

ALGEBRA

(appunti delle lezioni del professor Pellarin - con note/osservazioni aggiunte)

[https://open.spotify.com/playlist/3zMsGGKjUNlx3DFJ133ex?
si=rGWujY5LSLy7B1vKdUTHnA&pi=e-SkW9gkIWTLG5](https://open.spotify.com/playlist/3zMsGGKjUNlx3DFJ133ex?si=rGWujY5LSLy7B1vKdUTHnA&pi=e-SkW9gkIWTLG5)



Si vuole creare una teoria generale che contenga come esempio \mathbb{Z} e le sue operazioni

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{-} \mathbb{Z} \quad \text{opposto}, \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{+} \mathbb{Z} \quad \text{somma e prodotto (binarie)}$$

l'altro modo di esprimere l'addizione



Ci sono diverse condizioni di compatibilità tra le operazioni:

$$\circ(b+c) = ab+ac, \quad a+b = b+a, \quad a+(b+c) = (a+b)+c$$

def ANELLO es. $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

poi lo chiameremo solo A

Un anello (commutativo unitario) è il dato di una SESTUPLA $(A, +, -, \cdot, 0_A, 1_A)$

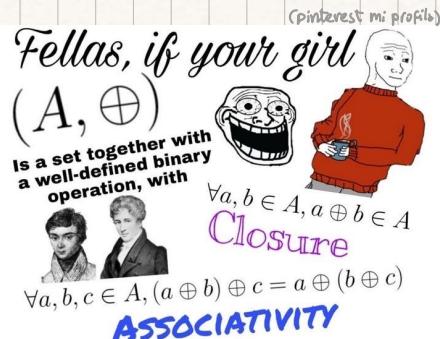
dove:

- $A \longrightarrow$ insieme non vuoto
- $+, - : A \times A \longrightarrow A$ operazioni binarie
- $- : A \longrightarrow A$ opposto
- $0_A \in A$ elemento neutro addizione
- $1_A \in A$ elemento neutro moltiplicazione

questi dati devono soddisfare 8 proprietà:

4 sull'addizione $(A, +, -, 0_A, 1_A)$

- ① $\forall a, b \in A, a+b = b+a$ COMMUTATIVITÀ
- ② $\forall a, b, c \in A, (a+b)+c = a+(b+c)$ ASSOCIAZIATIVITÀ DELLA SOMMA
- ③ $\forall a \in A, a+0_A = 0_A+a = a$ EL. NEUTRO SOMMA
- ④ $\forall a \in A, a+(-a) = 0_A$ (OPPOSTO)



$\exists e \in A : \forall a \in A, e+a = a+e = a$
An identity element
 $\forall a \in A, \exists b \in A : a+b = b+a = e$
Inverse elements
 $\forall a, b \in A, a+b = b+a$ That's not your girl, that's an Abelian group!
and Commutativity

queste 4 proprietà indicano che $(A, +, -, 0_A)$ è un GRUPPO ABELIANO in notazione additiva (gruppi, p.57)

4 sul prodotto $(A, +, -, \cdot, 0_A, 1_A)$:

$$\textcircled{5} \quad \forall a, b, c \in A, a(b \cdot c) = (a \cdot b)c = abc \quad \text{ASSOCIAZIATIVITÀ DEL PRODOTTO}$$

$$\textcircled{6} \quad \forall a, b, c \in A, a(b+c) = ab+ac \quad \text{DISTRIBUTIVITÀ}$$

$$(a+b)c = ac+bc$$

$$\textcircled{7} \quad \forall a \in A, a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a \quad \text{EL. NEUTRO DEL PRODOTTO}$$

rende l'anello "UNITARIO"

$$\textcircled{8} \quad \forall a, b \in A, a \cdot b = b \cdot a \quad \text{COMMUTATIVITÀ DEL PRODOTTO}$$

rende l'anello "COMMUTATIVO"

l'anello $A = \mathbb{Z}$ ha proprietà più specifiche:

BUON ORDINAMENTO E ORDINE TOTALE

- esiste il sottoinsieme $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} \subset \mathbb{Z}$ che permette di definire una relazione su \mathbb{Z} :

si scrive $a > b \iff a - b \in \mathbb{N}^*$

$$\forall a \in \mathbb{Z} \text{ si ha: } \begin{cases} a \in \mathbb{N}^* & \text{è positivo} \\ a = 0 & \text{è nullo} \\ -a \in \mathbb{N}^* & \text{è negativo} \end{cases} \quad (\text{proprietà di tricotomia})$$

- Ogni sottoinsieme $E \subset \mathbb{N}^*$ non vuoto possiede un più piccolo elemento per

$\langle \exists c \in E \text{ tc. } \forall e \in E \setminus \{c\} \text{ si ha } e > c \rangle \text{ BUON ORDINAMENTO}$

un anello commutativo e unitario che soddisfa le proprietà di tricotomia e buon ordinamento "è essenzialmente" \mathbb{Z}

- se $a < b \quad c < d$ allora $a+c < b+d$ e $-a > -b$ allora l'operazione + e > sono compatibili in modo simile, c'è compatibilità tra \circ e $>$

legge di cancellazione in \mathbb{Z}

Se $ab = ac$ con $a \neq 0$ allora $b=c$.

altrimenti basta mult per -1 entrambi le parti

Infatti, supponendo $a > 0$

Induzione su $a \geq 1$

• $a=1$ è chiaro perché 1 è l'el. neutro

• Supponiamo per ip. induttiva che $a > 1$ e $(a-1)b = (a-1)c$

Supponiamo x ass. che $b \neq c$. Allora $\circ b > c \circ b < c$. Supponiamo $b > c \implies (a-1)b + b > (a-1)c + c$

tricotomia

premessa $ab = ac$

$\circ b > ac$, che è impossibile
quindi necessariamente $b=c$

def ELEMENTI INVERTIBILI dato A anello $1_A \neq 0_A$

$a \in A$ t.c. $\exists b \in A : ab = ba = 1_A$ (a) è detto elemento invertibile.

(si dice che b è inverso di a e si scrive $b = a^{-1}$)

es. se a è invertibile allora a^{-1} è unicamente determinato

inverso di a : el che, moltiplicato per a , dà 1_A

es. 1_A è invertibile di inverso $1_A^{-1} = 1_A$

$$a \cdot b = a \cdot b' = 1 \text{ con } b, b' \in A$$

deve essere =

$$\begin{aligned} \text{allora } (a \cdot b) b' &= 1_A \cdot b' = b' \\ \text{quindi } (2) &\xrightarrow{(3)} \text{uguali} \\ (a \cdot b') b &= 1_A \cdot b = b \\ \text{quindi } (2) &\xrightarrow{(1)} \text{uguali} \\ (a \cdot b) b' &= a(b \cdot b') = a(b' \cdot b) = ab' \cdot b \end{aligned}$$

Si pone $A^\times = \{a \in A \text{ t.c. } a \text{ è invertibile}\}$ A^\times è un gruppo

verificare ① A^\times è non vuoto ② se $a \in A^\times$ allora $a^{-1} \in A^\times$

③ se $a, b \in A^\times$ sono invertibili, allora $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

④ $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$

esercizio $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1)$ è un anello (cu). Calcolare l'insieme degli elementi invertibili

risposta: $\mathbb{Q}^\times = \{r \in \mathbb{Q}; r \neq 0\}$ $[1] = [1_A]$

PICCOLI ESEMPI

① $\forall a \in A, a \cdot 0_A = 0_A$

$$\begin{aligned} a \cdot 0_A &= a \cdot (\underbrace{0_A + (-0_A)}_{\text{assioma}}) = a \cdot 0_A + a \cdot (-0_A) \\ &= a \cdot 0_A + (-a \cdot 0_A) \\ &= a \cdot 0_A + \left(-(\underbrace{a \cdot 0_A}_{\text{elemento} + \text{il suo opposto quindi } a \cdot 0_A = 0_A})\right) \\ &= 0_A \text{ x assioma} \end{aligned}$$

② Supponiamo $0_A = 1_A$.

Mostriamo che $\forall a \in A, a = 0_A = 1_A$ ($A = \{0_A\}$)

$$a \in A : 1_A = 0_A \implies \underbrace{a \cdot 1_A}_{=a} = \underbrace{a \cdot 0_A}_{0_A} \text{ quindi, } \forall a, a = 0_A$$

③ se $1_A \neq 0_A$ allora $0_A \notin A^\times$.

Supponiamo per assurdo $\exists x \in A^\times$ t.c. $1_A = x \cdot 0_A = 0_A$ contraddizione

gli assiomi implicano che 0_A non è mai invertibile

Si pone $A^\times = \{a \in A \text{ t.c. } a \text{ è invertibile}\}$ A^\times è un gruppo

verificare ① A^\times è non vuoto ② se $a \in A^\times$ allora $a^{-1} \in A^\times$

③ se $a, b \in A^\times$ sono invertibili, allora $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

④ $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$

① A^\times non è vuoto.

Abbiamo visto che 1_A è sempre invertibile e $1_A \in A$ per def. di omessa comm. un. (semplice)

quindi, $1_A \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$

② se $a \in A^\times$ allora $a^{-1} \in A^\times$

vista in classe
se $a \in A^\times$, vuol dire che \exists unicamente determinato $b \in A : ab = ba = 1_A$.

Supponiamo per assurdo che $b \notin A^\times$.

se $b \notin A^\times$, $\nexists x \in A \text{ t.c. } bx = xb = 1_A$. ma questo è falso. esiste ed è a .

$\forall x \in A, bx = xb \neq 1_A$ falso per a

③ se $a, b \in A^\times$, allora $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \Leftrightarrow a^{-1}b^{-1} \cdot ab = 1_A \quad (\text{per definizione})$$

$$\Leftrightarrow a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot a \cdot b = 1_A \quad \text{se } a^{-1}b^{-1} \cdot ab = 1_A$$

e $(a \cdot b)^{-1} \cdot ab = 1_A$ allora $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

visto che $a^{-1} \cdot a = 1_A$ e $b^{-1} \cdot b = 1_A$

$$a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot a \cdot b \quad \begin{matrix} \text{commutatività} \\ \text{e associtività} \end{matrix} \quad (a \cdot a^{-1}) \cdot (b \cdot b^{-1}) = 1_A$$

$$1_A \cdot 1_A = 1_A \quad \text{vero perché } 1_A \text{ id.}$$

neutro della mult.

quindi $x \cdot 1_A = 1_A$

④ $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$

• dimostriamo $1, -1 \in \mathbb{Z}^\times$

① su \mathbb{Z} , $1_A = 1$. Visto che 1_A è sempre invertibile, $1 \in \mathbb{Z}^\times$

② $-1 = -(-1)$ se $-1^{-1} = 1$, allora $-(-1)^{-1} = -(-1)$ moltiplica per -1 da entrambe le parti
quindi $-1 \in \mathbb{Z}^\times$ e $-1^{-1} = -1$

③ dimostriamo che $\forall x \in \mathbb{Z}, x \notin \{1, -1\} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}^\times$

Supponiamo per assurdo $x \in \mathbb{Z}, x \notin \{1, -1\}, x \in \mathbb{Z}^\times$

Allora $x \cdot y = 1_A$. su \mathbb{Z} , $1_A = 1$, quindi $x \cdot y = 1$

Ma, su \mathbb{Z} , le uniche coppie che moltiplicate danno 1 sono $(-1, -1)$ e $(1, 1)$

Per ipotesi, $x \notin \{1, -1\}$, quindi CONTRADDIZIONE

esercizio $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1)$ è un anello (cu). Calcolare $\mathbb{Q}^{\times} = \{x \in \mathbb{Q} : x \text{ è invertibile}\}$

- invertibili: $\exists x \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } \exists y \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } xy = 1$

- in \mathbb{Q}^{\times} , $1_A = 1$.

quindi $\exists x \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } \exists y \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } xy = 1$

① dimostriamo che $0 \notin \mathbb{Q}^{\times} \rightarrow 0 = 0_A \in \mathbb{Q}_A \text{ e } 0_A \text{ non è invertibile per definizione}$
(ma, comunque, basta fare: $0 \cdot y = 1$ impossibile perché $0 \cdot y = 0$)

② dimostriamo che $\forall q \in \mathbb{Q}, q \neq 0, q \in \mathbb{Q}^{\times}$

$qx = 1 \iff x = \frac{1}{q} \text{ e } \frac{1}{q} \in \mathbb{Q}$. Trovato x t.c. $qx = 1$ (per vedere inviamente che $x \neq 0$ non va)
perché $\frac{1}{0}$ impossibile
(non sono sicura che questo basti, ngl.)

esercizio: c'è un unico elemento neutro

Siamo v, v' due elementi neutri per la moltiplicazione

$$\begin{array}{lll} \forall a \in A \quad av = ua = a & \text{con } a = v & vv' = v'u = v \\ \quad av' = u'a = a & \text{con } a = v' & v'u \cancel{=} vv' = v' \end{array} \quad \text{quindi } v = v'$$

Dedurre che anche l'elemento neutro per l'addizione è unicamente determinato

Relazione di divisibilità

Introduciamo la relazione: $a, b \in A : a|b \iff \exists c \in A \text{ t.c. } b = a \cdot c$.

$$2|6 : 6 = 2 \cdot 3$$

• è una relazione **riflessiva**: $\forall a \in A, a = a \cdot 1_A$

• è una relazione **transitiva**: $a, b, c \in A$ supponiamo $a|b \iff b = a \cdot a' \exists a' \in A$

• Non è simmetrica né antisimmetrica
ma su N^* è antisimmetrica

$$b|c \iff c = b \cdot b' \exists b' \in A$$

$$\Rightarrow c = a \cdot a' \cdot b' = a(\underbrace{a' \cdot b'}_{a''}) \Rightarrow c = a \cdot a'' \iff a|c$$

• se $a|b \wedge a|c$ allora $a|b+c$ (compatibilità)

$$a|b \iff \exists a' \text{ t.c. } b = a \cdot a' \quad a|c \iff \exists a'' \in A \text{ t.c. } c = a \cdot a''$$

$$b+c = a \cdot a' + a \cdot a'' = a \underbrace{(a'+a'')}_{a'''} \iff a|b+c$$

più generalmente, se $\alpha, \beta \in A$, $\alpha|b, \alpha|c \Rightarrow \alpha|b+\beta c$ (la dimostrazione è banale)

$$\alpha b + \beta c = \alpha \cdot a \cdot a' + \beta \cdot a \cdot a'' = a \underbrace{(\alpha a' + \beta a'')}_{a'''}$$

dim. $\alpha, \beta \in A$

$\alpha|b, \alpha|c \Rightarrow \alpha|a \alpha b + \beta c$

• $\alpha|b \Rightarrow \alpha|\alpha b$ per def. di moltiplicazione

• $\alpha|c \Rightarrow \alpha|\beta c$

per la dim. d. compatibilità, $\alpha|\alpha b + \beta c$

In \mathbb{Z} la relazione di divisibilità è quasi antisimmetrica:

ignoriamo il caso 0

$$a, b \in \mathbb{Z} \quad a|b \wedge b|a \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z}^* \text{ t.c. } a = bc \quad (\text{ovvero } a \in \{b, -b\} \cup \{0, -0\} = \{b, -b\})$$

0) $|1 \Rightarrow 1 = 0 \cdot b$ 0 non divide mai un el. non nullo quindi possiamo supporre $a, b \neq 0$

$$a|b, b|a \Rightarrow b = a \cdot a', a = b \cdot b' \exists a, b \in \mathbb{Z}$$

$$b = b \cdot a' \cdot b' \quad \text{con } b \neq 0, \text{ legge di cancellazione} \quad b' = b \cdot a' \cdot b' \Rightarrow 1 = a' \cdot b' \Rightarrow a' \cdot b' \in \{1, -1\}$$

$$\Rightarrow \{a, -a\} = \{b, -b\}$$

• non è simmetrica \rightarrow supponiamo $a|b$ simmetrica. Allora $a|b$ ($\exists c \text{ t.c. } b = a \cdot c$) $\Rightarrow b|a$ ($\exists c' \text{ t.c. } a = b \cdot c'$)

$$\text{quindi, } b = b \cdot c' \cdot c \quad \text{con } b \neq 0 \quad b = b \cdot c' \cdot c \iff 1 = c \cdot c' \iff (c, c') \in \{(1, 1), (-1, -1)\}$$

oppure, con esempio: $2|4$ ma $4 \not| 2$

• non è antisimmetrica: se fosse antisimmetrica, $a|b \wedge b|a \Rightarrow a = b$

ma (ragionamento di prima) $1 = c'c \iff (c, c') \in \{(1, 1), (-1, -1)\}$

$$\begin{cases} (c', c) = (1, 1) \Rightarrow b = a \\ (c', c) = (-1, -1) \Rightarrow b = -a \end{cases}$$

def elemento irriducibile

invertibili

$\alpha \in A \setminus A^\times$ è detto irriducibile se

$\forall b, c \in A, \alpha = bc \Rightarrow b \in A^\times \text{ o } c \in A^\times$

es. $A = \mathbb{Z}$ $12 = 4 \cdot 3$ ma $4, 3 \notin \mathbb{Z}^\times \Rightarrow 12$ non è irr.

$$7 = 1 \cdot 7 = 7 \cdot 1 = -1 \cdot -7 = -7 \cdot -1 \quad 7 \text{ è irriducibile}$$

$1 \in \mathbb{Z}$ non è irriducibile perché abbiamo definito $\alpha \in A \setminus A^\times$

def numero primo

invertibili

$\alpha \in A \setminus A^\times, \alpha \neq 0$ è detto primo se

$\forall b, c \in A, \text{ se } \alpha | bc \Rightarrow \alpha | b \text{ oppure } \alpha | c$

Supponiamo $A = \mathbb{Z}$

lemma $p \in \mathbb{Z}$ primo $\Rightarrow p$ è irriducibile

dim p primo, siano $a, b \in \mathbb{Z}$ t.c. $p = ab \Rightarrow p | a \cdot b$

$$ab = p \cdot 1$$

Supponiamo senza perdita di generalità $p | a$

$$\text{sost. } a = p a'$$

$$p | a \Rightarrow a = p a' \exists a' \in \mathbb{Z} \Rightarrow p = p a' b \quad \begin{matrix} \text{legge di} \\ \text{concessione} \end{matrix} \quad p = p(a'b) \Leftrightarrow 1 = a'b \Rightarrow a', b \in \{+1, -1\} = \mathbb{Z}^\times$$

Se $a' = 1$ allora $a = p \Rightarrow p = pb \Rightarrow b = 1$

Se $a' = -1$ allora $a = -p \Rightarrow p = p - b \Rightarrow -b = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow p$ è irriducibile

!! ogni modo di scriverlo come
 $p = ab$ porta ad $a, b \in \{-1, 1\}$
 $A^\times \text{ in } \mathbb{Z}$

def valore assoluto

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{1.1}} \mathbb{N} \quad a \in \mathbb{Z} \quad \bullet \text{ se } a = 0 \quad |a| = 0$$

- se $a \neq 0, |a| =$ l'unico elemento di \mathbb{N} contenuto nell'insieme
di due elementi $\{a, -a\}$

ALGORITMO DELLA DIVISIONE EUCLIDEA

$a, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ allora esistono unicamente determinati

$q \in \mathbb{Z}, r \in \{0, \dots, |n|-1\}$ t.c. $a = nq + r$

resto
quoziente

è una riformulazione
del principio del minimo su \mathbb{N}

def CONGRUENZA

b è il resto di $\frac{2}{3}n$

$$a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid a - b \quad (\text{n divide } a - b \text{ il resto})$$

$$\iff \exists q \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } d-b = qn$$

ovvero, il resto della divisione escluse di $a - b$ per n è 0

- La congruenza modulo n è di equivalenza

④ **Transitiv:** $a \equiv b \pmod{n}$ \wedge $b \equiv c \pmod{n} \iff n \mid b-a \wedge n \mid c-b$

$$n|\alpha: n|\beta \Rightarrow n|\alpha+\beta \quad n|c-b+b-\delta \Rightarrow n|c-\delta \Leftrightarrow \delta \equiv c \pmod{n}$$

Scw. rifl. e simm.

$$\mathbb{Z}_{\equiv \text{mod } n} = \left\{ \begin{matrix} n\mathbb{Z}, & n\mathbb{Z}+1, & \dots, & n\mathbb{Z}+n-1 \\ [0] & [1] & & [n-1] \\ & & & [n-1] \end{matrix} \right\}$$

② riflessiva : $\delta = \delta \bmod n$ $n | \delta - \delta$ vero perché $\forall x \in \mathbb{Z}, x \neq 0, x | 0$

$$\textcircled{3} \text{ simmetria: } a \equiv_n b \implies b \equiv_n a \quad n | a - b \implies n | b - a$$

$$n > -b \iff a - b = qn \iff -(a - b) = -(qn) \iff b - a = -qn \quad \text{quindi } n | b - a$$

Esempi: congruenze modulo 2

$$\mathbb{Z} = \underbrace{2\mathbb{Z}}_{[0]} \sqcup \underbrace{2\mathbb{Z} + 1}_{[1]} \quad \mathbb{Z}/\equiv_{\text{mod}_2} = \{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} + 1\}$$

congruenza mod. 3

$$\mathbb{Z}_{\equiv_{\text{mod } 3}} = \{ [3]_3, [1]_3, [2]_3 \}$$

$$\mathbb{Z}/\equiv_n = \mathbb{Z}_{n\mathbb{Z}} \quad n > 0 \quad \text{insieme quoziente}$$

di \mathbb{Z} su congr. modulo n

l'componente
mod. n

quindi $\mathbb{Z}_{2\mathbb{Z}} = \{[0], [1]\}$ $\mathbb{Z}_{3\mathbb{Z}} = \{[0], [1], [2]\}$ $\mathbb{Z}_{1\mathbb{Z}} = \{[0]\}$

tutti gli interi

$[2]_3 = \{m \in \mathbb{Z} : m \equiv 2 \pmod{3}\} = \{m \in \mathbb{Z} : 3 | m-2\}$

Le operazioni: + - di \mathbb{Z} sono compatibili con \equiv_n ($n > 0$)

① $\forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{Z}, \alpha \equiv \alpha' \pmod{n} \iff -\alpha \equiv -\alpha' \pmod{n}$ compatibilità con opposto

② $\forall \alpha, \alpha', b, b' \in \mathbb{Z}, \alpha \equiv_n \alpha', b \equiv_n b' \Rightarrow \alpha + b \equiv_n \alpha' + b'$ comp. con somma

③ $\forall \alpha, \alpha', b, b' \in \mathbb{Z}, \alpha \equiv_n \alpha', b \equiv_n b' \Rightarrow \alpha b \equiv_n \alpha' b'$ comp. con prodotto

dim. ②

$$2 \mid 5-1 \quad \text{e} \quad 2 \mid 1-5$$

$$\alpha \equiv_n \alpha' \iff n \mid \alpha - \alpha' \quad \text{e} \quad n \mid \alpha' - \alpha$$

$$n \mid b' - b \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \underline{\alpha'} - \underline{\alpha} = nk$$

$$n \mid b' - b \iff \exists k' \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \underline{b'} - \underline{b} = nk'$$

Dove ottenere $\alpha + b \equiv_n \alpha' + b'$

sommare le due formule

$$\Rightarrow \underline{\alpha'} + \underline{b'} - (\underline{\alpha} + \underline{b}) = n(k+k') \iff \alpha' + b' \equiv_n \alpha + b$$

quindi $n(\alpha' + b') - \alpha + b$
(perché $n \cdot \text{qualcosa} = \text{quello}$)

dim. ①

$$\forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{Z}, \alpha \equiv_n \alpha' \iff -\alpha \equiv_n -\alpha'$$

$$\alpha \equiv_n \alpha' \iff n \mid \alpha - \alpha' \iff \alpha - \alpha' = qn \iff -\alpha + \alpha' = -qn$$

dim. ③

$$\forall \alpha, \alpha', b, b' \in \mathbb{Z}, \alpha \equiv_n \alpha', b \equiv_n b' \Rightarrow \alpha b \equiv_n \alpha' b'$$

ovvero $\alpha b - \alpha' b' = kn \quad \text{o} \quad \alpha b = kn + \alpha' b'$

$$\alpha = qn + \alpha' \quad \text{e} \quad b = q'n + b' \quad \text{quindi } \alpha b = (\alpha + qn)(b + q'n) = \alpha b' + n(q'b' + \alpha'q' + qq'n)$$

$\alpha b = \alpha' b' + n(k)$

OPERATORI

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ definiamo $[\alpha] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $[\alpha] = \alpha + n\mathbb{Z}$ insieme degli interi che si esprimono come $\alpha +$ multiplo di n (interi che hanno come resto α)

- $[\alpha] := [-\alpha]$ questa funz. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è ben definita: opposto in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

definiamo

• $[\alpha] + [b] := [\alpha + b]$ ben definito (ovvero indipendente dalla scelta di rapp. di $[\alpha] \in [b]$)

$$\text{scelgiamo } \alpha' \in [\alpha] \quad \text{e } b' \in [b] \quad \text{e calcoliamo } [\alpha' + b'] = \left\{ m : n \mid m - \alpha' - b' \right\} = \left\{ m : n \mid m - (\alpha' + b') \right\}$$

per (2), perché $[\alpha] = [\alpha']$
quindi $\alpha \equiv \alpha' \pmod{n}$
e stessa cosa per b

$\Leftrightarrow [\alpha + b] = [\alpha' + b']$ l'operazione + introdotta su $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è ben definita

$$\text{esempi: } [1]_3, [2]_3 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \quad [1] + [2] = [3] = [0]$$

$$\text{altri rapp. } [1] = [4] \quad [2] = [-4]$$

$$\text{quindi } [4 + -4] = [0]$$

• definiamo inoltre $[\alpha], [b] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $[\alpha] \cdot [b] = [\alpha b]$ ben definito

$$\text{scelgiamo } \alpha' \in [\alpha] \quad \text{e } b' \in [b], \quad [\alpha b] = \left\{ m : n \mid m - \alpha' b' \right\} \xrightarrow{\text{ma } \alpha' = n\alpha \text{ e } b' = nb} = \left\{ m : n \mid m - nb\alpha \right\}$$

- quindi, per (3)

$$\text{esempi: } [1]_3, [2]_3 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \quad [1] \cdot [2] = [2]$$

$$\text{e } [4 \cdot -4] = [-16] = [2] \quad \begin{aligned} &\text{- perché } \frac{2}{3} = 0 \text{ resto } 2 \\ &\text{e } \frac{-16}{3} = -6 \text{ resto } 2 \end{aligned}$$

TEOREMA

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, -, \cdot, [0], [1])$ è un ANELLO (comm. un.)

alcuni sottoinsiemi di \mathbb{Z}

• $n\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ con } m = kn\}$ multipli di n

• $\mathbb{Z} \setminus \{0\} = \mathbb{Z}^*$

• $\alpha\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} := \{m \in \mathbb{Z} : \exists k, k' \in \mathbb{Z} \text{ con } m = k\alpha + k'b\}$ multipli di $\alpha +$ multipli di b

$$2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \left\{ \begin{array}{c} 0, 2, 4, \\ \text{mod. 2} \end{array}, \begin{array}{c} 3, 6, 9, \\ \text{mod. 3} \end{array}, \begin{array}{c} 5, 8, \\ 2+3 \end{array}, \begin{array}{c} 7, -1, 1, \dots \\ 2+6 \end{array} \right\} = \mathbb{Z}$$

vedremo $\alpha\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \text{MCD}(\alpha, b)\mathbb{Z}$

in particolare $\text{MCD}(2, 3) = 1 \quad 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z}$

