < G$$

dim alternativa

Definiamo, dato  $g \in G$ , un'applicazione  $G \xrightarrow{f_g} G$

osserviamo che  $Hg, f_g$  è un omom di gruppi: (si parla di endomorfismo)

per verificarlo devo mostrare che  $\forall a, b \in G, f(ab^{-1}) = f_g(a) f_g(b^{-1})$

$$f_g(a) f_g(b^{-1}) = g^{-1}a g (g^{-1}b g)^{-1} = g^{-1}a g \cdot g^{-1}b^{-1}(g^{-1})^{-1} = g^{-1}a b^{-1}g = f_g(ab^{-1})$$

Questo dimostra perciò:  $H < G_1$  e se  $G_1 \xrightarrow{f} G_2$  omomorfismo, allora  $f(H) < G_2$

Se  $G_1 = G_2 = G$  e  $f = f_g$  otteniamo  $\forall H < G, f_g(H) < G \quad \begin{array}{l} \text{perciò} \\ f_g(H) = H^g \end{array} \Rightarrow H^g < G$  •

# PERMUTAZIONI

## GRUPPI DI PERMUTAZIONI

elementi chiamati permutazioni

dato  $E$  insieme finito, sia  $S(E) = \{ f: E \rightarrow E : f \text{ biiettiva} \}$

• Su  $S(E)$  esiste l'operazione di composizione di applicazioni:  $E \xrightarrow[f]{\circ} E$ , e se  $f, g \in S(E)$ , allora  $g \circ f \in S(E)$

Inoltre,  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \implies (S(E), \circ, \text{Id}_E)$  è un gruppo.

perché ①  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$   $\circ$  è associativo

②  $f \circ \text{Id} = \text{Id} \circ f = f \quad \forall f \in S(E)$  è neutro

③  $\forall f \in S(E)$  invertibile e  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f \in S(E)$  inverso per  $\circ$

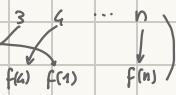
• Sia  $E = \{1, \dots, n\} =: I_n \quad n \geq 1$  allora si scrive  $S_n = S(I_n) = S(E)$

• ogni elemento di  $S_n$ ,  $f \in S_n$  può essere

identificato con un diagramma:



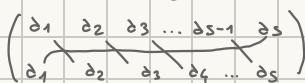
che si può anche rappresentare non "in ordine" con frecce:



## def n-ciclo

Una permutazione del tipo  $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{s-1} \alpha_s \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s \dots \alpha_1)$  con  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in I_n$  ( $s \leq n$ ) distinti,

il ciclo si vede meglio così immo



che fissa (mette a sé stessi) tutti gli elementi che non appartengono a  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$

(e mette quelli di  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$  in maniera ciclica)

es:  $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \alpha_2 \rightarrow \alpha_3, \alpha_3 \rightarrow \alpha_1$

Si chiama s-ciclo e si scrive  $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s)$

Term: dato un ciclo

$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s)$ , la sua orbita

N.B rispetta alla notazione: è  $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_s)$  e rispetta l'ordine del ciclo

è  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$

(insieme di el. permutati tra loro)

si può shiftare:  $(\alpha_s \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{s-1})$  ma non rimescolare:  $\neq (\alpha_1 \alpha_3 \alpha_2 \dots \alpha_s)$

Esempi: in  $S_2$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (12)$  è un 2-ciclo in  $S_3$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123)$  3-ciclo in  $S_5$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (135)$  3-ciclo

TERMINOLOGIA: tutti i 2-cicli si chiamano trasposizioni.

OSS: l'identità è uno 0-ciclo

• tutti i cicli sono permutazioni,

ma esistono permutazioni che non sono cicli

es.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  non è un ciclo

vedo  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 1$  sono "cicliche", ma

le altre non sono fissate:  $3 \rightarrow 6, 6 \rightarrow 3 \dots$

(anche guardando  $3 \rightarrow 6, 6 \rightarrow 3$  stesso discorso:  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 1$  non fissate)

## INVERSIONE

$$\left( \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccccc} 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$= \left( \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \diagup & \diagup & \diagup & \diagup & \diagup & \diagup & \diagup \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right)$$

OSS: nella notazione semplificata di un ciclo  $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s)$ , l'inverso si ottiene leggendo da destra a sinistra:  
 $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s)^{-1} = (\alpha_s \dots \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1)$

## COMPOSIZIONE (possiamo chiamarla anche "prodotto")

$$\sigma = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{array} \right) = (1342) \in S_5, \quad \tau = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) = (15324) \in S_5$$

$$\sigma \circ \tau = \sigma \cdot \tau = \sigma \tau \quad \text{composizione \(\rightarrow\) legge prima } \tau$$

$$\sigma \circ \tau = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \tau | & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ \sigma | & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right) = (543) \neq \Rightarrow S_5 \text{ non è commutativo!}$$

$$\tau \circ \sigma = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) = (1253)$$

OSS: il prodotto di cicli non è necessariamente un ciclo

Descrizione di  $S_3$   $\# S_3 = 6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$  (fattoriale)

$$\left\{ \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \right\} =$$

$$= \{ \text{Id}, (23), (12), (123), (132), (13) \} \quad \text{in } S_3, \text{ ogni permutazione è un s-ciclo con } s = 0, 2, 3$$

- Quel è il più piccolo  $n$  t.c. in  $S_n$  esiste una permutazione che non è un ciclo?

$$n=4. \quad \text{infatti, } (12)(34) = \text{elemento per elemento } (12)(34)(1) = (12)(34)(1) = (12)(1) = 2$$

$$(12)(34)(2) = (12)(2) = 1$$

$$(12)(34)(3) = (12)(4) = 4$$

$$(12)(34)(4) = (12)(3) = 3$$

notazione funzioni: come  $(f \circ g)(x)$

$$\text{quindi: } (12)(34) = \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \text{ non è un ciclo}$$

$$\text{es mostrare che } (123)^{-1} = (132) (= 321\dots) \longrightarrow (123) = (123) \quad (123)^{-1} = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right) = (132)$$

## def CICLI A SUPPORTI DISGIUNTI

Dati due cicli  $(\alpha_1 \dots \alpha_s)$  e  $(\beta_1 \dots \beta_t)$  di  $S_n$ ,

si dice che sono a supporti disgiunti se  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} \cap \{\beta_1, \dots, \beta_t\} = \emptyset$

Più generalmente, dati  $r$  cicli,  $C_1, \dots, C_r$  di  $S_n$  sono a supporti disgiunti

es.  $(12), (34)$  sono a supp. disgi. in  $S_4$

### TEOREMA (decomposizione di permutazioni)

Ogni  $\sigma \in S_n$  può essere decomposto in prodotto di cicli a supporti disgiunti.

Inoltre, tali cicli sono unicamente determinati e commutano fra di loro.

C'è analogia con il TFA.

esempio

x "estrae" cicli:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 3 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

parto da un 8

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 1$

(1247)

Non ha senso  
prendere un el.  
da qui - si parte  
da un altro

prendo il 3

$3 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 3$

(3685)

i due cicli sono disgiunti

$\sigma = (1247)(3685) =$

$= (3685)(1247)$

Sia  $G$  gruppo (in not. moltiplicativa) e  $H \subset G$ .

Introduciamo una relazione  $\sim$  su  $G$ :

$$\text{dati } X, X' \in G \quad X \sim X' \iff X(X')^{-1} \in H$$

Lemma:  $\sim$  è di equivalenza

dim: ① RIFLESSIVITÀ:

$$x \sim x \quad \forall x \in G$$

$$H \subset G \implies 1_G \in H. \text{ Ma } 1_G = xx^{-1} \quad \forall x \in G, \text{ quindi } x \sim x \quad \forall x \in G$$

( $1_H = 1_G$ )

② SIMMETRIA:

$$x \sim x' \implies x'(x')^{-1} \in H$$

$$\text{Ma } \forall h \in H, h^{-1} \in H \quad \begin{array}{l} (\text{prop.}) \\ (\text{sottogr.}) \end{array} \text{ Quindi } (x(x')^{-1})^{-1} = x'x^{-1} \in H$$

③ TRANSITIVITÀ:

$$x \sim x', x' \sim x'' \implies x \sim x'' \quad \forall x, x', x'' \in G$$

Supponiamo  $x \sim x'$  e  $x' \sim x''$ . Allora  $x(x')^{-1}, x'(x'')^{-1} \in H$

$$\text{Se } a, b \in \text{sottogruppo: } x(x')^{-1}x'(x'')^{-1} = x(x'')^{-1} \in H$$

anche il loro prodotto

quoziente su  $\sim$  dove: due el.  $x$  e  $x'$  sono nella stessa classe se  $x(x')^{-1} \in H$

Domanda: È possibile costruire su  $G/\sim$  un'operazione binaria in modo tale che  $G/\sim$  acquisisca una struttura di gruppo?

Talvolta sì, talvolta no. Servono delle condizioni:

• Vorremmo che questa identità fosse valida per la nuova operazione:

$$[x] * [x'] = [x \cdot x'] \quad \begin{array}{l} \text{nuova op.} \\ \text{indipendentemente dai rappresentanti} \\ \text{vecchio op. di } G \end{array}$$

Supponiamo  $x \sim y$  e  $x' \sim y'$ .

$$x \sim y \iff [x] = [y] \iff x(y)^{-1} \in H$$

$$x' \sim y' \iff [x'] = [y'] \iff x'(y')^{-1} \in H$$

è necessario innanzitutto che  $[x \cdot x'] = [y \cdot y']$  ovvero  $xx'(yy)^{-1} \in H$

$$xx'(yy)^{-1} = x\underbrace{x'(y)}_{\text{per ipotesi, } \in H} y^{-1} \quad \begin{array}{l} \text{sappiamo quindi che un pezzo del prodotto } \in H, \\ \text{ci serve una condizione per cui tutto il prodotto } \in H \end{array}$$

def SOTTOGRUPPO NORMALE

$H$  è un sottogruppo normale di  $G$  se,  $\forall x \in G, xH = Hx$

• si scrive  $H \triangleleft G$

$$\text{quindi, per la formula di prima: } xHy^{-1} = \underbrace{xy^{-1}H}_{\text{per ipotesi, } \in H} \quad \text{e } H \text{ per ipotesi, quindi tutto } \in H$$

(quindi  $[x \cdot x'] = [y \cdot y']$ )

Condizioni equivalenti (per  $H$  sottogr. normale)

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} H \triangleleft G & \textcircled{2} \forall g \in G \quad \forall h \in H, \exists h' \in H \text{ t.c. } gh = h'g \\ (\text{gh} = hg) & \textcircled{3} \forall g \in G, H^g = H \end{array}$$

ricordiamo:  $g^{-1}Hg$

OSS:  $G$  abeliano e  $H \subset G \implies H \triangleleft G$  (tutti i sottogruppi di un gruppo abeliano sono normali)

ESEMPI (notevoli):

- $\mathbb{Z}$  gruppo abeliano in not. add. e  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n\mathbb{Z}$  è un sottgr. di  $\mathbb{Z}$ ,  $n\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$  e posso costruire, sempre in not. add.,  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (coincide con la costruzione già vista in aritmetica modulare)
- dato  $G$  qualsiasi, ho  $G \triangleleft G$  ( $\forall x \in G, xG = Gx$  e  $G/G = \{G\}$ )
- anche  $\{1_G\} \triangleleft G$  ( $\forall x \in G, x1_G = 1_Gx = x$  e  $G/\{1_G\} = \{ \{gg\} : g \in G \}$  rel. di ugualanza)

**dim condiz. equivalenti:** basta mostrare che  $(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$  (ordine scelto per facilità di dimostrazione)

- $(3) \Rightarrow (1)$  ipotesi:  $H^g = H$  se  $H^g = H$ ,  $g^{-1}Hg = H \Leftrightarrow \underbrace{gg^{-1}Hg}_{1_H} = gH \Leftrightarrow Hg = gH$   
devo dim:  $gH = Hg$
- $(1) \Rightarrow (2)$  ipotesi:  $gH = Hg$  se  $\forall g$ ,  $gH = \{x \in G : \exists h \in H \text{ con } x = gh\} = Hg = \{y \in G : \exists h' \in H \text{ con } y = h'g\}$   
devo dim:  $gh = h'g$ . allora  $\exists h, h' \in H$  t.c.  $x = gh = h'g$
- $(2) \Rightarrow (3)$  ipotesi:  $gh = h'g$  se  $\forall g \in G, \forall h \in H$  si ha  $gh = h'g \exists h' \in H$ , allora  $\underset{1_G}{\cancel{g^{-1} \Rightarrow}} g^{-1}gh = g^{-1}h'g \Leftrightarrow h = g^{-1}h'g$  quindi,  $\forall g, H^g = H$  ■  
devo dim:  $H^g = H$

### Teorema

Dato  $H \triangleleft G$ ,  $\sim$  di eq.

Allora l'operazione su  $G/\sim$   $[x][x'] = [xx']$  (ben posta)

definisce una struttura di gruppo su  $G/\sim$ .

$[g]$  contiene tutti gli el. x t.c.  $gx^{-1} \in H$

quindi,  $gx^{-1} = h \Leftrightarrow g = hx \Leftrightarrow h^{-1}g = x$

Ma  $H$  è chiuso rispetto all'inverso, quindi  $h^{-1} \in H$ .

Quindi tutti gli el.  $x \in [g]$  si possono scrivere come  $gh$ ,  $h \in H$

mino ragionamento

che poi, per simmetria,

visto che  $x \in [g]$ ,

$g = x \Rightarrow x \in [g]$

quindi  $g^{-1} = h'$

$\Leftrightarrow x = gh'$

e, sostituendo,

$g = h(g^{-1})$

$\Leftrightarrow g = h^{-1}$

$h^{-1} = h^{-1}$

per cui

è potuto fare!

ip so, cool!

• si scrive  $G/\sim = G/H$  gruppo quoziante di  $G$  per  $H$

• osserviamo inoltre  $[g] = gH = Hg$

non è vero che  $gh = hg$

ma  $\forall h \exists h' \text{ t.c. } gh = h'g$  quindi  $gH = Hg$

• l'elemento neutro è  $1_{G/H} = H$

• gli elementi di  $G/H$  (sottoinsiemi di  $G$ ) sono le classi laterali di  $H$

### Lemma:

L'applicazione  $\begin{array}{rcl} G & \xrightarrow{\Pi_H} & G/H \\ g & \mapsto & [g] \end{array}$  è un omomorfismo di gruppi suriettivo

dim:

• la suriettività di  $\Pi_H$  è chiara, perché ogni classe contiene un rappresentante

• inoltre,  $\Pi_H(g(g)^{-1}) = [g(g)^{-1}] = [g][g^{-1}] = \Pi_H(g)\Pi_H(g^{-1})$  ■

### Lemma

Dato  $G_1 \xrightarrow{f} G_2$  omomorfismo di gruppi:

el. di  $G_1$  che puntano a  $1_{G_2}$

$\mapsto [H]$  el. neutro di  $G/\sim$ ,

Allora,  $\underbrace{\text{Ker}(f)}_{=H} \triangleleft G_1$ . Inoltre, se  $H \triangleleft G$ , allora  $H = \text{Ker}(\Pi_H)$  quindi  $H = \text{Ker}(\Pi_H)$

dim:

•  $\text{Ker}(f) \triangleleft G_1$  (so già che  $\triangleleft G_1$ ) Mostriamo che  $\text{Ker}(f)^g = \text{Ker}(f)$  (def. equivalente ③ di  $\triangleleft$ )

prendiamo  $h \in G_1$  t.c.  $f(h) = 1_{G_2}$  ( $\Leftrightarrow h \in \text{Ker}(f)$ )

$$\begin{aligned} \text{Allora si ha che } \forall x \in G_1, f(x^{-1}hx) &= f(x^{-1}) \overset{\text{OMOM.}}{\cancel{f(h)}} f(x) = 1_{G_2} \\ &= f(x)^{-1} f(x) = 1_{G_2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^{-1}hx \in \text{Ker}(f) \quad \forall h \in \text{Ker}(f), \forall x \in G \Leftrightarrow \text{Ker}(f)^x = \text{Ker}(f)$$

• se  $H \triangleleft G_1$ , allora  $H = \text{Ker}(\Pi_H)$

Abbiamo  $H \triangleleft G_1$  e poniamo  $f = \Pi_H$ . Mostriamo che  $H = \text{Ker}(\Pi_H)$ . Ma se  $g \in G_1$  soddisfa  $\Pi_H(g) = 1_{G_2} = H \Leftrightarrow gH = H \Leftrightarrow g \in H$  ■

(Spiegazione mia):

•  $g \in H \Rightarrow g \in \text{Ker}(\Pi_H)$  se  $g \in H$ ,  $gH = H$ . Quindi,  $\Pi_H(g) = H$  ( $[g] = gH$ ). Quindi (visto  $H = 1_{G_2}$ )  $g \in \text{Ker}(\Pi_H)$

•  $g \notin \text{Ker}(\Pi_H) \Rightarrow g \in H$  se  $g \notin \text{Ker}(\Pi_H)$ ,  $\Pi_H(g) = 1_{G_2} = H$ . Quindi,  $gH = H$ .  $gH = H \Leftrightarrow g \in H$

Consideriamo un omomorfismo di gruppi:  $G_1 \rightarrow G_2$ . Per il Teorema di struttura delle applicazioni,

$$\begin{array}{ccc}
 G_1 & \xrightarrow{f} & G_2 \\
 \downarrow \pi & & \downarrow i \\
 G_1/R & \xrightarrow{\psi} & f(G_1) \\
 [g] & \longmapsto & f(g) \\
 \text{(è biettiva: se } [g] = [g'] \text{ allora } f(g) = f(g')\text{)}
 \end{array}$$

$f = i \circ \psi \circ \pi$

dove  $R$  è la relazione:  
 dati  $g, g' \in G_1$ ,  $g R g' \iff f(g) = f(g')$

In più,  $f$  è un omomorfismo di gruppi.

OSSERVIAMO: dati  $g, g' \in G_1$ , allora  $f(g) = f(g') \iff f(g) f(g')^{-1} = 1_{G_2}$

$\Downarrow$

$\Downarrow$  (dividere per  $f(g)$ )

$\Downarrow$  (def.)

ma  $f(g) f(g')^{-1} = f(g(g')^{-1})$  ( $\times$  omom.  
gruppi)

(ricordiamo: el. che partono a  $1_{G_2}$ )

quindi  $f(g(g')^{-1}) = 1_{G_2} \iff g(g')^{-1} \in \text{Ker}(f)$

( $\pi$  omomorfismo,  $\sim$  è  $R$  stessa  
relazione)

$\iff g \sim g'$  ( $\sim$  è definito come, dati  $G$  gr.,  $H \leq G$   
e  $x, x' \in G$ :  $x \sim x' \iff x(x')^{-1} \in H$ )

quindi abbiamo dimostrato che  $R$  e  $\sim$  sono la stessa relazione.

Come abbiamo visto nel Lemma qui

Si ha quindi  $G/R = G/\sim$  che è un gruppo, quindi  $G/R$  gruppo e  $\pi$  omomorfismo di gruppi.

(sappiamo chiaramente che l'identità è un omomorfismo di gruppi).

$\bullet H = \text{Ker}(f)$ . Mostriamo che  $\psi: G_1/H \rightarrow f(G_1)$  :  $\psi(gH) = f(g)$  è un omomorfismo di gruppi.

Vogliamo mostrare che,  $\forall g, g' \in G_1$ , si ha:  $\psi(gH) \psi((g'H)^{-1}) = \psi(g(g')^{-1}H)$

$\Downarrow$  (def.)

$\Downarrow$  (posso "commutare"  $H$  liberamente  
sulla se l'op non è commutativo)

Ma  $\psi(gH(g'H)^{-1}) = \psi(gHH(g')^{-1}) \stackrel{H=H}{=} \psi(gH(g')^{-1}) = \psi(g(g')^{-1}H) = f(g(g')^{-1}) = f(g) f(g')^{-1} = \psi(gH) \psi(g'H)^{-1}$

$\Downarrow$  ( $\psi: [g] \mapsto f(g)$ )

ovvero quello che cercavamo

Abbiamo dimostrato il PRIMO TEOREMA DI ISOMORFISMO PER I GRUPPI:

dato  $f: G_1 \rightarrow G_2$  omomorfismo di gruppi, esso si decompona

in composizione:  $f = \underbrace{i \circ \psi \circ \pi}_{\substack{\text{tutti omomorfismi} \\ \text{di gruppi}}}$

Altre proprietà dei gruppi:

Lemma l'intersezione di sottogruppi è un sottogruppo

Dati  $H_1, \dots, H_n < G$ , allora  $\bigcap_{i=1}^n H_i < G$

dim: Siano  $x, x' \in \bigcap_{i=1}^n H_i$ :

Allora,  $\forall i = 1, \dots, n \quad x(x')^{-1} \in H_i$ , perché  $H_i < G \forall i$

Ma allora  $x(x')^{-1} \in \bigcap_{i=1}^n H_i$ . Quindi si ha  $\bigcap_{i=1}^n H_i < G$

(se appartiene a tutti i sottogruppi, allora appartiene all'intersezione)

Lemma l'unione di sottogruppi non è un sottogruppo

esempio  $H_1 = \{1_G, (12)\}, H_2 = \{1_G, (13)\} < G = S_3$

$H_1 \cup H_2 = \{1_G, (12), (13)\} \subset G$ , ma non  $< G$ .

Infatti  $(12), (13) \in G$  e  $\in H$  ma  $(12)(13) = (1, 3, 2) \notin H_1 \cup H_2$  (non è chiuso rispetto alla sua operazione, o)  
quindi non è un sottogruppo

def SOTTOGRUPPO GENERATO

\*/\*

Consideriamo  $I \subset G$ . Il sottogruppo di  $G$  generato da  $I$  è:

$$\langle I \rangle := \bigcap_{\substack{H \leq G: \\ I \subset H}} H \quad (\text{quindi si prendono tutti i sottogruppi di } G \text{ che contengono } I \text{ e si intersecano})$$

Si chiama anche il "più piccolo sottogruppo di  $G$  che contiene  $I$ "

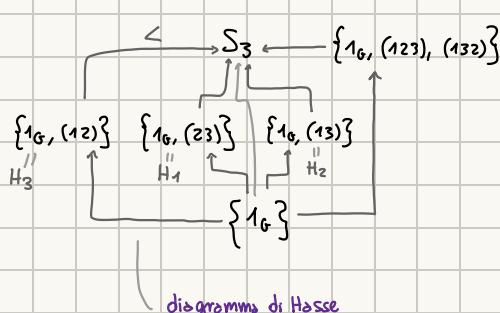
$\langle I \rangle$  è  $< G$  per il lemma per cui l'intersezione di sottogruppi è un sottogruppo.

per un singolo elemento:

• dato  $G$  gruppo (nat. moltiplicativa) e  $g \in G$ ,  $\langle g \rangle = \bigcap_{\substack{H \leq G: \\ g \in H}} H$

esempio

i sottogruppi di  $S_3$  sono:



$$\text{Quindi, } \langle (12) \rangle = \{1_G, (12)\} = H_3$$

$$\langle (13) \rangle = \{1_G, (13)\} = H_2$$

$$\langle (23) \rangle = \{1_G, (23)\} = H_1$$

$$\langle (123) \rangle = \{1_G, (123), (132)\} \cap S_3 = \{1_G, (123), (132)\}$$

$$\langle H_1 \cup H_2 \rangle = S_3 \quad (\text{i prodotti ci sono per chiusura rispetto a o})$$

$$H_1 \cup H_2 = \{1_G, (13), (23), (132), (123), (12)\} = S_3$$

$$(23)(13)(23)$$

### Sottogruppo $g^{\mathbb{Z}}$

- Consideriamo l'insieme  $\{1, g, g^2, \dots, g^{-1}, g^0, \dots\} = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\} = g^{\mathbb{Z}} \subset G$

Allora si ha che  $g^{\mathbb{Z}} \leq G$ . Infatti,  $\forall x, x' \in g^{\mathbb{Z}}, \exists n, n' \in \mathbb{Z}$  t.c.  $x = g^n, x' = g^{n'}$  e  $x(x')^{-1} = g^{n-n'} \in g^{\mathbb{Z}}$

Si ha che  $\langle g \rangle \subset g^{\mathbb{Z}}$ . (perché  $\langle g \rangle$  è un sottogr. quindi è chiuso rispetto a inverso e prodotto, quindi visto che contiene  $g$ , contiene anche  $g^{-1}$  e tutte le potenze generali ( $g^{\mathbb{Z}}$ ))

Dato che  $\langle g \rangle \leq G$ , e  $g \in \langle g \rangle$ ,  $1 = g^0 \in \langle g \rangle$ ,  $g^{-1} \in \langle g \rangle$  e gli altri sono generati dal prodotto di questi ... si ha anche  $g^{\mathbb{Z}} \subset \langle g \rangle$

Lemme  $\langle g \rangle = g^{\mathbb{Z}}$ .

### Lemme SOTTOGRUPPI DI $\mathbb{Z}$

Sia  $G$  un sottogruppo di  $\mathbb{Z}$  (in not. additiva),  
se  $G \neq \{0\}$ , allora  $\exists n \in \mathbb{N}^*$  t.c.  $G = n\mathbb{Z}$

(tutti i sottogruppi di  $\mathbb{Z}$  sono o  $\{0\}$  o  $n\mathbb{Z}$ )

l'el. neutro è sempre un sottogruppo

dim:

Supponiamo  $G \neq \{0\}$ . Allora esiste un più piccolo  $n \in G \cap \mathbb{N}^*$  (principio del minimo)

tale che, preso  $d \in G$  (per div. euclideo)  $d = qn + r$  con  $0 \leq r < n$ .

(impossibile perché  $n$  è il minimo su  $G \cap \mathbb{N}^*$ , ma allo stesso tempo  $r < n$  e  $r \neq 0$ )

Quindi  $r = d - qn$ . Se  $r \neq 0$ , si avrebbe  $r < n$  e  $r \in G \cap \mathbb{N}^*$

contraddizione con la minimalità di  $n$ .

Quindi  $r = 0$ , e  $d \in n\mathbb{Z}$ .

Quindi,  $G \subset n\mathbb{Z}$ . Ma  $G \supset n\mathbb{Z}$ , perciò  $G = n\mathbb{Z}$

perché  
 $G$  è chiuso  
rispetta alla somma,  
quindi contiene tutti gli  $n\mathbb{Z}$  (?)

### Lemme

Se  $G$  è un gruppo finito (in notazione moltiplicativa),

allora,  $\forall g \in G, \exists n > 0$  t.c.  $\langle g \rangle = g^{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

isomorfo a

not. additiva

dim:

$f: \mathbb{Z} \rightarrow G$   
 $n \mapsto g^n \in g^{\mathbb{Z}} = \langle g \rangle$  non può essere iniettivo,  
perché  $\mathbb{Z}$  è infinito e  $G$  è finito

$f$  è omomorfismo perché  $f(n-n') = g^{n-n'} = g^n g^{-n'} = f(n) f(n)^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & G \\ \pi \downarrow & & \uparrow i \\ \mathbb{Z}/\text{Ker}(f) & \xrightarrow{\cong} & f(\mathbb{Z}) = g^{\mathbb{Z}} = \langle g \rangle \end{array} \quad (\text{x teor. iso: } f = i \circ \psi \circ \pi)$$

$\langle \mathbb{Z}, \text{quindi: } 0 \in \{0\}, 0 \in n\mathbb{Z}$ .

Ma se fosse  $\{0\}$ , allora  $\mathbb{Z}/0 \stackrel{1:1}{\cong} \mathbb{Z}$  e  $f$  sarebbe iniettiva (non può esserlo)

-vedi sopra-

Quindi,  $\text{Ker}(f) = n\mathbb{Z} \quad \exists n \in \mathbb{N}^*$

### def ORDINE DI UN ELEMENTO

Sia  $G$  gruppo finito (not. mult.),  $\exists g \in G$ .

Allora  $\{d \in \mathbb{N}^* \text{ t.c. } g^d = 1_G\} \neq \emptyset$  (perché è contenuto in  $\text{Ker}(f)$ )

Si pone  $\text{ord}(g) = \min \{d \in \mathbb{N}^* \text{ t.c. } g^d = 1_G\}$  il minimo numero di volte per cui bisogna moltiplicare  $g$  per se stesso per ottenere  $1_G$

in not. additiva,  $\text{ord}(g) = \min \{d \in \mathbb{N}^* \text{ t.c. } g \cdot d = 0_G\}$

Si ha allora  $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}/\text{ord}(g)\mathbb{Z}$

esempio:  $g = (123) \in S_3 =: G$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & S_3 \\ n & \longmapsto & (123)^n \end{array}$$

$n$	$(123)^n$
0	$1_{S_3}$
1	$(123)$
2	$(132)$
3	$1_{S_3}$
4	$(123)$

$\text{ord}(123) = 3$   
(si eleva al cubo per arrivare a  $1_G$ )

$$\langle (123) \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

### ORDINE DI UN CICLO

Più generalmente, dato un n-ciclo di  $S_n$   $\sigma := (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$

$$\text{ord}(\sigma) = n \quad e \quad \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$



$$\text{quindi } \sigma^i \neq 1_{S_n} \quad \forall i = 1, \dots, n-1$$

Inoltre  $\sigma^n(\alpha_1) = \alpha_1$ . Ma noi possiamo scrivere  $\sigma$  "scalandolo", e trasformare  $\alpha_2$  in  $\alpha_1$ :  $(\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \alpha_1)$

Quindi,  $\sigma^n(\alpha_2) = \alpha_2$ . Più generalmente,  $\sigma^n(\alpha_i) = \alpha_i \quad \forall i = 1 \dots n$

Siccome  $\sigma$  è un ciclo, esso fissa tutti gli el.  $b \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ .

Quindi,  $\sigma^n = 1_{S_n}$ , da cui  $n = \text{ord}(\sigma)$ .

Abbiamo dimostrato

Lemma ORDINE DI UN CICLO

Se  $\sigma$  è un n-ciclo, allora

$$\text{ord}(\sigma) = n \quad e \quad \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

[qui &gt; lezione ha fatto un breve recap - omesso]

**def MINIMO COMUNE MULTIPLO**dati  $m_1, \dots, m_l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ il minimo comune multiplo  $m$  di  $m_1, \dots, m_l$  è l'unico intero  $m \in \mathbb{N}^*$  t.c.

$$\textcircled{1} \quad m_1, \dots, m_l \mid m$$

$$\textcircled{2} \quad \text{se } m \text{ è t.c. } m_1, \dots, m_l \mid m', \text{ allora } m \mid m'$$

Si scrive  $m = \text{MCM}(m_1, \dots, m_l)$  e, per calcolarlo:

$$m_1\mathbb{Z} \cap m_2\mathbb{Z} \cap m_3\mathbb{Z} \cap \dots \cap m_l\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$$

ricordiamo che per l'MCD era lo stesso  
cosa ma con il +  $(m_1\mathbb{Z} + m_2\mathbb{Z} + \dots + m_l\mathbb{Z}) = d\mathbb{Z}$ )

$$\bullet \text{ in più, } \text{MCM}(a, b) = \frac{ab}{\text{MCD}(a, b)}$$

$$\bullet \text{ utilizzando il teorema fond. aritmetico: } a = \prod_p p^{v_p(a)}, \quad b = \prod_p p^{v_p(b)}$$

$$\text{allora } \text{MCM}(a, b) = \prod_p p^{\max(v_p(a), v_p(b))} \quad \text{per l'MCD era min}$$

**CALCOLARE ORD( $\sigma$ )**Come si calcola  $n = \text{ord}(\sigma)$ ? Lo sappiamo se  $\sigma$  è un  $m$ -ciclo:  $\text{ord}(\sigma) = m$ Ricordiamo: Ogni  $\sigma \in S_n$  si decomponga in modo unico in un prodotto di cicli disgiunti  $c_1, \dots, c_s$  che commutano tra loro.Quindi: sia  $\sigma \in S_n$  - lo decomponiamo in prodotto di cicli disgiunti:  $\sigma = c_1 \dots c_s$ Lemma:  $\text{ord}(\sigma) = \text{MCM}(\text{ord}(c_1), \dots, \text{ord}(c_s))$ 

esempio

calcolare  $\text{ord}(\sigma)$ 

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_7 \quad n=7 \rightarrow (\text{se } \in S_n > 7, \text{ gli altri el. sono fissati})$$

① Decomponiamo  $\sigma$  in prodotto di cicli disgiunti

$$= \underbrace{(1 7)}_{\text{ord } 2} \underbrace{(2 4)}_{\text{ord } 2} \underbrace{(5 6 7)}_{\text{ord } 3} \quad ((3) \text{ si può omettere})$$

$$\textcircled{2} \quad \text{ord}(\sigma) = \text{MCM}(2, 2, 3) = 2$$

Metodo alternativo: sfrutta il fatto che  $\text{ord}(\sigma) = \text{min. esponente}^{\textcircled{1}} \text{ a cui elevare } \sigma \text{ per avere l'identità}$ 

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 1_{S_7} \quad (n=7)$$

(3 omesso perché fissato)

Si può vedere anche così  $\sigma^2 = (17)(24)(56)(17)(24)(56) = (17)(24)(56)(56)(24)(17) = 1_{S_7} \quad (n=7)$ 

del tipo  $abcc^{-1}b^{-1}a^{-1} = 1$

(uno delle volte "collassano"  
nell'identità):  $(56)(56) = 1_S$   
 $(17)(24)(24)(17) \text{ ecc.}$ )

Si perciò  $\sigma = 2$  (quindi  $\sigma^2 = 1$ )  
e sic per il "trucco" di leggerlo  
al contrario:  $(17) = (7-1)$

l'inverso di una trasposizione è essa stessa

esercizi:

- trovare  $\alpha, \beta$  t.c.  $(147)(132) \times \beta = 1_G$

$$\alpha = (132)^2 = (132)(132) = (123) \quad \text{oppure} \quad \alpha = \overleftarrow{(132)} = (231) = (123)$$

$$\beta = (147)^2 = (174)$$

- trovare  $\alpha, \beta$  in  $S_7$  t.c.  $(1234)(137) \times \beta = 1_{S_8}$   $\alpha = (137)^2, \beta = (1234)^3$

- $\text{ord}((12)(345)) = 6$      •  $\text{Ord}((12)(245)) = ?$      Non sono a supporto disgiunto.

Rendendosene di supp. disgi. =  $\text{ord}(1245) = 4$

- $\text{ord}((12)(13)(14)) = \text{ord}((1432)) = 4$

**Teorema** (decomp. di permutazione in trasposizioni)

Ogni permutazione si decomponga in prodotto di trasposizioni non necessariamente a supporto disgiunto.