• (visto dopo ma utile) invertibili in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

con $n \in \mathbb{N}$,

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \left\{ [\alpha] : \alpha \in \mathbb{Z} \text{ e } \text{MCD}(\alpha, n) = 1 \right\}$$

le classi dei coprimi di n

2	-7	-4	-1	2	5
0	-9	-6	-3	0	3
-2	-11	-8	-5	-2	1
-4	-13	-10	-7	-4	-1
-6	-15	-12	-9	-6	-3
-8	-17	-14	-11	-8	-5
-10	-19	-16	-13	-10	-7
-12	-21	-18	-15	-12	-9
-14	-23	-20	-17	-14	-11
-16	-25	-22	-19	-16	-13
-18	-27	-24	-21	-18	-15
-20	-29	-26	-23	-20	-17
-22	-31	-28	-25	-22	-19
-24	-33	-30	-27	-24	-21
-26	-35	-32	-29	-26	-23
-28	-37	-34	-31	-28	-25
-30	-39	-36	-33	-30	-27
-32	-41	-38	-35	-32	-29
-34	-43	-40	-37	-34	-31
-36	-45	-42	-39	-36	-33
-38	-47	-44	-41	-38	-35
-40	-49	-46	-43	-40	-37
-42	-51	-48	-45	-42	-39
-44	-53	-50	-47	-44	-41
-46	-55	-52	-49	-46	-43
-48	-57	-54	-51	-48	-45
-50	-59	-56	-53	-50	-47
-52	-61	-58	-55	-52	-49
-54	-63	-60	-57	-54	-51
-56	-65	-62	-59	-56	-53
-58	-67	-64	-61	-58	-55
-60	-69	-66	-63	-60	-57
-62	-71	-68	-65	-62	-59
-64	-73	-70	-67	-64	-61
-66	-75	-72	-69	-66	-63
-68	-77	-74	-71	-68	-65
-70	-79	-76	-73	-70	-67
-72	-81	-78	-75	-72	-69
-74	-83	-80	-77	-74	-71
-76	-85	-77	-74	-71	-68
-78	-87	-74	-71	-68	-65
-80	-89	-71	-68	-65	-62
-82	-91	-68	-65	-62	-59
-84	-93	-65	-62	-60	-57
-86	-95	-62	-59	-56	-53
-88	-97	-59	-56	-53	-50
-90	-99	-56	-53	-50	-47
-92	-101	-53	-50	-47	-44
-94	-103	-50	-47	-44	-41
-96	-105	-47	-44	-41	-38
-98	-107	-44	-41	-38	-35
-100	-109	-41	-38	-35	-32
-102	-111	-38	-35	-32	-29
-104	-113	-35	-32	-29	-26
-106	-115	-32	-29	-26	-23
-108	-117	-29	-26	-23	-20
-110	-119	-26	-23	-20	-17
-112	-121	-23	-20	-17	-14
-114	-123	-20	-17	-14	-11
-116	-125	-17	-14	-11	-8
-118	-127	-14	-11	-8	-5
-120	-129	-11	-8	-5	-2
-122	-131	-8	-5	-2	-1
-124	-133	-5	-2	-1	-4
-126	-135	-2	-1	-4	-7
-128	-137	-1	-4	-7	-10
-130	-139	-4	-7	-10	-13
-132	-141	-7	-10	-13	-16
-134	-143	-10	-13	-16	-19
-136	-145	-13	-16	-19	-22
-138	-147	-16	-19	-22	-25
-140	-149	-19	-16	-22	-28
-142	-151	-16	-19	-22	-31
-144	-153	-19	-16	-22	-34
-146	-155	-16	-19	-22	-37
-148	-157	-19	-16	-22	-40
-150	-159	-16	-19	-22	-43
-152	-161	-19	-16	-22	-46
-154	-163	-16	-19	-22	-49
-156	-165	-19	-16	-22	-52
-158	-167	-16	-19	-22	-55
-160	-169	-19	-16	-22	-58
-162	-171	-16	-19	-22	-61
-164	-173	-19	-16	-22	-64
-166	-175	-16	-19	-22	-67
-168	-177	-19	-16	-22	-70
-170	-179	-16	-19	-22	-73
-172	-181	-19	-16	-22	-76
-174	-183	-16	-19	-22	-79
-176	-185	-19	-16	-22	-82
-178	-187	-16	-19	-22	-85
-180	-189	-19	-16	-22	-88
-182	-191	-16	-19	-22	-91
-184	-193	-19	-16	-22	-94
-186	-195	-16	-19	-22	-97
-188	-197	-19	-16	-22	-100
-190	-199	-16	-19	-22	-103
-192	-201	-19	-16	-22	-106
-194	-203	-16	-19	-22	-109
-196	-205	-19	-16	-22	-112
-198	-207	-16	-19	-22	-115
-200	-209	-19	-16	-22	-118
-202	-211	-16	-19	-22	-121
-204	-213	-19	-16	-22	-124
-206	-215	-16	-19	-22	-127
-208	-217	-19	-16	-22	-130
-210	-219	-16	-19	-22	-133
-212	-221	-19	-16	-22	-136
-214	-223	-16	-19	-22	-139
-216	-225	-19	-16	-22	-142
-218	-227	-16	-19	-22	-145
-220	-229	-19	-16	-22	-148
-222	-231	-16	-19	-22	-151
-224	-233	-19	-16	-22	-154
-226	-235	-16	-19	-22	-157
-228	-237	-19	-16	-22	-160
-230	-239	-16	-19	-22	-163
-232	-241	-19	-16	-22	-166
-234	-243	-16	-19	-22	-169
-236	-245	-19	-16	-22	-172
-238	-247	-16	-19	-22	-175
-240	-249	-19	-16	-22	-178
-242	-251	-16	-19	-22	-181
-244	-253	-19	-16	-22	-184
-246	-255	-16	-19	-22	-187
-248	-257	-19	-16	-22	-190
-250	-259	-16	-19	-22	-193
-252	-261	-19	-16	-22	-196
-254	-263	-16	-19	-22	-199
-256	-265	-19	-16	-22	-202
-258	-267	-16	-19	-22	-205
-260	-269	-19	-16	-22	-208
-262	-271	-16	-19	-22	-211
-264	-273	-19	-16	-22	-214
-266	-275	-16	-19	-22	-217
-268	-277	-19	-16	-22	-220
-270	-279	-16	-19	-22	-223
-272	-281	-19	-16	-22	-226
-274	-283	-16	-19	-22	-229
-276	-285	-19	-16	-22	-232
-278	-287	-16	-19	-22	-235
-280	-289	-19	-16	-22	-238
-282	-291	-16	-19	-22	-241
-284	-293	-19	-16	-22	-244
-286	-295	-16	-19	-22	-247
-288	-297	-19	-16	-22	-250
-290	-299	-16	-19	-22	-253
-292	-301	-19	-16	-22	-256
-294	-303	-16	-19	-22	-259
-296	-305	-19	-16	-22	-262
-298	-307	-16	-19	-22	-265
-300	-309	-19	-16	-22	-268
-302	-311	-16	-19	-22	-271
-304	-313	-19	-16	-22	-274
-306	-315	-16	-19	-22	-277
-308	-317	-19	-16	-22	-280
-310	-319	-16	-19	-22	-283
-312	-321	-19	-16	-22	-286
-314	-323	-16	-19	-22	-289
-316	-325	-19	-16	-22	-292
-318	-327	-16	-19	-22	-295
-320	-329	-19	-16	-22	-298
-322	-331	-16	-19	-22	-301
-324	-333	-19	-16	-22	-304
-326	-335	-16	-19	-22	-307
-328	-337	-19	-16	-22	-310
-330	-339	-16	-19	-22	-313
-332	-341	-19	-16	-22	-316
-334	-343	-16	-19	-22	-319
-336	-345	-19	-16	-22	-322
-338	-347	-16	-19	-22	-325
-340	-349	-19	-16	-22	-328
-342	-351	-16	-19	-22	-331
-344	-353	-19	-16	-22	-334
-346	-355	-16	-19	-22	-337
-348	-357	-19	-16	-22	-340
-350	-359	-16	-19	-22	-343
-352	-361	-19	-16	-22	-346
-354	-363	-16	-19	-22	-349
-356	-365	-19	-16	-22	-352
-358	-367	-16	-19	-22	-355
-360	-369	-19	-16	-22	-358
-362	-371	-16	-19	-22	-361
-364	-373	-19	-16		

La divisibilità è una relazione di inclusione di sottoinsiemi

$$a, b \in \mathbb{Z}^* \quad a|b \iff b \mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} \quad \text{solo se i multipli di } b \text{ sono un sott. dei multipli di } a$$

• Supponiamo $a|b$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } b = ka$$

se $a|b$, allora
ogni multiplo di b può essere riscritto
come $b \cdot$ qualcosa. Ma, per def di $|$, $b = a \cdot$ qualcosa.
quindi, un multiplo di b è un multiplo di a

per definizione, $b = ka \Rightarrow b' = \underbrace{l}_{l'} \underbrace{ka}_{= l'a} = l'a \iff b' \in a\mathbb{Z}$

dimostriamo $b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} \Rightarrow a|b$

• Supponiamo $b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$

$$\text{allora } \forall b' \in b\mathbb{Z}, b' \in a\mathbb{Z}. \text{ Per definizione, } b' \in a\mathbb{Z} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } b' = ka$$

$$\text{ma } b' = lb. \text{ Quindi, } lb = ka \iff b = \underbrace{k}_{k'} \underbrace{l}_{l'} a \text{ quindi } b = ka \blacksquare$$

Lemma: $E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ con $a, b \neq 0$, allora $\exists! \delta \in \mathbb{N}^*$ t.c. $E = \delta\mathbb{Z}$

tutte le
combinazioni sono
multiple di un certo
numero unico

dimostrazione

el. d: $E > 0$

poniamo $E^* := E \cap \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}^*$

• osserviamo che $E^* \neq \emptyset$

- infatti, se $a, b > 0$, esiste una coppia $(k, k') \in \mathbb{N}^2$ t.c. $k_a + k'b > 0$

$\in E^*$

- se invece $a > 0$ e $b < 0$, $\exists (k, k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ t.c. $k_a + k'b > 0$

(e, per $a < 0$, $b > 0$ $\exists (k, k') \in -\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e per $a < 0$, $b < 0$ $\exists (k, k') \in -\mathbb{N} \times -\mathbb{N}$)

• poniamo $\delta = \min(E^*)$ ben definito in \mathbb{N}^* (principio del minimo)

• osserviamo che $\delta \leq |a|$ e $\delta \leq |b|$

infatti $|a| \in E^*$ (perché $E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$) $\subset \delta = \min(E^*)$

• per la DIVISIONE EUCLIDEA $a = q\delta + r$, $r \in \{0, 1, \dots, \delta-1\}$

notiamo che $r = a - q\delta$

$a \in E$, $\delta \in E^* \subset E \implies \delta = ua + vb$ con $u, v \in \mathbb{Z}$

sempre per
 $E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$

quindi $r = a - q(ua + vb) \iff r = a - qua - qvb \iff r = \underbrace{a(1-qu)}_k + b(-qv) \quad$ quindi $r = ak + bk' \iff r \in E$

Ci sono 2 opzioni: ① $r = 0$, $\delta | a$ ($a = q\delta + r$) e abbiamo finito

per $\delta = \min(E^*)$

② altrimenti, $r > 0$ e $r \in E^*$. Se fosse vero, $r \geq \delta$. Ma questo è impossibile per $a = q\delta + r$ con $r \in \{0, 1, \dots, \delta-1\}$

$r \neq \delta$

quindi necessariamente $r = 0$ e $\delta | a$. Per la stessa ragione, $\delta | b$.

• $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $\delta | \alpha a + \beta b \implies E \subset \delta\mathbb{Z}$ per la dim sopra ($a | b \iff b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$)

d'altronde, $\delta \in E \iff \delta = ka + kb'$

$\forall l \in \mathbb{Z}$, $l\delta = lk a + lk' b \implies l\delta \in E$

se i multipli di δ sono

elementi di E , allora $\Rightarrow \delta\mathbb{Z} \subset E$

$\delta\mathbb{Z}$ è contenuto in E
(per def $=$)

QUINDI, visto che $E \subset \delta\mathbb{Z}$ e $E \supset \delta\mathbb{Z}$, $E = \delta\mathbb{Z}$

cosa abbiamo fatto? POSTI: $E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ con $a, b \neq 0$ • $E^* = E \cap \mathbb{N}^*$ (dimostrato $E \neq \emptyset$) • $\delta = \min(E^*)$

notiamo che

• a e b si può riscrivere come $a = q\delta + r$. Questo implica che $r < \delta-1$ (per questioni resto)

• e che $r \in E$, perché $\delta = ua + vb$ e $r = a - q\delta \iff r = a - (ua + vb)$ che porta a $r = \underbrace{a(1-qu)}_k + b(-qv)$

• r può essere $0 > 0 = 0$. Ma se fosse > 0 , dovrebbe essere anche $< \delta-1$ per def resto e $\delta = \min$, il che è IMPOSSIBILE
quindi, $r = 0 \Rightarrow$ abbiamo dimostrato che $\delta | a$ (e $\delta | b$)

δ divide i numeri di $E \iff$ formati da $\alpha a + \beta b$

ora: visto che $\delta | a$ e $\delta | b$, $\delta | a+b$ e $\delta | \alpha a + \beta b$. Questo implica $\delta\mathbb{Z} \supset E$

e, visto che $\delta \in E$ allora i suoi multipli $\in E$. Questo implica $\delta\mathbb{Z} \subset E$

quindi, $\delta\mathbb{Z} \subset E$ e $\delta\mathbb{Z} \supset E \iff \delta\mathbb{Z} = E$

MASSIMO COMUN DIVISORE

data $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con $(a, b) \neq (0, 0)$

def $d \in \mathbb{N}$ è MCD di a e b se:

$$\textcircled{1} \quad d | a \text{ e } d | b$$

\textcircled{2} se $d' \in \mathbb{N}$ t.c. $d'|a$ e $d'|b$, allora $d'|d$ ogni divisore di a e b
divide anche d

Lemma:

se d soddisfa \textcircled{1} e \textcircled{2}, allora è unico.

dim.

Supponiamo che d_1, d_2 soddisfano \textcircled{1} e \textcircled{2}. Mostriamo che $d_1 = d_2$.

$d_2 = k \cdot d_1 \text{ e } d_1 = l \cdot d_2$ quindi d_1 e d_2 devono essere uguali o opposti

$$\text{Si ha } d_2 | d_1 \text{ e } d_1 | d_2 \Rightarrow \{d_1, -d_1\} = \{d_2, -d_2\} \Rightarrow d_1 = d_2$$

• Si scrive $d = \text{MCD}(a, b)$

def COPRIMI \rightarrow Se $\text{MCD}(a, b) = 1$, si dice che a e b sono primi tra loro o coprimi

Lemma

$$d = \text{MCD}(a, b) \quad a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z} \quad d > 0, a, b \neq 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \cdot \text{ se } a=0, b \neq 0 \text{ allora } d = |b| > 0 \\ \cdot \text{ se } a \neq 0, b=0 \text{ allora } d = |a| > 0 \end{array} \right)$$

dim.

$$d\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} \supset a\mathbb{Z} \rightarrow d | a \\ \supset b\mathbb{Z} \rightarrow d | b \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{condizione } \textcircled{1} \\ \text{verificata} \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad (\text{mostro } d' | d \Leftrightarrow d\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z})$$

Ogni divisore di
 a e b divide il MCD

per la cond. \textcircled{2}: sia $d' \in \mathbb{N}$ t.c. $d' | a \text{ e } d' | b$

$$d' | a \Leftrightarrow a\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z} \quad \text{e} \quad d' | b \Leftrightarrow b\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z}$$

$$\text{quindi } \underbrace{a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}}_{= d\mathbb{Z}} \subset \underbrace{d'\mathbb{Z} + d'\mathbb{Z}}_{\neq 2d'\mathbb{Z}} = d'\mathbb{Z}$$

$$d\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z} \Leftrightarrow d' | d \quad \text{cond. } \textcircled{2} \text{ verificata}$$

note: se $a \neq 0$, $\text{MCD}(a, 0) = a$

ALGORITMO DI EUCLIDE x MCD

dati: $a, b > 0$ $\delta = \text{MCD}(a, b)$

comincia con la divisione euclidea a, b (\circ $b, a - \text{è uguale}$)

$$a = q_0 b + r_0 \quad (0 \leq r_0 < b) - x \text{ def. resto}$$

$$b = q_1 r_0 + r_1 \quad (0 \leq r_1 < r_0)$$

$$r_0 = q_2 r_1 + r_2 \quad (0 \leq r_2 < r_1)$$

$\therefore r_0, r_1, r_2 \dots$ decrescono - arriveranno ≥ 0

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n \quad (0 \leq r_n < r_{n-1})$$

$$r_{n-1} = q_n r_n + 0$$

$\delta !!$ (MCD)

esercizio d'esempio

$$a = 3522, b = 321$$

$$3522 = 10 \cdot 321 + 312$$

$$321 = 1 \cdot 312 + 9$$

$$312 = 34 \cdot 9 + 6$$

$$9 = 1 \cdot 6 + 3$$

$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$

$$3522 = 10 \cdot 321 + 312$$

$$321 = 1 \cdot 312 + 9$$

$$312 = 34 \cdot 9 + 6$$

$$9 = 1 \cdot 6 + 3$$

$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$

$$3 = \text{MCD}(3522, 321)$$

ma, da qui, sappiamo che vale $\delta \mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } 3 = 3522u + 321v$$

Come calcolare u e v ? IDENTITÀ DI BÉZOUT

se $a, b \in \mathbb{Z}$ e $d = \text{MCD}(a, b)$ allora $\exists u, v \in \mathbb{Z}$
t.c. $au + bv = d$

Solviamo tra le $\longrightarrow 3 = 9 - 1 \cdot 6$

iterazioni di euclide

e prendiamo

il resto

$$6 = 312 - 34 \cdot 9$$

$$3 = 9 - 1(312 - 34 \cdot 9) = 9 - 312 + 9 \cdot 34$$

$$3 = -312 + 35 \cdot 9$$

$$9 = 321 - 1 \cdot 312$$

$$3 = -312 + 35 \cdot (321 - 312) = 35 \cdot 321 - 312 \cdot 35$$

$$3 = 35 \cdot 321 - 312 \cdot 36$$

$$312 = 3522 - 10 \cdot 321$$

$$3 = 35 \cdot 321 - (3522 - 10 \cdot 321) \cdot 36 = 35 \cdot 321 - 3522 \cdot 36 + 321 \cdot 36 \cdot 10 \\ = 321(35 + 360) - 3522 \cdot 36$$

$$3 = 321 \cdot 395 - 36 \cdot 3522$$

abbiamo trovato v e u !! (bravi tutti)

Lemma di Gauss se $a, b \in \mathbb{Z}^*$ e $c \in \mathbb{Z}$ e se $\text{MCD}(a, b) = 1$ allora $a | bc \Rightarrow a | c$

dim.

$$\text{MCD}(a, b) = 1 \iff a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

Sono primi tra loro ($\text{MCD} = 1$)

$$\text{quindi } \exists u, v \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } au + bv = 1$$

$$au + bv = 1$$

$$\text{moltiplico tutto per } c \quad acu + bcv = c$$

$a | bc$ per ipotesi, quindi $bc = ka$

$$acu + bcv = c \iff a(\underbrace{uc + bv}_{\substack{\exists k \text{ t.c. } c = ka}}) = c \quad \text{quindi } a | c \quad \blacksquare$$

Lemma $p \in \mathbb{N}, p > 1$, allora p irriducibile $\Rightarrow p$ primo

dimostrazione + claim se p è irriducibile e $p \nmid a$, allora $a\mathbb{Z} + p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

infatti, altrimenti $\exists \delta > 1$ t.c. $\delta | a$, $\delta | p$

ma visto che p irr., $\delta = p \Rightarrow p | a$ CONTRADDIZIONE

Supponiamo $p | ab$ con p irriducibile. (Devo dim. che $p | a$ o $p | b$)

Se $p \nmid a$, ho finito \rightarrow suppongo $p \nmid b$.

Ma allora $a\mathbb{Z} + p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Moltiplico tutto per b $\rightarrow \underbrace{ab\mathbb{Z}}_{\substack{\text{div per } p}} + \underbrace{pb\mathbb{Z}}_{\substack{\text{div per } p}} = b\mathbb{Z}$ quindi $b\mathbb{Z} \subset p\mathbb{Z} \Rightarrow p | b$ (perché \subset è una rel. di \subset)

fun fact del collega di Pellorin.

James P Jones, Daishachiro Sato, Hideo Wada, Douglas Wiens

$f(a, b, c, \dots, z)$ sostituendo le lettere (variabili) con elementi di \mathbb{N} ottengo elementi di \mathbb{Z}

$$\mathbb{N}^{26} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$$

$$f(\mathbb{N}^{26}) \subset \mathbb{Z} \quad \text{il teorema dice che } f(\mathbb{N}^{26}) \cap \mathbb{N}^* = \{x : x \text{ primo}\} = \{2, 3, 5, 7, \dots\} = \mathbb{P}$$

$$\text{per esempio } f^{-1}(\{13\}) = \emptyset$$

⑤ per ogni intero n , $2n^{17} + 2n^{15} + 3n^3 + 3n$ è divisibile per 5

• la classe mod 5 ($\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$) ha le stesse operazioni di \mathbb{Z}

$$\left[2n^{17} + 2n^{15} + 3n^3 + 3n \right]_5 \text{ deve essere } [0]$$

oper. in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$= [2] \cdot [n]^{17} + [2] \cdot [n]^{15} + [3] \cdot [n]^3 + [3] \cdot [n] = [0]$$

un intero $n \pmod{5}$ ha resto da 1 a 4 (quindi mi basta verificare queste classi)

• se $n \equiv_5 0 \iff [n] = [0]$ allora è chiaramente verificato

altr: così:

\bar{n}	$[n]^3$	$[n]^{15}$	$[n]^{17}$	$3[n]$	$3[n]^3$	$2[n]^{15}$	$2[n]^{17}$	$3[n] + 3[n]^3 + 2[n]^{15} + 2[n]^{17}$
$n \equiv 1$	$[1]$	$[1]$	$[1]$	$3[1]$	$3[1]^3$	$2[1]^{15}$	$2[1]^{17}$	$3[1] + 3[1]^3 + 2[1]^{15} + 2[1]^{17}$
	$[1] = [1 \cdot 1 \cdot 1] = [1]$	$[1] = [1 \cdot 1 \cdot 1]$	$[1] = [1]$	$3 \cdot 1$	$3 \cdot 1$	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 1$	$3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 10 = 0$
$n \equiv 2$	$[2]$	$[3]$	$[2]$	$[1]$	$[3] + [3] = 6$	$[2] + [2] = 4$	$[2] + [2] = 4$	$[1] + [3] + [2] + [2] = 8 = 0$
$n \equiv 3$	$[3]$	$[2]$	$[2]$	$[4]$	$[4] + [4] = 8 = 3$	$[1] + [1] = 2$	$[1] + [1] = 2$	$[3] + [3] + [1] + [1] = 8 = 0$
$n \equiv 4$	$[4]$	$[4]$	$[4]$	$[2]$	$[2] = 4$	$[3]$	$[3] = 4$	$[2] + [2] + [3] + [3] = 12 = 2$

divisibile per
5 in tutti i casi

studiando le potenze 2 mod 5

$$[2]^0 = [1] \quad [2]^1 = [2] \quad [2]^2 = [4] \quad [2]^3 = [3] \quad [2]^4 = [1]$$

è ciclico:

$$[2]^5 = [2] \cdot [2]^4 = [2] \cdot [1] = [2] \quad \text{il ciclo è lungo 4, quindi } [2]^m = [2]^{\frac{m}{4} \cdot 4 + r} = [2]^{\frac{m}{4} \cdot 4} \cdot [2]^r = [2]^r$$

$$[2]^6 = [2] \cdot [2]^5 = [4]$$

quindi per calcolare $[2]^n$ basta calcolare $[2]^r$ resto div. per 4

potenze 3 mod 5:

$$[3]^0 = [1] \quad [3]^1 = [3] \quad [3]^2 = [4] \quad [3]^3 = [2] \quad [3]^4 = [1]$$

potenze 4 mod 5

$$[4]^0 = [1] \quad [4]^1 = [4] \quad [4]^2 = [1] \quad [4]^3 = [4] \quad [4]^4 = [1]$$

④ Calcolare $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ con $N \in \mathbb{N}$

$$\cdot A = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{\equiv_N}$$

$$\cdot [a] + [b] = [a+b] \quad e \quad [a] \cdot [b] = [ab] \quad (\text{premesse})$$

• con l'elemento $[0]$ ($= N\mathbb{Z}$) per l'elemento neutro per + e con l'elemento $[1]$ ($= N\mathbb{Z}+1$) per il neutro di \cdot , si ottiene che A è un anello unitario commutativo.

Si cerca

$$A^\times = \{[n] \text{ t.c. } \exists [m] \text{ con } [m] \cdot [n] = [1]\} \quad ("insieme delle unità")$$

③ Si $\exists [a] \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$: esiste $b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ t.c. $[a] \cdot [b] = [1]$

$$[ab] = [1] \iff N \mid ab - 1 \quad \text{è invertibile} \iff \text{esiste un qualsiasi rapp. quando faccio } ab-1, \text{ è div per } N$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } kN = ab - 1$$

porta 1 e kn dall'altra parte

$$\iff ab - kN = 1 \quad \text{è un'identità di Bézout per } a, N$$

$\iff a \text{ e } N$ sono primi fra loro!

$$\text{quindi } (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times = \{[a] : a \in \mathbb{Z} \text{ e } \text{MCD}(a, N) = 1\} \quad \begin{matrix} \text{invertibili in } \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ \text{classi dei coprimi a } N \end{matrix}$$

Esiste quindi un'applicazione biiettiva $\{r \in \{0, \dots, N-1\} \text{ t.c. } \text{MCD}(r, N) = 1\} \rightarrow (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$

$$r \mapsto [r]$$

$$N=24=2^3 \cdot 3 \quad \text{verificare che } (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times = \{r : z \mid r, 3 \nmid r\} \quad \text{tengo i coprimi}$$

$$\text{esempio } (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17}, \bar{18}, \bar{19}, \bar{20}, \bar{21}, \bar{22}, \bar{23}\}$$

che cosa si osserva quando N è primo?

$$\cdot N=p \text{ primo} : \quad \text{Si } r \in \{\bar{1}, \dots, \bar{p-1}\}$$

$$\text{MCD}(p, r) = 1 \quad . \quad \text{Altrimenti, qualora si avesse } d = \text{MCD}(p, r) > 1 \quad \text{avrà: } d \mid p, d \mid r \Rightarrow d = p$$

e si avrebbe $p \mid r$. Ma $r < p$ (perché è resto) \rightarrow CONTRADDIZIONE \quad Quindi r coprimo p

$$\text{Si ottiene } (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \{[r] : 1 \leq r \leq p-1\} \quad \forall r \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}, r \text{ è invertibile}$$

def CAMP

A anello commutativo unitario t.c. $\forall a \in A \setminus \{0\}$ invertibile
si dice campo

in particolare, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ è un campo

PICCOLO TEOREMA DI FERMAT

es. 5 dato p primo e $n \in \mathbb{Z}$, $n^p \equiv_p n$

Ricordiamo:

$$\bullet \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \#\{U \subset \{1, \dots, n\} : \#U = m\} \quad 0 \leq m \leq n$$

in $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ campo, ovvero $\mathbb{F}_p^\times = \{[1], [2], \dots, [p-1]\}$
non vero in \mathbb{Z}

$$\bullet \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\bullet \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

$$\bullet ([a] + [b])^p = [a]^p + [b]^p \text{ con } [a], [b] \in \mathbb{F}_p$$

Sceglieremo rapp. a, b per le classi $[a], [b]$

$$(a+b)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} b + \binom{p}{2} a^{p-2} b^2 + \dots + \binom{p}{p-2} a^2 b^{p-2} + \binom{p}{p-1} a b^{p-1} + b^p \quad (\text{NEWTON})$$

$\bullet 0 < i < p$ (non $\leq \geq$ perché so che la rid. mod. p di 0 è 0)

SCRIVIAMO $\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!}$ * perché è una cardinalità

\bullet SUPPONIAMO $1 \leq i \leq p-1$ e inoltre $i! = i(i-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

quindi, siccome $p > i$, si ha $p \nmid i$ (perché i si scomponono in fattori tutti $< p$ (quindi nessuno di questi è p) e p non può essere il prodotto tra alcuni di questi perché è primo)

Similmente, $p > p-i$ e quindi $p \nmid (p-i)!$

$$\text{quindi, ho } p! = \underbrace{k}_{\geq} \cdot \underbrace{i!(p-i)!}_{b} \quad (\text{da qui } *) \quad \exists k \in \mathbb{N}^*$$

(visto che $p \nmid i!$ e $p \nmid (p-i)!$) ho anche $p \nmid b$.

ma $p \mid ab = p!$ visto che p primo e $p \nmid b$, allora $p \mid a$ per il lemma di Gauss.
per def. fattoriale

$$\text{ma } a = k = \binom{p}{i} \quad \text{perché } p! = \underbrace{\frac{p!}{i!(p-i)!}}_{\text{per def. fattoriale}} \cdot \underbrace{i!(p-i)!}_{b}$$

$(\in [0] \text{ mod } p)$

quindi, tutti i coeff. "in mezzo" nello sv. di Newton (nello forma $\binom{p}{i} \cdot \text{qualcosa}$) si riducono a 0 e rimangono solo a^p e b^p .