- in generale, una tale fattorizzazione non è unica

Esempio:  $(\alpha_1 \alpha_2)(\alpha_1 \alpha_3)(\alpha_1 \alpha_4) = (\alpha_1 \alpha_4 \alpha_3 \alpha_2)$

$\#\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 4$

**FORMULA** per un n-ciclo

$$\sigma = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = (\alpha_n \alpha_{n-1})(\alpha_n \alpha_{n-2}) \dots (\alpha_n \alpha_1) \quad (\text{ovvero } n-1 \text{ fattori})$$

In realtà  $2 \leq n-1$ , perché posso aggiungere quante identità voglio

Esempio:  $(12345) = (54)(53)(52)(51)$

**Teorema "rinforzato"** - SEGNATURA/SEGNO DI UNA PERMUTAZIONE

Sia  $s$  il numero di trasposizioni in una fattorizzazione di  $\sigma \in S_r$  in prodotto di trasposizioni.

Allora  $s \bmod 2$  è unicamente determinato (anche se  $s$  non è unico)

Visto che  $(\alpha_1 \alpha_2)(\alpha_1 \alpha_2) = 1_S$ , aggiungere una coppia di trasposizioni (uguali) dà lo stesso risultato

Poniamo  $\epsilon_\sigma = (-1)^s \in \mathbb{Z}^\times$  è la segnatura di una permutazione, il segno

$\sigma$  si dice
 

- pari se  $\epsilon = +1$
- dispari se  $\epsilon = -1$

per \*

Nota: se  $\sigma$  n-ciclo,  $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-1}$

Se ne deduce:

**PROPRIETÀ:**  $S_n \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}^\times$  è un omomorfismo di gruppi

(funzione che manda una permutazione al suo segno - ovvero uno dei due invertibili di  $\mathbb{Z}$ : 1, -1)

c'è quindi un diagramma:  $S \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}^\times$

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{Z}^\times \\ \pi \downarrow & \nearrow & \cong \text{ perché } \epsilon(S_r) = \mathbb{Z}^\times \\ S_r & & \end{array}$$

Ker( $\epsilon$ ) contiene tutte le permutazioni che hanno segno pari (elementi di  $S_r$  che puntano a 1) per la funzione  $\epsilon$ . Quindi, questo quoziente divide le permutazioni in due classi: pari e dispari.

**COME CALCOLARE  $\epsilon(\sigma)$**

Metodo meno divertente

- ① Si calcola la fattorizzazione di  $\sigma$  in prod. di cicli disgiunti

$$\sigma = c_1 \dots c_m$$

$$② \epsilon(\sigma) = \epsilon(c_1) \cdot \dots \cdot \epsilon(c_m)$$

- ③ Si usa la formula per cui se  $\varphi$  r-ciclo, allora  $\epsilon(\varphi) = (-1)^{r-1}$

Metodo "adatto ad un venerdì sera"

senza decomporre in prodotto di cicli disgiunti,

calcoliamo la segnatura di  $\sigma$  con un procedimento grafico

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 5 & 8 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Si dispongono i numeri in ordine e si tracciano le frecce che li uniscono (non ci devono essere incroci a 3). Si contano le intersezioni: 15 intersezioni.

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{15} = -1$$



notò: quando conto le intersezioni, in base a come le disegno, avrò risultati diversi.

Ma la classe mod 2 (parità) sarà sempre la stessa, quindi è (o) non sarò inficiato.

es.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$   $E(\sigma) = (-1)^{15} = (-1)^{13} = -1$

• questo stesso esempio, ma con l'altra tecnica:

$$\sigma = (137)(2458)$$

$$E(\sigma) = E(137) \cdot E(2458) = (-1)^2 \cdot (-1)^3 = -1$$

19/11

### PRODOTTO DIRETTO

#### PRODOTTO CARTESIANO DI GRUPPI

dati  $G_1, G_2$  in not. additiva.

$$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) : g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$$

Definiamo su  $G_1 \times G_2$  una struttura di gruppo come segue:

$$(g_1, g_2), (g'_1, g'_2) \in G_1 \times G_2 \quad \text{operazione} +: (g_1, g_2) + (g'_1, g'_2) := (g_1 + g'_1, g_2 + g'_2)$$

• associatività:  $((g_1, g_2) + (g'_1, g'_2)) + (g''_1, g''_2) = (g_1 + g'_1, g_2 + g'_2) + (g''_1, g''_2) = (g_1 + g'_1 + g''_1, g_2 + g'_2 + g''_2) = (g_1, g_2) + ((g'_1, g'_2) + (g''_1, g''_2))$

• el neutro:  $O_{G_1 \times G_2} = (O_{G_1}, O_{G_2})$

•  $G_1 \times G_2$  è abeliano se  $G_1$  e  $G_2$  lo sono.

Questa operazione si estende a  $n$  gruppi  $G_1, \dots, G_n$

Si può costruire  $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n = \{(g_1, g_2, \dots, g_n)\}$  dotato di

struttura di gruppo prodotto cartesiano di  $G_1, \dots, G_n$  (e se  $G_1, \dots, G_n$  abeliani allora  $G_1 \times \dots \times G_n$  abeliano)

esempio  $(\mathbb{R}, +)$

• posso costruire il gruppo  $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$  i cui elementi sono  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  con  $x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$

l'elemento neutro è  $O = (0, \dots, 0)$

"esercizio 19"

**Teorema di Lagrange**

Sia  $G$  gruppo finito.

Sia  $H < G$  ( $\#H < \#G$  perché  $< \Rightarrow \subset$ )

Allora:

$$\#H \mid \#G$$

dim.

Abbiamo su  $G$ , una relazione di equivalenza

associata ad  $H$ :

$$x \sim y \iff xy^{-1} \in H$$



se partiziono qualcosa  
di finito, ho un numero finito di  
partizioni finite a loro volta

Possiamo considerare l'insieme quoziente  $G/\sim$  con  $\#G/\sim < \infty$

Poniamo  $[G:H] = \#G/\sim (= G/H)$

indice di  $H$  in  $G$

Siccome  $G/\sim$  è una partizione di  $G$ ,  $G = \bigsqcup_{c \in G/\sim} c \rightarrow$  quindi,  $\#G = \sum_{c \in G/\sim} \#c$

Claim ①:  $\#c = \#H$

[Se il claim è vero, abbiamo il teorema di Lagrange:

$$\text{infatti, } \#G = \sum_{c \in G/\sim} \#c = \sum_{c \in G/\sim} \#H = \#H \sum_{c \in G/\sim} 1 = \#H \cdot [G:H] \text{ quindi } \#H \mid \#G]$$

quindi  $\#G = \#H \cdot \text{un intero}$   
cardinalità di  $G/\sim$

Quindi, dobbiamo dimostrare che  $\forall c \in G/\sim, \#c = \#H$

Claim ②

$\forall g \in G$ , poniamo  $\psi_g: G \rightarrow G, \psi_g(x) = x \cdot g$  (ben definito perché  $G$  chiuso rispetto al prodotto)

Allora,  $\psi_g$  è una biiezione

N.B.  $\psi_g(1g) = g \quad \forall g \neq 1g$  quindi  $\psi_g$  non è un endomorfismo

• Sappiamo che  $\psi_g$  è invertibile di inverso  $\psi_{g^{-1}}$

Infatti, se  $x \in G, \psi_{g^{-1}}(\psi_g(x)) = \psi_{g^{-1}}(xg^{-1}) = xg^{-1}g = x$  quindi  $\psi_g \circ \psi_{g^{-1}} = \text{Id}_G$

Analogamente,  $\psi_{g^{-1}}(\psi_g(x)) = \psi_{g^{-1}}(xg) = xgg^{-1} = x$  quindi  $\psi_{g^{-1}} \circ \psi_g = \text{Id}_G$

notiamo che, generalmente

In particolare, se  $I \subset G$ , allora  $\#\psi_g(I) = \#I$

(perché  $\psi_g$  è una biiezione)

$\psi_g \circ \psi_{g^{-1}} = \text{Id}_G$  ma questo non ci serve per Lagrange  
(stiamo riservando il gr.  $G$  in modo diverso)

$$\text{e } \psi_{1_G} = \text{Id}_G$$

Quindi, se riusciamo a mostrare che una classe è l'immagine di  $H$  per un  $g$  ben scelto, abbiamo finito.

$(\psi_g(H)) = c \Rightarrow \#H = \#c$ , che è quello che cerchiamo)

Descriviamo una classe  $c$ :

Sia  $x \in c$ . Allora,  $c = \{y : xy^{-1} \in H\}$

visto che  $H < G$ ,  $H$  è chiuso  
per l'inverso, quindi  $h^{-1} = h \exists h \in H$   
quindi  $y = hx$

Se  $y \in c, xy^{-1} \in H$ .

$\exists h \in H \quad \exists h \in H \quad \text{ogni el "y" di } c \text{ si può scrivere}$

$xy^{-1} \in H \iff x = hy \iff y = h^{-1}x \iff y \in Hx \iff c = \psi_x(H)$  come  $y = hx \exists h \in H$ , quindi  $\psi_x(H)$

Abbiamo quindi trovato il  $g$  per cui  $\psi_g(H) = c$ . Quindi,  $\#H = \#c$ , e quindi  $\#G = \sum_c \#c = \#H \cdot [G:H]$  ovvero  $\#H \mid \#G$ .

QUINDI IL TAKEAWAY È: TUTTI I SOTTOGRUPPI DI  $G$  DEVONO AVERE CARDINALITÀ CHE DIVIDE  $\#G$ .

Quindi, per esempio

prendiamo  $S_{12}$ .  $\# S_{12} = 12!$

Grazie al teorema di Lagrange, so che non esiste  $H < S_{12}$  con  $\# H = 13$ , perché  $13 \nmid 12!$

quindi, se  $p$  primo e  $p \mid \# S_{12}$ , allora esiste  $H < S_{12}$  t.c.  $\# H = p$

in particolare,  $p = 2, 3, 5, 7, 11$

Basta prendere un  $p$ -ciclo: se  $\sigma$  è un  $p$ -ciclo,  $\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \Rightarrow \#\langle \sigma \rangle = p$

Più generalmente,  $\forall n \leq 12, \exists H < G : \# H = n$  (si prende  $\sigma_n$ -ciclo)

(ma)

• Sia  $H < S_{12}$ . È vero che  $\# H \leq 12$ ? No! (esistono altri divisori di 12!)

prendiamo  $S \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}^\times$ , e  $H = \text{Ker}(\epsilon)$

per il 1<sup>o</sup> teorema iso:

$$S_{12}/H \cong \mathbb{Z}^\times \Rightarrow \# S_{12}/H = 2 \iff [S_{12} : H] = 2$$

$$12! = \# S_{12} = \# H \cdot 2 \Rightarrow \# H = \frac{12!}{2} \in \mathbb{N}^*$$

(anche logicamente, metà delle perm. saranno dispari e metà pari, quindi  $\# \text{Ker}(\epsilon) = \frac{1}{2} \# S_{12}$ )

• altro esempio

Se  $m \leq n$ , c'è (almeno) un omomorfismo iniettivo  $S_m \xrightarrow{f} S_n$

•  $f(S_m) \subset S_n$  (perché  $m \leq n$ )

$$\# f(S_m) = \# S_m = m! \quad (\text{perché è iniettivo})$$

Infatti  $f$  iniettiva  $\Rightarrow S_m \cong f(S_m)$

Dal 1<sup>o</sup> teorema iso:

$$\begin{array}{ccc} S_m & \xrightarrow{f} & S_n \\ \downarrow & & \uparrow \\ S_m / \{1_{S_m}\} & \xrightarrow{\cong} & f(S_m) \\ & \cong S_m & \end{array}$$

$\text{Ker}(f) = 1_{S_m}$  (l'unico el. di  $S_m$  che punto all'el. neutro di  $S_n \ni 1_{S_m}$ )

Sia  $\tilde{G}_m = \left\{ \sigma \in S_n \text{ t.c. } \begin{array}{l} \sigma(m+1) = m+1 \\ \sigma(m+2) = m+2 \\ \vdots \\ \sigma(n) = n \end{array} \right\} = \left\{ \text{perm. in } S_n \text{ che fissano gli elementi da } m+1 \text{ a } n \text{ (ce ne sono } n-m\text{)} \right\}$

con  $m \leq n$ ,  $f: S_m \hookrightarrow S_n$

$$\sigma \longmapsto \left( \begin{array}{c|c} 1 \dots m & m+1 \dots n \\ \downarrow \sigma & \downarrow \text{id.} \\ 1 \dots m & m+1 \dots n \end{array} \right)$$

Manda gli el.  $1 \dots m$  seguendo  $\sigma$ , e fissa gli altri.

è un omomorfismo di gruppi che soddisfa quanto richiesto e  $f(S_m) = \tilde{G}_m$

## def GRUPPI CICLICI

Sia  $G$  un gruppo, e  $g \in G$  di ordine  $n \geq 1$

Allora,  $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_{n\mathbb{Z}}$  (in not. additiva)

$$H \triangleleft G$$

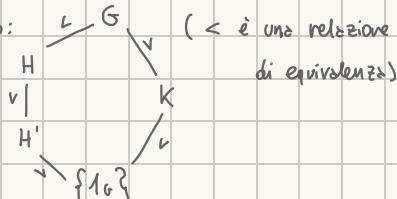
quindi possiamo trovare i sottogruppi attraverso  $\mathbb{Z}_{n\mathbb{Z}}$

sottogruppo  
del sottogruppo

prop:

- $\forall d \mid n, \exists$  sottogruppo  $H_d \triangleleft H$  t.c.  $\#H_d = d$

Quindi, il diagramma di Hasse di un gruppo  $G$  è del tipo:



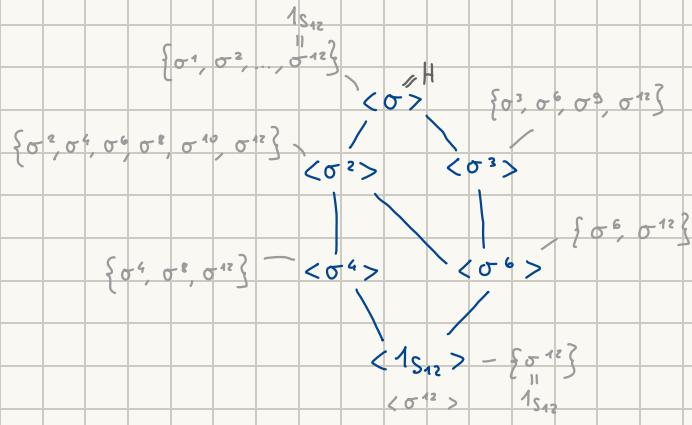
esempio

$$G = S_{12}, \sigma = (1 \ 2 \ 3 \dots 12)$$

$$\text{ord}(\sigma) = 12, \text{ quindi } \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_{12\mathbb{Z}}$$

e  $\forall$  divisore di 12 c'è un unico  $H_d \triangleleft H$  con  $\#H_d = d$  quindi: 1, 2, 3, 4, 6, 12

e il diagramma di Hasse è:



$$\mathbb{Z}_{12\mathbb{Z}} = \langle \bar{1} \rangle$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \frac{2\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_6\mathbb{Z}$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \frac{3\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$$

$$\langle \bar{4} \rangle = \frac{4\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_3\mathbb{Z}$$

$$\frac{2\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} = \{[2] [4] [6] [8] [10] [12]\}$$

$$\frac{3\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} = \{[1] [2] [3] [4] [5] [6]\}$$

perché? Abbiamo  $\sigma$ , una perm. di ordine 12 (quindi  $\sigma^{12} = 1_{S_{12}}$ )

Sappiamo che  $\langle g \rangle$  è ciclico isomorfo a  $\mathbb{Z}_{n\mathbb{Z}}$  (in not. additiva)

Quindi, esiste un sottogruppo  $H_d \triangleleft \langle g \rangle$  con cardinalità  $d$  per ogni divisore di 12.

Per trovarli, possiamo "sviluppare" con  $\mathbb{Z}_{12\mathbb{Z}}$ . Visto che  $\mathbb{Z}_{12\mathbb{Z}}$  è a sua volta ciclico di 12,

sappiamo che i sottogruppi di  $\mathbb{Z}_{12\mathbb{Z}}$  sono generati dalle classi dei divisori di 12, ovvero:

$$[1], [2], [3], [4], [6], [12].$$

$$[1] = \{0, \dots, 11\} \text{ corrisponde a } \langle \sigma \rangle \quad (\text{sottogr. di ordine 12})$$

$$[2] = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \text{ corrisponde a } \langle \sigma^2 \rangle \quad (\text{ordine 6})$$

$$[3] = \{0, 3, 6, 9\} \text{ corr. a } \langle \sigma^3 \rangle \quad (\text{ordine 4})$$

$$[4] = \{0, 4, 8\} \text{ corr. a } \langle \sigma^4 \rangle \quad (\text{ord. 3})$$

$$[6] = \{0, 6\} \text{ corr. a } \langle \sigma^6 \rangle \quad (\text{ord. 2})$$

$$[12] = \{0\} \text{ corr. a } \langle \sigma^{12} \rangle = 1_{S_{12}} \quad (\text{ord. 1})$$

## SPAZI VETTORIALI

Data  $K$  campo,sia  $V$  un insieme  $\neq \emptyset$  munito di:

$$\text{operazione binaria: } V \times V \longrightarrow V$$

$$(a, b) \longmapsto (a+b)$$

su  $K$  (si può scrivere)  
/K

scalari vettori:

$$\text{un'operazione } K \times V \longrightarrow V$$

$$(\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v$$

$V$  ha  
(somma e prodotto scalare)

è commutativa

Si dice che  $V$  è uno spazio vettoriale se:①  $(V, +)$  è un gruppo abeliano (di el. neutro  $0_V$ ,  $\circ \circ$ )

$$\text{② } \alpha \cdot (v+w) = \alpha v + \alpha w \quad \forall \alpha \in K, \forall v, w \in V \quad \begin{matrix} \text{distr. di scalare} \\ \text{su somma di vettori} \end{matrix}$$

$$\text{③ } (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha v + \beta v \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall v \in V \quad \begin{matrix} \text{distr. di vettore} \\ \text{su somma di scalari} \end{matrix}$$

$$\text{④ } (\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v) \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall v \in V \quad \text{Non-proprio-associatività}$$

$$\text{⑤ } 1_K \cdot v = v \quad \forall v \in V \quad \text{elemento neutro molt.}$$

Ma in  $V$  non esiste un el. neutro per la molt., quindi quello di  $K$  funge da neutro per questa operazione

OSS:

la molt. di  $v \in V$  per  $-1 \in K$ , opposto dell'el. neutro per l'add. in  $K$ .

$$(-1) \cdot v = -v$$

è l'opposto per la struttura di gruppo

infatti, dato  $v \in V$ ,

$$\begin{aligned} v + (-1)v &= (1 + (-1))v \\ &= 0 \cdot v = 0 \end{aligned}$$

• per esempio,  $V = K$  è uno spazio vettoriale su  $K$ (perché  $K$  campo quindi  $K$  anello quindi distr., assoc., el. neutro)spazio vett.  $K^n$ • Poniamo  $V = K \times \dots \times K = K^n$  con l'operazione  $+$  di prodotto cartesiano di gruppi(con  $\emptyset$  el. neutro di  $K$ ,  $0_{K^n} = (0, \dots, 0)$  el. neutro di  $K^n$ )Definiamo  $K \times V \rightarrow V$ :

$$\begin{array}{ccc} n \text{ volte} & & n \text{ volte} \\ K \times \underbrace{K \times \dots \times K}_{n \text{ volte}} & \longrightarrow & \underbrace{K \times \dots \times K}_{n \text{ volte}} \\ (\lambda, (v_1, \dots, v_n)) & \longmapsto & (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) \\ & & \lambda(v_1, \dots, v_n) \end{array}$$

questa operazione soddisfa

tutti gli assiomi di spazio vettoriale

distr. a sx:

$$\begin{aligned} \text{② } \lambda \cdot ((v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n)) &= \lambda((v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)) = \\ &= (\lambda(v_1 + w_1), \dots, \lambda(v_n + w_n)) = (\lambda v_1 + \lambda w_1, \dots, \lambda v_n + \lambda w_n) = \\ &= (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) + (\lambda w_1, \dots, \lambda w_n) = \\ &= \lambda(v_1, \dots, v_n) + \lambda(w_1, \dots, w_n) = \lambda v + \lambda w \\ &= \lambda(v + w) \end{aligned}$$

 $V$ , con queste operazioni, è uno spazio vettoriale.

Esempi di spazi vettoriali: (dato K campo)

$$\textcircled{1} \quad K^n, \quad \text{con } n=1, K^1 = K, \quad \text{con } n=0, K^0 = \{\emptyset\}$$

\textcircled{2} matrici con m linee e n colonne a coefficienti in K

$$M_{m,n}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in K \forall i,j \right\} = \left\{ (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} : a_{ij} \in K \forall i,j \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

con operazioni di addizione coefficiente per coefficiente

e moltiplicazione esterna per  $\lambda$  separatamente per ogni coefficiente

$$\lambda = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Note: essenzialmente,  $M_{m,n}(K)$  è una riscrittura di  $K^{m \times n}$  sotto forma di matrice. (come vettori assembly)

per esempio,  $M_{2,3}(K) = K^{2 \times 3}$  è uguale (formalmente si dice) isomorfo a  $K^6$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2,3}(K) \xrightarrow{1:1} (a, b, c, d, e, f) \in K^6$$

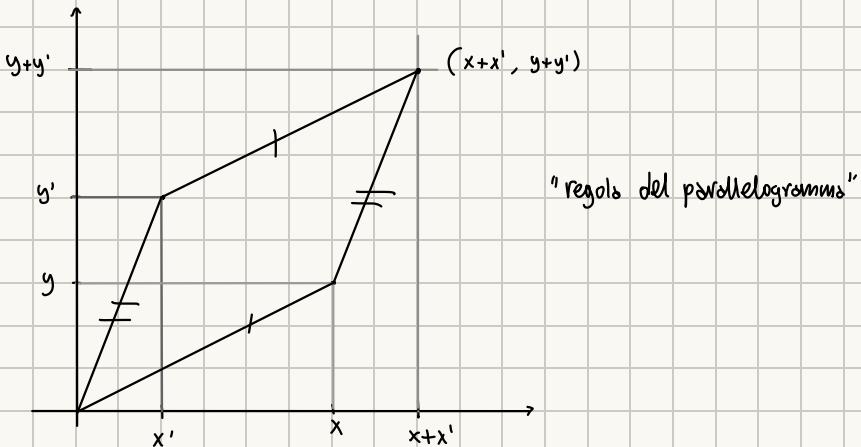
esempio operazioni:

$$A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ij}) \quad \in M_{m,n}(K) = K^{m \times n}$$

$$\cdot A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m,n}(K)$$

$$\cdot \lambda \in K : \lambda A = (\lambda a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$$

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLA SOMMA IN  $\mathbb{R}^2$



\textcircled{3} Polinomi a coefficienti in K campo

$$V = K[x] \quad f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 \dots, \quad g = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 \dots, \quad \lambda \in K$$

$$f+g = f_0 + g_0 + (f_1 + g_1)x + \dots$$

Osservazione: K finito (es.  $K = \mathbb{F}_p$ )

$$\lambda \cdot f = \lambda f_0 + (\lambda f_1)x + (\lambda f_2)x^2 + \dots$$

ma  $K[x]$  infinito

④ lo ha skipato per ora

⑤  $\mathbb{C}$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$

ma si ha anche che  $\mathbb{C}$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$

$$\mathbb{C} = \{x+iy : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{la struttura di gruppo abelliano è nota}$$

$$\begin{aligned} \cdot \lambda \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \\ z = x+iy \end{aligned} \quad \begin{aligned} \lambda \cdot z &= \lambda(x+iy) = (\lambda x) + i(\lambda y) \\ &= \lambda z \end{aligned}$$

def APPLICAZIONE LINEARE (come omom. gruppi)

Dati due spazi vettoriali  $V, V'$  su  $K$ , un'applicazione  $V \xrightarrow{f} V'$  è detta lineare se:

infatti notiamo che se  $\lambda = 1$ , è l'assioma dell'omomorfismo

$$\forall x, y \in V, \forall \lambda \in K, \quad f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

Se  $f$  è biiettiva, si dice isomorfismo.

Se  $f: V \rightarrow V'$  isomorfismo esiste, allora si dice che  $V$  e  $V'$  sono isomorfi e si scrive  $V \cong V'$ .

## def SOTTOSPAZIO VETTORIALE

dato  $V$  spazio vettoriale su  $K$ ,

$W \subset V$ ,  $W \neq \emptyset$  è un sottospazio vettoriale se: (varie definizioni alternative)

1 - è uno spazio vettoriale per le operazioni indotte da  $V$

ovvero se, come gruppi abelliani, si ha:

$$\cdot W \leq V$$

$$\cdot \forall w \in W, \forall \lambda \in K, \lambda \cdot w \in W$$

2 -  $\cdot \forall w, w' \in W$ , si ha  $w + w' \in W$  (stabilità rispetto alla somma)

$$\cdot \forall w \in W, \forall \lambda \in K, \lambda \cdot w \in W$$

3 - Se è stabile per combinazioni lineari nel modo seguente:

$$\cdot \forall w, w' \in W, \forall \lambda, \lambda' \in K, \text{ si ha}$$

$$\lambda w + \lambda' w' \in W$$

4 -  $\forall w_1, \dots, w_n \in V$  e  $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ ,  $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n \in W$

5 -  $\forall w, w' \in W$  e  $\forall \lambda \in K$ ,  $w + \lambda w' \in W$

## def COMBINAZIONE LINEARE

Dati  $v_1, \dots, v_n \in V$ , e  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  allora

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$  è una combinazione lineare di  $v_1, \dots, v_n$  (a coeff.  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ )

• Si dice "Span" o "Sottospazio Generato" da  $v_1, \dots, v_n$   
il sottospazio vettoriale ottenuto dall'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di un insieme di vettori.

- si scrive "Span<sub>K</sub>({v<sub>1</sub>, ..., v<sub>n</sub>})"
- "Vett<sub>K</sub>({v<sub>1</sub>, ..., v<sub>n</sub>})"

esempi:

① Mostrare che  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  non è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ .

prendiamo  $w = (1, 0, 0)$ ,  $w' = (0, 1, 0)$ ,  $\lambda = 1$

$$w + \lambda w' = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0) \quad \text{e} \quad 1^2 + 1^2 + 0^2 = 1 + 1 + 0 = 2 \neq 1 \Rightarrow w + w' \notin S$$

metodo alternativo: ogni sottosp. vettoriale di  $\mathbb{R}^3$  deve contenere  $0 = (0, 0, 0)$ . Qui  $(0, 0, 0) \notin S$

el. neutro  
somma (op. spaz. vett.)

## def SPAN / SOTTOSPAZIO GENERATO

Prendiamo  $V$  sp.vett. su  $K$ . Sono  $v_1, \dots, v_n \in V$ .

Poniamo  $W = \text{Span}_K(\{v_1, \dots, v_n\}) = \{\text{comb. lineari di } v_1, \dots, v_n\} = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\}$

o Vett<sub>K</sub>

è un sottospazio vettoriale.

Per vederlo, consideriamo  $w, w' \in W$ ,  $\lambda \in K$ , e calcoliamo  $w + \lambda w'$

$$\text{Mo} w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, w' = \sum_{i=1}^n \lambda'_i v_i, \text{ quindi } w + \lambda w' = \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i v_i}_{w} + \lambda \sum_{i=1}^n \lambda'_i v_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \lambda \lambda'_i) v_i \Rightarrow w + \lambda w' \in W$$

1° dist.      2° quindi si può scrivere      quindi Span<sub>K</sub> è un sottosp. vett.! per ⑤  
come  $\lambda v$

OSSERVIAMO che  $\text{Span}(\{v_1, \dots, v_n\}) = \bigcap_{\substack{W \subset V \\ \text{sottosp. vett.}, \\ W \supset \{v_1, \dots, v_n\}}} W$  intersez. dei sott. vett.  
che contengono  $\{v_1, \dots, v_n\}$

analogo a sottogruppi generati

quindi è il più piccolo sottospazio vett. di  $W$  che contiene  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

Si chiama anche il sottospazio vettoriale generato da  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Talvolta si scrive  $\langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$

Ma non spesso  
per non confondersi  
con i sottogruppi

**Oss:** L'intersezione tra sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale

**dim:**

dati  $W_1, W_2$  sott. vett.,  $W_1 \cap W_2 \subset V$  (perché  $W_1, W_2 \subset V$  per def. sottosp.vett., e l'intersezione è un sottosp.vett.)

Sia  $v \in W_1 \cap W_2$ , e  $\lambda \in K$ .

Allora,  $\lambda v \in W_i$  perché  $W_i$  è sottosp.vett. di  $V$  (con  $i=1, 2$ )

Quindi,  $\lambda v \in W_1 \cap W_2$

**Oss:** Se  $W$  è sottosp.vett. di  $V$ , allora  $\emptyset \in W$ .

### def VETTORI LINEARMENTE INDEPENDENTI

o l.i. o lin. ind.

Dato  $V$  sp.vett./K,  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti se,

dati  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  t.c.  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \emptyset$

Allora  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_K$

$$\sum_i \lambda_i v_i \quad (\sum_i \lambda_i v_i \text{ con } \lambda_i = 0 \text{ per } v_i)$$

Ovvero, se l'unica combinazione lineare di  $v_1, \dots, v_n$  che è nulla è quella banale (ovvero quella con tutti  $\lambda_i = 0$ )

Al contrario, si dicono linearmente dipendenti se esiste almeno una combinazione lineare nulla non banale.

Come vederlo? esempio.

• in  $\mathbb{R}^2$ ,  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  sono l.i.

quindi, due vett. sono l.d. se uno si può scrivere in funzione dell'altro (come multiplo scalare)

$$\text{es } v_1 = 2v_2$$

$$\Leftrightarrow v_1 - 2v_2 = \emptyset$$

Consideriamo una comb. lin.  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \emptyset$

$$\text{ovvero } \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \emptyset \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \emptyset \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \emptyset$$

molt. scalare

somma  
(vett.)

costruiamo il sistema lineare che ha  $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$  come soluzioni (si può direttamente mettere i vettori a sistema)

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2(\lambda_1 + 2\lambda_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \iff \lambda_1 = -2\lambda_2 \quad \text{quindi: } \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

si  
sottrae termine  
a termine

**Oss:** se ho  $m$  vettori  $v_1, \dots, v_m \in K^n$  e se  $m > n$ ,  
allora  $v_1, \dots, v_m$  sono sempre l. d.

es.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  sono  $3 > 2$  vettori in  $\mathbb{R}^2$ , e sono quindi l. d.

**Oss:** Dato  $f: V \xrightarrow{\cong} V'$ ,  $v_1, \dots, v_n$  sono l.i. se  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  sono l.i.  
per esempio,  $M_{m,n}(K) \cong K^{m \times n}$  può essere utile

esercizi

① notare che  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

② Consideriamo  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$   
uno multiplo dell'altro

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ l.i.}$$

$$\text{si vede che } 2v_1 - v_2 + 0v_3 = \emptyset$$

def MATRICE TRIANGOLARE =  $M_n$  - un pedice solo indica righe = # colonne

una matrice  $M \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

è detta triangolare superiore se si può scrivere come

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \dots & M_{1n-1} & M_{1n} \\ 0 & M_{22} & M_{23} & \dots & M_{2n-1} & M_{2n} \\ 0 & 0 & M_{33} & \dots & M_{3n-1} & M_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{4n-1} & M_{4n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{n-1,n-1} & M_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & M_{nn} \end{pmatrix}$$

(invece, una triangolare inferiore sarebbe così:  $\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ m & m & 0 & 0 \\ m & m & m & 0 \\ m & m & m & m \end{pmatrix}$ )

(con gli zeri in alto)

diagonale della

matrice  $(m_{ij})$  con  $i=j$

esempio:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- le colonne e le righe di  $M$ , viste come vettori di  $\mathbb{R}^n$ , sono l.i.  $\iff m_{11}, m_{22}, \dots, m_{nn}$  (coeff. diag) sono tutti non nulli

esempio:

le colonne della matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  sono l.d.  $\iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  sono l.d.

(gli zeri non influenzano)

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  l.d. perché

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 \end{cases} \iff \lambda_2 = -2\lambda_3 \quad \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \end{cases} \quad \text{se pongo } \lambda_3 = 1 \text{ allora} \\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, -2, 1) \neq (0, 0, 0)$$

e si ottiene la comb. nulla, ma non banale

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esercizi (x casi)

$$\textcircled{1} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

in  $\mathbb{R}^3$ ,  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dimostrare che  $e_1, \dots, e_n$  sono l.i. e che, considerando inoltre  $e_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ , allora  $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$  sono l.d.  
e caratterizzare tutte le comb. lin. nulle

\textcircled{2} \textcircled{3}  $V = M_n(K)$ , mostrare che le matrici

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad 1 \leq i, j \leq n \quad \text{tutti zeroi} \quad \text{Matr. } n \times n$$

sono l.i.

$$\textcircled{4} \quad \text{Mostrare che } (e_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \text{ e } f: \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ sono l.d.} \quad \text{tutti uno}$$

## DIVERSI MODI DI RAPPRESENTARE UNA MATRICE

$A \in M_{m,n}(K)$

$$\cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\cdot A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \text{ con } A_i: i\text{-esima riga di } A$$

$$\cdot A = (A^1 \dots A^n) \text{ con } A^j: j\text{-esima colonna di } A$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \quad A_1 = (\text{dot}) \quad A_2 = (\text{def}), \quad A^1 = \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

## PRODOTTO TRA MATRICI

prodotto scalare di una matrice linea e una matrice colonna

$$U = (v_1, \dots, v_n) \in M_{1,n}(K), \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$$

$$\langle U, V \rangle = \sum_{i=1}^n U_i V_i = U_1 V_1 + \dots + U_n V_n$$

con questo prodotto scalare definiamo un'operazione:  $M_{m,K}(K) \times \underbrace{M_{K,n}(K)}_{= \rightarrow} \rightarrow M_{m,n}(K)$

$$\text{dove } (A, B) \mapsto A \cdot B = \langle A_i, B^j \rangle_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\overbrace{M_{1,K}(K)}^{A_1} \overbrace{\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}}^B \underbrace{(B^1 \dots B^n)}_{M_{K,1}(K)} \quad \text{è un'operazione associativa e distributiva}$$

esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2,3}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3,2}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \text{linea 1 } A \cdot \text{colonna 1 } B & \text{linea 1 } A \cdot \text{colonna 2 } B \\ \text{linea 2 } A \cdot \text{col. 1 } B & \text{linea 2 } A \cdot \text{col. 2 } B \end{pmatrix}$$

$$\text{ovvero } B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 & 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

esercizio

• calcolare  $B \cdot A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 & 2 \cdot 3 + 5 \cdot 6 \\ 3 \cdot 1 + 6 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 & 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 23 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{pmatrix}$$

MATRICE IDENTITÀ  $1_n, \text{Id}_n \in M_n(K)$ in  $M_n(K)$ , la matrice

$$1_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

tutti zeri e  
diagonale di uno

svolge il ruolo di elemento neutro per il prodotto righe-colonne tra matrici

es. in  $M_2$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

o in  $M_3$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**def MATRICI INVERTIBILI**Una matrice  $A \in M_n(K)$  è invertibile se  $\exists A' \in M_n$  t.c.  $A \cdot A' = A' \cdot A = 1_n$ 

$$GL_n(K) := \{A \in M_n(K) : A \text{ invertibile}\}$$

GRUPPO LINEARE GENERALE

da Wikipedia: è un gruppo moltiplicativo  
(prodotto matriciale)**MATRICI  $2 \times 2$** Notiamo che  $M_2(K)$ , dotato delle operazioni di  $+$ ,  $\cdot$ , con el. neutri:  $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 

è un anello unitario (non commutativo)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**def determinante di una matrice  $2 \times 2$** 

data  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$ ,  $\det(A) := ad - bc \in K$

**matrici  $2 \times 2$  invertibili (Lemma)**

si scrive anche:

 $A \in M_2(K)$  è invertibile per la moltiplicazione linee per colonne

$$\iff \det(A) \neq 0 \quad (\iff \det(A) \in K^\times)$$

$$A \in GL_2(K), \quad A \in (M_2(K))^\times$$

di inverso \*

$$(A \text{ invertibile} \iff \exists A' \in M_2 \text{ t.c. } A \cdot A' = A' \cdot A = 1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

dim:

$$\textcircled{1} \quad \det(A) \neq 0 \implies A \in GL_2(K)$$

Poniamo  $A' = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in M_2$   
 $\neq 0$  per ip.

$$\text{Calcoliamo } AA' = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Id}_2$$

$$\text{e } A'A = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Id}_2$$

prod.  
scolare colonna.