\bullet ho dim. che se $1 \leq i \leq p-1$ e p primo, si ha: $\binom{p}{i} = \binom{p}{p-i} \equiv_p 0$

$$\text{e, riducendo, ottengo } ([a] + [b])^p = [a]^p + \binom{p}{1} [a]^{p-1} [b] + \dots + [b]^p \equiv_p [a]^p + [b]^p$$

TORNIAMO ALLA DIM. PRINCIPALE (PTF)

$$[0]^p = [0] \quad [2]^p = ([1] + [1])^p = [1]^p + [1]^p = [1] + [1] = [2]$$

$$[1]^p = [1] \quad [\bar{1}]^p = ([2] + [1])^p = [2]^p + [1]^p = [\bar{2}] + [1] = [\bar{1}]$$

quindi, per induzione (ipotesi: fino a $n-1$, $[n-1]^p = [n-1]$)

$$[n]^p = ([n-1] + [1])^p = [n-1]^p + [1]^p = [n-1] + [1] = [n]$$

which is very cool

if you ask me!!

quindi, $\forall n \in \mathbb{Z}, n^p \equiv_p n$ (con p primo)



$$(x+y)^n = x^n + y^n$$



$$(x+y)^n \neq x^n + y^n$$



for a prime number n , if x and y are members of a commutative ring of characteristic n then
 $(x+y)^n = x^n + y^n$

PRECISAZIONE

Se $[n] \neq [0]$, ovvero se $[n] \in \mathbb{F}_p$

allora $[n]$ invertibile di inverso $[n']$.

$$\text{Per il PTF, so già che } [n] = [n]^p \quad \text{e} \quad [n'] [n^p] = [n'] [n] \stackrel{\substack{= \\ \text{def. inverso}}}{=} 1$$

p primo $\Rightarrow p \geq 2$ si può decomporre in $p-1 \geq 1 + p$

$$[n'] [n]^p = [n'] [n] = [1]$$

$$\begin{array}{c} \text{Il } [n]^p \\ \text{è } \\ [n'] \cdot \underbrace{[n] [n]^{p-1}}_{\substack{\text{sono} \\ \text{inversi} \\ \text{quindi} = [1]}} = [n'] [n] = [1] \end{array}$$

$$\text{quindi } [1] [n]^{p-1} = [1] \quad \text{se } [n] \neq [0]$$

(il PTF ha dei difetti.)

- se $[\alpha] \in \mathbb{F}_p^\times$, calcolare $[\alpha]^{-1}$ usando il PTF

$$\text{So che } [\alpha]^{p-1} = [1] \quad (\text{PTF}).$$

$$\begin{array}{c} \text{Scrivendo } [\alpha]^{p-1} = [\alpha]^{p-2} \cdot [\alpha] \\ \text{(quindi } [1] = \underbrace{[\alpha]^{p-2} \cdot [\alpha]}_{\text{inversi}}) \end{array}$$

$$\text{Dunque } [\alpha]^{-1} = [\alpha]^{p-2}$$

$$\text{es. } p = 689 \quad (\text{primo})$$

Voglio calcolare $[2]^{-1}$. "Basta" calcolare $[2]^{p-2}$, ovvero $[2]^{689}$.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 333, 666, 641, 591, 491, 291, 582, 473, 255, 510, 329, 658, 625, 5
 59, 427, 163, 326, 652, 613, 535, 379, 67, 134, 268, 536, 381, 71, 142, 284, 568, 445, 199, 398, 105, 2
 10, 420, 149, 298, 596, 501, 311, 622, 553, 415, 139, 278, 556, 421, 151, 302, 604, 517, 343, 686, 681,
 671, 651, 611, 531, 371, 51, 102, 204, 408, 125, 250, 500, 309, 618, 545, 399, 107, 214, 428, 165, 330
 , 660, 629, 567, 442, 195, 390, 89, 178, 356, 21, 42, 84, 168, 336, 672, 653, 615, 539, 387, 83, 166, 3
 32, 664, 637, 583, 475, 259, 518, 345, 690, 689, 687, 683, 675, 659, 627, 563, 435, 179, 358, 25, 50, 1
 00, 200, 400, 109, 218, 436, 181, 362, 33, 66, 132, 264, 528, 365, 39, 78, 156, 312, 624, 557, 423, 155
 , 310, 620, 549, 407, 123, 246, 492, 293, 586, 481, 271, 542, 393, 95, 190, 380, 69, 138, 276, 552, 413
 , 135, 270, 540, 389, 87, 174, 348, 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 589, 487, 283, 566, 441, 191, 382
 , 73, 146, 292, 584, 477, 263, 526, 361, 31, 62, 124, 248, 496, 301, 602, 513, 335, 670, 649, 607, 523,
 355, 19, 38, 76, 152, 304, 608, 525, 359, 27, 54, 108, 216, 432, 173, 346, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128
 , 256, 512, 333, 666, 641, 591, 491, 291, 582, 473, 255, 510, 329, 658, 625, 559, 427, 163, 326, 652, 6
 13, 535, 379, 67, 134, 268, 536, 381, 71, 142, 284, 568, 445, 199, 398, 105, 210, 420, 149, 298, 596, 5
 01, 311, 622, 553, 415, 139, 278, 556, 421, 151, 302, 604, 517, 343, 686, 681, 671, 651, 611, 531, 371,
 51, 102, 204, 408, 125, 250, 500, 309, 618, 545, 399, 107, 214, 428, 165, 330, 660, 629, 567, 443, 195
 , 390, 89, 178, 356, 21, 42, 84, 168, 336, 672, 653, 615, 539, 387, 83, 166, 332, 664, 637, 583, 475, 2
 59, 518, 345, 690, 689, 687, 683, 675, 659, 627, 563, 435, 179, 358, 25, 50, 100, 200, 400, 109, 218, 4
 36, 181, 362, 33, 66, 132, 264, 528, 365, 39, 78, 156, 312, 624, 557, 423, 155, 310, 620, 549, 407, 123
 , 246, 492, 293, 586, 481, 271, 542, 393, 95, 190, 380, 69, 138, 276, 552, 413, 135, 270, 540, 389, 87,
 174, 348, 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 589, 487, 283, 566, 441, 191, 382, 73, 146, 292, 584, 477,
 263, 526, 361, 31, 62, 124, 248, 496, 301, 602, 513, 335, 670, 649, 607, 523, 355, 19, 38, 76, 152, 30
 4, 608, 525, 359, 27, 54, 108, 216, 432, 173, 346, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 333, 666, 641
 , 591, 491, 291, 582, 473, 255, 510, 329, 658, 625, 559, 427, 163, 326, 652, 613, 535, 379, 67, 134, 26
 8, 536, 381, 71, 142, 284, 568, 445, 199, 398, 105, 210, 420, 149, 298, 596, 501, 311, 622, 553, 415, 1
 39, 278, 556, 421, 151, 302, 604, 517, 343, 686, 681, 671, 651, 611, 531, 371, 51, 102, 204, 408, 125,
 250, 500, 309, 618, 545, 399, 107, 214, 428, 165, 330, 660, 629, 567, 443, 195, 390, 89, 178, 356, 21,
 42, 84, 168, 336, 672, 653, 615, 539, 387, 83, 166, 332, 664, 637, 583, 475, 259, 518, 345, 690, 689, 6
 87, 683, 675, 659, 627, 563, 435, 179, 358, 25, 50, 100, 200, 400, 109, 218, 436, 181, 362, 33, 66, 132
 , 264, 528, 365, 39, 78, 156, 312, 624, 557, 423, 155, 310, 620, 549, 407, 123, 246, 492, 293, 586, 481
 , 271, 542, 393, 95, 190, 380, 69, 138, 276, 552, 413, 135, 270, 540, 389, 87, 174, 348, 5, 10, 20, 40,
 80, 160, 320, 640, 589, 487, 283, 566, 441, 191, 382, 73, 146, 292, 584, 477, 263, 526, 361, 31, 62, 1
 08, 216, 432, 173, 346, 1, 689' (689)

ma notiamo che le classi

sono cicliche - possiamo trovare

l'inverso molto prima di 689

- è quello precedente all'1,

perciò sappiamo che $[n]^{p-1} = [1]$
(e cerchiamo $[n]^{p-2}$)

questo funziona bene con 2, ma, per esempio, non con 3

③ Nessun intero in $4\mathbb{Z} + 3$

calcoliamo le classi resto modulo 4 dei quadrati

\bar{n}	\bar{n}^2	la somma dei quadrati mod 4 può essere soltanto
0	0	
1	1	
2	0	
3	1	

	+	$\bar{0} \quad \bar{1}$	in particolare, non è mai $\bar{3}$
		$\bar{0} \quad \bar{0} \quad \bar{1}$	
		$\bar{1} \quad \bar{1}$	

no (si può vedere con la riduzione mod 8 e una tabella 3d)

Variante: è vero che ogni intero > 0 è somma di 3 quadrati? Si può dimostrare che ogni intero > 0 è somma di 4 quadrati (Lagrange)

FIBONACCI

(F_n) $n \geq 0$ definito induttivamente: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

proprietà

$$\text{MCD}(F_m, F_n) = F_{\text{MCD}(m, n)}$$

$$\text{in particolare, } \text{MCD}(F_m, F_{m+1}) = F_1 = 1$$

dim. x induzione con algoritmo di Euclideo

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$$\text{MCD}(F_n, F_{n+1}) = \delta_n$$

$$\mathbb{Z} F_n + \mathbb{Z} F_{n+1} = \mathbb{Z} \delta_n \quad \text{devo dimostrare} = 1\mathbb{Z}$$

||

$$\left\{ \exists F_n + b F_{n+1} : \exists, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

|| def. Fibonacci

$$\left\{ \exists F_n + b(F_n + F_{n-1}) : \exists, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

ci serve



dimostrare

$$\mathbb{Z} F_{n-1} + \mathbb{Z} F_n \quad \text{così} \rightarrow \text{ipotesi induttiva: } \mathbb{Z} F_{n-1} + \mathbb{Z} F_n = \mathbb{Z}$$

(claim)

17/10

claim: = (serve che la funzione sia suriettiva)

$$\left\{ (\alpha+b) F_n + b F_{n-1} : \alpha, b \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{Z} F_{n-1} + \mathbb{Z} F_n = \left\{ u F_{n-1} + v F_n : u, v \in \mathbb{Z} \right\}$$

mi serve dim applicazione biiettiva:

$$f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$$

$$(\alpha, b) \mapsto (\alpha+b, b) \quad \text{sia } f(\mathbb{Z}^2) \text{ l'immagine} = \{ u F_n, v F_{n-1} : (u, v) \in f(\mathbb{Z}^2) \}$$

se lo dimostro, dimostro che

ogni volta che prendo α, b posso trovare u e v t.c. $u = \alpha+b$, $v = b$ e viceversa

(basta che sia suriettiva)
ma dimostriamo biiettiva

Mostriamo f suriettiva - questo basta per giustificare il claim

Possiamo mostrare che f biiettiva (+ forse)

Richiamo: $A \xrightarrow{f} B$ f biiettiva $\iff \forall b \in B, f^{-1}(\{b\})$ singleton

prop del corso $\Rightarrow f$ biiett. $\iff \exists g: B \rightarrow A$ t.c. $f \circ g = \text{Id}_B$ ($\forall b \in B, f(g(b)) = b, \forall a \in A, g(f(a)) = a$)

$$f(a, b) = (a+b, b) =: (u, v)$$

$$\begin{cases} a+b = u \\ b = v \end{cases}$$

unica soluzione (biiettività) (singleton f^{-1})

inverso

$$\text{pongo } g: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2, \quad g(u, v) \mapsto (u-v, v)$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(u, v) &= f(g(u, v)) = f(u-v, v) = u-v+v, v = (u, v) \\ (g \circ f)(a, b) &= g(f(a, b)) = g(a+b, b) = (a+b-b, b) = (a, b) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{x fibonacchi indice } \geq 0 \\ \text{sono identità:} \\ f \text{ e } g \text{ biiettive} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Abbiamo dimostrato } \forall n > 0 \quad F_{n+1} \mathbb{Z} + F_n \mathbb{Z} &= F_n \mathbb{Z} + F_{n-1} \mathbb{Z} = F_{n-1} \mathbb{Z} + F_{n-2} \mathbb{Z} = \dots = F_1 \mathbb{Z} + F_0 \mathbb{Z} = \\ &= F_1 \mathbb{Z} + \{0\} = \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{ho dim. che } \forall n > 0 \quad F_n \mathbb{Z} + F_{n-1} \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \iff \text{MCD}(F_n, F_{n-1}) = 1 \quad \blacksquare$$

Esercizio 5 Dimostrare che $2^n \not\equiv 1 \pmod{n}$ $\forall n > 1$ x CASA

$$2^n \not\equiv_n 1 \quad \forall n > 1$$

$$n^p \equiv_p n \quad \text{e } n^{p-2} \text{ inverso } n^p$$

$$n^{p-1} \equiv_p 1$$

2 casi:

$$\textcircled{1} \quad n \text{ primo} \rightarrow \text{Fermat: } [2^{n-1}]_n = [1]_n$$

$$[2^n] = [2^{n-1}] \cdot [2] = [1] \cdot [2] = [2]$$

$$\textcircled{2} \quad n \text{ non primo} \rightarrow n = a, b \text{ con } 1 < a < n, \quad 1 < b < n$$

$$\text{sicuramente } n = p \cdot k \text{ con } p \text{ primo e } 2^n = 2^{pk} = (2^p)^k$$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ARITMETICA

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}^*$$

① l'insieme $I = \{ p \text{ primo} : p | \alpha \}$ è finito (il numero di primi che dividono α è finito)

② $\alpha = (\pm 1) \cdot \prod_{\substack{p \\ \text{primo}}} p^{v_p(\alpha)}$ dove $v_p(\alpha) \in \mathbb{N}$ unicamente determinato.

(ogni numero $\neq 0$ è il prodotto di una certa combinazione di numeri primi elevati a un certo esponente
- quelli che non vogliono saranno elevati a 0 -)

OSS

si sa che $P = \{ p \in \mathbb{N}, p \text{ primo} \}$ è infinito.

Siccome

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}, I_\alpha \text{ è finito, } \prod_{\substack{p \\ \text{primo}}} p^{v_p(\alpha)} = \prod_{p \in I_\alpha} p^{v_p(\alpha)} \cdot \prod_{p \notin I_\alpha} p^{v_p(\alpha)}$$

sarà 0 ("non ci servono")

posso dividere i primi in divisori di α e non-divisori di α e suddividere la produttoria

esempio:

$$\begin{aligned} \alpha = 7! &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 7 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2^4 \end{aligned}$$

$$\text{quindi } v_p(\alpha) = \begin{cases} 1 & p=7 \\ 1 & p=5 \\ 2 & p=3 \\ 4 & p=2 \\ 0 & p>7 \end{cases}$$

OSS: dato $\alpha = \prod_p p^{v_p(\alpha)}$ e $b = \prod_p p^{v_p(b)}$

$$\begin{aligned} \alpha = 12 &= 2^2 \cdot 3 \\ b = 15 &= 5 \cdot 3 \end{aligned} \implies \begin{aligned} v_2(\alpha) &= 2 & v_2(b) &= 0 \\ v_3(\alpha) &= 1 & v_3(b) &= 1 \end{aligned}$$

$$\bullet \alpha \cdot b = \prod_p p^{v_p(\alpha)} \prod_p p^{v_p(b)} = \prod_p p^{v_p(\alpha) + v_p(b)}$$

$$v_5(\alpha \cdot b) = 0 \quad v_5(b) = 1$$

$$\bullet p^{v_p(\alpha)} p^{v_p(b)} = p^{v_p(\alpha) + v_p(b)}$$

$$v_p(\alpha \cdot b) = v_p(12 \cdot 15) = v_p(\alpha) + v_p(b)$$

(enunciato) $\forall \alpha > 0, \exists$ un numero finito di primi distinti p_1, \dots, p_r t.c. $\alpha = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$
e questa fattorizzazione è unicamente determinata.

$$v_2(\alpha \cdot b) = 2 \quad v_3(\alpha \cdot b) = 2 \quad v_5(\alpha \cdot b) = 1 \quad v_p(\alpha \cdot b) = 0 \quad p \geq 7$$

dimostrazione teorema $\Delta = (\pm 1) \prod_p p^{v_p(\Delta)}$

• posso supporre $\Delta > 0$ senza perdita di generalità

① Supponiamo per assurdo \mathbb{P}_{Δ} infinito - vuol dire che esiste una collezione infinita di primi t.c. $p \mid \Delta$

ma $p \mid \Delta \Rightarrow p \leq \Delta$ e impossibile infiniti interi $\leq \Delta$ contr.

② Procediamo per induzione:

$$\cdot \Delta = 1 \quad V_p(1) = \emptyset \quad \forall p \quad 1 = \prod_p p^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$$

• Supponiamo $\Delta > 1$.

dove così ① Δ primo \rightarrow allora $\Delta = \prod_p p^{v_p(\Delta)} \quad V_p(\Delta) = \begin{cases} \emptyset & p \neq \Delta \\ 1 & p = \Delta \end{cases}$

② Δ non primo, Δ non è irriducibile

si può scrivere in fattori diversi da 1 e Δ

$$\Rightarrow \Delta = U \cdot V \quad \text{con} \quad 1 < U < \Delta \quad \& \quad 1 < V < \Delta$$

per ipotesi induttiva, visto che $U, V < \Delta$ posso usare la formula del prodotto

posso scrivere $U = \prod_p p^{v_p(U)}, \quad V = \prod_p p^{v_p(V)}$

$$\Delta = UV = \prod_p p^{v_p(U) + v_p(V)} \blacksquare$$

altre proprietà (in teoria esercizi ma mi sembrano più proprietà)

① $a|b \iff \forall p, V_p(a) \leq V_p(b)$

dim • supponiamo $V_p(a) < V_p(b)$

$$\iff V_p(b) - V_p(a) \geq 0 \in \mathbb{N}$$

poniamo $k = \prod_p p^{V_p(b) - V_p(a)}$ è quindi un intero

osserviamo che $V_p(b) - V_p(a) = 0$ per p abbastanza grande

$$k \cdot a = \prod_p p^{V_p(b) - V_p(a)} \prod_p p^{V_p(a)} = \prod_p p^{V_p(b) - V_p(a) + V_p(a)} = \prod_p p^{V_p(b)} = b$$

quindi $b = k \cdot a \quad \exists k \in \mathbb{N}$ e quindi $a|b$

• supponiamo $a|b$

$$\implies b = ka \quad \exists k \in \mathbb{N}^*$$

per il teorema fondamentale:

$$\prod_p p^{V_p(b)} = \prod_p p^{V_p(ka)} \cdot \prod_p p^{V_p(a)}$$

osservo che
 ≥ 0 perché
k intero

quindi $\prod_p p^{V_p(b)} = \prod_p p^{V_p(k) + V_p(a)}$

per unicità della fattorizzazione: $V_p(b) = \underbrace{V_p(k)}_{\geq 0} + V_p(a) \iff V_p(a) = V_p(b) - V_p(k)$

$$\forall p, V_p(b) \geq V_p(a) \blacksquare$$

② $a, b \in \mathbb{N}^*, \quad \text{MCD}(a, b) = \prod_p p^{\min(V_p(a), V_p(b))}$

dim. $\delta = \text{MCD}(a, b)$ è l'unico intero di \mathbb{N}^* t.c.

① $\delta|a$ e $\delta|b$

② $\forall d' \in \mathbb{N} \quad d'|a \quad e \quad d'|b \implies d'|\delta$

considerando che $\delta|b \iff \forall p, V_p(\delta) \leq V_p(b)$

③ $\forall p, V_p(\delta) \leq V_p(a) \quad e \quad V_p(\delta) \leq V_p(b)$

② Se $\exists d' \text{ t.c. } \forall p \quad v_p(d') \leq v_p(a) \leftarrow v_p(d') \leq v_p(b)$

Allora $\forall p, \quad v_p(d') \leq v_p(\delta)$:

③ $\iff v_p(\delta) \leq \min(v_p(a), v_p(b))$

④ \iff se d' è tale che $v_p(d') \leq \min(v_p(a), v_p(b))$

Allora $v_p(d') \leq v_p(\delta)$

$\forall p, \quad v_p(\delta)$ è il più grande degli interi n t.c. $n \leq \min(v_p(a), v_p(b))$

quindi $v_p(\delta) = \min(v_p(a), v_p(b))$ (se è il massimo tra $i \leq, i \neq$)

Esercizio

$$a, b, c \in \mathbb{N}^* \quad \text{MCD}(a, b, c) \mid \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c)$$

pongo $x, y, z = v_p(a), v_p(b), v_p(c)$ (per comodità)

$$\text{MCD}(a, b, c) \mid \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c) \iff \exists n \text{ t.c. } \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c) = n \cdot \text{MCD}(a, b, c)$$

Come dimostrare la lezione:

$$\bullet \text{MCD}(a, b, c) = \prod_p p^{\min(x, y, z)} \quad \bullet \text{MCD}(a, c) = \prod_p p^{\min(x, z)} \quad \bullet \text{MCD}(b, c) = \prod_p p^{\min(y, z)}$$

$$\bullet \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c) = \prod_p p^{\min(x, z) + \min(y, z)}$$

$$\text{quindi } \text{MCD}(a, b, c) \mid \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c) \iff \prod_p p^{\min(x, z) + \min(y, z)} = \prod_p p^{\min(x, y, z)} \cdot \prod_p p^k$$

$$\iff \min(x, z) + \min(y, z) = \min(x, y, z) + k$$

3 casi:

$$\textcircled{1} \min = z$$

$$\textcircled{2} \min = x$$

$$\textcircled{3} \min = y$$

$$\begin{aligned} \text{qui } \min(x, z) &= z \text{ e } \min(y, z) = z \\ \text{e } \min(x, y, z) &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{qui } \min(x, z) &= x \\ \text{e } \min(y, z) &= z \circ y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{qui } \min(y, z) &= y \\ \text{e } \min(x, z) &= x \circ z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{quindi } z+z &= z+k \\ \text{ovvero } k &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+z &= x+k \\ \text{ovvero } k &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y &= x+k \\ \text{ovvero } k &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y &= y+k \\ k &= x \\ k &= z \end{aligned}$$

$$\text{quindi } n = \prod_p p^k \text{ con } k \text{ definito sopra}$$

DIVISORI DI ZERO

in $\mathbb{Z}_{/6\mathbb{Z}}$, $\{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$ dato A snello

$[2] \cdot [3] = [0]$ con $[2], [3] \neq [0]$

ma in \mathbb{Z} non succededef $\alpha \in A$ è divisore di zerose $\exists b \in A \setminus \{0\}$ t.c. $\alpha b = 0_A$ in A qualiasi (tranne se $1_A = 0_A$, $A = \{0\}$) 0_A è divisore di 0

- se $A = K$ CAMPO (es. $A = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$)

cioè $\forall \alpha \in K \setminus \{0\}$, α invertibile $K^\times = K \setminus \{0\}$ L'unico divisore di zero in K è 0_K dim • Supponiamo α divisore di zero:da qui in poi usiamo 0 per 0_K

$\exists b \neq 0$ t.c. $\alpha b = 0$

però b è invertibile $\rightarrow \exists b^{-1} \in K^\times$ t.c. $b \cdot b^{-1} = 1_K$ quindi posso moltiplicare termine α termine per b^{-1}

$$\underbrace{\alpha b b^{-1}}_1 = \underbrace{0}_0 b^{-1}$$

$$\alpha = 0$$

in \mathbb{Z} in \mathbb{Z} , se α è divisore di 0 , allora $\alpha = 0$ (anche se \mathbb{Z} non è un campo)dim • sia α divisore di zero $\iff \exists b \in \mathbb{Z}^* \text{ t.c. } \alpha b = 0 \quad (-\alpha)(-\alpha) = \alpha b = 0$ Senza perdita di generalità, supponiamo $\alpha \geq 0$

$$\exists b \text{ t.c. } \alpha b = 0 \iff 0 = \alpha b = \underbrace{b + b + b + \dots + b}_{\alpha \text{ volte}} \geq b > 0$$

questo è impossibile se $\alpha > 0$.quindi, $\alpha = 0$ ■def dominiodato A snello, $A \neq \{0\}$, si dice che A è un dominio se l'unico divisore di zero in A è 0_A .