Sappiamo quindi che  $A' = A^{-1}$

Lemmo: dati  $A, B \in M_2(K)$  non lo dimostriamo  
allora  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

②  $A \in GL_2(K) \implies \det(A) \neq 0$

$$A \in M_2(K)^{\times} \iff \exists A' \in M_2(K)^{\times} \text{ t.c. } AA' = A'A = I_2$$

Calcoliamo i determinanti:  $\det(AA') = \det(A'A) = 1 \neq 0$   
 $\det(A) \det(A')$  || lemma ||  $\det(A') \det(A)$   
 $\implies \det(A), \det(A') \neq 0$  ( $K$  non ha divisori di 0) ■

notiamo che  $\det(A') = \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$   
in particolare,  $\det: M_2(K)^{\times} \longrightarrow K^{\times}$  è un omomorfismo di gruppi

note:  $GL_2(\mathbb{R})$  non è abeliano:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$  e  $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

## Esercizio

$$M_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2^4 = \mathbb{F} \times \mathbb{F} \times \mathbb{F} \times \mathbb{F}$$

di cardinalità  $2^4 = 16$

liste completa degli el. di  $M_2(\mathbb{F}_2)$  (con  $1 = [1], 2 = [2]$ )

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Mostrare che  
 $GL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$

$$\square \in GL_2(\mathbb{F})$$

SPAZIO

SVOLGIMENTO

FUTURO

## SISTEMI LINEARI

Dato un campo  $K$ , un sistema lineare di  $m$  equazioni e  $n$  indeterminati a coeff. in  $K$

è un sistema di equazioni del tipo:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = b_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

Coeffienti  $\in K$

Termini noti / costanti  $\in K$

Risolvere un sistema significa descrivere l'insieme di tutti i vettori

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \text{ tali che tutte le equazioni sono soddisfatte simultaneamente}$$

• Un sistema lineare  $(*)$  si dice compatibile se il sottoinsieme  $\text{Sol}(*)$  di  $K^n$  delle sue soluzioni è non vuoto.

Altrimenti, si dice incompatibile.

es.  $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$  è incompatibile       $\begin{cases} x_1 = 0 \end{cases}$  è compatibile, con  $\text{Sol} = \{(0)\} \subset K^1$   
 $(1 \neq 0 \text{ in ogni campo})$

Per quanto riguarda i sistemi lineari, i seguenti problemi sono importanti:

- ① Decidere se un sistema è compatibile
- ② Descrivere tutte le soluzioni nel caso compatibile
- ③ Nel caso compatibile, descrivere l'insieme delle soluzioni attraverso un insieme di "parametri minimi"

## ESPRESSIONE MATRICIALE DI UN SISTEMA LINEARE SU $K$

Il sistema  $(*)$  si può riscrivere alternativamente nel modo seguente

matrice dei coeff.  
 $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K) , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K) , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} \langle A_1, X \rangle \\ \langle A_2, X \rangle \\ \vdots \\ \langle A_m, X \rangle \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K)$$

prodotto matriciale linea · colonna  
 da ogni linea di  $A$  (coeff.  $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}$ )  
 per l'unica colonna di  $X$

quindi il sistema lineare  $(*)$  può essere  
 riformulato in modo compatto attraverso  
 l'equazione in matrici:

$$A \cdot X = b$$

esempio

dati  $A \in GL_m(K)$ ,  $b \in M_{m,1}(K)$ ,

il sistema  $(*) A\mathbf{x} = b$  è sempre compatibile e ammette un'unica soluzione  $\mathbf{x}$ .

Infatti, sia  $A^{-1}$  l'inverso di  $A$ . Allora,  $\mathbf{x} \in M_{m,1}(K)$  è soluzione di  $(*) \iff A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}b \iff \mathbf{x} = b$

Quindi,  $\text{Sol}(\star) = \{(b)\}$ .

### MATRICE COMPLETA ASSOCIATA A UN SISTEMA LINEARE

Consideriamo un sistema lineare:

$$(*) = A\mathbf{x} = b$$

giustapposizione di  $b$  ad  $A$

tutti i suoi dati sono contenuti nella matrice:  $(A|b) \in M_{m,n+1}(K)$

matrice completa del sistema

• se  $b = \emptyset$  il sistema è omogeneo

altrimenti, è non omogeneo

OSS:  $A\mathbf{x} = b \iff x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n = b$

esemp.

$\iff b$  è combinazione lineare di  $A^1, \dots, A^n$

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad (K = \mathbb{R})$$

$\iff b \in \text{Span}_K(A^1, \dots, A^n)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{quindi } x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

dire che  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$  è soluzione di  $(*)$  significa

che  $x_1 A^1 + x_2 A^2 + x_3 A^3 + x_4 A^4 = b$

ovvero  $(*)$  è compatibile  $\iff b \in \text{Span}_{\mathbb{R}}(A^1, A^2, A^3, A^4)$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 5 \end{cases} \iff x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

questo sistema è compatibile  $\iff \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$\text{il che è vero, infatti } \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 5 \end{cases} \iff x_1 = 5 - x_3 \quad \begin{cases} 10 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 = 5 - x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 9 - x_3 \\ x_1 = 5 - x_3 \end{cases}$$

ammette soluzioni, e.s.  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

## STRUTTURA DELL'INSIEME DI SOLUZIONI DI UN SISTEMA LINEARE

Consideriamo il sistema  $Ax = b$  (\*) con  $A \in M_{m,n}(K)$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$ ,  $b \in M_{m,1}(K)$

### NOTAZIONE

Se (\*) è incompatibile, poniamo  $\text{Sol}(A|b) = \emptyset$

Se (\*) è compatibile, poniamo  $\text{Sol}(A|b) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \text{ t.c. } x \text{ è sol. di } (*) \right\}$

### Proposizione

$\text{Sol}(A|b)$  è un sottospazio vettoriale di  $K^n \iff b = 0$

(sappiamo che sott.vett.  $\implies$  sp.vett.  $\implies$  gruppo, e non può essere un gruppo se non ha l'elemento neutro  $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ )

e non può avere l'el. neutro  $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  se  $b \neq 0$ , perché  $\alpha_1 0 + \alpha_2 0 + \dots + \alpha_n 0$  non può essere  $\neq 0$

(se  $0$  è tra le sol,  $b = 0$  per forza)

### dim

- Se  $b \neq 0$ , visto che  $\text{Sol}(A|b) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ t.c. } A^1 x_1 + A^2 x_2 + \dots + A^n x_n = b \right\} \not\ni \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ , e  $\text{Sol}(A|b)$  non è s.v. di  $K^n$ .
- Supponiamo quindi che  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ .

Mostriamo che  $\text{Sol}(A|0)$  è un s.v. di  $K^n$ .

Prendiamo  $X, X' \in \text{Sol}(A|0)$  e  $\alpha, \alpha' \in K$ . Devo mostrare che  $\alpha X + \alpha' X' \in \text{Sol}(A|0)$

p.80  
def ③ sottosp. vett.  
stabilità per comb. lineari

$$X \in \text{Sol}(A|0) \iff AX = 0 \quad \& \quad X' \in \text{Sol}(A|0) \iff AX' = 0$$

$$A(\alpha X + \alpha' X') = \alpha A X + \alpha' A X' = \alpha \cdot 0 + \alpha' \cdot 0 = 0 \implies \alpha X + \alpha' X' \in \text{Sol}(A|0)$$

prodotto scalare  
è commutativo

**Teorema**

Supponiamo di avere un sistema

$$(*) \quad AX = b, \quad A \in M_{m,n}(K), \quad b \in M_{m,1}(K), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$$

Supponiamo inoltre che  $(*)$  sia compatibile ( $\text{Sol}(A|b) \neq \emptyset$ )  $\hookrightarrow K^m$   
 (cioè è equivalente a  $b \in \text{Span}_K(A^1, \dots, A^n) \subset M_{m,1}(K)$ )

Sia  $x_0 \in \text{Sol}(A|b)$ . Allora,

$$\text{Sol}(A|b) = x_0 + \text{Sol}(A|\emptyset)$$

struttura simile al CRT

dim

Sia  $X \in \text{Sol}(A|b)$ . Allora,  $X = X - x_0 + x_0$  ovvero  $X = \underbrace{x_0}_{\substack{\text{così ho} \\ x_0 + \text{Sol}(A|\emptyset)}} + \underbrace{X - x_0}_{\substack{\text{ovvero} \\ X - x_0 \in \text{Sol}(A|\emptyset)}}$

① Per mostrare che  $\text{Sol}(A|b) \subset x_0 + \text{Sol}(A|\emptyset)$ , basta verificare che  $X - x_0 \in \text{Sol}(A|\emptyset)$ , ovvero che  $A(X - x_0) = \emptyset$

Noi sappiamo che  $AX = b$  e che  $AX_0 = b \Rightarrow \underbrace{AX - AX_0}_{\substack{b-b \\ A(X - x_0)}} = \emptyset \Rightarrow X - x_0 \in \text{Sol}(A|\emptyset)$  mostrato  $\subset$

② Mostriamo adesso che  $\forall y \in \text{Sol}(A|\emptyset)$ ,  $x_0 + y \in \text{Sol}(A|b)$

Dico calcolare  $A(x_0 + y) = \underbrace{Ax_0}_{\substack{\text{perché} \\ x_0 \in \text{Sol}(A|b)}} + \underbrace{Ay}_{\substack{\emptyset \\ perciò \\ y \in \text{Sol}(A|\emptyset)}} = b + \emptyset = b \Rightarrow x_0 + \text{Sol}(A|\emptyset) \subset \text{Sol}(A|b)$  mostrato  $\subset$

Quindi,  $\text{Sol}(A|b) = x_0 + \text{Sol}(A|\emptyset)$  ■

esempio

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 4 \\ x_3 = 5 \end{array} \right. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

noto che  $x_3 = 5$  - sostituisco "a cascata"

$x_3 = 5, \quad x_2 = 9, \quad x_1 = -32$

$$\text{Sol}(*) = \left\{ \begin{pmatrix} -32 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

equivalentemente, grazie al teorema precedente, posso scrivere

$$\text{Sol}(A|b) = x_0 + \text{Sol}(A|\emptyset) = \begin{pmatrix} -32 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset M_{3,1}(\mathbb{R})$$

### ALGORITMO DI GAUSS

Introduciamo una relazione sulle matrici complete di  $M_{m,n+1}(K)$   
 ↴  
 n indet. e b giù l'opposto

$M, M' \in M_{m,n+1}(K) \quad M \sim M' \iff \text{Sol}(M) = \text{Sol}(M')$   
 ↴  
 abbastanza ovvio (l'ugualanza è di equiv)  
 è una relazione di equivalenza

$$AX = b \rightsquigarrow M(A|b)$$

Ideas di Gauss: usare un insieme "semplice" di trasformazioni su  $M_{m,n+1}(K)$  che lasciano invarienti le classi  $\sim$  di equivalenza  
 (ogni classe ha un rapp. unico matrice "a gradini", le cui soluzioni si vedono subito)

operazioni elementari:

- ① PERMUTARE LE RIGHE ↴ non nullo
- ② MOLTIPLICARE UN'EQ DEL SISTEMA PER UNO SCALARE  $\lambda \in K^*$  ↴ una riga qualsiasi
- ③ SOSTITUIRE UNA RIGA CON SE STESSA + UN MULTIPLO SCALARE DI UN'ALTRA RIGA ↴ somma vett.  
 ↴ es. 3a riga  $\leftarrow 2 \cdot 2a$  riga)

Gauss ha mostrato che, operando con un numero finito

di operazioni del tipo ①, ②, ③, se ne ottiene un'altra,  $M'$ , con  $M \sim M'$

più sinteticamente

Date due matrici  $M, M' \in M_{m,n+1}(K)$ , scriviamo

↪ simbolo scelto da Perron (↪asymp su LateX)

$M \asymp M' \iff M'$  si può ottenere da  $M$  attraverso un numero finito di operazioni ①, ②, ③  
 ↴ è una rel. di equiv.

### Teorema

$M \asymp M' \implies M \sim M'$  (non vale il contrario - è possibile che due matrici unrelated abbiano le stesse soluzioni)

esempio:

I sistemi lineari associati alle seguenti matrici ammettono lo stesso insieme di soluzioni:

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_3 \xrightarrow{2} \frac{1}{2}R_3 \\ R_2 \xrightarrow{3} R_2 - R_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_3 \xrightarrow{3} R_3 - R_1 \\ -1 \cdot R_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{questa riga è una tautologia } (0=0) \\ \text{ma non la tolgo} \\ \text{perché siamo in } M_{3,4}(\mathbb{R})}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\substack{R_1 \xrightarrow{3} R_1 - R_2}} \end{array}$$

↪ gradini ridotto (definito dopo)

e per il teorema,  $\text{Sol}\left(\begin{array}{l} x+2z=1 \\ y-z=1 \end{array}\right) = \text{Sol}(M) = \mathcal{E}$  ↴ soluzione sistema om. associata a  $\text{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  (sottosp. vett. generato dalle sol. dell'omogeneo associato)

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ t.c. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

↪ riscritto il sistema

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ y-z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-2z \\ y=1+z \end{cases}$$

↪ qui (al posto di  $z = \dots$ ) c'è  $z = 0$ , quindi la sostituiamo con un'altra tautologia ( $z=z$ )  $\left( \begin{array}{c} \vdots \\ z \\ \vdots \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{array} \right) + z \left( \begin{array}{c} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{array} \right)$

### def MATRICE A GRADINI

$$\left( \begin{array}{cccc|ccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & * & * \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

pivot

caso "estremi"

Non devono per forza esserci tutti zeri in fondo

triang. sup. con 1 sulle diag.

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & * \end{array} \right)$$

matrice di zeri:

$$\left( \begin{array}{c} \text{circle with diagonal line} \end{array} \right)$$

- tra una riga e l'altra, l'uno deve essere almeno sulla colonna successiva al precedente

(cioè,  $\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$  No,  $\begin{matrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$  Sì,  $\begin{matrix} 0 & 1 & ** \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$  Sì)

Più formalmente,  $A$  è a gradini se:

- ①  $A_{ij} = 0 \Rightarrow A_{jh} = 0 \quad \forall j > i$
- ② Se  $A_{ii} \neq 0$ , allora il primo coeff. non nullo (pivot) è un 1
- ③ Se il pivot della riga  $i$  appare nella colonna  $j$ , allora il pivot della riga  $i+1$  appare nella colonna  $h > j$

### Teorema ALGORITMO DI GAUSS

$\forall M \in M_{m,n+1}(K), \exists \Gamma \in M_{m,n+1}(K)$  t.c.  $M \xrightarrow{\sim} \Gamma$

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow -R_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{1}{3}R_3} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{a gradini}}$$

### def MATRICE A GRADINI RIDOTTA

$$\left( \begin{array}{cccc|ccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \dots & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & & & & & & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \end{array} \right)$$

è una matrice a gradini t.c.