- Ogni campo è un dominio, e \mathbb{Z} è un dominio

es) mostrare che $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ è un dominio $\iff N$ primo (\iff campo) (noi non ho capito se basta dimostrare dominio $\iff N$ primo visto che abbiamo già visto in classe che $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ campo)

- dimostriamo $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dominio $\rightarrow N$ primo

Supponiamo $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dominio. Allora, l'unico divisore di 0_{k_N} è 0_{k_N}

Supponiamo per assurdo N non primo $\rightarrow \exists a, b, 1 < a < n, 1 < b < n$ t.c. $N = ab$

quindi, $[a] \cdot [b] = [ab] = [0]$. k_N non è dominio. CONTRAD.

dimostriamo che N primo $\rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dominio

$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \text{ dominio} \iff \forall [a], [b] \text{ t.c. } [a] \cdot [b] = [0], \circ [a] = [0] \circ [b] = [0])$

Supponiamo $\exists [a], [b] \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ t.c. $[a] \cdot [b] = [0]$

$[a] \cdot [b] = [ab] = [0]$, significa $N | ab$ (il resto è 0)

Ma, se $N | ab$, poiché N primo, o $N | a$ o $N | b$. (per def. primo)

Ma, se $N | a$, $[a] = [0]$ e se $N | b$, $[b] = [0]$

Quindi, uno dei due divisori è zero

- Se $\alpha \in A$ non è divisore di zero ($\forall b \in A \setminus \{0\}, \alpha b \neq 0$) e $\alpha x = 0_A \implies x = 0_A$

Lemma legge di cancellazione (in A snello)

Se $\alpha \in A$ non divisore di zero, allora $\alpha b = \alpha c \implies b = c$

dim:

$$\alpha b = \alpha c \iff \alpha(b-c) = 0 \quad \text{visto che } \alpha \text{ non è divisore di } 0 \implies b-c = 0 \iff b = c$$

$\alpha \neq 0$

OSSERVAZIONE: Questo implica la legge di cancellazione in \mathbb{Z} (dominio) ($\alpha \neq 0$ perché 0 unico divisore di 0 in \mathbb{Z})

risoluzione di equazioni in A (in particolare $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

$$\alpha X = b \quad \alpha, b \in A$$

X indeterminato (può essere un valore o un insieme)
mentre x (minuscolo) è un valore

- in $A = \mathbb{Z}$ una soluzione di $\alpha X = b$ esiste $\iff \alpha | b$

infatti, se l'insieme delle soluzioni $\neq \emptyset$ e se
 x soluzione, si ha $\alpha x = b \iff \alpha | b$ (def. |)

Se, invece, $\alpha | b \implies \exists k \in \mathbb{Z}$ t.c. $b = \alpha k$ e prendo $k = x$

esempio: $2x = 3$ insieme delle soluzioni $= \{x \in \mathbb{Z} : 2x = 3\} = \emptyset$ vorrebbe dire $2 | 3$ - impossibile

$$2x = 6 \quad \{x \in \mathbb{Z} : 2x = 6\} = \{3\} \quad \text{osserviamo } 6 = 2 \cdot 3 \quad \text{quindi } 2x = 2 \cdot 3 \implies x = 3$$

- $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\alpha X = b$$

- Nel caso in cui A è un anello qualsiasi e $\alpha \in A^\times$ di inverso α^{-1} , posso moltiplicare termine α termine per α^{-1}

$$\underbrace{\alpha^{-1} \alpha}_1 X = \alpha^{-1} b \quad \text{quindi l'eq. ha l'unica soluzione } X = \alpha^{-1} b$$

(es $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$)

- Se per esempio $A = K$ campo

$$\alpha X = b \quad \text{con } \alpha \neq 0 \quad \text{ammette sempre l'unica soluzione } X = \alpha^{-1} b$$

proposizione $\exists X = b \quad \exists, b \in A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

ammette soluzioni $\iff \text{MCD}(\alpha, n) \mid \beta$ con $\alpha = [\alpha] \quad b = [\beta] \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

dim:

• Dimostro ammette soluzioni $\implies \text{MCD}(\alpha, n) \mid \beta$

$$[\alpha][x] - [\beta] = [0]$$

quindi $\exists n \in \mathbb{Z}$ quindi multiplo
di n

Sia $[x]$ soluzione: $\alpha[x] = b$ quindi $[\alpha][x] = [\beta] \iff \alpha x - \beta \in n\mathbb{Z}$

$$\iff \alpha x - \beta = nk \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff \alpha x - nk = \beta \implies \beta \in \alpha\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \delta\mathbb{Z} \iff \delta \mid \beta$$

$\beta \in \text{multiplo}$
 $\text{di } \delta$

• Ora dimostro $\text{MCD}(\alpha, n) \mid \beta \implies$ ammette soluzioni

Sappiamo $\delta = \text{MCD}(\alpha, n) \mid \beta \iff \beta = \delta x \implies \beta \in \alpha\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$

$$\iff \exists u, v \text{ t.c. } \beta = u\alpha + vn \iff \beta - u\alpha = vn$$

\times def congr. mod

$$\iff \beta \equiv_n u\alpha \iff [\beta] = [u][\alpha]^{=\delta} \quad b = x\delta$$

esempio: $[3]X = \emptyset$ in $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$$\alpha = 3, \beta = \emptyset, n = 6 \quad \text{MCD}(\alpha, n) = 3 \mid \emptyset = \beta$$

ci sono soluzioni. $X = [2]$ è soluzione ($[3] \cdot [2] = [6] = [0] \text{ in } \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$)

$X = [4]$ è soluzione ($[3] \cdot [4] = [12] = [0]$)

o anche $[3] \cdot [2] \cdot [2] = [0] \cdot [2] = [0]$)

$X = [0]$ è soluzione ($[3] \cdot [0] = [0]$)

l'insieme delle soluzioni è $\{[0], [2], [4]\} \subset A$

parentesi tutoraggio: equazioni diofantee

Risolvere la seguente equazione diofantea: $\frac{858}{a}x + \frac{253}{b}y = \frac{33}{c}$

① Calcolo l'MCD (a, b)

$$858 = 3 \cdot 253 + 99$$

$$253 = 2 \cdot 99 + 55$$

$$99 = 1 \cdot 55 + 44$$

$$55 = 1 \cdot 44 + 11$$

$$44 = 4 \cdot 11 + 0$$

$$d = \text{MCD}(858, 253) = 11$$

② Mi assicuro che l'MCD divide c

(altrimenti, l'eq. non ha soluzioni)

$$11 | 33 ? \text{ sì}$$

③ Calcolo l'identità di Bézout

(il tutor lo fa da sopra e usando a, b invece dei numeri corrispondenti)

$$99 = 858 - 3 \cdot 253 = a - 3b$$

$$55 = 253 - 2 \cdot 99 = b - 2(a - 3b) = -2a + 7b$$

$$44 = 99 - 55 = a - 3b - (-2a + 7b) = 3a - 10b$$

$$11 = 55 - 44 = -2a + 7b - (3a - 10b) = -5a + 17b$$

$$\text{quindi } 11 = -5a + 17b$$

④ Devo trovare $\underline{\underline{33}} = x \cdot a + y \cdot b$: moltiplico a dx e sx per arrivare al numero che cerco

$$11 = -5a + 17b$$

$$\underline{x^3} \quad 33 = 3(-5a + 17b) = -15a + 51b = \underbrace{-15}_{x_0} \cdot 858 + \underbrace{51}_{y_0} \cdot 253$$

ho trovato x_0 e y_0 soluzioni particolari dell'equazione

⑤ Trovo le soluzioni generali

(Soluzioni intere dell'omogeneo associato)

(termine non moltiplicato da x_0)

$$x = x_0 + \frac{b}{\text{MCD}(a, b)} K \quad K \in \mathbb{Z}$$

$$y = y_0 - \frac{a}{\text{MCD}(a, b)} K$$

$$\text{quindi } x = -15 + \frac{253}{11} K = -15 + 23K$$

$$K \in \mathbb{Z}$$

$$y = 51 - \frac{858}{11} K = 51 - 78K$$

Lemma

$a, b, c \in \mathbb{Z}$ $a, b | c$ e $\text{MCD}(a, b) = 1$ allora $ab | c$

dim:

$$a, b | c \iff c = ak = bh \quad (\exists h, k \in \mathbb{Z})$$

$$\implies a | bh \quad (\text{o anche } b | ah, \text{ ma sceglieremo } a | bh)$$

• Devo dimostrare $\text{MCD}(a, b) = 1 \implies a | h^*$ $\implies ab | c$ moltiplicando per b da entrambi i lati ($c = bh$)

• $\text{MCD}(a, b) = 1 \iff b$ è invertibile modulo a

$$\iff \exists b' \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } bb' \equiv 1 + a\mathbb{Z}$$

(b invertibile se $by \equiv 1$ ovvero $by - 1 \equiv 0$
 $\iff by - k \equiv 1 \quad \text{MCD}(a, b) = 1 \iff ax + by = 1$
 prendo $x = -k$ e queste cose sono uguali)

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Dicendo } a | bh &\implies a | b' | b'b h = (1 + ak)h \iff a | b' = h + ahk \\ &\iff ab' - ahk = h \iff a(b' - hk) = h \quad \text{quindi } a | h \blacksquare \end{aligned}$$

III secolo dal matematico Sun Tsu! (\neq the art of war Sun Tsu)

TEOREMA CINESE DEI RESTI

Poniamo $r_1, \dots, r_s \in \mathbb{N}^*$ e supponiamo $\text{MCD}(r_i, r_j) = 1 \quad \forall i \neq j$ \Rightarrow due coprimi

Consideriamo inoltre $c_1, \dots, c_s \in \mathbb{Z}$

Allora il sistema

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} x \equiv c_1 \pmod{r_1} \\ x \equiv c_2 \pmod{r_2} \\ \vdots \\ x \equiv c_s \pmod{r_s} \end{array} \right. \text{ ha un'unica soluzione modulo } R := r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_s$$

ovvero l'insieme $E_* = \{x \text{ soluzione in } \mathbb{Z} \text{ di } (*)\}$ è $x_0 + R\mathbb{Z}$

Come calcolare una soluzione particolare x_0 di $(*)$?

$$\bullet R = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_s \quad \bullet \text{ poniamo } R_i = \frac{R}{r_i} = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \overset{\text{"non } c_i \text{ in "}}{r_i} \cdot \dots \cdot r_s = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{i-1} \cdot r_{i+1} \cdot \dots \cdot r_s$$

e notiamo che $\text{MCD}(R_i, r_i) = 1$ (perché r_i, r_j ecc primi fra loro e in R_i "manca" proprio r_i)

Visto che sono primi fra loro, questa proprietà può essere riformulata dicendo che $[R_i]$ classe di R_i in $\mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}$

è invertibile di inverso $[s_i] \in \mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}$ $[R_i][s_i] = [1]$

Quindi, $\underbrace{[R_i]}_{[1]} \underbrace{[s_i]}_{[y_i] \in \mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}} [c_i] = [c_i]$ quindi abbiamo costruito elementi $[y_1], \dots, [y_s] \in \mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}$ formati dall'inverso di R_i e c_i

• Ora, dimostriamo che $x_0 = \sum_{i=1}^s y_i R_i \in \mathbb{Z}$ è soluzione di $(*)$

* credo che "basti" il lemma di Gauss? Sospendo e $\text{MCD}(a, b) = 1$
 $a | bh$ e $\text{MCD}(a, b) = 1$ allora $a | bc \Rightarrow a | c$
 allora $a | h$
 (combinano i vincoli, per Gauss $a, b \in \mathbb{Z}^*$
 e non \mathbb{Z} , ma non credo ci sarebbe
 perdita di generalità chiedere
 al prof.)

$x_0 = \sum_{i=1}^s y_i R_i \in \mathbb{Z}$ è soluzione di (*)

infatti, se $i \neq j$, $r_i | R_j$ perché R_j è il prodotto di tutti "gli r " tranne r_i ,
quindi l'unico che non lo divide è r_i

Quindi $x_0 = \sum_{j=1}^s y_j R_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s y_j R_j + y_i R_i$ isoliamo il termine non divisibile per r_i (quindi il resto)
il tutto è quindi $\equiv_{r_i} y_i R_i$
(definito come)
 $\equiv_{r_i} c_i$ quindi abbiamo trovato x_0
congruente a $c_i \text{ mod } r_i$

Questo è valido $\forall i = 1, \dots, s$ dunque $x_0 = \sum_j y_j R_j$ è una sol. particolare di (*)

Sistema omogeneo associato

$$\begin{aligned} *_{(H)}: \quad & \left\{ \begin{array}{l} x \equiv 0 \pmod{r_1} \\ x \equiv 0 \pmod{r_2} \\ \vdots \\ x \equiv 0 \pmod{r_s} \end{array} \right. \\ & x \equiv_r 0, \quad i=1 \dots s \end{aligned}$$

Soluzioni? $x \equiv_{r_1} 0 \iff r_1 | x$
 $x \equiv_{r_2} 0 \iff r_2 | x$

ma r_1, r_2 sono primi fra loro, quindi (x lemma) $r_1 r_2 | x$ (Si può andare avanti fino a r_s :
 $x \equiv_{r_3} 0 \iff r_3 | x$, $\text{MCD}(r_1, r_2, r_3) = 1 \Rightarrow r_1 r_2 r_3 | x$ ecc..)

Iterando, ottengo che $R := r_1 \dots r_s | x$

Quindi, l'insieme delle soluzioni di $(*)_H$ è $E_H = R\mathbb{Z}$ (i multipli di R)

proposizione

L'insieme delle soluzioni di (*), E_* è dato da $x_0 + R\mathbb{Z}$

dim: • $E_* \supset x_0 + R\mathbb{Z}$ è chiaro. Infatti, se $x \in x_0 + R\mathbb{Z}$, allora $x = x_0 + Rk \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

ma $Rk \equiv_{r_i} 0 \quad \forall i = 1 \dots s$ ($r_i | Rk$, perché $r_i | R$ - R è il prodotto di tutti gli r_i)

• Addizionando con x_0 , che è soluzione particolare, ottengo $x \equiv_{r_i} c_i + 0 \equiv c_i \text{ mod } r_i$
 $\Leftrightarrow x \equiv_{r_i} x_0$

• Dimostriamo $E_* \subset x_0 + R\mathbb{Z}$

$$x \equiv_{r_i} c_i \iff x - c_i \equiv_{r_i} 0$$

(old sistema)

Sia x soluzione dr (*). Allora, $x - x_0 \equiv_{r_i} 0 \quad \forall i = 1 \dots s$

$\Rightarrow x - x_0 \in R\mathbb{Z}$ x Lemma ($r_i | x - x_0$, quindi $r_1 r_2 \dots r_s | x - x_0$, quindi $x - x_0$ multiplo di R)

$\Rightarrow x \in x_0 + R\mathbb{Z} \Rightarrow E_* \subset x_0 + R\mathbb{Z}$

piccola parentesi pratico: quello che ci hanno detto al TUTORAGGIO sul teorema cinese del resto

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{11} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \cdot r_1 = 11, \quad r_2 = 5, \quad r_3 = 2 \\ \text{se sono coprimi, ammette un'unica soluzione modulo R} \end{array}$$

$$\bar{x} = R_1 \bar{x}_1 + R_2 \bar{x}_2 + R_3 \bar{x}_3 + Rk \quad k \in \mathbb{Z}$$

con $R = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ e $R_i = \frac{R}{r_i}$ e \bar{x}_i t.c. $R_i x \equiv c \pmod{r_i}$

① $r_1 = 11 \quad r_2 = 5 \quad r_3 = 2$ sono coprimi? sì.

② $R = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 11 \cdot 5 \cdot 2 = 110$ ricordiamo $c_1 = 1 \quad c_2 = 2 \quad c_3 = 1$

$$R_1 = \frac{11 \cdot 5 \cdot 2}{11} = 10 \quad R_2 = \frac{11 \cdot 5 \cdot 2}{5} = 22 \quad R_3 = \frac{11 \cdot 5 \cdot 2}{2} = 55$$

③ $\bar{x}_i = R_i x \equiv_r c$

• $\bar{x}_1 = 10x \equiv 1 \pmod{11}$

è un'equazione diofantea di tipo

$10x - 11h = 1$ che posso scrivere
(per non avere il -)

con $y = -h \quad 10x + 11y = 1$ (cerco solo x)

risolvo l'eq.: • $\text{MCD}(10, 11) = 1$

Bézout $1 = 10 \cdot \underline{-1} + 11 \cdot 1$

(ho trovato)

x_0 particolare

$22 = 4 \cdot 5 + 2$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$

quindi (Bézout)

$1 = 5 - 2 \cdot 2$

$1 = 5 - 2 \cdot (22 - 4 \cdot 5)$

$1 = \underline{-2} \cdot 22 + 9 \cdot 5$

• $\bar{x}_3 = 55x \equiv 1 \pmod{2}$

55 è dispari, quindi

$\equiv 1 \pmod{2}$

$1x \equiv 1 \pmod{2}$

$[x_3] \equiv [1] \pmod{2}$

• metto l' x particolare $x = x_0 + \frac{b}{\text{MCD}(a, b)} k$

nella formula

$$x = -1 + \frac{11}{1} k$$

k deve essere $0 \leq k \leq d-1$ (MCD)

• quindi $k \in \{0\} \rightarrow x = -1 + 0 = -1$

ma qui cerchiamo $= 2^*$

quindi moltiplico per 2

$$2 = -4 \cdot 22 + 18 \cdot 5$$

$$x = -4 + \frac{5}{1} k$$

Siamo in
mod 11

quindi $[x_1] \equiv [-1] \equiv [10]$

$k \in \{0\} \quad [x_2] \equiv [4] \equiv [1]$

④ metto tutto nella formula finale $(\bar{x} = R_1 \bar{x}_1 + R_2 \bar{x}_2 + R_3 \bar{x}_3 + Rk)$

$177 - 110$

$$[x] = 10 \cdot 10 + 22 \cdot 1 + 55 \cdot 1 + 110k = 177 + 110k = 67 + 110k$$

Esercizio 8 (foglio 3)

Esercizio 8. Trovare tutti gli interi $x \in \mathbb{Z}$ che soddisfino

- (i) $4x \equiv 7 \pmod{15}$
- (ii) $6x \equiv 8 \pmod{9}$
- (iii) $\begin{cases} 1025x \equiv 5312065 \pmod{8} \\ 36x \equiv 322 \pmod{5} \\ 4x \equiv 7 \pmod{3} \end{cases}$
- (iv) $4x \equiv 3 \pmod{385}$.

METODO PELLARIN CRT

$$\textcircled{1} \quad 4x \equiv 7 \pmod{15}$$

① calcolo l'MCD tra 4 e 15

$$\text{MCD}(4, 15) = 1 \iff [4] \text{ invertibile mod. 15}$$

$$\exists n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } 4 \cdot n \equiv_1 1 \quad (\text{es. } n=4)$$

lo faccio perché voglio che quel $4x$ diventa un $(1)x$

② trasformo $4x$ in $x \rightarrow$ moltiplico entrambi i lati per 4

$$4 \cdot 4x \equiv_{15} 28$$

$$x \equiv_{15} 13$$

(moltiplichi con resto 13)

$$\text{quindi, le sol. sono } \mathcal{E} = 15\mathbb{Z} + 13$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} 1025x \equiv 5312065 \pmod{8} \\ 36x \equiv 322 \pmod{5} \\ 4x \equiv 7 \pmod{3} \end{cases}$$

① notiamo che r_1, r_2, r_3 sono primi tra loro ✓

② semplifichiamo le congruenze

$$\textcircled{4} \pmod{8} \quad 1025 = 1024 + 1 = 2^{10} + 1 = \underbrace{(2^3)^2 \cdot 2}_{\equiv_8 0 \text{ perciò}} + 1 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$\cdot 5312065$$

$$\textcircled{5} \quad 8 \mid 40 \quad \text{quindi } 8 \mid 40 \cdot 10\mathbb{Z}$$

$$\text{notiamo che } 5312065 = 4000000 + 1312065$$

$$\text{visto che } 8 \mid 4 \cdot 10^6 \quad 5312065 \equiv_8 1312065$$

$$8 \mid 1200000 \equiv_8 112065 \quad 8 \mid 120000 \equiv_8 -7935$$

$$8 \mid 8000 \equiv_8 65 \equiv_8 1$$

il sistema diventa quindi

$$\begin{cases} x \equiv_8 1 \\ x \equiv_5 2 \\ x \equiv_3 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \quad \text{calcoliamo le altre cose: } R = 3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$$

$$R_1 = r_2 r_3 = 15$$

$$R_2 = r_1 r_3 = 24$$

$$R_3 = r_1 r_2 = 40$$

$$\textcircled{2} \quad 6x \equiv 8 \pmod{9}$$

notiamo che 6 e 9 non sono coprimi.

$$6x \equiv_9 8 \iff 6x - 8 = 9 \cdot k$$

$$\iff 8 = \underbrace{6x - 9k}_{\text{ma questo è impossibile}}$$

notiamo che questi sono divisibili per 3 (MCD 3, 9)

mentre 8 non lo è

$$\mathcal{E} = \emptyset$$

$$\textcircled{2} \cdot 36 \equiv_5 1$$

$$\cdot 322 \quad 5 \mid 320 \quad \equiv_5 2$$

$$\textcircled{3} \cdot 4 \equiv_3 1$$

$$\cdot 7 \equiv_3 1$$

④ troviamo gli inversi S_i :

$$R_1 = 15 \text{ è invertibile modulo } r_1 = 8 \quad 7 \cdot 15 \stackrel{-1}{\equiv} 1 \text{ di inverso } S_1 = 7$$

$$R_2 = 24 \quad 24 \cdot 4 \stackrel{-1}{\equiv} 1 \quad S_2 = 4$$

$$R_3 = 40 \quad 40 \cdot 1 \stackrel{-1}{\equiv} 1 \quad S_3 = 1$$

⑤ calcoliamo $y_i = S_i c_i$ e li inseriamo nella formula finale

i	S_i	c_i	y_i
1	7	1	7
2	4	2	$8 \stackrel{-1}{\equiv} 3$
3	1	1	1

$$X_0 = \sum_{i=1}^3 y_i R_i = 7 \cdot 15 + 3 \cdot 24 + 1 \cdot 40 = 217 \quad \text{soltuzione particolare}$$

$$\text{Soltuzione generale: } E = 217 + 120Z$$

POLINOMI in una indeterminata \Rightarrow coeff in un campo

K campo = $\mathbb{F}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Un polinomio in X a coefficienti in K è definito come

$$P = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^i \quad \text{con } \alpha_i \in K \text{ coefficienti, } n \in \mathbb{Z} \text{ (dipende dal polinomio)}$$

$\alpha_i = 0 \quad \forall i > 0$ (abbastanza grande)

esempio

$$K = \mathbb{R}, \quad 0, \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i \quad K = \mathbb{F}_2 \quad [1]x^5 + [0]x^4 + [2]x^3 + [6]x^2 + [1]x + [1] = x^5 + x + [1]$$

→ insieme di polinomi

(OSSERVAZIONE: è quindi possibile che un insieme finito es. $K = \mathbb{F}_p$ ne "generi" uno infinito - $K[X]$)

$A = K[X]$ è l'insieme dei polinomi (ogni $P \in A$)

L'insieme di polinomi ha una struttura ad anello (comm. un.) $(A, -, +, \cdot, 0, 1)$

Definiamo infatti le operazioni di somma e prodotto:

$$\text{con } P = \sum_{i \geq 0} \alpha_i X^i \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i > 0 \quad Q = \sum_{i \geq 0} b_i X^i \quad b_i = 0 \quad \forall i > 0$$

- $P + Q := \sum_{i \geq 0} (\alpha_i + b_i) X^i$

prodotto di Cauchy

- $P \cdot Q := \sum_{k \geq 0} c_k X^k \quad \text{con } c_k = \sum_{i+j=k} \alpha_i b_j \quad \begin{array}{l} \text{(qui si nota che } c_k = 0 \quad \forall k > 0 \\ \text{- per numeri abbastanza grandi,} \\ \alpha_i e b_j saranno 0 \end{array}$

→ grado di un polinomio

$$P \in A[X] \quad P = \sum_{i \geq 0} \alpha_i X^i \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i > 0 \quad \text{con } P \neq 0 \quad (\text{ovvero } \{i \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \alpha_i \neq 0\} \text{ finito non vuoto})$$

$$\deg(P) = \max \{i \in \mathbb{N}, \alpha_i \neq 0\} \quad \text{grado massimo} \quad \bullet \text{ Si pone } \deg(0) := -\infty$$

Quindi, l'insieme dei gradi è $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ $\deg: K[X] \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$

- elementi di grado zero $\{P \in K[X] : \deg(P) = 0\} = K^\times$ ↗ sono gli invertibili del campo, ovvero (per def campo) tutti gli el del campo tranne 0 (quindi sono le "costanti")

Lemmas

$$\textcircled{1} \quad \deg(\alpha) = -\infty \iff \alpha = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \deg(\alpha b) = \deg(\alpha) + \deg(b)$$

$$\textcircled{3} \quad \deg(\alpha + b) \leq \max(\deg(\alpha), \deg(b))$$

$$\text{e } \deg(\alpha + b) = \max(\deg(\alpha), \deg(b)) \text{ se } \deg(\alpha) \neq \deg(b)$$

se i gradi sono uguali gli el. di grado maggiore si potrebbero annullare e il grado sarebbe < (es. $(x^3+x) + (-x^3+2)$)

$$\text{es. } \alpha = x^2 + x + 1 \quad \deg = 2 \quad b = x + 1 \quad \deg = 1 \quad \alpha + b = x^2 + 2x + 2 \quad \deg = 2$$

ANALOGIE TRA I POLINOMI E \mathbb{Z}

$$\mathbb{Z} \quad A = K[X]$$

anello di polinomi
Compone

operazioni:

$$\begin{array}{c} \cdot \mathbb{Z} \xrightarrow{1:1} \mathbb{N} \text{ val assoluto} \\ \alpha \longrightarrow \begin{cases} \alpha & \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \alpha \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

proprietà

- ① $|\alpha| = 0 \iff \alpha = 0$
- ② $|\alpha b| = |\alpha| \cdot |b|$
- ③ $|\alpha + b| \leq |\alpha| + |b|$ diseg. triangolare

$$\cdot A \xrightarrow{\deg} \mathbb{N} \sqcup \{-\infty\} \text{ grado polinomio}$$

$$① \deg(\alpha) = -\infty \iff \alpha = 0$$

$$② \deg(\alpha b) = \deg(\alpha) + \deg(b)$$

$$③ \deg(\alpha + b) \leq \max(\deg(\alpha), \deg(b))$$

ci sono delle corrispondenze, ma serve qualcosa di più vicino

def c-valore assoluto di un polinomio

Dato un polinomio $P \in A \setminus \{0\}$

Scegliamo $c > 1$

$$|P|_c := c^{\deg(P)} \quad (\text{dipende da } c)$$

Allora proprietà

$$① |\alpha|_c = 0 \iff \alpha = 0$$

$$② |\alpha b|_c = |\alpha|_c \cdot |b|_c$$

$$③ |\alpha + b|_c \leq \max(|\alpha|_c, |b|_c) \leq |\alpha|_c + |b|_c$$

invece, se $P = 0$

$$|0|_c := 0 = c^{-\infty}$$

$$\text{Per } ② \quad |\alpha b|_c = c^{\deg(\alpha b)} = c^{\deg(\alpha) + \deg(b)} = |\alpha|_c \cdot |b|_c$$

$$\text{Per } ③ \quad |\alpha + b|_c = c^{\deg(\alpha + b)} \leq c^{\max(\deg(\alpha), \deg(b))} \leq c^{\deg(\alpha)} + c^{\deg(b)}$$

ALGORITMO DELLA DIVISIONE EUCLIDEA SUI POLINOMI

Teorema $\alpha, b \in A = K[X] \quad (\alpha, b) \neq (0, 0)$

Esiste unica $(q, r) \in A \times A$ t.c. $\alpha = qb + r$ dove $\deg(r) < \deg(b)$ ovvero $|r|_c < |b|_c$

divisione in colonne

$$\begin{array}{l} \alpha = x^4 + x + 1 \\ b = x^3 - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^4 + \\ x^3 - 2 \\ \hline x^4 \quad -2x \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 \quad -2 \\ \hline x \quad \end{array} \quad \begin{array}{r} \textcircled{1} \ x^4/x^3 \\ \textcircled{2} \ \text{moltiplico per } (x^3 - 2) \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} q = x, \quad r = 3x + 1 \\ \text{grado} < \text{quindi fine} \end{array}$$

③ scrivo qui
④ sottraggo

\mathbb{Z} $A = K[x]$

inter:	polinomi	TABELLA ANALOGIE TRA \mathbb{Z} e $K[x]$
divisione euclides	divisione euclides	(il grande ripasso delle proprietà di \mathbb{Z})
valore assoluto	$ \cdot _c \circ \deg$	

 \mathbb{N}^*
("positivi")

$A^+ = \{ \text{polinomi monici} \}$
 in forma $P = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$
 con $a_n \neq 0$ (coeff. grado massimo)
 il prodotto di monici è monico
 (ma la somma non necessariamente)

 $\mathbb{Z}^\times = \{ \pm 1 \}$

inversi sui polinomi:

$$\begin{aligned} A^\times &= K^\times \\ \text{sia } a \in A^\times \exists b \in A^\times \text{ t.c. } ab &= 1 \\ \implies \deg(a) + \deg(b) &= 0 \quad (\deg(ab) = 0 = \deg(a) + \deg(b)) \\ \implies \deg(a) = \deg(b) &\in \mathbb{N} \text{ (o avrei } -\infty) \\ \implies \deg(a) = \deg(b) &= 0 \\ \implies a, b \in K^\times &(\text{"costanti" diverse da } 0) \end{aligned}$$

divisibilità in \mathbb{Z}

$$\begin{aligned} a|b &\iff \exists H \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } b = ah \\ a|b &\iff b \in a\mathbb{Z} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } b &= ak \\ \iff b &\in a\mathbb{Z} \\ \iff b\mathbb{Z} &\subset a\mathbb{Z} \\ \iff ba &\in aA \end{aligned}$$

proprietà di $|$ su A

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ riflessiva} \\ \textcircled{2} \text{ transitiva} \\ a|b, b|c \iff c \in aA &\iff aA \subset bA \subset cA \\ \iff cA &\subset aA \iff a|c \\ \textcircled{3} \text{ quasi riflessiva ma non:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a, b \in A. \text{ Supponiamo } a|b \wedge b|a \\ \iff \exists u \in A \text{ t.c. } b = au, \exists v \in A \text{ t.c. } a = bv \\ \text{quindi } a = uv \iff \deg(a) = \deg(u) + \deg(v) + \deg(a) \\ \text{possiamo supporre } a, b \neq 0 \\ \deg(a) = \deg(a) + \deg(u) + \deg(v) \iff 0 = \deg(u) + \deg(v) \\ \iff \deg(u) = \deg(v) = 0 \\ \iff u = \lambda \in K^\times, v = \mu \in K^\times \quad (\text{sempre per la questione } \deg(0) = \text{"costante" } \neq 0) \end{aligned}$$

Quindi $\exists \lambda \in K^\times = A^\times \text{ t.c. } b = \lambda a$

Lemmas $A = K[X]$ è un dominio d'integrità

\mathbb{Z} è un dominio d'integrità

dim Sia $P \in A$ divisore di zero

$$\exists Q \in A \setminus \{\emptyset\} \text{ t.c. } PQ = \emptyset$$

$$\deg(PQ) = \deg(\emptyset) = \deg(P) + \deg(Q) = -\infty$$

impossibile somma due numeri $\in \mathbb{N} = -\infty$

$$\text{Quindi } \deg(P) = -\infty \iff P = \emptyset$$

$$a \equiv b \pmod{n}$$

$$\iff n | a - b$$

$$a, b \in A, H \in A \setminus \{\emptyset\}$$

$$a \equiv b \pmod{H} \text{ rel d'eq.}$$

es. transitività $a \equiv_H b, b \equiv_H c$

$$\iff H | a - b \wedge H | b - c$$

$$\iff a - b = Hv \quad \exists v \in A, b - c = Hw \quad \exists w \in A$$

$$a - b + b - c = H(v + w)$$

$$\iff H | a - c \iff a \equiv_H c$$

$$A/H \text{ snello}$$

commutativo unitario

$$A/H = \{[x] : x \in A\} = \{x + HA : \deg(x) < \deg(H)\}$$

$$a \in A, [a] = a + HA \subset A$$

$$\text{Sistema compl. Rapp. mod } H = \{a \in A : \deg(a) < \deg(H)\}$$

de: MCD in \mathbb{Z}

de: MCD in A

Bézout in \mathbb{Z} :

$$a, b \in A, \text{ poniamo } aA + bA = \{m \in A \text{ t.c. } \exists u, v \in A \text{ con } m = ua + vb\}$$

Lemmas Bézout in $A = K[X]$

$$a, b \in A \text{ t.c. } (a, b) \neq (0, 0)$$

$$\text{allora } aA + bA = \Delta A \quad \exists! \delta \in A^+$$

dimostri che \mathcal{E}^+ contiene un el. di grado minimo unico (δ)

(mostrare non vuoto $(a, b) \neq \emptyset$, principio Minimo)

$$\mathcal{E} = aA + bA, \quad \mathcal{E}^+ = \{m \in \mathcal{E} \text{ t.c. } m \in A^+\}$$

monico
(notiamo che infatti è l'insieme "analogo" a \mathbb{N}^* in A)

MCD

$$(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

prop. $\exists! d \in \mathbb{N}^* \text{ t.c.}$

$$\textcircled{1} \quad d | a \wedge d | b$$

\textcircled{2} se $d' \in A$ t.c.

$$d' | a \wedge d' | b \Rightarrow d' | d$$

MCD

$$(a, b) \in A^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

prop. $\exists! d \in A^+ \text{ t.c.}$

$$\textcircled{1} \quad d | a \wedge d | b$$

\textcircled{2} se $d' \in A$ t.c.

$$d' | a \wedge d' | b \Rightarrow d' | d$$

$$\text{inoltre } d = \delta = \text{MCD}(a, b)$$

$$\text{inoltre } d = \delta = \text{MCD}(a, b)$$

$$\text{coprimi } a, b \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \text{MCD}(a, b) = 1$$

$$\text{coprimi } a, b \in A \text{ t.c. } \text{MCD}(a, b) = 1$$

irriducibile $a \in A \setminus A^\times$

a irriducibile se $\forall b, c \in A : a = bc$

$$\text{allora } a = b \cdot c \in A^\times \cdot A^\times$$

primo $a \in A \setminus A^\times, a \neq 0$

primo se $a | bc \Rightarrow a | b \vee a | c$

irriducibile $P \in A \setminus A^\times \quad (\deg(P) > 0)$

P è irriducibile se, scrivendo $P = QR$

allora si ha $0 < Q \in A^\times \wedge R \in A^\times \subset K^\times$

osservazione:

$X - x$ è irriducibile $\forall x \in K$

$$X - x = U \cdot V$$

$$\deg(X - x) = \deg(U) + \deg(V)$$

$$\Rightarrow \{\deg(U), \deg(V)\} = \{0, 1\} \text{ almeno uno è invertibile (di grado 0)}$$

Lemmas: primo \iff irriducibile

Lemmas: P irriducibile \iff P primo

Teorema Fondamentale Aritmetica

$\forall a \in \mathbb{Z}^*$ a si decomponga
in modo unico come:

$$d = (\pm 1) \cdot \prod_{p \text{ primo}} p^{v_p(a)}$$

$v_p(a) \in \mathbb{N}$, $\{p : v_p(a) \neq 0\}$ finito

Teorema della Fattorizzazione Unica

Ogni $H \in A - \{\emptyset\}$ si decomponga
in modo unico come prodotto:

$$H = \lambda \cdot \prod_{\substack{P \text{ irr.} \\ P \in A^+}} P^{v_P(H)} \quad v_P(H) \in \mathbb{N} \text{ e} \\ \{P : v_P(H) \neq 0\} \text{ finito}$$

FATTORIZZAZIONE

in $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ la fattorizzazione è "facile" (è facile caratterizzare i polinomi irriducibili), invece in $K = \mathbb{F}_p, \mathbb{Q}$ la fattorizzazione è difficile

teorema

• in $\mathbb{C}[x]$ i monici irriducibili sono tutti i polinomi nella forma $X - \alpha : \alpha \in \mathbb{C}$ (polinomi di primo grado)

• in $\mathbb{R}[x]$, se P monico irriducibile, allora o: ① $\deg(P) = 1$ ($X - \alpha : \alpha \in \mathbb{R}$)

② se $\deg(P) = 2$

$$(P = X^2 + \alpha X + b) \text{ allora } \Delta = \alpha^2 - 4b < 0$$

def VALUTAZIONE

dati $k \in K$, $F \in K[X] = F_0 + F_1X + \dots + F_nX^n$

la valutazione di F in x

è $ev_x(F) = F_0 + F_1x + \dots + F_nx^n$ (è la "sostituzione" di X)

$$ev: K[X] \longrightarrow K$$

OSSERViamo:

$$\textcircled{1} ev_x(F+G) = ev_x(F) + ev_x(G)$$

$$\textcircled{2} ev_x(F \cdot G) = ev_x(F) \cdot ev_x(G)$$

$$\textcircled{3} \lambda \in k, ev_x(\lambda) = \lambda \text{ (costanti) e non invertibili perché vale per 0}$$

• Si dice che $ev_x: K[X] \longrightarrow K$ è un ^{OMO}MORFISMO DI ANELLI

esempio: $F = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$, $x=1$, $ev_x(F) = X^2 + 1 = 2$

Lemma Sia $x \in K$

allora $ev_x^{-1}(\{0\}) = (X-x)A$ $\curvearrowleft K[X]$ $(x \in K \text{ tali che sostituire danno 0})$
polinomi che si annullano in X

dim:

• dimostra $ev_x^{-1}(\{0\}) \supset (X-x)A$ \curvearrowleft

Sia $Q = (X-x)H$. Allora $ev_x(Q) = ev_x(X-x) \cdot ev_x(H) = 0$
 $\implies Q \in ev_x^{-1}(\{0\})$

• dimostra $ev_x^{-1}(\{0\}) \subset (X-x)A$

Sia $P \in A$ t.c. $ev_x(P) = 0$.

per l'algoritmo di divisione euclidea per $X-x$ $\exists! (q, r) \in A \times A$ t.c. $P = q(X-x) + r$ $\deg(r) < \deg(X-x)$ $\deg(r) \in \{-\infty, 0\} \iff r \in K$
 $r = 0, r \text{ const} \neq 0$

$$ev_x(P) = ev_x(q(X-x) + r) = ev_x(q) \underbrace{ev_x(X-x)}_{0 \text{ per ipotesi}} + ev_x(r)$$

P ha una radice in x

$$\implies ev_x(r) = 0 \text{ e, per ③ } r = ev_x(r) = 0 \text{ quindi } X-x | P \iff P \in (X-x)A \blacksquare$$

(P ha una radice in $x \iff X-x | P$, $ev_x(P) = 0$)

es. 1 scheda

Fattorizzare (non c'è una tecnica universale)

- $X^2 + X + 6$ in $\mathbb{R}[X]$ un polinomio di grado 1 in $K[X]$ è sempre irriducibile.

In $\mathbb{R}[X]$ anche i polinomi di grado 2 (SOLO) con $\Delta < 0$ sono irriducibili

nessuna radice reale

$$\textcircled{4} \quad \Delta(bx^2 + bx + c) = b^2 - 4ac = 1 - 24 = -23 < 0 \quad \text{è irriducibile} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \exists v_x (x^2 + x + 6) \neq 0$$

essendo irriducibile, la sua fattorizzazione è uguale a se stesso: " $X^2 + X + 6$ "

- $X^3 - 6x^2 + 11x - 6$ in $\mathbb{R}[X]$

per i polinomi grado 3 si può andare a tentativi

· $\exists v_0$ no ($c'è -6$)

$$\exists v_1 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 12 - 6 - 6 = 0$$

1 è radice, quindi il pol. irriducibile $x-1$ divide il polinomio $\iff x-1 \mid x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

calcolo il quoziente:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x-1 \\ \hline x^3 - x^2 & x^2 - 5x^2 + 6 \\ -5x^2 + 11x - 6 & \\ \hline -5x^2 + 5x & \\ 6x - 6 & \\ \hline 6x - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

poi uso la formula quadratica:

$$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$$

quindi: $x_i = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \quad (\text{entrambi dividono } x-1 \text{ e sono coprimi, quindi il loro prodotto divide } (x-1)^2)$$

$$\text{quindi: } P = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

Avrei anche potuto provare $\exists v_1, \exists v_2, \exists v_3$ e vedere che avrebbe funzionato

- $X^2 - 2X + 2$ in $\mathbb{C}[X]$ $C = \{x+iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \text{ ovvero } i^2 = -1\}$

pensiamo prima in $\mathbb{R}[X]$ un'eventuale fattorizzazione rimarrebbe in $\mathbb{C}[X]$ (al massimo da affinare)

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \quad \text{è irriducibile in } \mathbb{R}[X]$$

ma si fattorizza in $\mathbb{C}[X]$ perché ommette le radici

$$x_1 = \frac{2+2i}{2} = i+1 \quad x_2 = \frac{2-2i}{2} = i-1$$

$$F = (x - (i+1))(x - (i-1))$$

■ $F = x^3 - 1$ si ha $\text{ev}_1(F) = 0$ per qualunque campo

$F = (x-1) G$ div.
escludes
FALCA $= (x-1)(x^2+x+1)$ ha $\Delta < \emptyset$, irriducibile
(anche in \mathbb{Q} - se lo è in \mathbb{R})

La fattorizzazione in $\mathbb{R}[x]$ è $(x-1)(x^2+x+1)$ (idem in $\mathbb{Q}[\mathbb{R}]$)

in \mathbb{C} : radici $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$

la fatt. in $\mathbb{C}[x]$ è $F = (x-1)(x-x_1)(x-x_2)$

\mathbb{C}

NUMERI COMPLESSI

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$i := \sqrt{-1}$ caratterizzato dalla condizione $i^2 = -1$

possiamo anche scrivere $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$

realizzazione cartesiana di \mathbb{C}

Operazioni: posti $z = x + iy$ $z' = x' + iy'$

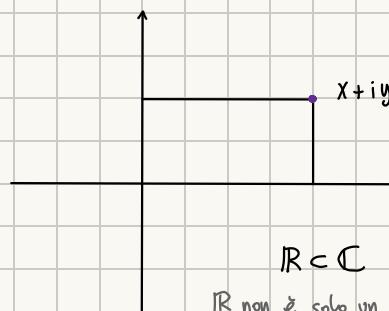
$$\bullet -z := -x + i(-y) \in \mathbb{C} \quad \text{opposto}$$

$$z + z' := (x + x') + i(y + y') \in \mathbb{C} \quad \text{somma}$$

$$\bullet zz' := (x + iy)(x' + iy') = xx' + ix'y + ix'y' + i^2yy' = \\ = xx' - yy' + i(x'y + xy') \in \mathbb{C} \quad \text{prodotto}$$

• NUOVA operazione: CONIUGAZIONE COMPLESSA sopra

• $(\mathbb{C}, -, +, \cdot, 0, 1)$ è unello commutativo unitario



la parte reale $\operatorname{Re}(z) = x$
la parte immaginaria $\operatorname{Im}(z) = y$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

\mathbb{R} non è solo un sottoinsieme,
ma un SOTTOCAMPO (sottoinsieme campo di un campo)

→ esponenziale di Euler

$$e^{iy} := \cos(y) + i \sin(y) \in \mathbb{C} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad y \mapsto e^{iy}$$

Euler ha notato che, se $\theta, \eta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\eta} \xrightarrow{\text{prop. potenze}} e^{i(\theta+\eta)}$$

$$\begin{aligned} & [\cos(\theta) + i \sin(\theta)] \cdot [\cos(\eta) + i \sin(\eta)] \\ & \quad \parallel \\ & \cos(\theta)\cos(\eta) + \cos(\theta)i\sin(\eta) + i\sin(\theta)\cos(\eta) + i^2\sin(\theta)\sin(\eta) \\ & \quad \parallel \\ & (\because -1) - \sin(\theta)\sin(\eta) \end{aligned}$$

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad \text{con } \theta = \theta + \eta$$

raggruppo parte reale e immaginaria

$$\begin{aligned} & \cos(\theta)\cos(\eta) - \sin(\theta)\sin(\eta) \xrightarrow{\quad} \cos(\theta+\eta) + i \sin(\theta+\eta) \\ & + i(\cos(\theta)\sin(\eta) + \cos(\eta)\sin(\theta)) \quad \cdot \cos(\theta)\cos(\eta) - \sin(\theta)\sin(\eta) = \cos(\theta+\eta) \\ & \quad \cdot \cos(\theta)\sin(\eta) + \cos(\eta)\sin(\theta) = \sin(\theta+\eta) \end{aligned}$$

• in modo simile si trova $(e^{iy})^n = e^{iny} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

non l'ha fatto ma l'ha trovata su internet
(+ formula di de Moivre: $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$)

Esempi numeri complessi (Eulero, De Moivre)

$$e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1 + i0 = 1$$

$$e^{i\cdot 0} = \cos(0) + i \sin(0) = 1 + i0 = 1$$

$$1 = e^{i2\pi} = e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot 3} = (e^{\frac{2\pi i}{3}})^3 \quad \text{poniamo } x = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$x^3 = 1$ quindi x è radice di $x^3 - 1$ $\operatorname{ev}_x(x^3 - 1) = 0$

• Osserviamo $1 = 1^2 = (e^{\frac{2\pi i}{3}})^{3 \cdot 2} = (e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot 2})^3 = (e^{\frac{4\pi i}{3}})^3$ quindi anche x^2 è radice di $x^3 - 1$

$$\cdot x^0 = e^{\frac{0\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{0\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0\pi}{3}\right) = 1$$

$$\cdot x^1 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\cdot x^2 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

L'insieme $\{x^0, x^1, x^2\} = R$ ha 3 elementi distinti e

$$\forall y \in R, \operatorname{ev}_y(x^3 - 1) = 0 \implies x^3 - 1 = (x - x^0)(x - x^1)(x - x^2)$$

$$\text{in (4)} \quad e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad e^{\frac{4\pi i}{3}} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

CONIUGAZIONE COMPLESSA nuova operazione di \mathbb{C}

Per $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\bar{z} = x - iy \quad \text{cambio segno alla parte immaginaria}$$

poniamo anche $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h(z) = \bar{z}$

proprietà

$$\textcircled{1} \quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad (h(z+z') = h(z) + h(z'))$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'} \quad (h(zz') = h(z)h(z'))$$

$$\textcircled{3} \quad \overline{-z} = -\bar{z} \quad (h(-z) = -h(z))$$

$$\textcircled{4} \quad h \text{ è una biiezione} \quad h^{-1} = h$$

es. mostrare \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4}: $z = x + iy$ $z' = x' + iy'$

$$\textcircled{1} \quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

$$\overline{z+z'} = \overline{(x+x') + i(y+y')} = \overline{x+x' - i(y+y')} = \bar{x} - iy + \bar{x}' - iy' = (\text{raccogliendo}) x + x' + i(y + y')$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{xx' - yy' + i(xy' + xy)} = xx' - yy' - i(xy' + xy) \quad \overline{\bar{z} \cdot \bar{z'}} = \bar{x} - iy \cdot (x' - iy) = xx' - ixy' - ix'y + i^2yy' = xx' - yy' - i(xy' + xy)$$

$$\textcircled{3} \quad \overline{-z} = -\bar{z}$$

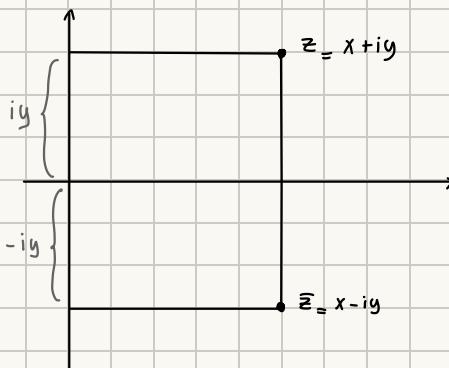
$$-\bar{z} = -\overline{x + i(-y)} = -x - i(-y) \quad -\bar{z} = -(x - iy) = -x - i(-y)$$

reali e \bar{z}

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$$

nei reali, $z = \bar{z}$
(i numeri reali non hanno parte immaginaria)

$$z = x + i0 \iff z = x - i0$$



graficamente, $(-)$ corrisponde alla riflessione rispetto all'asse \mathbb{R}

$$h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \bar{z}$$

come isomorfismo
gruppi, ma con anelli vedi p.57

h è un
isomorfismo
di anelli

omomorfismo: dati (G, \cdot) , (H, \odot)
strutture algebriche dello stesso tipo
un omomorfismo è $f: G \rightarrow H$
tale che $f(g \cdot h) = f(g) \odot f(h) \quad \forall g, h \in G$

isomorfismo: omomorfismo biiettivo

Formule fondamentali

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2$$

$= 0 \iff x = y = 0$
 $> 0 \iff z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

valore assoluto complesso

• \mathbb{C} è un campo

(uso l'inverso di $z\bar{z}$ per trovare quello di z)

dim: dato $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, prendo $z\bar{z} = x^2 + y^2$ e lo moltiplico per il suo inverso: $(x^2 + y^2)^{-1}$

$$\underbrace{z\bar{z}(x^2 + y^2)^{-1}}_{\text{inverso di } z} = 1 \quad \text{quindi ogni elemento non nullo di } \mathbb{C} \text{ è invertibile} \blacksquare$$

"Sui libri si trova:"

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{(x^2 + y^2)} = 1$$

esempi:

$$\cdot z = 2 = 2+i0 \in \mathbb{R} \quad \bar{z} = 2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

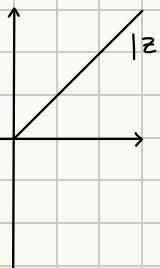
$$\cdot z = i = 0+1 \cdot i \quad \bar{z} = -i \quad x^2 + y^2 = 1 \quad z^{-1} = \frac{-i}{1} = -i$$

$$\cdot z = 1+i \quad \bar{z} = 1-i \quad z\bar{z} = 2 \quad z^{-1} = \frac{1-i}{2} \quad (1+i) \frac{1-i}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Valore assoluto complesso

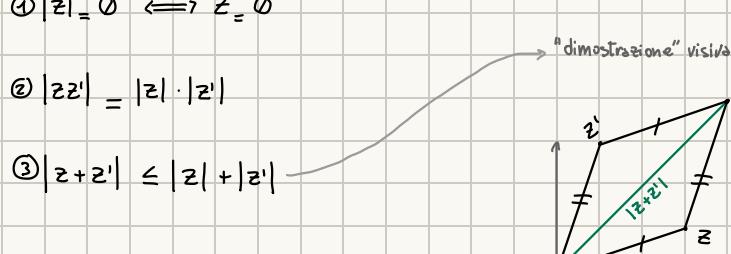
proprietà

$$\textcircled{1} |z| = 0 \iff z = 0$$



$$\textcircled{2} |zz'| = |z| \cdot |z'|$$

$$\textcircled{3} |z+z'| \leq |z| + |z'|$$



per le proprietà dei triangoli:
lunghezza lato < somma l. altri lati

Proprietà / esercizio

$$\forall g \in \mathbb{R} \quad \textcircled{1} |e^{ig}| = 1 \quad \textcircled{2} (e^{ig})^{-1} = \overline{e^{ig}} = e^{-ig}$$

dim:

$$\textcircled{1} e^{ig} = \cos(g) + i \sin(g) \quad \left| e^{ig} \right| = \sqrt{\underbrace{\cos(g)^2 + \sin(g)^2}_{=1 \text{ (prop sin, cos)}}} = \sqrt{1} = 1$$

• $e^{ig} \neq 0$, quindi è invertibile

$$e^{ig} \cdot e^{-ig} = e^{ig} e^{-ig} \quad \text{con } \eta = -g = e^{i(g-\eta)} = e^{i0} = 1 \quad \text{quindi } e^{-ig} = (e^{ig})^{-1} \text{ (inverso)}$$

$$\overline{e^{ig}} = \overline{\cos(g) + i \sin(g)} = \frac{\overline{e^{ig}}}{\cos(g)^2 + \sin(g)^2} = \frac{\overline{e^{ig}}}{1} \quad \text{ma anche } \frac{\overline{e^{ig}}}{|\overline{e^{ig}}|^2} \quad \text{quindi } \frac{1}{\overline{e^{ig}}} \quad \text{quindi } \overline{e^{ig}} = (e^{ig})^{-1}$$

RAPPRESENTAZIONE POLARE

i numeri complessi possono essere rappresentati in due modi: • rappresentazione complesso ($z = x+iy$) - utile per la somma

• rappresentazione polare (trigonometrica) - utile per il prodotto

dati $z \in \mathbb{C}^*$ $z = x+iy$, $\rho = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{R}_{>0}$
 $z \neq 0$ è un unicum ($z=0 \rightarrow \rho=0$; $\exists g'$)

distanza euclidea

(dall'origine)

Lemma

- $\exists g \in \mathbb{R}$ t.c. $z = \rho e^{ig}$
- inoltre, $g + 2\pi\mathbb{Z}$ è unicamente determinato

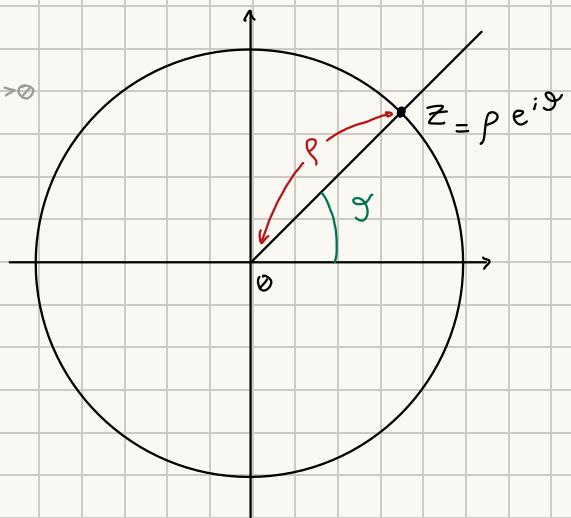
dim (di g...)

$$\rho = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}, \quad z' := \rho^{-1} \cdot z \quad \text{"componente angolare"} \quad z' = \rho^{-1} z = e^{ig}$$

$$\cdot z' = x' + iy' \quad \exists g \text{ t.c. } x' = \cos(g) \quad y' = \sin(g) \quad \textcircled{1}$$



$$\Rightarrow (\text{sostituendo in } z' = x' + iy') \quad z' = \cos(g) + i \sin(g) = e^{ig} \quad \text{quindi (per } z' = \rho^{-1} z) \quad z = \rho e^{ig} \quad \text{quindi esiste } g.$$



Le soluzioni di $\textcircled{1}$ sono esattamente gli elementi di $g + 2\pi\mathbb{Z}$ per un certo $g \in [0, 2\pi)$

• Su \mathbb{R} c'è la relazione di congruenza mod. 2π

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha \equiv \beta \pmod{2\pi} \iff \alpha - \beta \in 2\pi\mathbb{Z} \quad (\text{che è una rel. di equivalenza})$$

da cui $g + 2\pi\mathbb{Z}$ è una classe di equivalenza e si identifica con un elemento di $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (anche se non è un quelllo)

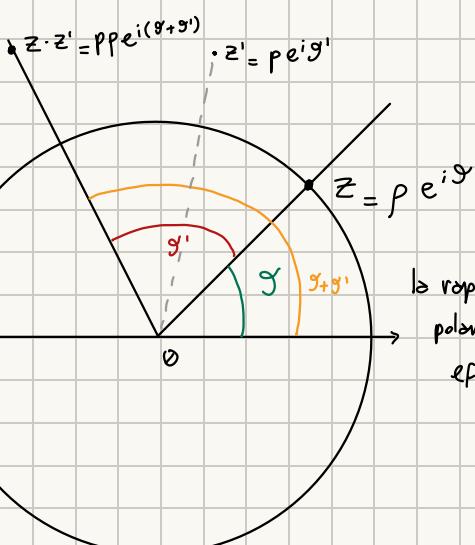
OSS: $z \in \mathbb{C}$ è della forma $e^{ig} \iff |z| = 1$. Viceversa, se $|z| = 1$, la sua distanza dall'origine è 1
 quindi giace sul cerchio delle unità. ($\rho = 1$)

OSS: il coniugato di z è il suo inverso se $\rho = 1$ ($z \in$ cerchio unità)

dim (fatto al QnA)

$$\bar{z} = \overline{\rho e^{ig}} = \overline{\rho} \overline{e^{ig}} = \rho (\cos(g) - i \sin(g)) = \rho (\cos(-g) + i \sin(-g)) = \rho e^{-ig}$$

$$z^{-1} = (\rho e^{ig})^{-1} = \rho^{-1} e^{-ig} \quad \text{Quindi, } z^{-1} = \bar{z} \iff \rho e^{-ig} = \rho^{-1} e^{-ig} \iff \rho = 1$$



la rappresentazione
polare è utile per
effettuare moltiplicazioni
di numeri complessi

$$\text{in cui, visto che: } z' \bar{z}' = \rho^{-1} z \bar{\rho^{-1} z} = \rho^{-2} z \bar{z} = \rho^{-2} \cdot \rho^2 = 1$$

$$z \bar{z} = 1, \quad \text{quindi } \sqrt{z \bar{z}} = 1$$

OSS (al QnA): si ha che

$$\bar{z} = -z \iff z \in i\mathbb{R} \quad (y=0)$$

$$\bar{z} = -z \iff x - iy = -x - iy \iff x = 0$$

def ALGEBRICAMENTE CHIUSO

K campo è detto algebricamente chiuso se: $\forall F \in K[X] \setminus K$ non el.
del campo ("costanti")

$$\exists x \in K \text{ t.c. } x \text{ è radice di } F \iff \exists x \in K : X-x \mid F$$

(se ha almeno una radice in K)

Lemme

K è algebricamente chiuso se e solo se i soli polinomi irriducibili e monici sono i polinomi $X-x$, $x \in K$ (grado 1)

dimostrazione

• (\Rightarrow lemma) Sia $P \in K[X]$ irriducibile e monico.

Siccome K è chiuso algebricamente (per ipotesi) $\exists x \in K$ t.c. $X-x \mid P$

$$P = (X-x)Q \text{ con } Q \in K[X] \setminus \{\emptyset\}$$

$\deg(P) = 1 + \deg(Q)$ · se P è di grado 1, ho già dimostrato.