- ④ dato un pivot di modo che

$$a_{ij} = 1, \text{ allora } \forall k \in \{1, \dots, i-1\}, a_{kj} = 0$$

(sopra ogni pivot ci sono solo zeri)

### ALGORITMO "RINFORZATO"

$\forall M \in M_{m,n+1}(K), \exists ! \Gamma \in M_{m,n+1}(K)$  a gradini ridotta t.c.  $M \xrightarrow{\sim} \Gamma$

continuiamo l'esempio di prima

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + 2R_3} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{a gradini ridotta}}$$

$$\text{Sol}(M) = \text{Sol} \left( \begin{pmatrix} x & -z & 0 \\ y & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \\ t & -2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ t.c. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \text{Span}_{\mathbb{R}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

domanda:  $\text{Sol}(M) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \text{Span}_{\mathbb{R}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  ? Si, perché  $x_0$  soluzione particolare non è unico  
 è sol part.:  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = X - x_0 \in \text{Sol}(A|b)$

esercizio

$$\in M_{3,5+1} \quad \cup \quad \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \cup \quad \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array} \right) \quad \cup \quad \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array} \right) \quad \cup \quad \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array} \right) \rightarrow \text{gradini ridotti}$$

$R_3 \mapsto \frac{1}{2}R_3$   
Switch tra  $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array} \right)$$

Vediamo da qui che quelle tre righe "rappresentano"  $x_3, x_4, x_5$  quindi i valori

(in un sistema avremmo)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = \frac{1}{2} \\ x_4 = 0 \\ x_5 = \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$Sol(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \text{Span}_{\mathbb{R}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

perché? invece,  $\text{Span}_{\mathbb{R}}$  viene dall'omogeneo associato, in cui  $X_3, X_4, X_5$  sono invece "vincolati" a 0

- le uniche "libere" (tutte le cui combinazioni formano le soluzioni dell'omogeneo) sono  $X_1, X_2$  per questo,  $\text{Span}_{\mathbb{R}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  qui sono "1"

4/12

esercizio

② dire se il seguente sistema è compatibile e trovare tutte le soluzioni ( $K = \mathbb{R}$ )

Soluzioni: matrice colonna  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  t.c. le equazioni in (\*) siano simultaneamente soddisfatte

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y - 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ x + y + z = -2 \end{array} \right.$$

① trascriviamo in matrici complete

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

② lo trasformiamo in forma a gradini (+ ridotta) con l'algoritmo di Gauss

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad \cup \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad \cup \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad \cup \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$R_1 \mapsto R_1 - 2R_3$        $R_1 \mapsto R_1 - R_2$        $R_1 \mapsto -\frac{1}{3}R_1$

posso anche fare una m. a gradini: "al contrario" e poi permutare le righe

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$R_1 \leftrightarrow R_3$

è a gradini, ora va ridotta.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow Sol(*) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$R_2 \mapsto R_2 + R_3$$

$$R_1 \mapsto R_1 - R_3$$

Si possono fare due passaggi insieme, ma occhio a non operare sulle stesse righe

perché le sol. dell'omogeneo sono 0)

③ interpretiamo  $z$  come un parametro invece che un'indeterminata  
(decido io il valore)

$$(***) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y - 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ x + y + z = -2 \end{array} \right.$$

determinare l'insieme  $E$  dei valori del parametro  $z \in \mathbb{R}$  t.c. (\*\*) sia compatibile

•  $z$  è un parametro, quindi il sistema è da considerarsi a indeterminate  $x, y$

ovvero a soluzioni in  $\mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1+2z \\ 2+z \\ -2-z \end{pmatrix}$$

Gauss

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1+2z & \\ 0 & 1 & 2+z & \\ 1 & 1 & -2-z & \end{array} \right) \xrightarrow{\text{R}_1 \leftrightarrow R_1 - R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5+4z & \\ 0 & 1 & 2+z & \\ 1 & 1 & -2-z & \end{array} \right) \xrightarrow{\text{R}_2 \leftrightarrow R_2 - R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3+3z & \\ 0 & 1 & 2+z & \\ 1 & 1 & -2-z & \end{array} \right) \xrightarrow{\text{R}_3 \leftrightarrow R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2-z & \\ 0 & 1 & 2+z & \\ 0 & 0 & 3+3z & \end{array} \right)$$

Il sistema associato è

$$\begin{cases} x+y = -2-z \\ y = 2+z \\ 0 = 3+3z \end{cases}$$

che è compatibile  $\iff z = -1$

$$(0 = 3+3z)$$

notiamo che  $z = -1$

era anche nella sol. precedente

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Quindi  $\mathcal{E} = \{-1\}$ . Il sistema diventa quindi:

$$\begin{cases} x+y = -1 \\ y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{in forma triangolare superiore,} \\ \text{di soluzione } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Note: praticamente ho portato

Un po'  
inutile

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

## def RANGO DI UNA MATRICE

Dato  $A \in M_{m,n}(K)$ , il **rango** è il numero di pivot di una sua forma a gradini (ridotta o non ridotta)

(ovvero il numero di righe non nulle.)

**Notazione:**  $\text{rg}(A) \in \mathbb{N} : A \in M_{m,n}(K)$        $\cdot \text{rg}(A) = 0 \iff A = (\emptyset)$   
 è impossibile che una matrice non nulla lo diventi con le operazioni date.

**OSS:** per definizione, se la matrice  $A'$  è ottenuta a partire dalla matrice  $A$  applicando operazioni elementari, allora  $\text{rg}(A') = \text{rg}(A)$

ridurre non cambia il  
nr. di pivot

(non l'ha detto)

è il massimo numero di righe (o colonne) l.i. della matrice (infatti, se riduco la matrice, le righe l.d. diventeranno nulle.)

$$\text{es. } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ 2 & 4 & 6 & \\ 1 & 1 & 1 & \end{array} \right) \xrightarrow{\text{riduzione}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 6 \end{array} \right) = 2 \cdot \left( \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right)$$

$$A = \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \quad \text{rg}(A) = \text{rg} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{array} \right) = \text{rg} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array} \right) = 3$$

3 pivot  
(non mi serve trasformarli in 1 per vederlo)

## OSSERVAZIONI

① Una matrice  $A \in M_{m,n}(K)$  può avere  
il massimo rango  $(A) = \min(m, n)$

e esempi "limite"

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & & & * & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \end{array} \right)$$

se c'è un pivot per colonna,  
 $\text{rg}(A) = n$  (colonne), che  $i < m$  (righe)

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & & & * & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \end{array} \right)$$

se c'è un pivot per riga,  
 $\text{rg}(A) = m$  e  $m < n$

(se la matrice è  
quadrata con diagonale  
di pivot,  $m = n$   
quindi  $\min(m, n) = m = n$   
chiaramente)

②  $\text{rg}(A) \leq \text{rg}(A|b)$  qualunque sia data una colonna  $b \in M_{m,1}(K)$   
("aumentando" la matrice, il range non può diminuire)

qui può esserci al massimo un pivot in più

- visto che si mescolano le righe ma mai le colonne,  
la parte a sinistra sarà uguale -  
(A)

se ne deduce che  $\text{rg}(A) \leq \text{rg}(A|b)$

OK.

- Rouché-Capelli theorem in English speaking countries, Italy and Brazil;
- Kronecker-Capelli theorem in Austria, Poland, Ukraine, Croatia, Romania, Serbia and Russia;
- Rouché-Foncón theorem in France;
- Rouché-Frobenius theorem in Spain and many countries in Latin America;
- Frobenius theorem in the Czech Republic and in Slovakia.

### Teorema ROUCHE - CAPELLI

vedi anche p.98

Si consideri il sistema  $(*) AX = b$  con  $A \in M_{m,n}(K)$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K)$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$

① Il sistema  $(*)$  è compatibile  $\iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$

colonne (= indeterminate)

② Se  $(*)$  è compatibile, poniamo  $s := n - \text{rg}(A) \geq 0$  "grado di libertà" del sistema

Esistono allora vettori  $v_1, \dots, v_s \in \text{Sol}(A|0)$  linearmente indipendenti t.c.  $\text{Sol}(A|0) = \text{Span}_K(v_1, \dots, v_s)$

Quindi, dato  $v_0 \in \text{Sol}(A|b)$ , si ha  $\text{Sol}(A|b) = v_0 + \sum_{i=1}^s K v_i$

x parentesi mia  
x copiare meglio:

esempio grado 1

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b \\ 0 & 0 & -1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \quad (\text{sono le colonne})$$

ho 3 incognite  
ma 1 è "libera"  
(2 sono vincolate)

non pivot

ho 4 incognite  
ma 1 è "libera"

grado 3:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & * & * & * & * & b \\ 0 & 1 & * & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & * & * & \end{array} \right)$$

costante

infatti (esempi di prima)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad s = n - \text{rg}(A)$$

$\therefore s = 3 - 3$

"(0)"

(visivamente vedo subito 0 colonne "libere")

la sol è unica:

$$\left\{ \left( \begin{array}{c} -z \\ z \\ 1 \end{array} \right) + \text{Sol}(A|0) \right\} = \left\{ \left( \begin{array}{c} -z \\ z \\ 1 \end{array} \right) \right\}$$

"(0)"

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2-z & \\ 0 & 1 & 2+z & \\ 0 & 0 & 3+3z & \end{array} \right)$$

se qui c'è 0 va bene perché non ci sono altri pivot

e  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$

(quindi se  $z = -1$ , è compatibile)

se invece  $z \neq -1$ ,

$\text{rg}(A) = 2 < 3 = \text{rg}(A|b)$  e il sistema è incompatibile

esercizio

studiare le soluzioni del seguente sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 6 \\ x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 5 \\ x_2 + x_5 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1 \leftrightarrow R_3 \\ R_4 \leftrightarrow R_3}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_3 \\ R_3 \leftarrow R_4}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_4 \leftarrow R_4 - R_3}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

$$R_2 = R_3 \text{ di prima}$$

$$R_3 = R_4 \text{ " "}$$

$$R_4 = R_2 \text{ " "}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \leftarrow R_4}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 2R_3} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

4 pivot

qui si vede che  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$

quindi, per Rouché-Capelli, il sistema d'origine è compatibile

dopo qualche calcolo →

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right) \text{ è gradini ridotti}$$

Vett p.80  
 Abbiamo visto che  $\text{Span}_K(V_1, \dots, V_k) = \{ \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_k V_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K \}$   
 Più generalmente, se  $\emptyset \neq S \subset V$  qualsiasi, si pone  $\text{Span}_K(S) = \{ \text{"combinazioni lineari finite di vettori in } S\}$ , ovvero  $\text{Span}_K(S) = \bigcap_{\substack{W \text{ sottosp. di } V \\ S \subset W}} W$

- **FATTO:**  $\text{Span}_K(S)$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

es.  $W \subset V$  sottospazio. Allora,  $W = \text{Span}_K(W)$

### def SISTEMA DI GENERATORI, SOTTOSPazio FINITAMENTE GENERATO

- Se  $W = \text{Span}_K(S)$ , allora  $S$  è un sistema di generatori per  $W$ .
- Se  $\exists S$  finito con  $W = \text{Span}_K(S)$ , allora  $W$  è finitamente generato (f.g.)  
 può essere generato ANCHE da un insieme infinito (non ci interessa)  
 - quello che conta è che possa essere generato da uno finito

es.  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $K = \mathbb{R}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ ,  $S = \{v\}$

$$W = \text{Span}_{\mathbb{R}}(S) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(v) \quad W \text{ è f.g.}$$

### def sistema di generatori LIBERO

$\emptyset \neq S \subset V$  è libero o linearmente indipendente se, comunque scelto un sottoinsieme finito  
 $F = \{V_1, \dots, V_n\} \subset S$ , allora  $V_1, \dots, V_n$  sono l.i. (ogni combinazione lineare finita di vettori di  $S$  nulla è banale)

### def BASE

Dato  $W$  sottospazio vett.,  $S \subset W$  è una base di  $W$  se

- ①  $S$  è un sistema di generatori di  $W$ , ovvero  $W = \text{Span}_K(S)$
- ②  $S$  è libero

"su  $K$ "

**Proposizione 1:** Per ogni spazio vettoriale  $V/K$ , esiste una base  $B \subset V$ .

Inoltre, date due basi  $(B, B')$  di  $V$ , allora esiste una funzione biiettiva  $f: B \rightarrow B'$

quindi: in particolare, se esiste una base finita di cardinalità  $n$ , allora ogni base è finita, di cardinalità  $n$ .

### def DIMENSIONE di uno sp.vett.

Dato uno spazio vettoriale  $V/K$  f.g., la dimensione  $\dim_K(V)$  è l'intero  $n \in \mathbb{N}$  tale che ogni base  $(B)$  di  $V$  ha cardinalità  $n$ .

N.B.  $\dim_K(K) = 0 \iff V \text{ è banale} - V = \{0\}$

**Proposizione 2:** se  $W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$  f.g. di dimensione  $n$ ,  
allora anche  $W$  è f.g. e, data  $l$  la sua dimensione  $l := \dim_K(W)$ , si ha  $l \leq n$

un sottospazio vett. ha sempre  
dim <= dim spazio (che è logico,  
perché  $\subseteq$ )

### Applicazione alla notazione di rango di una matrice

**Lemme** Dato una matrice  $A \in M_{m,n}(K)$ ,  $\text{rg}(A) = \dim_K(\underbrace{\text{Span}_K(A_1, \dots, A_m)}_{\# \text{pivot}})$

sottosp. vett. di  $M_{1,n}(K)$

(ogni riga è una matrice riga con  $n$  colonne)

$\text{Span}_K(A_1, \dots, A_m)$  è l'insieme delle comb. lin. delle righe di  $A$ ,

una base di  $\text{Span}_K(\dots)$  è un insieme di vettori l.i. che generano  $\text{Span}_K(\dots)$ ,

quindi la dim della span (cardinalità delle basi) è il numero massimo di righe l.i.  $\rightarrow$  ovvero il rango (se trasformo una matrice in forma a gradini ridotti, le righe l.i. diventeranno nulle)

dim

Sia  $A'$  la matrice a gradini ridotti tale che  $A \leq A'$ . Allora, ogni riga di  $A'$  è combinazione lineare delle righe di  $A$ .

Quindi,

$$\text{Span}_K(A'_1, \dots, A'_m) \subset \text{Span}_K(A_1, \dots, A_m)$$

ogni el. appartiene

per la prop. 2,  $\dim_K(\text{Span}_K(A'_1, \dots, A'_m)) \leq \dim_K(\text{Span}_K(A_1, \dots, A_m))$

Ma ogni trasformazione elementare di Gauss è invertibile ( $\cup$  è una rel. di equivalenze)

Quindi,  $\dim_K(\text{Span}_K(A'_1, \dots, A'_m)) = \dim_K(\text{Span}_K(A_1, \dots, A_m))$ .

Si vede che  $\dim_K(\text{Span}_K(A'_1, \dots, A'_m)) = \text{rg}(A')$  perché le righe contenenti i pivot sono l.i. (lo sp. vett. le ha come base) ■

### Applicazioni alle soluzioni di un sistema lineare (ROUCHÉ-CAPPELLI)

Dato un sistema lineare (\*)  $AX = b$ ,  $M := (A|b)$ ,  $A \in M_{m,n}(K)$ ,

il teorema di Rouché-Capelli p.95 Si riformula.

① (\*) è compatibile  $\iff \dim_K(M^1, \dots, M^{n+1}) = \dim_K(A^1, \dots, A^n)$  ( $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$ )

②  $\dim_K(\underbrace{\text{Sol}(A|b)}_{\substack{\text{spazio vett.} \\ \text{delle sol. del} \\ \text{sistema omogeneo}}}) = \underbrace{n - \text{rg}(A)}_S$  (da teorema: esistono  $S$  vettori  $v_1, \dots, v_S \in \text{Sol}(A|b)$  l.i.  
t.c.  $\text{Sol}(A|b) = \text{Span}_K(v_1, \dots, v_S)$ )  
quindi  $S = \dim$  base  $\uparrow$ )

③ N.B.  $\text{rg}(A) = \dim_K(\text{Span}_K(A_1, \dots, A_m)) = \dim_K(\text{Span}_K(A^1, \dots, A^n))$

## Esercizi

*f sulle slide, ma preferisco x  
f abbiamo visto che è uno sp. vett. (p.78)*

Sia  $W = K_d[X]$  il sottoinsieme di polinomi di  $V = K[X]$  di grado  $\leq d$ .

$W$  è un sottosp. vett. di  $K[X]$ .

- ① ② Mostrire che  $K_d[X]$  è f.g. e ③ calcolarne una base.

f.g.

② dato  $P \in K_d[X] =: W$ ,  $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \dots + \alpha_n X^n$  con  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in K$  e, se  $\alpha_n \neq 0$  allora  $n \leq d$

*è una comb. lineare di*

quindi,  $P \in \text{Span}_K(1, X, X^2, \dots, X^d)$  - ovvero,  $S = \{1, X, X^2, \dots, X^d\}$  è un sistema di generatori di  $K_d[X]$

Siccome  $S$  è finito,  $K_d[X]$  è f.g.

base

③ bisogna trovare un sistema di generatori l.i.

Un polinomio è nullo  $\iff$  i suoi coeff. sono tutti nulli.

Ma un polinomio  $\in K_d[X]$  è una comb. lin. di  $1, X, X^2, \dots, X^d$ , quindi l'unico comb. lineare nullo di  $1, X, X^2, \dots, X^d$  è quello banale.

$\Rightarrow \{1, X, X^2, \dots, X^d\}$  è una base  $\Rightarrow \dim_K(K_d[X]) = d+1$

• Ma non è l'unica base:

dato  $d=1$ ,  $S = \{1, X\}$ .