· se $\deg(P) \geq 2$ allora $\deg(Q) \geq 1$. Quindi, $Q \notin K[X]^* = K^*$ ($= K \setminus \{\emptyset\}$)

ma anche $(X-x) \notin K[X]^*$. Questo contraddice P irriducibile $\implies \deg(P) = 1$
 $\implies P = X-x$

• (\Leftarrow lemma) Supponiamo $\{P \in K[X] \text{ monico irriducibile}\} = \{X-x : x \in K\}$

Sia P monico $\deg \geq 1$. Allora $P = \prod_{\substack{Q \text{ irr.} \\ \in K \\ \text{monico}}} Q^{v_Q(P)}$ i soli irr. e monici hanno $\deg = 1$

$\prod_{x \in K} (X-x)$

Sia $x \in K$ t.c. $v_{X-x}(P) \neq 0$. Allora $X-x \mid P \iff v_{X-x}(P) = 0$
 $\implies X-x \text{ è radice di } P \blacksquare$

Corollario: MOLTEPLICITÀ

K algebricamente chiuso $\implies \forall F \in K[X] \setminus \{\emptyset\}$ si scrive in modo unico come

$$F = \lambda \prod_{x \in K} (X-x)^{v_x(F)}$$

$v_x(F)$ è la MOLTEPLICITÀ di F in x

$$\text{Si ha che } \{x : v_x(F) \neq 0\} = \{x : v_x(F) = 0\} = \{x \text{ radice di } F\} = R$$

chiaramente un pol.
Si decomponga solo con
le sue radici

Questo insieme ha cardinalità $\leq \deg(F) := n$

$$\deg(F) = \sum_{x \in K} v_x(F) = \sum_{x \in R} v_x(F) \geq \sum_{x \in R} 1 = \text{cardinalità di } R \quad (\text{ovvero, perché un pol. di grado } n \text{ ha } \leq n \text{ soluzioni})$$

esp. dei polinomi
in cui si scomponete

Teorema (fondamentale dell'algebra)

\mathbb{C} è algebricamente chiuso

(dim. omessa perché usa elementi dell'analisi)

Teorema

$\forall K$ campo esiste sempre un altro campo algebricamente chiuso che lo contiene

esempio \mathbb{R} non è algebricamente chiuso ma $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$(x^2 + 1 \Delta < 0 \text{ è irr. e non ha grado 1})$

31/10

FATTORIZZAZIONE DI VARI POLINOMI

- $X^n - 1 \quad (n \leq 5)$

il polinomio $X^n - 1$ ha sempre radice 1 (e $X-1 \mid X^n - 1$)

$$X^n - 1 = (X-1)Q \quad \begin{matrix} \deg(Q) = n-1 \\ \text{unicamente determinata} \end{matrix}$$

più precisamente $Q = X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1$

↓

$$\text{infatti } (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1) = X^n + X^{n-1} + \dots + X^2 + X - (X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1) = X^n - 1$$

- $n=3 \quad X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1) \quad \text{fattorizzazione in } \mathbb{R}[X]$

$$\text{in } \mathbb{C}[X] \quad X^2 + X + 1 = \left(X + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(X + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

(io che ragiona...)

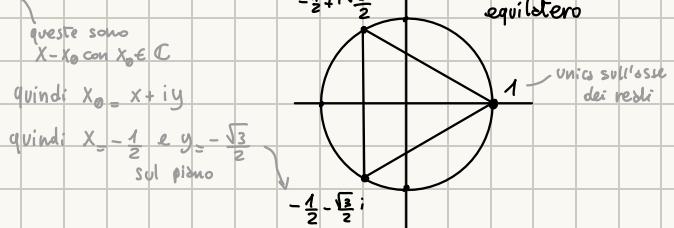
per la rapp. polare, $\exists \vartheta$ t.c. $z = \rho e^{i\vartheta}$

nel cerchio delle unità, $\rho = 1$, $z = e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)$

quindi $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono $\cos \vartheta$ e $\sin \vartheta$ di un ϑ - quale?

$$\cos(\vartheta) = -\frac{1}{2} \quad \text{se } \vartheta = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \sin(\vartheta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{se } \vartheta = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{7\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\vartheta = \frac{2\pi}{3} \quad \text{quindi } z = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad (\text{per } -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ è } \frac{4\pi}{3})$$



$$-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = x = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad \text{①} \quad -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = x^2 = (e^{\frac{2\pi i}{3}})^2 = (e^{\frac{2\pi i}{3}})^{-1} \cdot (e^{\frac{2\pi i}{3}})^{-1} \quad \text{②}$$

$$\text{① } -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4\pi i}{3}} = e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot 2} = (e^{\frac{2\pi i}{3}})^2$$

② abbiamo già dimostrato P.49 che $(e^{i\vartheta})^{-1} = \overline{(e^{i\vartheta})} = e^{-i\vartheta}$

quindi basta che $e^{\frac{4\pi i}{3}} = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$ → questo è vero per periodicità:

$$\frac{4\pi i}{3} = -\frac{2\pi i}{3} + 2\pi i$$

OSSERVAZIONE: n pari ha anche la radice -1 (perché $(-1)^n = 1$)

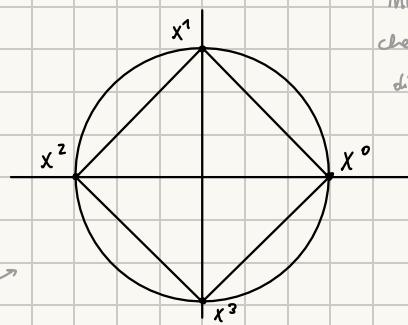
- $n=4 \quad X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2 + 1) \quad \text{in } \mathbb{R}[X]$

$(X-1)(X+1)(X-i)(X+i) \quad \text{in } \mathbb{C}[X]$

$$X^4 = (X - x^0)(X - x^1)(X - x^2)(X - x^3)$$

$$\text{con } x = e^{\frac{2\pi i}{4}} = e^{\frac{\pi i}{2}} = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_0 + i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_1 = i$$

$$= (X - i^0)(X - i^1)(X - i^2)(X - i^3) = (X-1)(X-i)(X+1)(X+i)$$



Iniziamo ad osservare che se α è radice

di $X^4 - 1$, allora

$\alpha \in \mathbb{R}$

o anche $\bar{\alpha}$ è radice

$$\blacksquare \quad n=5 \quad X^5 - 1 = (X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) \quad \text{in } \mathbb{R}[X]$$

prodotto di due quadratici irriducibili monici

i due quadrati irriducibili (in \mathbb{R}) monici:

$$P_1 = (X-x)(X-\bar{x}) \in \mathbb{R}[X]$$

$$P_2 = (X-x^2)(X-\bar{x}^2) \in \mathbb{R}[X]$$

(e non quattro di primo grado perché c'è un fattore di grado 1 \iff c'è una radice reale)

e in $X^5 - 1$ c'è solo 1)

$$\text{infatti, } P_1 = (X-x)(X-\bar{x}) = X^2 - (x+\bar{x})X + x\bar{x}$$

$$P_2 = (X-x^2)(X-\bar{x}^2) = X^2 - (x^2+\bar{x}^2) + |x^2|^2$$

con:

$$\bullet \quad x = \alpha + i\beta \quad \cdot \bar{x} = \alpha - i\beta \quad \cdot \quad x + \bar{x} = 2\alpha \in \mathbb{R} = 2 \operatorname{Re}(x^2) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\bullet \quad x\bar{x} = x^2 + \beta^2 \geq 0 = 1 \quad (\text{ricorda } z\bar{z} = 1) \quad \cdot \quad x^2 + \bar{x}^2 = 2 \operatorname{Re}(x^2) = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \quad \cdot \quad |x^2|^2 = 1$$

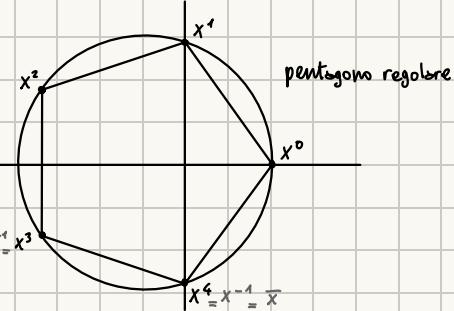
$$P_1 = X^2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1 \quad , \quad P_2 = X^2 - 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X + 1 \quad \text{fatt. in } \mathbb{R}[X] = (X-x^0)P_1P_2$$

• in $\mathbb{C}[X]$, $X^5 - 1$ ha le radici distinte $\left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)^k$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\left(\left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)^k\right)^5 = \left(e^{\frac{2\pi i}{5} \cdot 5}\right)^k = \left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)^k = 1$$

$$\text{sono distinte perché } \left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)^k = \cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right)$$

x De Moivre



$$\text{quindi } X^5 - 1 = \prod_{i=0}^4 (X-x^i) = (X-x^0) \left[(X-x) \left(\frac{X-x^4}{X-x^2} \right) \right] \left[(X-x^2) \left(\frac{X-x^4}{X-x^3} \right) \right]$$

$$\text{osservazione: con } n \geq 1, \quad X^n - 1 = \prod_{i=0}^{n-1} (X-x^i) \quad \text{con } x = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$



def POLINOMIO CONIUGATO

Dato $F = f_0 + f_1 X + \dots + f_n X^n \in \mathbb{C}[X]$, poniamo $\bar{F} = \bar{f}_0 + \bar{f}_1 X + \dots + \bar{f}_n X^n$

OSSERVAZIONE: $F \in \mathbb{R} \iff F = \bar{F}$ in \mathbb{R} , $x = \bar{x}$

Inoltre, se $F \in \mathbb{R}[X]$ e $\text{ev}_z(F) = 0$, allora $\text{ev}_{\bar{z}}(F) = 0$

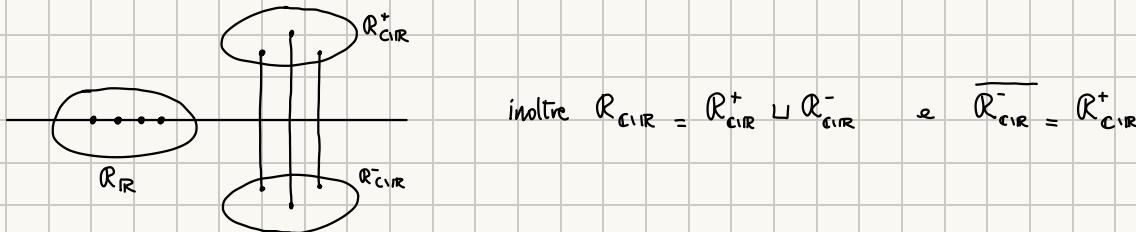
dim: $\text{ev}_z(F) = \text{ev}_{\bar{z}}(\bar{F})$ e, siccome la somma complessa è compatibile con $+$, $-$.

$$= \overline{\text{ev}_z(F)} = \bar{0} = 0$$

Lemma Dato $F \in \mathbb{R}[X]$

detto R l'insieme delle sue radici, allora $R = R_{\mathbb{R}} \cup R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^+ \cup R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^-$ dove $R_{\mathbb{R}} = R \cap \mathbb{R}$

$R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^+ = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ t.c. } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \operatorname{Im}(z) > 0 \text{ e scrivendo } z = \sum_{i \in \mathbb{R}} x_i + iy, y > 0\}$, $R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^- = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ t.c. } \operatorname{Im}(z) < 0\}$



Lemma già dimostrato utilizzato

$X^2 + \beta X + \gamma \in \mathbb{R}[X]$ è irriducibile $\iff \Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$

dim

Supponiamo P irriducibile.

$R_{\mathbb{R}} = \emptyset$, quindi $R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} = \{z, \bar{z}\}$, $R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^+ = \{z\}$, $R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^- = \{\bar{z}\}$

$$P = (X-z)(X-\bar{z}) = X^2 - (z+\bar{z})X + z\bar{z} \\ \stackrel{z \in \mathbb{R}}{=} z^2 - 2zX + |z|^2$$

$$\Delta = (z+\bar{z})^2 - 4z\bar{z} = z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 - 4z\bar{z} = (z-\bar{z})^2$$

$$\text{scrivo } z = x+iy \quad z-\bar{z} = 2iy, \quad \text{quindi } (z-\bar{z})^2 = (2iy)^2 = 4i^2y^2 = 4y^2 \cdot -1 = -4y^2 < 0$$

Lemma

Ogni $F \in \mathbb{R}[X]$ si spezza in $\mathbb{R}[X]$ in prodotto $F = \lambda \prod_{x \in R_{\mathbb{R}}} (X-x)^{v_x(F)} \prod_{z \in R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}} \underbrace{[(X-z)(X-\bar{z})]}_{v_z(F)}$

dim: siccome C è algebricamente chiuso,

$$F = \lambda \prod_{z \in C} (X-z)^{v_z(F)} = \lambda \prod_{z \in R_{\mathbb{R}}} (X-z)^{v_z(F)} \prod_{z \in R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}} (X-z)^{v_z(F)}$$

se $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ si ha $\bar{z} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Quindi, possiamo scegliere, senza perdita di generalità, $z = x+iy$ con $y > 0$ e \bar{z} appartenente a \mathbb{R}

Sì conclude osservando che $R = R_{\mathbb{R}} \cup R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^+ \cup R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^-$

Lemma (in teoria esercizio ma mi sembra più un lemma)

Sia $P \in \mathbb{R}[x]$ di grado dispari. Allora P ammette almeno una radice reale.

$$\text{questo implica } \deg(P) = \# \underset{\substack{\text{card.} \\ P}}{R_{\mathbb{R}}} + \# \underset{\substack{\text{i coniugati} \\ S}}{R_{C \setminus \mathbb{R}}} = \# \underset{\substack{\text{pari} \\ P}}{R_{\mathbb{R}}} + 2 \# \underset{\substack{\text{dispari} \\ S}}{R_{C \setminus \mathbb{R}}}$$

Si come P è di grado dispari, $\deg(P) = 2n+1 = \# R_{\mathbb{R}} + 2S$ Ma allora $2n+1 = r + 2s \iff r = 2n - 2s + 1 \iff r \equiv 1 \pmod{2} \implies r \neq 0$

c'è servito il teorema dei valori intermedi (dell'Analisi)

se $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua t.c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$

allora $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $h(x_0) = 0$

$$P = X^{2n+1} + \alpha_{2n} X^{2n} + \dots + \alpha_0 \in \mathbb{R}[x] \text{ dispari}$$

sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = ev_x(P)$: è continua e soddisfa $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
da cui $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) = 0 \iff x_0$ radice di f

esercizio 1

$$P = X^4 - 10X^2 + 1 \quad \text{in } (\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$$

• in \mathbb{C}

$$\text{tentiamo le radici. pongo } Y = X^2 \quad P = Y^2 - 10Y + 1$$

$$\Delta > 0, \text{ radici } y_1 = 5 - 2\sqrt{6} > 0, \quad y_2 = 5 + 2\sqrt{6} > 0$$

$$5 > 2\sqrt{6} \iff 25 > 4 \cdot 6$$

$$y^2 - 10y + 1 = (x^2 - 5 + 2\sqrt{6})(x^2 - 5 - 2\sqrt{6}) = \underset{\substack{\text{in } \mathbb{Q}}}{(x + \sqrt{5+2\sqrt{6}})} \underset{\alpha_1}{(x + \sqrt{5-2\sqrt{6}})} \underset{\alpha_2}{(x - \sqrt{5-2\sqrt{6}})} \underset{\alpha_3}{(x - \sqrt{5+2\sqrt{6}})} \underset{\alpha_4}{\text{è la fatt. in } \mathbb{R}[x] \text{ e anche in } \mathbb{C}[x]}$$

POSSIBILI FATTORIZZAZIONI IN IRR. DI POLINOMI IN $\mathbb{Q}[x]$

$Q \in \mathbb{Q}[x]$ (uguale per un campo qualsiasi)

• $\deg(Q) = 1$ è irriducibile

• $\deg(Q) = 3$ ② \mathbb{Q} irriducibile

• $\deg(Q) = 4$ ③ \mathbb{Q} irriducibile

② $Q = P_1 P_2$ $\deg(P_1) = 1, \deg(P_2) = 3$ irriducibili c'è radice

• $\deg(Q) = 2$ ④ \mathbb{Q} irriducibile

② $Q = P_1 P_2$ dove $\deg(P_1) = 1, \deg(P_2) = 2$ irriducibile

③ $Q = P_1 P_2$ $\deg(P_1) = \deg(P_2) = 2$ irriducibili non c'è radice

② $Q = P_1 P_2$ con P_1, P_2 irriducibili di grado 1

④ $Q = P_1 P_2 P_3$ $\deg(P_1) = 2, \deg(P_2) = \deg(P_3) = 1$ c'è radice

TEORIA DEI GRUPPI

GRUPPI

Dato G insieme $\neq \emptyset$ con $*$ operazione binaria su G , ovvero: $G \times G \rightarrow G$
 $(a, b) \rightarrow a * b$, seleziono un elemento distinto e .
 el. neutro

La terna $G = (G, *, e)$ è un gruppo se:

- non per forza distinti

① $\forall a, b, c \in G \quad (a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c$ associazività

② $\forall a \in G \quad a * e = e * a = a$ elemento neutro per l'operazione binaria

③ $\forall a \in G \quad \exists a' \in G$ t.c. $a * a' = a' * a = e$ inverso per l'op. binaria

add-on: INVERSIONE NEI GRUPPI

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in G \quad & (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \\ & (abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1} \text{ ecc} \\ & (\text{inversi dei singoli, in ordine inverso}) \end{aligned}$$

Inoltre, se

④ $\forall a, b \in G, \quad a * b = b * a$, allora G è un gruppo abeliano (o commutativo)

Quindi - come avevamo visto - le prime 4 condizioni di un anello descrivono un gruppo abeliano.

gruppi in notazione additiva

$(G, +, 0)$ si scrive $+$ per l'operazione
e 0_G per l'el. neutro
si dice in notazione additiva

OSS: di solito i gruppi in notazione additiva sono commutativi

In notazione additiva, l'inverso di $a \in G$
si chiama opposto e si scrive $-a$

gruppi in notazione moltiplicativa

$(G, \cdot, 1)$ si scrive \cdot per l'operazione
e 1_G per l'el. neutro
si dice in notazione moltiplicativa

OSS: Per questi gruppi, non è garantita la commutatività.

In notazione moltiplicativa, l'inverso di $a \in G$ si scrive a^{-1}

ESEMPI $(A, -, +, 0_A, 1_A)$ Anello

Allora $(A, +, 0_A)$ gruppo abeliano in nat. additivo

$\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, 0) \quad \mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, 0), \quad \mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, 0)$

o anche $K = (K, +, 0)$ con K qualunque campo

ESEMPI $(A, -, +, 0_A, 1_A)$ Anello

Allora $A^{\times} = (A^{\times}, \cdot, 1_A)$ gruppo in nat. moltiplicativa
infatti abbiamo visto

① il prodotto di el. invertibili è invertibile

② il prodotto è associativo

③ se $a, b \in A^{\times}$ allora $ab \in A^{\times}$ e $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

inoltre, A^{\times} è abeliano (se A è commutativo?)

def SOTTOGRUPPO

Dato un gruppo G e un sottoinsieme $H \subset G$ non vuoto

Si dice che H è un sottogruppo di G se:

not.
multiplicativa $\forall a, b \in H, \quad$ si ha $a \cdot b^{-1} \in H$ so che $\in G$, ma se $\in H$, è sottogruppo

$\forall a, b \in H, \quad$ si ha $a \cdot b \in H$ not. additivo

Si scrive $H < G$

OSSERVAZIONE H è stabilizzato (rispetto al prodotto)

$a \cdot b^{-1} \text{ con } b = a$

• Se $a \in H, \quad a \cdot a^{-1} = 1_G \in H$

$a \cdot a^{-1} \text{ con } a = 1_G$

• Ma allora, $\forall b \in H \quad 1_G \cdot b^{-1} \in H$ quindi $b^{-1} \in H$ e $1_G = 1_H$

• Infine, se $a, b \in H, \quad b^{-1} \in H, \quad a \cdot (b^{-1})^{-1} = a \cdot b \in H$

(quindi un sottogruppo H contiene anche gli inversi e i prodotti dei suoi el.)
e anche l'el. neutro del gruppo di cui è sottogruppo

def OMOMORFISMI DI GRUPPI

Dati G_1, G_2 gruppi (in notazione moltiplicativa)

Sia $f: G_1 \rightarrow G_2$ un'applicazione:

f è un omomorfismo di gruppi se

$$\textcircled{1} f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$$

$$\textcircled{2} \forall a \in G_1, f(a^{-1}) = f(a)^{-1} \quad \begin{matrix} \text{inversione} \\ \text{in } G_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{inversione} \\ \text{in } G_2 \end{matrix} \quad (\text{ma basta solo la } \textcircled{3} - \text{che implica le altre})$$

$$\textcircled{3} \forall a, b \in G_1, f(a \cdot b) = f(a) f(b) \quad \begin{matrix} \text{operazione} \\ \text{di } G_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{operazione} \\ \text{di } G_2 \end{matrix} \quad (\text{in modo più chiaro: } \circ \text{ op. } G_1, \circ \text{ op. } G_2)$$

(l'ordine conta! non si sa se è abeliano)

esercizio: mostrare che $f: G_1 \rightarrow G_2$ è un omomorfismo $\iff \forall a, b \in G_1, f(a \cdot b^{-1}) = f(a) f(b)^{-1}$

\Rightarrow supponiamo f omomorfismo.

$$\text{Allora } f(ab) = f(a)f(b) \quad (\textcircled{3}) \quad \text{quindi } f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1}.$$

$$\text{Ma (per } \textcircled{2} \text{)} f(b^{-1}) = f(b)^{-1}$$

$$\text{Quindi } f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1}$$

\Leftarrow supponiamo $f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1}$

$$\cdot f(1_{G_1}) = 1_{G_2} \quad \text{dim: pongo } a = b \quad f(b \cdot b^{-1}) = f(b)f(b)^{-1} = 1_{G_2}$$

$$\cdot f(a^{-1}) = f(a)^{-1} \quad \text{dim: pongo } a = 1_{G_1} \quad f(1_{G_1} \cdot b^{-1}) = f(1_{G_1})f(b)^{-1} = 1_{G_2} f(b)^{-1} = f(b)^{-1} \quad \text{per } \textcircled{1}$$

$$\cdot f(a \cdot b) = f(a)f(b) \quad \text{dim: pongo } b = b^{-1} \quad f(a \cdot (b^{-1})^{-1}) = f(a)f(b^{-1})^{-1} = f(a)f((b)^{-1})^{-1} = f(a)f(b) \quad \text{per } \textcircled{2}$$

def ISOMORFISMO

Sia $f: G_1 \rightarrow G_2$ omomorfismo di gruppi

Se f è biiettiva, allora si dice che f è un isomorfismo

esercizio

$f: G_1 \rightarrow G_2$ isomorfismo. Supponiamo che f biiettiva $\iff \exists f^{-1}: G_2 \rightarrow G_1$ biiettiva t.c. $f \circ f^{-1} = \text{Id}_{G_2}, f^{-1} \circ f = \text{Id}_{G_1}$

DIMOSTRARE CHE f^{-1} È UN ISOMORFISMO

Inoltre, $G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3$ con f, g omom. di gr.

Allora anche $g \circ f: G_1 \rightarrow G_3$ omom. di gr.

e in più f, g sono isomorfismi e anche $g \circ f$, di inverso $f^{-1} \circ g^{-1}$

ESEMPI

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$$

notazione additiva

$\forall a, b \in m\mathbb{Z}, a-b \in m\mathbb{Z}$
 $\exists \alpha, \beta \text{ t.c. } a = \alpha m, b = \beta m$
quindi $a-b = (\alpha-\beta)m \in m\mathbb{Z}$

con $f(n) := mn$ applicazione

è un isomorfismo di gruppi

Infatti ① $f(n-n') = m(n-n') = mn - mn' = f(n) - f(n')$ è omomorfismo di gruppi.

② iniettivo $f(p) = f(q) \iff pm = qm \iff m(p-q) = 0 \iff p=q$

③ suriettivo $y \in m\mathbb{Z}$. $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.c. $y = mk$. Ponendo $x=k$ si ha $f(x) = mk = y$

(Esempio che mischia le notazioni +, ·)

$G_1 = \mathbb{R}$ con +, $G_2 = \mathbb{R}_{>0}$ con · notare che $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{R}^{\times}$: $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ $a > 0, b > 0, b^{-1} > 0$ $ab^{-1} > 0$ quindi $ab^{-1} \in \mathbb{R}^{\times}$

poniamo:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \quad f(x) := e^x$$
$$f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) := \underset{\ln}{\log}(x) \quad e^{\log(\cdot)} = \text{Id}_{\mathbb{R}} \quad \log(e^{\cdot}) = \text{Id}_{\mathbb{R}}$$

Sono due isomorfismi di gruppi, uno l'inverso dell'altro $f^{-1} = g, g^{-1} = f$

$$f(0) = e^0 = 1 = 1_{G_2} \in G_2$$

$$g(1) = 0$$

$$f(-x) = e^{-x} = (e^x)^{-1} \text{ inverso}$$

$$g(y^{-1}) = \log(y^{-1}) = -g(y)$$

$$f(x-x') = e^{x-x'} = e^x e^{-x}$$
$$= f(x) f(x')^{-1}$$

$$g(y' y^{-1}) = g(y') - g(y)$$
$$\log\left(\frac{y'}{y}\right)$$

es. 2 foglio sett. 4

(iii) $P = X^3 + X^2 - 6x + 1 \quad Q = X^4 - 2x^3 - 2x - 1$ MCD e Bézout
con $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ campo (\mathbb{F}_2)

$\mathbb{F}_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dove questi simboli rappresentano le classi corrispondenti in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
posso anche usare altri interi per rappresentare elementi di \mathbb{F}_2 , estraiendoli dalle classi (cls. 8=1)

abbiamo visto che \mathbb{F}_2^\times è un gruppo (abeliano) in notazione.

Tavola di moltiplicazione in \mathbb{F}_2^\times

•	1	2	3	4	5	6	(lo usiamo per trovare facilmente gli inversi)
1	1	2	3	4	5	6	
2	2	4	6	1	3	5	
3	3	6	2	5	1	4	ogni volta che c'è un 1, i due numeri sono inversi
4	4	1	5	2	6	3	
5	5	3	1	6	4	2	• Ogni riga contiene uno e un solo 1 → ogni el. del gruppo è invertibile di inverso unic. det.
6	6	5	4	3	2	1	

quindi $P = X^3 + X^2 - 6x + 1 \quad Q = X^4 - 2x^3 - 2x - 1$

ALGO EUCLIDE

$$\begin{array}{r|rrr}
X^4 - 2x^3 & -2x & -1 & X^3 + X^2 + X + 1 \\
X^4 + X^3 + X^2 + X & & & X + 4 \\
\hline
-3x^3 - X^2 + 4x - 1 & & & \\
4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 & & & \\
\hline
2x^2 & + 2 & &
\end{array} \quad \begin{aligned} X^4 - 2x^3 - 2x - 1 &= \underbrace{(X+4)}_{Q} \underbrace{(X^3 + X^2 + X + 1)}_{\text{quoziente}} + \underbrace{2(X^2 + 1)}_{\text{resto}} \\ \deg(2(X^2 + 1)) &= 2 < \deg(P) = 3 \\ \text{mentre } \deg(2(X^2 + 1)) &> \deg(\text{quoziente}) \quad (\text{non sono interi}) \end{aligned}$$

continuiamo: divisione di P per il resto

$$\begin{array}{r|rr}
X^3 + X^2 + X + 1 & 2x^2 + 2 \\
X^3 + X & 4x + 4 \\
\hline
X^2 + 1 & \\
X^2 + 1 & \\
\hline
0 &
\end{array} \quad \begin{aligned} &\text{devo dividere } X^2 + 1 \text{ per } 2x^2 + 2 \\ &\text{ho quindi: } X^2 \text{ e } 2x^2 \rightarrow \text{basta mult.} \\ &\text{per } 2^{-1} = 4 \quad (\text{calcolato nella tavola}) \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{l'ultimo resto non nullo è quindi: } 2x^2 + 2 \\ &\text{ma l'MCD deve essere monico} \rightarrow \text{moltiplico per un invertibile: } 4 \\ &4 \text{ inverso di } 2, \text{ quindi: } X^2 + 1 \text{ è MCD} \end{aligned}$$

• IDENTITÀ DI BÉZOUT

abbiamo $X^4 - 2x^3 - 2x - 1 = \underbrace{(X+4)}_Q \underbrace{(X^3 + X^2 + X + 1)}_P + \underbrace{2(X^2 + 1)}_{\text{resto}}$

trovare α, β in \mathbb{F}_2 t.c. $\alpha P + \beta Q = \delta = X^2 + 1$

$$2(X^2 + 1) = Q - (X+4)P \quad \text{l'identità che abbiamo è buona, ma serve eliminare il 2 prima dell'MCD (2 è inv. moltiplichiamo per l'inverso)}$$

$$4 \cdot 2(X^2 + 1) = 4Q - 4(X+4)P$$

$$X^2 + 1 = 4Q + (3x + 5)P$$

COSTRUZIONI CANONICHE DI UN SOTTOGRUPPO

Note: un gruppo qualsiasi ha due sottogruppi evidenti:

- $\{1_G\}$ • sé stesso

\otimes not. additivo

Lemma costruzione del kernel / nucleo

Sia $f: G_1 \rightarrow G_2$ omomorfismo di gruppi

$$H = \left\{ g \in G_1 : f(g) = 1_{G_2} \right\} = f^{-1}(\{1_{G_2}\}) \subset G_1$$

elementi di G_1 che puntano all'el neutro di G_2

è un sottogruppo: $H < G_1$ si chiama NUCLEO di f e si scrive $H = \text{Ker}(f)$

dim: $a, b \in H$ con $f(a) = f(b) = 1_{G_2}$

$$f(ab^{-1}) = f(a)f(b^{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} f(a)f(b)^{-1} = 1_{G_2} 1_{G_2}^{-1} = 1_{G_2} \text{ quindi } ab^{-1} \in H$$

(in H ci sono gli el. che puntano a 1_{G_2})

Lemma

Sia $f: G_1 \rightarrow G_2$ omomorfismo di gruppi

"kernel banale" è banale perché, per def. omomorfismo di gruppi, $f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$

si ha che $\text{Ker}(f) = \{1_{G_1}\} \iff f$ è iniettiva

è il più piccolo sottogruppo di G_1 , (HA DETTO CHE METTERÀ QUESTA DOMANDA NELLA)

PROVA IN ITINERE: L'INSIEME VUOTO

NON PUÒ ESSERE UN

GRUPPO

dim

\implies Supponiamo $\text{Ker}(f) = 1_G$ ($= \{x \in G_1 : f(x) = 1_{G_2}\}$)

$$\text{Siano } x, x' \in G_1 \text{ t.c. } f(x) = f(x') \iff \underbrace{f(x)f(x)^{-1}}_{\text{diviso}} = 1_{G_2} \\ = f(x x^{-1}) \quad (\times \text{omomorfismo})$$

$$\iff x(x')^{-1} \in \text{Ker}(f) = \{1_{G_1}\} \text{ quindi } \iff x(x')^{-1} = 1_{G_1}$$

$$\text{ma per } x' \quad \underbrace{x(x')^{-1} x'}_1 = 1_{G_1} x' \iff x' = x \quad f \text{ iniettiva}$$

\iff Supponiamo f iniettiva

Sia $x \in \text{Ker}(f)$. Allora $f(x) = 1_{G_2}$

Ma f è un omomorfismo di gruppi, da cui deduco $f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$

Siccome $f(x) = f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$ e f iniettiva, si deve avere $x = 1_{G_1} \implies \text{Ker}(f) = \{1_{G_1}\}$

• costruzione del SOTTOGRUPPO IMMAGINE

$f: G_1 \rightarrow G_2$ e f omomorfismo, $f(G_1) \subset G_2$

$f(G_1) < G_2 = \{y \in G_2 : \exists x \in G_1 \text{ con } f(x) = y\}$ è il sottogruppo immagine.

dim (sottogruppo)

devo dimostrare che se $y, y' \in f(G_1)$, allora $y(y')^{-1} \in f(G_1)$

$\exists x, x' \in G_1$ t.c. $f(x) = y, f(x') = y'$

$$y(y')^{-1} = f(x)f(x')^{-1} \underset{\text{OMOMORFISMO}}{=} f(xx'^{-1}) = f(z)$$

$$\exists z \in G_1 \text{ t.c. } f(z) = y(y')^{-1} \iff y(y')^{-1} \in f(G_1)$$

• costruzione dei SOTTOGRUPPI CONIUGATI

G gruppo. Scegliamo $H < G$ e $g \in G$

$$\text{definisco } H^g := \{g' \in G \text{ t.c. } \exists h \in H \text{ t.c. } g' = g^{-1}hg\} = g^{-1}Hg \quad \begin{array}{l} \text{notazione} \\ \text{semplificata} \end{array}$$

OSSERVAZIONE. se G abeliano, $H^g = H \forall g$ ($g^1 = g^{-1}hg \iff g' = \underbrace{g^{-1}g}_{1}h \iff g' = h$)

Lemma: $H^g < G$

In generale $gH, Hg, Hg^{-1}, g^{-1}H \notin G$

dim dati $a, b \in H^g$

$$a = g^{-1}a'g \quad \exists a' \in H, \quad b = g^{-1}b'g \quad \exists b' \in H$$

$$\cdot b^{-1} = (g^{-1}b'g)^{-1} = g^{-1}b'^{-1}g \quad \begin{array}{l} \text{inversione in } G: (abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1} \\ \text{perciò } H^g \end{array}$$

$$ab^{-1} = g^{-1}a'g \cdot g^{-1}(b')^{-1}g = g^{-1}\underbrace{a'(b')^{-1}}_{\in H}g \Rightarrow ab^{-1} \in H^g \quad \forall a, b \in H^g \Rightarrow H^g < G$$

dim alternativa

Definiamo, dato $g \in G$, un'applicazione $G \xrightarrow{f_g} G$

osserviamo che Hg, f_g è un omom di gruppi: (si parla di endomorfismo)

per verificarlo devo mostrare che $\forall a, b \in G, f(ab^{-1}) = f_g(a) f_g(b^{-1})$

$$f_g(a) f_g(b^{-1}) = g^{-1}a g (g^{-1}b g)^{-1} = g^{-1}a g \cdot g^{-1}b^{-1}(g^{-1})^{-1} = g^{-1}a b^{-1}g = f_g(ab^{-1})$$

Questo dimostra perciò: $H < G_1$ e se $G_1 \xrightarrow{f} G_2$ omomorfismo, allora $f(H) < G_2$

Se $G_1 = G_2 = G$ e $f = f_g$ otteniamo $\forall H < G, f_g(H) < G \quad \begin{array}{l} \text{perciò} \\ f_g(H) = H^g \end{array} \Rightarrow H^g < G$ •

PERMUTAZIONI

GRUPPI DI PERMUTAZIONI

elementi chiamati permutazioni

dato E insieme finito, sia $S(E) = \{ f: E \rightarrow E : f \text{ biiettiva} \}$

• Su $S(E)$ esiste l'operazione di composizione di applicazioni: $E \xrightarrow[f]{\circ} E$, e se $f, g \in S(E)$, allora $g \circ f \in S(E)$

Inoltre, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \implies (S(E), \circ, \text{Id}_E)$ è un gruppo.

perché ① $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ \circ è associativo

② $f \circ \text{Id} = \text{Id} \circ f = f \quad \forall f \in S(E)$ è neutro

③ $\forall f \in S(E)$ invertibile e $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f \in S(E)$ inverso per \circ

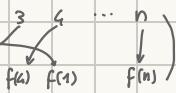
• Sia $E = \{1, \dots, n\} =: I_n \quad n \geq 1$ allora si scrive $S_n = S(I_n) = S(E)$

• ogni elemento di S_n , $f \in S_n$ può essere

identificato con un diagramma:



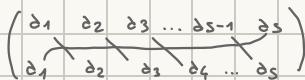
che si può anche rappresentare non "in ordine" con frecce:



def n-ciclo

Una permutazione del tipo $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{s-1} \alpha_s \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_s \alpha_1 \dots \alpha_s)$ con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in I_n (s \leq n)$ distinti,

il ciclo si vede meglio così immo



che fissa (mette a sé stessi) tutti gli elementi che non appartengono a $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$

(e mette quelli di $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ in maniera ciclica)

es: $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \alpha_2 \rightarrow \alpha_3, \alpha_3 \rightarrow \alpha_1$)

Si chiama **s-ciclo** e si scrive $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s)$

Term: dato un ciclo

$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s)$, la sua orbita

N.B rispetta alla notazione: è $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_s)$ e rispetta l'ordine del ciclo

è $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$

(insieme di el. permutati da loro)

si può shiftare: $(\alpha_s \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{s-1})$ ma non rimescolare: $\neq (\alpha_1 \alpha_3 \alpha_2 \dots \alpha_s)$

Esempi: in S_2 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (12)$ è un 2-ciclo in S_3 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123)$ 3-ciclo in S_5 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (135)$ 3-ciclo

TERMINOLOGIA: tutti i 2-cicli si chiamano **trasposizioni**.

OSS: l'identità è uno 0-ciclo

• tutti i cicli sono permutazioni,

ma esistono permutazioni che non sono cicli

es. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ non è un ciclo

vedo $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 1$ sono "cicliche", ma

le altre non sono fissate: $3 \rightarrow 6, 6 \rightarrow 3 \dots$

(anche guardando $3 \rightarrow 6, 6 \rightarrow 3$ stesso discorso: $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 1$ non fissati)

INVERSIONE

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccccc} 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \diagup & \diagup & \diagup & \diagup & \diagup & \diagup & \diagup \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right)$$

OSS: nella notazione semplificata di un ciclo $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s)$, l'inverso si ottiene leggendo da destra a sinistra:
 $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s)^{-1} = (\alpha_s \dots \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1)$

COMPOSIZIONE (possiamo chiamarla anche "prodotto")

$$\sigma = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{array} \right) = (1342) \in S_5, \quad \tau = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) = (15324) \in S_5$$

$$\sigma \circ \tau = \sigma \cdot \tau = \sigma \tau \quad \text{composizione \(\rightarrow\) legge prima } \tau$$

$$\sigma \circ \tau = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \tau | & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ \sigma | & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right) = (543) \neq \Rightarrow S_5 \text{ non è commutativo!}$$

$$\tau \circ \sigma = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) = (1253)$$

OSS: il prodotto di cicli non è necessariamente un ciclo

Descrizione di S_3 $\# S_3 = 6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ (fattoriale)

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \right\} =$$

$$= \{ \text{Id}, (23), (12), (123), (132), (13) \} \quad \text{in } S_3, \text{ ogni permutazione è un s-ciclo con } s = 0, 2, 3$$

- Quel è il più piccolo n t.c. in S_n esiste una permutazione che non è un ciclo?

$$n=4. \quad \text{infatti, } (12)(34) = \text{elemento per elemento} \quad \begin{aligned} ((12)(34))(1) &= (12)((34)(1)) = (12)(1) = 2 \\ ((12)(34))(2) &= (12)(2) = 1 \\ ((12)(34))(3) &= (12)(4) = 4 \\ ((12)(34))(4) &= (12)(3) = 3 \end{aligned}$$

quindi $(12)(34) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right)$ non è un ciclo

$$\text{es mostrare che } (123)^{-1} = (132) (= 321\dots) \longrightarrow (123) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \quad (123)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right) = (132)$$

def CICLI A SUPPORTI DISGIUNTI

Dati due cicli $(\alpha_1 \dots \alpha_s)$ e $(\beta_1 \dots \beta_t)$ di S_n ,

si dice che sono a supporti disgiunti se $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} \cap \{\beta_1, \dots, \beta_t\} = \emptyset$

Più generalmente, dati r cicli, C_1, \dots, C_r di S_n sono a supporti disgiunti

es. $(12), (34)$ sono a supp. disgi. in S_4

TEOREMA (decomposizione di permutazioni)

Ogni $\sigma \in S_n$ può essere decomposto in prodotto di cicli a supporti disgiunti.

Inoltre, tali cicli sono unicamente determinati e commutano fra di loro.

C'è analogia con il TFA.

esempio

x "estrae" cicli:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 3 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

parto da un 8

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 1$

(1247)

Non ha senso
prendere un el.
da qui - si parte
da un altro

prendo il 3

$3 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 3$

(3685)

i due cicli sono disgiunti

$\sigma = (1247)(3685) =$

$= (3685)(1247)$

Sia G gruppo (in not. moltiplicativa) e $H \subset G$.

Introduciamo una relazione \sim su G :

$$\text{dati } X, X' \in G \quad X \sim X' \iff X(X')^{-1} \in H$$

Lemma: \sim è di equivalenza

dim: ① RIFLESSIVITÀ:

$$x \sim x \quad \forall x \in G$$

$$H \subset G \implies 1_G \in H. \text{ Ma } 1_G = xx^{-1} \quad \forall x \in G, \text{ quindi } x \sim x \quad \forall x \in G$$

($1_H = 1_G$)

② SIMMETRIA:

$$x \sim x' \implies x'(x')^{-1} \in H$$

$$\text{Ma } \forall h \in H, h^{-1} \in H \quad \begin{array}{l} (\text{prop.}) \\ (\text{sottogr.}) \end{array} \text{ Quindi } (x(x')^{-1})^{-1} = x'x^{-1} \in H$$

③ TRANSITIVITÀ:

$$x \sim x', x' \sim x'' \implies x \sim x'' \quad \forall x, x', x'' \in G$$

Supponiamo $x \sim x'$ e $x' \sim x''$. Allora $x(x')^{-1}, x'(x'')^{-1} \in H$

$$\text{Se } a, b \in \text{sottogruppo: } x(x')^{-1}x'(x'')^{-1} = x(x'')^{-1} \in H$$

anche il loro prodotto

quoziente su \sim dove: due el. x e x' sono nella stessa classe se $x(x')^{-1} \in H$

Domanda: È possibile costruire su G/\sim un'operazione binaria in modo tale che G/\sim acquisisca una struttura di gruppo?

Talvolta sì, talvolta no. Servono delle condizioni:

• Vorremmo che questa identità fosse valida per la nuova operazione:

$$[x] * [x'] = [x \cdot x'] \quad \begin{array}{l} \text{nuova op.} \\ \text{indipendentemente dai rappresentanti} \\ \text{vecchio op. di } G \end{array}$$

Supponiamo $x \sim y$ e $x' \sim y'$.

$$x \sim y \iff [x] = [y] \iff x(y)^{-1} \in H$$

$$x' \sim y' \iff [x'] = [y'] \iff x'(y')^{-1} \in H$$

è necessario innanzitutto che $[x \cdot x'] = [y \cdot y']$ ovvero $xx'(yy)^{-1} \in H$

$$xx'(yy)^{-1} = x\underbrace{x'(y)}_{\text{per ipotesi, } \in H} y^{-1} \quad \begin{array}{l} \text{sappiamo quindi che un pezzo del prodotto } \in H, \\ \text{ci serve una condizione per cui tutto il prodotto } \in H \end{array}$$

def SOTTOGRUPPO NORMALE

H è un sottogruppo normale di G se, $\forall x \in G, xH = Hx$

• si scrive $H \triangleleft G$

$$\text{quindi, per la formula di prima: } xHy^{-1} = \underbrace{xy^{-1}H}_{\text{per ipotesi, } \in H} \quad \text{e } H \text{ per ipotesi, quindi tutto } \in H$$

(quindi $[x \cdot x'] = [y \cdot y']$)

Condizioni equivalenti (per H sottogr. normale)

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} H \triangleleft G & \textcircled{2} \forall g \in G \quad \forall h \in H, \exists h' \in H \text{ t.c. } gh = h'g \\ (\text{gh} = Hg) & \textcircled{3} \forall g \in G, H^g = H \end{array}$$

ricordiamo: $g^{-1}Hg$

OSS: G abeliano e $H \subset G \implies H \triangleleft G$ (tutti i sottogruppi di un gruppo abeliano sono normali)

ESEMPI (notevoli):

- \mathbb{Z} gruppo abeliano in not. add. e $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\mathbb{Z}$ è un sottgr. di \mathbb{Z} , $n\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$ e posso costruire, sempre in not. add., $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (coincide con la costruzione già vista in aritmetica modulare)
- dato G qualsiasi, ho $G \triangleleft G$ ($\forall x \in G, xG = Gx$ e $G/G = \{G\}$)
- anche $\{1_G\} \triangleleft G$ ($\forall x \in G, x1_G = 1_Gx = x$ e $G/\{1_G\} = \{ \{gg\} : g \in G \}$ rel. di ugualanza)

dim condiz. equivalenti: basta mostrare che $(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ (ordine scelto per facilità di dimostrazione)

- $(3) \Rightarrow (1)$ ipotesi: $H^g = H$ se $H^g = H$, $g^{-1}Hg = H \Leftrightarrow \underbrace{gg^{-1}Hg}_{1_H} = gH \Leftrightarrow Hg = gH$
devo dim: $gH = Hg$
- $(1) \Rightarrow (2)$ ipotesi: $gH = Hg$ se $\forall g$, $gH = \{x \in G : \exists h \in H \text{ con } x = gh\} = Hg = \{y \in G : \exists h' \in H \text{ con } y = h'g\}$
devo dim: $gh = h'g$. allora $\exists h, h' \in H$ t.c. $x = gh = h'g$
- $(2) \Rightarrow (3)$ ipotesi: $gh = h'g$ se $\forall g \in G, \forall h \in H$ si ha $gh = h'g \exists h' \in H$, allora $\underset{1_G}{\cancel{g^{-1} \Rightarrow}} g^{-1}gh = g^{-1}h'g \Leftrightarrow h = g^{-1}h'g$ quindi, $\forall g, H^g = H$ ■
devo dim: $H^g = H$

Teorema

Dato $H \triangleleft G$, \sim di eq.

Allora l'operazione su G/\sim $[x][x'] = [xx']$ (ben posta)

definisce una struttura di gruppo su G/\sim .

$[g]$ contiene tutti gli el. x t.c. $gx^{-1} \in H$

quindi, $gx^{-1} = h \Leftrightarrow g = hx \Leftrightarrow h^{-1}g = x$

Ma H è chiuso rispetto all'inverso, quindi $h^{-1} \in H$.

Quindi tutti gli el. $x \in [g]$ si possono scrivere come gh , $h \in H$

mino ragionamento

che poi, per simmetria,
visto che $x \in [g]$,

$g = x \Rightarrow x \in [g]$

quindi $g^{-1} = h'$

$\Leftrightarrow x \in [g]$

e, sostituendo,

$g = h(g^{-1})$

$\Leftrightarrow g = h^{-1}$

$h^{-1} = h$

per cui

è potuto fare!

ip so, cool!

• si scrive $G/\sim = G/H$ gruppo quoziante di G per H

• osserviamo inoltre $[g] = gH = Hg$ non è vero che $gh = hg$

ma $\forall h \exists h' \text{ t.c. } gh = h'g$ quindi $gH = Hg$

• l'elemento neutro è $1_{G/H} = H$

• gli elementi di G/H (sottoinsiemi di G) sono le classi laterali di H

Lemma:

L'applicazione $\begin{array}{rcl} G & \xrightarrow{\Pi_H} & G/H \\ g & \mapsto & [g] \end{array}$ è un omomorfismo di gruppi suriettivo

dim:

• la suriettività di Π_H è chiara, perché ogni classe contiene un rappresentante

• inoltre, $\Pi_H(g(g)^{-1}) = [g(g)^{-1}] = [g][g^{-1}] = \Pi_H(g)\Pi_H(g^{-1})$ ■

Lemma

Dato $G_1 \xrightarrow{f} G_2$ omomorfismo di gruppi:

el. di G_1 che puntano a 1_{G_2}

$\mapsto [H]$ el. neutro di G/\sim ,

Allora, $\underbrace{\text{Ker}(f)}_{= "H"} \triangleleft G_1$. Inoltre, se $H \triangleleft G$, allora $H = \text{Ker}(\Pi_H)$ quindi $H \subseteq \text{Ker}(\Pi_H)$

dim:

• $\text{Ker}(f) \triangleleft G_1$ (so già che $\triangleleft G_1$) mostriamo che $\text{Ker}(f)^g = \text{Ker}(f)$ (def. equivalente ③ di \triangleleft)

prendiamo $h \in G_1$ t.c. $f(h) = 1_{G_2}$ ($\Leftrightarrow h \in \text{Ker}(f)$)

$$\text{Allora si ha che } \forall x \in G_1, f(x^{-1}hx) = \underset{\substack{\text{OMM.} \\ \text{OMM.}}}{\cancel{f(x^{-1})}} \underset{\substack{\text{OMM.} \\ \text{OMM.}}}{\cancel{f(h)}} \underset{\substack{\text{OMM.} \\ \text{OMM.}}}{\cancel{f(x)}} = 1_{G_2}$$

$$\Leftrightarrow x^{-1}hx \in \text{Ker}(f) \quad \forall h \in \text{Ker}(f), \forall x \in G \Leftrightarrow \text{Ker}(f)^x = \text{Ker}(f)$$

• se $H \triangleleft G_1$, allora $H = \text{Ker}(\Pi_H)$

Abbiamo $H \triangleleft G_1$ e poniamo $f = \Pi_H$. Mostriamo che $H = \text{Ker}(\Pi_H)$. Ma se $g \in G_1$ soddisfa $\Pi_H(g) = 1_{G_2} = H \Leftrightarrow gH = H \Leftrightarrow g \in H$ ■

(Spiegazione mia): • $g \in H \Rightarrow g \in \text{Ker}(\Pi_H)$ se $g \in H$, $gH = H$. Quindi, $\Pi_H(g) = H$ ($[g] = gH$). Quindi (visto $H = 1_{G_2}$) $g \in \text{Ker}(\Pi_H)$

• $g \notin \text{Ker}(\Pi_H) \Rightarrow g \in H$ se $g \notin \text{Ker}(\Pi_H)$, $\Pi_H(g) = 1_{G_2} = H$. Quindi, $gH = H$. $gH = H \Leftrightarrow g \in H$

Consideriamo un omomorfismo di gruppi: $G_1 \rightarrow G_2$. Per il Teorema di struttura delle applicazioni,

$$\begin{array}{ccc}
 G_1 & \xrightarrow{f} & G_2 \\
 \downarrow \pi & & \downarrow i \\
 G_1/R & \xrightarrow{\psi} & f(G_1) \\
 [g] & \longmapsto & f(g) \\
 \text{(è biettiva: se } [g] = [g'] \text{ allora } f(g) = f(g')\text{)}
 \end{array}$$

$f = i \circ \psi \circ \pi$

dove R è la relazione:
 dati $g, g' \in G_1$, $g R g' \iff f(g) = f(g')$

In più, f è un omomorfismo di gruppi.

OSSERVIAMO: dati $g, g' \in G_1$, allora $f(g) = f(g') \iff f(g) f(g')^{-1} = 1_{G_2}$

\Downarrow

\Downarrow (dividere per $f(g)$)

\Downarrow (def.)

ma $f(g) f(g')^{-1} = f(g(g')^{-1})$ (\times omom.
gruppi)

(ricordiamo: el. che partono a 1_{G_2})

quindi $f(g(g')^{-1}) = 1_{G_2} \iff g(g')^{-1} \in \text{Ker}(f)$

$\iff g \sim g'$ (\sim è definita come, dati G gr., $H \leq G$
e $x, x' \in G$: $x \sim x' \iff x(x')^{-1} \in H$)

quindi abbiamo dimostrato che R e \sim sono la stessa relazione.

Come abbiamo visto nel Lemma qui

Si ha quindi $G/R = G/H$ che è un gruppo, quindi G/R gruppo e π omomorfismo di gruppi.
(sappiamo chiaramente che l'identità è un omomorfismo di gruppi).

• $H = \text{Ker}(f)$. Mostriamo che $\psi: G_1/H \rightarrow f(G_1)$: $\psi(gH) = f(g)$ è un omomorfismo di gruppi.

Vogliamo mostrare che, $\forall g, g' \in G_1$, si ha: $\psi(gH) \psi((g'H)^{-1}) = \psi(g(g')^{-1}H)$

$$\begin{aligned}
 \text{Ma } \psi(gH(g'H)^{-1}) &= \psi(gHH(g')^{-1}) \stackrel{H=H}{=} \psi(gH(g')^{-1}) = \psi(g(g')^{-1}H) = f(g(g')^{-1}) = f(g) f(g')^{-1} = \psi(gH) \psi(g'H)^{-1} \\
 &\quad \text{perché: } \{ (g'h)^{-1} : h \in H \}
 \end{aligned}$$

$$= \{ h^{-1}(g')^{-1} : h \in H \} \text{ ma l'inversione}$$

è una biezione e, se poniamo $h^{-1} = h'$,

$$= \{ h'(g')^{-1} : h' \in H \} - \text{stiamo "prendendo" tutte le } h \text{ di } H, \text{ solo in un ordine diverso}$$

• Si può vedere anche così:

$$gH = [g] \text{ quindi } (gH)^{-1} = [g]^{-1}$$

Abbiamo dimostrato il PRIMO TEOREMA DI ISOMORFISMO PER I GRUPPI:

dato $f: G_1 \rightarrow G_2$ omomorfismo di gruppi, esso si decompona

in composizione: $f = \underbrace{i \circ \psi \circ \pi}_{\substack{\text{tutti omomorfismi} \\ \text{di gruppi}}}$

Altre proprietà dei gruppi:

Lemma l'intersezione di sottogruppi è un sottogruppo

Dati $H_1, \dots, H_n < G$, allora $\bigcap_{i=1}^n H_i < G$

dim: Siano $x, x' \in \bigcap_{i=1}^n H_i$:

Allora, $\forall i = 1, \dots, n \quad x(x')^{-1} \in H_i$, perché $H_i < G \forall i$

Ma allora $x(x')^{-1} \in \bigcap_{i=1}^n H_i$. Quindi si ha $\bigcap_{i=1}^n H_i < G$

(se appartiene a tutti i sottogruppi, allora appartiene all'intersezione)

Lemma l'unione di sottogruppi non è un sottogruppo

esempio $H_1 = \{1_G, (12)\}, H_2 = \{1_G, (13)\} < G = S_3$

$H_1 \cup H_2 = \{1_G, (12), (13)\} \subset G$, ma non $< G$.

Infatti $(12), (13) \in G$ e $\in H$ ma $(12)(13) = (1, 3, 2) \notin H_1 \cup H_2$ (non è chiuso rispetto alla sua operazione, o)
quindi non è un sottogruppo

def SOTTOGRUPPO GENERATO

/

Consideriamo $I \subset G$. Il sottogruppo di G generato da I è:

$$\langle I \rangle := \bigcap_{\substack{H \leq G: \\ I \subset H}} H \quad (\text{quindi si prendono tutti i sottogruppi di } G \text{ che contengono } I \text{ e si intersecano})$$

Si chiama anche il "più piccolo sottogruppo di G che contiene I "

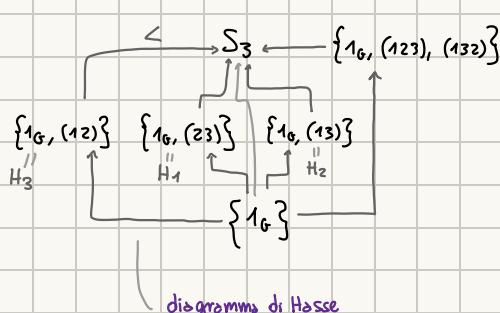
$\langle I \rangle$ è $< G$ per il lemma per cui l'intersezione di sottogruppi è un sottogruppo.

per un singolo elemento:

• dato G gruppo (nat. moltiplicativa) e $g \in G$, $\langle g \rangle = \bigcap_{\substack{H \leq G: \\ g \in H}} H$

esempio

i sottogruppi di S_3 sono:



$$\text{Quindi, } \langle (12) \rangle = \{1_G, (12)\} = H_3$$

$$\langle (13) \rangle = \{1_G, (13)\} = H_2$$

$$\langle (23) \rangle = \{1_G, (23)\} = H_1$$

$$\langle (123) \rangle = \{1_G, (123), (132)\} \cap S_3 = \{1_G, (123), (132)\}$$

$$\langle H_1 \cup H_2 \rangle = S_3 \quad (\text{i prodotti ci sono per chiusura rispetto a o})$$

$$H_1 \cup H_2 = \{1_G, (13), (23), (132), (123), (12)\} = S_3$$

$$(23)(13)(23)$$

Sottogruppo $g^{\mathbb{Z}}$

- Consideriamo l'insieme $\{1, g, g^2, \dots, g^{-1}, g^0, \dots\} = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\} = g^{\mathbb{Z}} \subset G$

Allora si ha che $g^{\mathbb{Z}} \leq G$. Infatti, $\forall x, x' \in g^{\mathbb{Z}}, \exists n, n' \in \mathbb{Z}$ t.c. $x = g^n, x' = g^{n'}$ e $x(x')^{-1} = g^{n-n'} \in g^{\mathbb{Z}}$

Si ha che $\langle g \rangle \subset g^{\mathbb{Z}}$. (perché $\langle g \rangle$ è un sottogr. quindi è chiuso rispetto a inverso e prodotto, quindi visto che contiene g , contiene anche g^{-1} e tutte le potenze generali ($g^{\mathbb{Z}}$))

Dato che $\langle g \rangle \leq G$, e $g \in \langle g \rangle$, $1 = g^0 \in \langle g \rangle$, $g^{-1} \in \langle g \rangle$ e gli altri sono generati dal prodotto di questi ... si ha anche $g^{\mathbb{Z}} \subset \langle g \rangle$

Lemme $\langle g \rangle = g^{\mathbb{Z}}$.