Se sostituisco  $X$  con  $X+1$  e costruisco  $S' = \{1, X+1\}$ ,  $S'$  è un sistema di generatori:

$$P = \alpha_0 + \alpha_1 X = \alpha_0 + \alpha_1 (X+1) - \alpha_1 = (\underbrace{\alpha_0 - \alpha_1}_{\in \text{span}(1)}) \cdot 1 + \alpha_1 (X+1) \quad \text{comb. lineare di } 1, X+1$$

$\Rightarrow \forall P \in K_1[X]$ , si ha che  $P \in \text{Span}_K(1, X+1) \Rightarrow K_1[X] \subset \text{Span}_K(1, X+1)$

Sia adesso  $Q \in \text{Span}_K(1, X+1) \Rightarrow Q = b_0 + b_1(X+1) = \underbrace{b_0 + b_1}_{\in \text{span}(1)} + b_1 X \in K_1[X]$

*comb. di  $(1, X+1)$*

$$\Rightarrow K_1[X] = \text{Span}_K(1, X+1) = \text{Span}_K(1, X)$$

*le comb. di  $(1, X+1)$  sono anche comb. di  $(1, X)$*

$1, X+1$  sono l.i., quindi anche  $\{1, X+1\}$  è una base di  $K_1[X]$

## GENERALIZZANDO

Dato un qualsiasi  $\{1, X, X^2, \dots, X^d\}$  base di  $K_d[X]$ ,

se si sostituisce un elemento di questa base con un polinomio di  $K_d[X]$  ottenuto:

- ① permutando ② moltiplicando per uno scalare ③ sostituendo con se stesso più una combinazione lineare degli altri  
(operazioni di Gauss)

uscirà un'altra base.

[trovare in  $K[x]$  un sistema di generatori che non è una base]

per esempio,  $\{1, 1, x, x^2, x^3\}$  è un sistema di generatori ( $\forall P = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3, P \in \text{Span}_K(\{1, x, x^2, x^3\}) \subset \text{Span}_K(\{1, 1, x, x^2, x^3\})$ )  
in generale, se  $S \subseteq S'$ ,  $\text{Span}_K(S) \subseteq \text{Span}_K(S')$

la comb. lin.  $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot x + \lambda_4 \cdot x^2 + \lambda_5 \cdot x^3$

con  $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$  e  $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$  è non banale e nulla  $\Rightarrow \{1, 1, x, x^2, x^3\}$  non è libero.

$$\downarrow 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

② Mostrare che  $V = K[x]$  non è f.g. e calcolarne una base

Supponiamo per assurdo che  $V$  sia f.g.

vorrebbe dire che esiste una base finita di cardinalità  $n$  tale che

$V = \text{Span}_K(P_0, P_1, \dots, P_n)$ ,  $P_i \in V = K[x]$ . (quindi ogni polinomio è comb. lineare di  $P_0, \dots, P_n$ )

Sia  $d = \max(\deg(P_i), i=0, \dots, n)$  (quindi esisterebbe un grado massimo)

Sia  $P \in V$ . Allora  $P = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i$

il grado massimo che  $P$  può avere, visto che  $\lambda_i$  sono costanti (e non possono far aumentare di grado), è

$$\deg(P) \leq \max\{\deg(P_0), \dots, \deg(P_n)\} = d \quad (\text{definito sopra})$$

Introduciamo un elemento  $Q \in V$  con grado  $n+1$  (che chiaramente esiste in  $K[x]$ )

Sia  $Q \in V$  di grado  $n+1$

Se  $Q \in V$ , vuol dire che può essere scritto come comb. lin. dei generatori

$Q \in \text{Span}_K(P_0, \dots, P_n)$   $\downarrow$  contraddizione

ma questo è impossibile, perché abbiamo visto sopra che quelle combinazioni hanno grado massimo  $n$ .

Quindi,  $K[x]$  non è f.g. e ha base  $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$  infinita.

FATTI generalizzati dall'es.

- Se  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  è base di  $V$ , allora un sottoinsieme  $B' \subset V$  ottenuto attraverso ①, ②, ③ è un'altra base.

- Se  $S \subseteq S'$ ,  $\text{Span}_K(S) \subseteq \text{Span}_K(S')$

- $V = K[x]$  non è f.g.

ma fatto 1' 11/12 (matrice con rango non massimale) ( $< \min(n, m)$ )

### Esercizio 1

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 5 & -6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{U} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 13 & -12 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{U} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -10 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & -3 & -4 \\ 0 & 7 & 13 & -12 & -4 \end{pmatrix}$$

$R_4 \rightarrow R_4 + 2R_1$

$R_2 \rightarrow R_2 - 3R_3$

$R_1 \leftrightarrow R_3$

$\cap$

$R_2 \rightarrow R_2 + R_3$

$R_4 \rightarrow R_4 - 7R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -57 & * & * \end{pmatrix} \quad \text{U} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -57 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 \rightarrow R_2 \rightarrow R_4 \rightarrow R_3$

quindi  $\text{range}(M) = 3$   
 = dimensione di  $W = \text{Span}_{\mathbb{R}}(\text{righe di } M)$   
 e le righe dello matrice (l.i.) costituiscono  
 una base di  $W$

Come è stato generato l'esercizio?

scelti 3 vettori: l.i > caso

$$a = (1 \ 2 \ 4 \ -3 \ -1), \quad b = (3 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1), \quad c = (0 \ 2 \ 1 \ -3 \ 0) \in M_{1,5}(\mathbb{R})$$

la matrice  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R})$  ha rango 3 e

$$M = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ a-c \\ a+b+c \end{pmatrix} \quad a-b, b-c, a-c, a+b+c \in \text{Span}_{\mathbb{R}}(a, b, c) \in M_{1,5}(\mathbb{R})$$

## Esercizio 2

① In funzione del parametro  $\lambda \in \mathbb{R}$ , determinare il rango della matrice

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 & \lambda & 4 \\ 0 & \lambda & 4 & 3 & -2\lambda & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,7}(\mathbb{R})$$

② Supponiamo che  $M_\lambda$  sia la matrice completa associata ad un sistema lineare  $Ax \underset{(*)}{=} b$ .

Determinare in funzione di  $\lambda$  se il sistema è compatibile, e la dimensione di  $\text{Sol}(A|b)$

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 & \lambda & 4 \\ 0 & \lambda & 4 & 3 & -2\lambda & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cup} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & \lambda-2 & 4 \\ 0 & \lambda & 4 & 3 & -2\lambda & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cap} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 4 & 3 & -2\lambda & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & \lambda-2 & 4 \end{pmatrix}$$

$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_4$        $R_4 \leftrightarrow R_2$

dobbiamo capire come  
trattarlo: è già  $\odot$  o deve diventarlo?

ci sono ora due casi: ①  $\lambda \neq 0$  ②  $\lambda = 0$

①  $\lambda \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 4 & 3 & -2\lambda & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & \lambda-2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cup} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{\lambda} & \frac{3}{\lambda} & -2 & \frac{6}{\lambda} & \frac{4}{\lambda} \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & \lambda-2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - \lambda^{-1}R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{\lambda} & \frac{3}{\lambda} & -2 & \frac{6}{\lambda} & \frac{4}{\lambda} \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & \lambda-2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cup} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\lambda} & \frac{3}{\lambda} & -2 & \frac{6}{\lambda} & \frac{4}{\lambda} \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & \lambda-2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - \frac{4}{\lambda}R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\lambda} & \frac{3}{\lambda} & -2 & \frac{6}{\lambda} & \frac{4}{\lambda} \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & \lambda-2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cup} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\lambda} & \frac{3}{\lambda} & -2 & \frac{6}{\lambda} & \frac{4}{\lambda} \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & \lambda-2 & 4 \end{pmatrix}$$

se  $\lambda = 2$ , è  $\odot$ , altrimenti no

dobbiamo ancora due casi:

①a)  $\lambda \neq 2, 0$

①b)  $\lambda = 0$

②  $\lambda = 0$

$$M_0 \xrightarrow{\cup} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cup} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow -\frac{1}{3}R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\cup} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 4R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\cup} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{1}{7}R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{pmatrix}$$

rango 4

①b)  $\lambda \neq 0, \lambda \neq 2$

$$\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\lambda}-2 & \frac{3}{\lambda}-1 & -2 & \frac{6}{\lambda}-1 & \frac{4}{\lambda} \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & \lambda-2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{U}} R_3 \rightarrow R_3 \cdot \frac{1}{\frac{4}{\lambda}-2}$$

①b)  $\lambda = 2$

$$M_2 \xrightarrow{\text{U}} \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -2 & * & * \\ 0 & 0 & -3 & * & * & * & * \end{array} \right) \xrightarrow{\text{U}} R_3 \rightarrow \frac{2}{5} R_3 \\ R_4 \rightarrow -\frac{1}{3} R_4 \\ R_3 \leftrightarrow R_4$$

$$\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3+\lambda}{4-2\lambda} & \frac{-2\lambda}{4-2\lambda} & * & * \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & \lambda-2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{U}} R_4 \rightarrow R_4 + 3R_3$$

$$\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3+\lambda}{4-2\lambda} & \frac{-2\lambda}{4-2\lambda} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \frac{21-3\lambda}{4-2\lambda} & \frac{-4-\lambda}{2-\lambda} & * & * \end{array} \right)$$

se questi due si annullano contemporaneamente (e anche gli \*) allora il rango è 3 - scanno, è 4

$$\frac{21-3\lambda}{4-2\lambda} \text{ si annulla} \Leftrightarrow \lambda = 7, \text{ e } \frac{-4-\lambda}{2-\lambda} \text{ non si annulla per } \lambda = 7$$

quindi non possono essere cont. nulli  $\Rightarrow \text{rango}(M_\lambda) = 4$

in ogni caso,  $\text{rango}(M_\lambda) = 4$

② In ogni caso  $\text{rg}(M) \geq 4$ . Scriviamo

$$M_\lambda = \left( \begin{array}{c|c} A_\lambda & B_\lambda \end{array} \right) \left. \right\} 4 \quad \text{il sistema (*) è compatibile} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(M)$$

devo verificare per ogni caso che i gradini "finiscono" prima di B

①b) può essere o così:

$$\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3+\lambda}{4-2\lambda} & \frac{-2\lambda}{4-2\lambda} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \frac{21-3\lambda}{4-2\lambda} & \frac{-4-\lambda}{2-\lambda} & * & * \end{array} \right) \text{ se } \lambda = 7$$

$$\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{array} \right)$$

$$\text{o così: } \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3+\lambda}{4-2\lambda} & \frac{-2\lambda}{4-2\lambda} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \frac{21-3\lambda}{4-2\lambda} & \frac{-4-\lambda}{2-\lambda} & * & * \end{array} \right) \text{ se } \lambda = 7$$

$$\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{array} \right)$$

$\text{rg}(A) = \text{rg}(M)$  si verifica in tutti i casi

• Per Rouché-Capelli,  $\dim(\text{Sol}(A|0)) = \frac{\text{M}_\lambda}{\text{rg}(A)} = n - \text{rg}(A) = 6 - 4 = 2$   
# indeterminate

Si verifica che **prop 1, prop 2**  $\Rightarrow$

$\hookrightarrow$  per ogni  $V/K \exists$  base  $(B \subset V)$   
(e se una base è finita di card.  $n$ ,  
ogni base lo è.)

versione alternativa a p.

**Proposizione 3:** Dato  $V$  sp.vett. di dim.  $n$  su  $K$ , sia  $S \subset V$ .

Allora:

①  $S$  è libero  $\Rightarrow \#S < \infty$  e  $\#S \leq n$  se le basi hanno card.  $n$ , non può avere card.  $k > n$

②  $S$  generatore  $\Rightarrow$  o  $S$  è infinito  
oppure  $\#S \geq n$

③ in particolare,  $S$  base  $\Leftrightarrow S$  finito,  $\#S = n$  e  $S$  libero  $\Leftrightarrow \#S < \infty$ ,  $\#S = n$  e  $S$  è generatore

**Proposizione 4:** Dato  $V$  spazio vettoriale f.g. su  $K$ ,

$\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base di  $V \Leftrightarrow$  ogni vettore di  $V$  si scrive in modo unico come combinazione lineare di  $v_1, \dots, v_n$

dim

•  $\Rightarrow$  Se  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è base di  $V$ , allora è anche insieme di generatori.  $\hookrightarrow \forall v \in V, \exists \alpha_i \in K$  t.c.  $v = \sum \alpha_i v_i$

Quindi  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  t.c.  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

Inoltre,  $v_1, \dots, v_n$  sono l.i.

Mostriamo che  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$  è unicamente determinato

Supponiamo di avere  $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in K^n$  t.c.  $v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$

Si ha quindi:  $v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$ ,  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

Sottraiamo:  $0 = (\beta_1 - \alpha_1) v_1 + \dots + (\beta_n - \alpha_n) v_n$

L'unica comb. nulla è quella banale

Ma  $v_1, \dots, v_n$  sono l.i.  $\Leftrightarrow \beta_1 = \alpha_1, \dots, \beta_n = \alpha_n$  da cui l'unicità

•  $\Leftarrow$  Supponiamo che  $\forall v \in V$ , si possa scrivere in modo unico  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

Allora  $\{v_1, \dots, v_n\}$  genera  $V$ :  $V = \text{Span}_K(v_1, \dots, v_n)$

Inoltre, per unicità  $0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$$0 = \underbrace{\alpha_1}_{||} v_1 + \dots + \underbrace{\alpha_n}_{||} v_n \implies v_1, \dots, v_n \text{ l.i.} \blacksquare$$

### def VETTORE DELLE COORDINATE

Dato  $V$  spazio vettoriale su  $K$  di dim.  $n$ , e dato una base  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ , ogni vettore  $v \in V$  si scrive in modo unico:

$$v = v_1 b_1 + \dots + v_n b_n \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^n$$

Tale vettore si chiama il vettore delle coordinate di  $v$  nella base  $B$ , e si scrive  $[v]_B$

esempi di basi:

①  $V = K = \mathbb{C}$  ogni singleton non nullo è una base -  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$

es.  $\{1\}$  è una base

②  $V = \mathbb{C}, K = \mathbb{R}$  Sappiamo che ogni numero complesso  $z \in \mathbb{C}$  si scrive

in modo unico come  $z = x \cdot 1 + y \cdot i$

1. i vettori di  $\mathbb{C}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  (quindi comb. lineare)

quindi  $B = \{1, i\}$  è base -  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$

③ in modo simile,

$\dim_{\mathbb{C}}(M_2(\mathbb{C})) = 4$  con base  $\{(10)(01)(00)(00)\}$  dim: . chiaro che A, B, C, D sono l.i.

$\cdot \forall M \in M_2, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a(10) + b(01) + c(00) + d(00)$

$\dim_{\mathbb{R}}(M_2(\mathbb{C})) = 8$  con base  $\{(10)(01)(00)(00), (00)(00)(10)(01), (00)(00)(01)(00)\}$  dim: sempre chiaro l.i.  $\delta_j = x_j \cdot 1 + y_j \cdot i$ : quindi:  $\cdot \forall M \in M_2, M = \begin{pmatrix} \delta_1 \delta_2 \\ \delta_3 \delta_4 \end{pmatrix} = x_1(10) + y_1(01) + \dots -$  uguali per  $\delta_2, \delta_3, \delta_4$

### Esercizio 3 / base canonica

dato  $V = K^n$ , allora  $B = (e_1, \dots, e_n)$  è una base di  $V$

dove  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{i\text{-esima posizione}}, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

dim

Scriviamo la matrice  $M$  che ha per righe i coefficienti dei vettori  $e_1, \dots, e_n$ .

Si ha  $M = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = 1_n \in M_n(K)$  a gradini ridotto con  $n$  pivot.  $\text{rg}(M) = n$  da cui  $B$  libera (range = cardinalità  $B$ ) e, siccome  $W = \text{Span}_K(B) \subset V$  ha dim.  $n$ ,  $W = V$  e  $B$  base di  $V$  • è  $\dim(K^n) = n$

def BASE CANONICA

La base  $B = (e_1, \dots, e_n)$  si chiama la base canonica di  $K^n$

$\{e_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  è la base canonica di  $M_{m,n}(K)$

### Esercizio 4

In  $M_{m,n}(K)$ , ponendo  $e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  colonna j rispetto a  $\epsilon M_{m,n}$  con  $1 \leq i \leq m$   
 $1 \leq j \leq n$

mostrare che  $\{e_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  è la base canonica di  $M_{m,n}(K)$  e che  $\dim(M_{m,n}(K)) = m \cdot n$

[Esempio:  $m=2, n=3$  e  $e_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ]

### Esercizio 5

dato  $V = \mathbb{R}^2$ , mostrare che  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  è una base di  $V$ .

ci sono 2 metodi: (sappiamo che  $2 = \#B = \dim_{\mathbb{R}}(V)$ )

① usando la prop. 3 ( $S$  base  $\iff \#S = n$  e  $S$  libero  $\iff \#S = n$  e  $S$  è generatore) usiamo questo

Mostriamo che  $\forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in V$ , si ha che  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  è combinazione dei vettori  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ovvero che  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{Span}_{\mathbb{R}}(B)$ )

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \iff \text{il sistema } \begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 - x_2 = b \end{cases} \text{ è compatibile.}$$

Per Rouché-Capelli, il sistema è compatibile  $\iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \rightarrow L_2 - L_1]{\cup} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & b-a \end{pmatrix} \xrightarrow{\cup} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \rightarrow L_1 - L_2]{\cup} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a+b}{2} \\ 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \end{pmatrix}$$

(ridotto)

$$\Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) \Rightarrow \mathbb{R}^2 = \text{Span}_{\mathbb{R}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$$

$$\text{Inoltre, ho le soluzioni uniche del sistema } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{quindi, scrivendo } v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ si ha } [v]_B = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \end{pmatrix}$$

vett. coordinate

② usando la prop. 3 ( $S$  base  $\iff \#S = n$  e  $S$  libero  $\iff \#S = n$  e  $S$  è generatore) usiamo questo

Mostriamo che  $B$  è libero (metodo più facile)

$(1, 1) \cup (1, -1) \cup (0, 1)$ , che ha rango 2. Le righe contenenti i pivot sono l.i., quindi  $B$  è libero.

Quindi sappiamo che è una base di  $V$ .

## Trasposizione di matrici

Sia  $A \in M_{m,n}(K)$ , lo trasposto di  $A$  ( ${}^t A$ ) è la matrice di  $M_{n,m}(K)$  ottenuta da  $A$  scambiando righe e colonne.

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad {}^t A = (a_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}), \quad {}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), \quad {}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

↪ è una riflessione rispetto alla diagonale

(per le non-quadrati: 

oss (importante!) dato  $A \in M_{m,n}(K)$   $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A)$

quindi, se cerco il rango tramite Gauss, posso accelerare applicando

l'algoritmo a righe e colonne simultaneamente

(ma se lo faccio, non posso trarre conclusioni sulle soluzioni del sistema associato - neanche se lo riduco -)

proprietà:

- ①  ${}^t({}^t A) = A$
- ②  ${}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha {}^t A + \beta {}^t B$  con  $\alpha, \beta \in K$  e  $A, B \in M_{m,n}(K)$
- ③  ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$  (un po' come l'inversione nei gruppi)

↪ ricordiamo le condizioni di compatibilità per il prodotto matriciale

$A \in M_{m,n}(K), B \in M_{n,s}(K)$  - è ben definito anche per  ${}^t B \in M_{s,n}(K), {}^t A \in M_{n,m}(K)$

Inoltre,  ${}^t(AB) \in M_{s,m}(K)$ .

## def MATRICE SIMMETRICA/ASIMMETRICA

$A \in M_n(K)$  (quindi quadrata) si dice simmetrica se  $A = {}^t A$

antisimmetrica se  $A = -{}^t A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3 \text{ è simmetrica}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \text{ è antisimmetrica}$$

- In  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $A = -{}^t A \Rightarrow$  diagonale nulla

↪ falso in  $M_n(\mathbb{F}_2)$

### Lemmo / Esercizio 6 /

Sia  $M_n^+(\mathbb{R})$  l'insieme delle matrici simmetriche di  $M_n(\mathbb{R})$  e  $M_n^-(\mathbb{R})$  l'insieme delle matrici antisimmetriche.

$M_n^+(\mathbb{R})$  e  $M_n^-(\mathbb{R})$  sono sottospazi vettoriali di  $M_n(\mathbb{R})$

dim

Poniamo  $M = M_n^+(\mathbb{R})$  (e poi  $M = M_n^-(\mathbb{R})$ )

Dobbiamo dimostrare che  $\forall A, B \in M$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\alpha A + \beta B \in M$$

per  $M^+$   $A, B$  sono simmetriche :  $A = {}^t A$ ,  $B = {}^t B$

$$\text{quindi } {}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha {}^t A + \beta {}^t B = \alpha A + \beta B$$

per  $M^-$   $A = {}^t -A$ ,  $B = {}^t -B$

$$\text{quindi } {}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha (-A) + \beta (-B) = -(\alpha A + \beta B)$$

### Esercizio 7

Trovare basi per  $M_2^+(\mathbb{R})$  e  $M_2^-(\mathbb{R})$

①  $M_2^+(\mathbb{R})$

Sia  $A \in M_2^+(\mathbb{R})$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2^+(\mathbb{R})$  generica

$$V := M_2^+(\mathbb{R}) = \text{Span}_{\mathbb{R}} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{11}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_{22}} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{21} + e_{12}}$$

②  $M_2^-(\mathbb{R})$

$A = {}^t -A$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \in M_2^-(\mathbb{R})$  generica

$$V := M_2^-(\mathbb{R}) = \text{Span}_{\mathbb{R}} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

## Proposizione 3 versione alternativa - parte ③

Data  $V/K$  s.v. f.g. e  $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  $B$  è una base  $\iff B$  è un insieme massimale di vettori: l.i. $\iff B$  è un insieme minimo di generatori:

Se aggiungo un altro vettore, non è più libero

dim ②  $\implies$  ①Prendiamo  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  libero massimaleSia  $v \in V$ . Allora  $B' = \{v_1, \dots, v_n, v\}$  non è libero (perché  $B$  massimale)aggiungo  $v$  $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$  non tutti nulli t.c.  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ e quindi  $\lambda v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ (sarebbero  $-\lambda_1, \dots, -\lambda_n$ , ma è come scegliere un  $\lambda'$ )Claim:  $\lambda$  non nulloAltrimenti,  $\lambda = 0$  e ci sarebbero  $\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n$  non tutti nulli t.c.  $0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ (contraddizione con  $B$  libero)Quindi (visto  $\lambda \neq 0$ ) posso moltiplicare per  $\lambda^{-1}$ 

$$\begin{aligned} v &= \frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} v_n = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n \implies v \in \text{Span}_K(B) \quad \forall v \in V \\ &\implies V \subseteq \text{Span}_K(B) \subset V \implies V = \text{Span}_K(B) \\ &\implies B \text{ è un sistema di generatori per } V \end{aligned}$$

## Teorema (concetto già visto prima)

Data  $V/K$  f.g., due basi hanno lo stesso numero di elementi

dim

Prendiamo due basi  $B = (b_1, \dots, b_r)$ ,  $B' = (b'_1, \dots, b'_{r'})$  due basi.Posso supporre che  $r' \geq r$ .In particolare,  $\text{Span}_K(B) = \text{Span}_K(B') = V$ quindi  $\text{Span}_K(B) \supseteq \text{Span}_K(B')$ quindi posso scrivere, in modo unico,  $\forall 1 \leq i \leq r \quad b'_i = \sum_{j=1}^r \underbrace{u_{ij}}_{\in K} b_j$ sto scrivendo ogni el. di  $B'$  nella base  $B$ 

Costruisco quindi una matrice in questo modo:

nella parte sinistra, ogni riga  $i$  è formata dalle coord. di  $b'_i$  nella base  $B$ ,  $[b'_i]_B$ la parte destra contiene la matrice identità di  $M_{r'}(K)$ 

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad r' \times r'$$

$$M \in M_{r \times r+r'}$$

$$M = \left( \begin{array}{c|cc} (u_{ij})_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r} & & \\ \hline & 1_{r'} & \\ & \vdots & \vdots \\ & r' & r' \end{array} \right)_{r \times r+r'}$$

Applichiamo ora le operazioni elementari di Gauss per rendere solo la parte sinistra a gradini ridotti

Che può essere un rettangolo così  $\boxed{\phantom{0}}_{r'}^{r}$  (se  $r < r'$ ) o al massimo un quadrato  $(r = r')$ (non può essere così  $\boxed{\phantom{0}}_r^{r'} \rightarrow r' > r'$ )

Riducendo  $M$  otteniamo una cosa del genere

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & & & & * \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ 1 & & & 1 & \\ 1 & & & & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{array} \right)$$

Ad ogni tappa, le matrici intermedie hanno il blocco di sx costituito da coordinate nella base  $B$  di vettori di una base di  $V$  con  $r'$  elem.  
(applicando le op. fondamentali su delle basi si ottengono sempre basi)

Ma, se ci fosse questo blocco di zeri, stremmo dicendo che un blocco di vettori che contiene zeri è una base  $\rightarrow$  CONTRADDIZIONE

Una base non contiene mai  $0$  (altrimenti non sarebbe libera)

$$\begin{aligned} & \hookrightarrow b'_x = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \dots = 0 \\ & (\forall x \in K) x \cdot 0 + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n \text{ non è nulla ma dovrebbe } 0 \\ & (\text{tutti zeri è un numero qualunque al vettore } 0) \end{aligned}$$

perché non ci siano righe nulle, la parte di sx deve essere quadrata

$$\text{quindi, } r = r' \blacksquare$$

### (MATRICE INVERSA)

Analizziamo la situazione con  $r = r'$

• matrice iniziale:

$$r \left\{ \left( \begin{array}{c|cc} A & 1_r \\ \hline r & n \end{array} \right) \right. \begin{array}{l} \text{ogni riga dà le coordinate di } b_i \text{ nella base } B' \\ \text{(nella base } B', b_i \text{ ha coord } 1 \ 0 \ \dots \ 0, b'_1 = 1 \cdot b'_1 + 0 \cdot b'_2 + 0 \cdot b'_3 + \dots \\ b'_2 = 0 \cdot b'_1 + 1 \cdot b'_2 + 0 \cdot b'_3 \dots \text{ ecc.} \\ \text{(sia } C \text{ una base di } V, C = \{v_1, \dots, v_n\} \\ [v_i]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_i \text{ perché } v_i = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 1 \cdot v_i + \dots + 0 \cdot v_n \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{sempre coord vettori di } B' \text{ nella base } B \end{array} \right)$$

Alla fine dell'algoritmo (rendendo la parte di sx a gradini ridotti) si ottiene:

$$\left( \begin{array}{c|cc} 1_r & A' \\ \hline \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{il contrario di prima} \\ \text{dove le righe di } A' \text{ sono le coordinate dei vettori della base } B \text{ nella base } B' \\ \text{e si osserva che } A \text{ è invertibile di inversa } A'. \end{array}$$

(quindi, per trovare l'inversa di una matrice: • si giustappone la matrice identità

• si applica l'algoritmo di Gauss per ridurre la matrice originale (a gradini ridotti) • la matrice giustapposta è l'inversa)

### esercizio

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ calcolare l'inverso (se esiste)}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & U & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & U & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) & U & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \\ R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 & \cap & R_3 \rightarrow -\frac{1}{2}R_3 & \cap & R_2 \rightarrow R_2 + 4R_3 & \cap & R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 & & & & & & R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_3 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc} U & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{array} \right) & U \\ \cap & R_1 \rightarrow R_1 - R_3 & \cap \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_3 & & R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 \end{array}$$

$\boxed{\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{array} \right)}$   $\curvearrowleft$  inverso di  $U$

Dalla discussione appena conclusa, traspare:

### Teorema:

Dato  $A \in M_n(K)$ , c'è equivalenza tra:

①  $A \in GL_n(K)$  (A invertibile)

②  $\text{range}(A) = K^n$

③ le righe di A sono una base di  $K^n$

④ le colonne di A sono una base di  $K^n$

OSS: dato una matrice M invertibile, anche la sua trasposta  ${}^t M$  è invertibile (di inversa  ${}^t(M^{-1})$ )

OSS: esiste una nozione di determinante

$$\det: M_n(K) \rightarrow K \quad \text{per ora descritta solo per } n=2$$

• si dimostra ⑤  $A \in M_n(K)$  è invertibile  $\Leftrightarrow \det(A) \in K^\times$

(c'è una formula universale - dato  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)})$$

### def APPLICAZIONE LINEARE

Dati  $V, V'$  due sp. vett./K, un'applicazione  $V \xrightarrow{f} V'$  è detta **lineare** se  $\forall v, v' \in V$  e  $\forall \alpha, \alpha' \in K$ ,

$$\text{si ha } f(\alpha v + \alpha' v') = \alpha f(v) + \alpha' f(v')$$

prodotto scalare  
in  $V$   
addiz.  
di  $V$

(come un **omomorfismo**)

prodotto scalare  
in  $V'$   
addiz.  
di  $V'$

(un'applicazione lineare di spazi vettoriali è

un'omomorfismo di gruppi)

• Se inoltre f è biiettiva, si dice **isomorfismo**

(e se f è un isomorfismo, anche  $f^{-1}$  è un isomorfismo)

gli spazi vettoriali sono gruppi

abeliani con op. di somma vettoriale

### Proposizione

Dati  $V/K$  f.g.,  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  base di  $V$ ,  $V'$  s.v. qualsiasi /K, e  $f: B \rightarrow V'$

Allora  $\exists!$  applicazione lineare  $\tilde{f}: V \rightarrow V'$  t.c.  $\tilde{f}|_B = f$

restrizione  
su B

dim

Siccome B è base,  $\forall v \in V$ ,  $\exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$  t.c.  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$

vett. coordinate su B,  $[v]_B$

Poniamo  $\tilde{f}(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(b_i)$  - è un'applicazione (per unicità di  $\tilde{f}$  quindi il valore  $f(v)$  dipende solo da v)  
 $V \xrightarrow{\tilde{f}} V'$

① Mostriamo che  $\tilde{f}$  è lineare

$$\text{dati } v, v' \in V, \beta, \beta' \in K, \text{ calcolo } \tilde{f}(\beta v + \beta' v') = ?$$

$$\cdot \text{Calcoliamo } [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, [v']_B = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$$

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, v' = \sum_{i=1}^n \alpha'_i b_i, \beta v + \beta' v' = \sum_{i=1}^n (\beta \alpha_i + \beta' \alpha'_i) b_i$$

$$\cdot \tilde{f}(\beta v + \beta' v') = \sum_{i=1}^n (\beta \alpha_i + \beta' \alpha'_i) f(b_i) =$$

$$\cdot \beta \tilde{f}(v) + \beta' \tilde{f}(v') = \beta \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{f}(b_i) + \beta' \sum_{i=1}^n \alpha'_i \tilde{f}(b_i) = \sum_{i=1}^n (\beta \alpha_i + \beta' \alpha'_i) \tilde{f}(b_i) \quad \text{quindi } \tilde{f} \text{ lineare}$$

## ② Mostriamo l'unicità

Supponiamo che  $\exists \hat{f}: V \rightarrow V'$  lineare t.c.  $\hat{f}(b_i) = \tilde{f}(b_i) = f(b_i)$

e mostriamo che  $\hat{f} = \tilde{f}$   
ovvero che  $\hat{f} - \tilde{f} = \emptyset$ .

• Poniamo  $g = \tilde{f} - \hat{f}$ .

$$g(v) = g\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i b_i\right) = \sum_{i=0}^n \alpha_i g(b_i) = \sum_{i=0}^n \alpha_i (\underbrace{\tilde{f}(b_i) - \hat{f}(b_i)}_{=0}) = 0 \Rightarrow g \equiv 0 \Rightarrow \hat{f} = \tilde{f} \blacksquare$$

### Esempio

dato  $V/\mathbb{R}$  di base  $B = (b_1 \dots b_n)$ ,  $V' = \mathbb{R}^n$ ,  $\dim(V) = \dim(V') = n$

• dato  $v \in V$ , posso scrivere in modo unico  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$ .

Poniamo  $f(b_i) = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  pos.

$$\tilde{f}(v) = \sum_i \alpha_i f(b_i) = \sum_i \alpha_i e_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ v \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = [v]_B$$

OSS:

$\tilde{f}$  è un isomorfismo di spazi vettoriali di inverso  $\tilde{f}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} := \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \in V$

ABUSO DI NOTAZIONE: Se  $\tilde{f}$  prolunga  $f: B \rightarrow V$ , allora scriviamo  $f = \tilde{f}$

### Corollario

Se  $\dim_K(V) = n$ , allora  $f: V \rightarrow K^n$  è un isomorfismo

### Immagine e nucleo (def)

data  $f: V \rightarrow V'$  applicazione lineare, poniamo

$$\cdot \text{Ker}(f) = \{v \in V \text{ t.c. } f(v) = \emptyset\} = f^{-1}(\{\emptyset\}) \quad \text{nucleo}$$

$$\cdot \text{Im}(f) = \{v' \in V' : \exists v \in V \text{ t.c. } f(v) = v'\} \quad \text{immagine}$$

### Lemma

$\text{Ker}(f)$  e  $\text{Im}(f)$  sono sottospazi vettoriali di  $V$  e  $V'$  rispettivamente

dim:

È chiaro che si tratta di sottogruppi visto che  $f$  è anche omom. di gruppi.

$V, V'$  sono gruppi abeliani  
con op. addizione vettoriale

Rimane da mostrare che  $\text{Ker}(f)$  e  $\text{Im}(f)$  sono stabili per il prodotto scalare

$\text{Ker}(f)$ :

• Siano  $v \in V, \alpha \in K$ : Sappiamo che  $f(v) = \emptyset \Rightarrow \alpha f(v) = \alpha \emptyset = \emptyset$  (è stabile)

$v \in \text{Ker}(f) \Rightarrow \alpha v \in \text{Ker}(f) \Rightarrow \text{Ker}(f)$  è un sottosp. vett. (definizione 1 sottosp.vett.:  $\text{Ker}(f) \subset V$  e  $\lambda v \in \text{Ker}(f)$ )

$\in K$

$\text{Im}(f)$ :

• Siano  $v \in V'$ ,  $\alpha \in K$ :  $\exists v \in V \text{ t.c. } f(v) = v' \implies \alpha f(v) = \alpha v'$ .

ma  $\alpha f(v) = f(\alpha v) \implies$  il vettore  $\alpha v \in V$  è tale che  $f(\alpha v) = \alpha v' \implies \alpha v' \in \text{Im}(f) \implies \text{Im}(f)$  è un sottosp. vett. di  $V'$ .

OSS: Visto che un omomorfismo è iniettivo solo se il nucleo è nullo,

$\text{Ker}(f) = \emptyset \iff f$  iniettiva

e  $\text{Im}(f) = \emptyset \iff f$  suriettiva

intersezione/unione di sottosp. vett.

• In modo simile, se  $V_1, V_2$  sottosp. vett. di  $V$ , allora  $V_1 \cap V_2$  sottosp. vett. di  $V$

(Come per i sottogruppi)

•  $V_1 \cup V_2$  non è un sottosp. vett.

def SOMMA DI SOTTOSP. VETT.

Dati  $V_1, V_2$  sottospazi vettoriali di  $V$ .

Definiamo

$$V_1 + V_2 = \{v \in V : \exists v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \text{ t.c. } v = v_1 + v_2\}$$