Lemme SOTTOGRUPPI DI \mathbb{Z}

Sia G un sottogruppo di \mathbb{Z} (in not. additiva),
se $G \neq \{0\}$, allora $\exists n \in \mathbb{N}^*$ t.c. $G = n\mathbb{Z}$

(tutti i sottogruppi di \mathbb{Z} sono o $\{0\}$ o $n\mathbb{Z}$)

l'el. neutro è sempre un sottogruppo

dim:

Supponiamo $G \neq \{0\}$. Allora esiste un più piccolo $n \in G \cap \mathbb{N}^*$ (principio del minimo)

tale che, preso $d \in G$ (per div. euclideo) $d = qn + r$ con $0 \leq r < n$.

(impossibile perché n è il minimo su $G \cap \mathbb{N}^*$, ma allo stesso tempo $r < n$ e $r \neq 0$)

Quindi $r = d - qn$. Se $r \neq 0$, si avrebbe $r < n$ e $r \in G \cap \mathbb{N}^*$

contraddizione con la minimalità di n .

Quindi $r = 0$, e $d \in n\mathbb{Z}$.

Quindi, $G \subset n\mathbb{Z}$. Ma $G \supset n\mathbb{Z}$, perciò $G = n\mathbb{Z}$

perché
 G è chiuso
rispetta alla somma,
quindi contiene tutti gli $n\mathbb{Z}$ (?)

Lemme

Se G è un gruppo finito (in notazione moltiplicativa),

allora, $\forall g \in G, \exists n > 0$ t.c. $\langle g \rangle = g^{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

isomorfo a

not. additiva

dim:

$f: \mathbb{Z} \rightarrow G$
 $n \mapsto g^n \in g^{\mathbb{Z}} = \langle g \rangle$ non può essere iniettivo,
perché \mathbb{Z} è infinito e G è finito

f è omomorfismo perché $f(n-n') = g^{n-n'} = g^n g^{-n'} = f(n) f(n)^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & G \\ \pi \downarrow & & \uparrow i \\ \mathbb{Z}/\text{Ker}(f) & \xrightarrow{\cong} & f(\mathbb{Z}) = g^{\mathbb{Z}} = \langle g \rangle \end{array} \quad (\text{x teor. iso: } f = i \circ \psi \circ \pi)$$

$\langle \mathbb{Z}, \text{quindi: } 0 \in \{0\}, 0 \in n\mathbb{Z}$.

Ma se fosse $\{0\}$, allora $\mathbb{Z}/0 \stackrel{1:1}{\cong} \mathbb{Z}$ e f sarebbe iniettiva (non può esserlo)

-vedi sopra-

Quindi, $\text{Ker}(f) = n\mathbb{Z} \quad \exists n \in \mathbb{N}^*$

def ORDINE DI UN ELEMENTO

Sia G gruppo finito (not. mult.), $\exists g \in G$.

Allora $\{d \in \mathbb{N}^* \text{ t.c. } g^d = 1_G\} \neq \emptyset$ (perché è contenuto in $\text{Ker}(f)$)

Si pone $\text{ord}(g) = \min \{d \in \mathbb{N}^* \text{ t.c. } g^d = 1_G\}$ il minimo numero di volte per cui bisogna moltiplicare g per se stesso per ottenere 1_G

in not. additiva, $\text{ord}(g) = \min \{d \in \mathbb{N}^* \text{ t.c. } g \cdot d = 0_G\}$

Si ha allora $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}/\text{ord}(g)\mathbb{Z}$

esempio: $g = (123) \in S_3 =: G$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & S_3 \\ n & \longmapsto & (123)^n \end{array}$$

n	$(123)^n$
0	1_{S_3}
1	(123)
2	(132)
3	1_{S_3}
4	(123)

$\text{ord}(123) = 3$
(si eleva al cubo per arrivare a 1_G)

$$\langle (123) \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

ORDINE DI UN CICLO

Più generalmente, dato un n-ciclo di S_n $\sigma := (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$

$$\text{ord}(\sigma) = n \quad e \quad \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$



$$\text{quindi } \sigma^i \neq 1_{S_n} \quad \forall i = 1, \dots, n-1$$

Inoltre $\sigma^n(\alpha_1) = \alpha_1$. Ma noi possiamo scrivere σ "scalandolo", e trasformare α_2 in α_1 : $(\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \alpha_1)$

Quindi, $\sigma^n(\alpha_2) = \alpha_2$. Più generalmente, $\sigma^n(\alpha_i) = \alpha_i \quad \forall i = 1 \dots n$

Siccome σ è un ciclo, esso fissa tutti gli el. $b \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Quindi, $\sigma^n = 1_{S_n}$, da cui $n = \text{ord}(\sigma)$.

Abbiamo dimostrato

Lemma ORDINE DI UN CICLO

Se σ è un n-ciclo, allora

$$\text{ord}(\sigma) = n \quad e \quad \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

[qui > lezione ha fatto un breve recap - omesso]

def MINIMO COMUNE MULTIPLOdati $m_1, \dots, m_l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ il minimo comune multiplo m di m_1, \dots, m_l è l'unico intero $m \in \mathbb{N}^*$ t.c.

$$\textcircled{1} \quad m_1, \dots, m_l \mid m$$

$$\textcircled{2} \quad \text{se } m \text{ è t.c. } m_1, \dots, m_l \mid m', \text{ allora } m \mid m'$$

Si scrive $m = \text{mcm}(m_1, \dots, m_l)$ e, per calcolarlo:

$$m_1\mathbb{Z} \cap m_2\mathbb{Z} \cap m_3\mathbb{Z} \cap \dots \cap m_l\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$$

ricordiamo che per l'MCM era lo stesso
cosa ma con il + $(m_1\mathbb{Z} + m_2\mathbb{Z} + \dots + m_l\mathbb{Z}) = d\mathbb{Z}$)

$$\bullet \text{ in più, } \text{mcm}(a, b) = \frac{ab}{\text{MCD}(a, b)}$$

$$\bullet \text{ utilizzando il teorema fond. aritmetico: } a = \prod_p p^{v_p(a)}, \quad b = \prod_p p^{v_p(b)}$$

$$\text{allora } \text{mcm}(a, b) = \prod_p p^{\max(v_p(a), v_p(b))} \quad \text{per l'MCM era min}$$

CALCOLARE ORD(σ)Come si calcola $n = \text{ord}(\sigma)$? Lo sappiamo se σ è un m -ciclo: $\text{ord}(\sigma) = m$ Ricordiamo: Ogni $\sigma \in S_n$ si decomponga in modo unico in un prodotto di cicli disgiunti c_1, \dots, c_s che commutano tra loro.Quindi: sia $\sigma \in S_n$ - lo decomponiamo in prodotto di cicli disgiunti: $\sigma = c_1 \dots c_s$ Lemma: $\text{ord}(\sigma) = \text{mcm}(\text{ord}(c_1), \dots, \text{ord}(c_s))$

esempio

calcolare $\text{ord}(\sigma)$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_7 \quad n=7 \rightarrow (\text{se } \in S_n > 7, \text{ gli altri el. sono fissati})$$

① Decomponiamo σ in prodotto di cicli disgiunti

$$\begin{array}{c} 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \\ \text{---} \\ 1 \ 2 \ \text{---} \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \end{array} = \begin{matrix} (17) & (24) & (56) \\ \text{ord } 2 & \text{ord } 2 & \text{ord } 2 \end{matrix} \quad ((3) \text{ si può omettere})$$

$$\text{② } \text{ord}(\sigma) = \text{mcm}(2, 2, 2) = 2$$

Metodo alternativo: sfrutta il fatto che $\text{ord}(\sigma) = \text{min. esponente}^{\textcircled{1}} \text{ a cui elevare } \sigma \text{ per avere l'identità}$

(3 omesso perché fissato)

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 1_{S_7} \quad (n=7)$$

Si può vedere anche così $\sigma^2 = (17)(24)(56)(17)(24)(56) = (17)(24)(56)(56)(24)(17) = 1_{S_7} \quad (n=7)$ commuti, del tipo $a b c c^{-1} b^{-1} a^{-1} = 1$

l'inverso di una trasposizione è essa stessa

Sia perciò $\sigma = 2$ (quindi $\sigma^2 = 1$)
e sic per il "trucco" di leggerlo
al contrario: $(17) = (71)$

(uno delle volte "collusione"
nell'identità): $(56)(56) = 1_S$
 $(17)(24)(24)(17)$ ecc.)

esercizi:

- trovare α, β t.c. $(147)(132) \times \beta = 1_G$

$$\alpha = (132)^2 = (132)(132) = (123) \quad \text{oppure} \quad \alpha = \overleftarrow{(132)} = (231) = (123)$$

$$\beta = (147)^2 = (174)$$

- trovare α, β in S_7 t.c. $(1234)(137) \times \beta = 1_{S_8}$ $\alpha = (137)^2, \beta = (1234)^3$

- $\text{ord}((12)(345)) = 6$ • $\text{Ord}((12)(245)) = ?$ Non sono a supporto disgiunto.

Rendendosene di supp. disgi. = $\text{ord}(1245) = 4$

- $\text{ord}((12)(13)(14)) = \text{ord}((1432)) = 4$

Teorema (decomp. di permutazione in trasposizioni)

Ogni permutazione si decomponga in prodotto di trasposizioni non necessariamente a supporto disgiunto.

- in generale, una tale fattorizzazione non è unica

Esempio $(\alpha_1 \alpha_2)(\alpha_1 \alpha_3)(\alpha_1 \alpha_4) = (\alpha_1 \alpha_4 \alpha_3 \alpha_2)$

$\#\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 4$

FORMULA per un n-ciclo

$$\sigma = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = (\alpha_n \alpha_{n-1})(\alpha_n \alpha_{n-2}) \dots (\alpha_n \alpha_1) \quad (\text{ovvero } n-1 \text{ fattori})$$

In realtà $2 \leq n-1$, perché posso aggiungere quante identità voglio

Esempio: $(12345) = (54)(53)(52)(51)$

Teorema "rinforzato" - SEGNATURA/SEGNO DI UNA PERMUTAZIONE

Sia s il numero di trasposizioni in una fattorizzazione di $\sigma \in S_r$ in prodotto di trasposizioni.

Allora $s \bmod 2$ è unicamente determinato (anche se s non è unico)

Visto che $(\alpha_1 \alpha_2)(\alpha_1 \alpha_2) = 1_S$, aggiungere una coppia di trasposizioni (uguali) dà lo stesso risultato

Poniamo $\epsilon_\sigma = (-1)^s \in \mathbb{Z}^\times$ è la segnatura di una permutazione, il segno

σ si dice

- pari se $\epsilon = +1$
- dispari se $\epsilon = -1$

per *

Nota: se σ n-ciclo, $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-1}$

Se ne deduce:

PROPRIETÀ: $S_n \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}^\times$ è un omomorfismo di gruppi

(funzione che manda una permutazione al suo segno - ovvero uno dei due invertibili di \mathbb{Z} : 1, -1)

c'è quindi un diagramma: $S \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}^\times$

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{Z}^\times \\ \pi \downarrow & \nearrow & \cong \text{ perché } \epsilon(S_r) = \mathbb{Z}^\times \\ S_r & & \end{array}$$

Ker(ϵ) contiene tutte le permutazioni che hanno segno pari (elementi di S_r che puntano a 1) per la funzione ϵ . Quindi, questo quoziente divide le permutazioni in due classi: pari e dispari.

COME CALCOLARE $\epsilon(\sigma)$

Metodo meno divertente

- ① Si calcola la fattorizzazione di σ in prod. di cicli disgiunti

$$\sigma = c_1 \dots c_m$$

$$② \epsilon(\sigma) = \epsilon(c_1) \cdot \dots \cdot \epsilon(c_m)$$

- ③ Si usa la formula per cui se φ r-ciclo, allora $\epsilon(\varphi) = (-1)^{r-1}$

Metodo "adatto ad un venerdì sera"

senza decomporre in prodotto di cicli disgiunti,

calcoliamo la segnatura di σ con un procedimento grafico

$$\sigma = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8) = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 5 & 8 & 6 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Si dispongono i numeri in ordine e si tracciano le frecce che li uniscono (non ci devono essere incroci a 3). Si contano le intersezioni.

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{15} = -1$$



notò: quando conto le intersezioni, in base a come le disegno, avrò risultati diversi.

Ma la classe mod 2 (parità) sarà sempre la stessa, quindi è (o) non sarò inficiato.

es. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ $E(\sigma) = (-1)^{15} = (-1)^{13} = -1$

• questo stesso esempio, ma con l'altra tecnica:

$$\sigma = (137)(2458)$$

$$E(\sigma) = E(137) \cdot E(2458) = (-1)^2 \cdot (-1)^3 = -1$$

19/11

○ PRODOTTO DIRETTO

PRODOTTO CARTESIANO DI GRUPPI

dati G_1, G_2 in not. additiva.

$$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) : g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$$

Definiamo su $G_1 \times G_2$ una struttura di gruppo come segue:

$$(g_1, g_2), (g'_1, g'_2) \in G_1 \times G_2 \quad \text{operazione} +: (g_1, g_2) + (g'_1, g'_2) := (g_1 + g'_1, g_2 + g'_2)$$

• associatività: $((g_1, g_2) + (g'_1, g'_2)) + (g''_1, g''_2) = (g_1 + g'_1, g_2 + g'_2) + (g''_1, g''_2) = (g_1 + g'_1 + g''_1, g_2 + g'_2 + g''_2) = (g_1, g_2) + ((g'_1, g'_2) + (g''_1, g''_2))$

• el neutro: $O_{G_1 \times G_2} = (O_{G_1}, O_{G_2})$

• $G_1 \times G_2$ è abeliano se G_1 e G_2 lo sono.

Questa operazione si estende a n gruppi G_1, \dots, G_n

Si può costruire $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n = \{(g_1, g_2, \dots, g_n)\}$ dotato di

struttura di gruppo prodotto cartesiano di G_1, \dots, G_n (e se G_1, \dots, G_n abeliani allora $G_1 \times \dots \times G_n$ abeliano)

esempio $(\mathbb{R}, +)$

• posso costruire il gruppo $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$ i cui elementi sono (x_1, x_2, \dots, x_n) con $x_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, 2, \dots, n$

l'elemento neutro è $O = (0, \dots, 0)$

"esercizio 19"

Teorema di Lagrange

Sia G gruppo finito.

Sia $H < G$ ($\#H < \#G$ perché $< \Rightarrow \subset$)

Allora:

$$\#H \mid \#G$$

dim.

Abbiamo, su G , una relazione di equivalenza

associata ad H :

$$x \sim y \iff xy^{-1} \in H$$



se partiziono qualcosa
di finito, ho un numero finito di
partizioni finite a loro volta

Possiamo considerare l'insieme quoziente G/\sim con $\#G/\sim < \infty$

Poniamo $[G:H] = \#G/\sim (= G/H)$

indice di H in G

Siccome G/\sim è una partizione di G , $G = \bigsqcup_{c \in G/\sim} c \rightarrow$ quindi, $\#G = \sum_{c \in G/\sim} \#c$

Claim ①: $\#c = \#H$

[Se il claim è vero, abbiamo il teorema di Lagrange:

$$\text{infatti, } \#G = \sum_{c \in G/\sim} \#c = \sum_{c \in G/\sim} \#H = \#H \sum_{c \in G/\sim} 1 = \#H \cdot [G:H] \text{ quindi } \#H \mid \#G]$$

quindi $\#G = \#H \cdot \text{un intero}$
cardinalità di G/\sim

Quindi, dobbiamo dimostrare che $\forall c \in G/\sim, \#c = \#H$

Claim ②

$\forall g \in G$, poniamo $\psi_g: G \rightarrow G, \psi_g(x) = x \cdot g$ (ben definito perché G chiuso rispetto al prodotto)

Allora, ψ_g è una biiezione

N.B. $\psi_g(1g) = g \quad \forall g \neq 1g$ quindi ψ_g non è un endomorfismo

• Sappiamo che ψ_g è invertibile di inverso $\psi_{g^{-1}}$

Infatti, se $x \in G, \psi_{g^{-1}}(\psi_g(x)) = \psi_{g^{-1}}(xg^{-1}) = xg^{-1}g = x$ quindi $\psi_g \circ \psi_{g^{-1}} = \text{Id}_G$

Analogamente, $\psi_{g^{-1}}(\psi_g(x)) = \psi_{g^{-1}}(xg) = xgg^{-1} = x$ quindi $\psi_{g^{-1}} \circ \psi_g = \text{Id}_G$

notiamo che, generalmente

In particolare, se $I \subset G$, allora $\#\psi_g(I) = \#I$

(perché ψ_g è una biiezione)

$\psi_g \circ \psi_{g^{-1}} = \text{Id}_G$ ma questo non ci serve per Lagrange

(stiamo riservando il gr. G in modo diverso)

e $\psi_{1_G} = \text{Id}_G$

Quindi, se riusciamo a mostrare che una classe è l'immagine di H per un g ben scelto, abbiamo finito.

$(\psi_g(H)) = c \Rightarrow \#H = \#c$, che è quello che cerchiamo)

Descriviamo una classe c :

Sia $x \in c$. Allora, $c = \{y : xy^{-1} \in H\}$

visto che $H < G$, H è chiuso
per l'inverso, quindi $h^{-1} = h \exists h \in H$
quindi $y = hx$

Se $y \in c, xy^{-1} \in H$.

$\exists h \in H \quad \exists h \in H \quad \text{ogni el "y" di } c \text{ si può scrivere}$

$xy^{-1} \in H \iff x = hy \iff y = h^{-1}x \iff y \in Hx \iff c = \psi_x(H)$ come $y = hx \exists h \in H$, quindi $\psi_x(H)$

Abbiamo quindi trovato il g per cui $\psi_g(H) = c$. Quindi, $\#H = \#c$, e quindi $\#G = \sum_c \#c = \#H \cdot [G:H]$ ovvero $\#H \mid \#G$.

QUINDI IL TAKEAWAY È: TUTTI I SOTTOGRUPPI DI G DEVONO AVERE CARDINALITÀ CHE DIVIDE $\#G$.

Quindi, per esempio

prendiamo S_{12} . $\# S_{12} = 12!$

Grazie al teorema di Lagrange, so che non esiste $H < S_{12}$ con $\# H = 13$, perché $13 \nmid 12!$

quindi, se p primo e $p \mid \# S_{12}$, allora esiste $H < S_{12}$ t.c. $\# H = p$

in particolare, $p = 2, 3, 5, 7, 11$

Basta prendere un p -ciclo: se σ è un p -ciclo, $\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \Rightarrow \#\langle \sigma \rangle = p$

Più generalmente, $\forall n \leq 12, \exists H < G : \# H = n$ (si prende σ_n -ciclo)

(ma)

• Sia $H < S_{12}$. È vero che $\# H \leq 12$? No! (esistono altri divisori di 12!)

prendiamo $S \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}^\times$, e $H = \text{Ker}(\epsilon)$

per il 1^o teorema iso:

$$S_{12}/H \cong \mathbb{Z}^\times \Rightarrow \# S_{12}/H = 2 \iff [S_{12} : H] = 2$$

$$12! = \# S_{12} = \# H \cdot 2 \Rightarrow \# H = \frac{12!}{2} \in \mathbb{N}^*$$

(anche logicamente, metà delle perm. saranno dispari e metà pari, quindi $\# \text{Ker}(\epsilon) = \frac{1}{2} \# S_{12}$)

• altro esempio

Se $m \leq n$, c'è (almeno) un omomorfismo iniettivo $S_m \xrightarrow{f} S_n$

• $f(S_m) \subset S_n$ (perché $m \leq n$)

$$\# f(S_m) = \# S_m = m! \quad (\text{perché è iniettivo})$$

Infatti f iniettiva $\Rightarrow S_m \cong f(S_m)$

Dal 1^o teorema iso:

$$\begin{array}{ccc} S_m & \xrightarrow{f} & S_n \\ \downarrow & & \uparrow \\ S_m / \{1_{S_m}\} & \xrightarrow{\cong} & f(S_m) \\ & \cong S_m & \end{array}$$

$\text{Ker}(f) = 1_{S_m}$ (l'unico el. di S_m che punto all'el. neutro di $S_n \ni 1_{S_m}$)

Sia $\tilde{G}_m = \left\{ \sigma \in S_n \text{ t.c. } \begin{array}{l} \sigma(m+1) = m+1 \\ \sigma(m+2) = m+2 \\ \vdots \\ \sigma(n) = n \end{array} \right\} = \left\{ \text{perm. in } S_n \text{ che fissano gli elementi da } m+1 \text{ a } n \text{ (ce ne sono } n-m\text{)} \right\}$

con $m \leq n$, $f: S_m \hookrightarrow S_n$

$$\sigma \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} 1 \dots m & m+1 \dots n \\ \downarrow \sigma & \downarrow \text{id.} \\ 1 \dots m & m+1 \dots n \end{array} \right)$$

Manda gli el. $1 \dots m$ seguendo σ , e fissa gli altri.

è un omomorfismo di gruppi che soddisfa quanto richiesto e $f(S_m) = \tilde{G}_m$

def GRUPPI CICLICI

Sia G un gruppo, e $g \in G$ di ordine $n \geq 1$

Allora, $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_{n\mathbb{Z}}$ (in not. additiva)

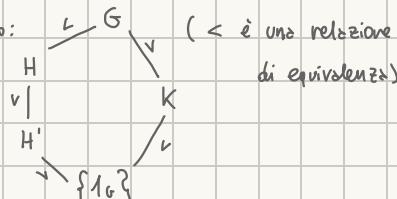
$$H \triangleleft G$$

quindi possiamo trovare i sottogruppi attraverso $\mathbb{Z}_{n\mathbb{Z}}$

prop:

- $\forall d \mid n, \exists$ sottogruppo $H_d \triangleleft H$ t.c. $\#H_d = d$

Quindi, il diagramma di Hasse di un gruppo G è del tipo:



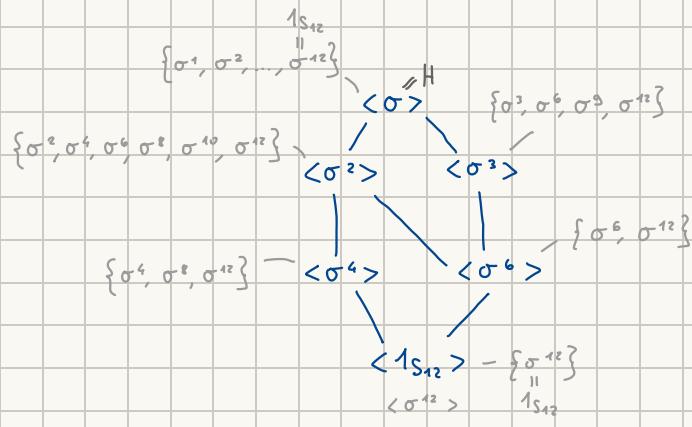
esempio

$$G = S_{12}, \sigma = (1 \ 2 \ 3 \dots 12)$$

$$\text{ord}(\sigma) = 12, \text{ quindi } \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_{12\mathbb{Z}}$$

e \forall divisore di 12 c'è un unico $H_d \triangleleft H$ con $\#H_d = d$ quindi: 1, 2, 3, 4, 6, 12

e il diagramma di Hasse è:



$$\mathbb{Z}_{12\mathbb{Z}} = \langle \bar{1} \rangle$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \frac{2\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_6\mathbb{Z}$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \frac{3\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$$

$$\langle \bar{4} \rangle = \frac{4\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_3\mathbb{Z}$$

$$\langle \bar{6} \rangle = \frac{6\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_2\mathbb{Z}$$

$$\frac{2\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} = \{[2] [4] [6] [8] [10] [12]\}$$

$$\frac{3\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} = \{[1] [2] [3] [4] [5] [6]\}$$

perché? Abbiamo σ , una perm. di ordine 12 (quindi $\sigma^{12} = 1_{S_{12}}$)

Sappiamo che $\langle g \rangle$ è ciclico isomorfo a $\mathbb{Z}_{n\mathbb{Z}}$ (in not. additiva)

Quindi, esiste un sottogruppo $H_d \triangleleft \langle g \rangle$ con cardinalità d per ogni divisore di 12.

Per trovarli, possiamo "sviluppare" con $\mathbb{Z}_{12\mathbb{Z}}$. Visto che $\mathbb{Z}_{12\mathbb{Z}}$ è a sua volta ciclico di 12,

sappiamo che i sottogruppi di $\mathbb{Z}_{12\mathbb{Z}}$ sono generati dalle classi dei divisori di 12, ovvero:

$$[1], [2], [3], [4], [6], [12].$$

$$[1] = \{0, \dots, 11\} \text{ corrisponde a } \langle \sigma \rangle \quad (\text{sottogr. di ordine 12})$$

$$[2] = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \text{ corrisponde a } \langle \sigma^2 \rangle \quad (\text{ordine 6})$$

$$[3] = \{0, 3, 6, 9\} \text{ corr. a } \langle \sigma^3 \rangle \quad (\text{ordine 4})$$

$$[4] = \{0, 4, 8\} \text{ corr. a } \langle \sigma^4 \rangle \quad (\text{ord. 3})$$

$$[6] = \{0, 6\} \text{ corr. a } \langle \sigma^6 \rangle \quad (\text{ord. 2})$$

$$[12] = \{0\} \text{ corr. a } \langle \sigma^{12} \rangle = 1_{S_{12}} \quad (\text{ord. 1})$$

SPAZI VETTORIALI

Data K campo,sia V un insieme $\neq \emptyset$ munito di:

$$\text{operazione binaria: } V \times V \longrightarrow V$$

$$(a, b) \longmapsto (a+b)$$

su K (si può scrivere)
/K

scalari vettori:

$$\text{un'operazione } K \times V \longrightarrow V$$

$$(\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v$$

V ha
(somma e prodotto scalare)

è commutativa

Si dice che V è uno spazio vettoriale se:① $(V, +)$ è un gruppo abeliano (di el. neutro 0_V , $\circ \circ$)

$$\text{② } \alpha \cdot (v+w) = \alpha v + \alpha w \quad \forall \alpha \in K, \forall v, w \in V \quad \begin{matrix} \text{distr. di scalare} \\ \text{su somma di vettori} \end{matrix}$$

$$\text{③ } (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha v + \beta v \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall v \in V \quad \begin{matrix} \text{distr. di vettore} \\ \text{su somma di scalari} \end{matrix}$$

$$\text{④ } (\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v) \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall v \in V \quad \text{Non-proprio-associatività}$$

$$\text{⑤ } 1_K \cdot v = v \quad \forall v \in V \quad \text{elemento neutro molt.}$$

Ma in V non esiste un
el. neutro per la molt., quindi
quello di K funge da neutro per
questa operazione

OSS:

la molt. di $v \in V$ per $-1 \in K$,
opposto dell'el. neutro
per l'add. in K .

$$(-1) \cdot v = -v$$

è l'opposto per la struttura di gruppo

infatti, dato $v \in V$,

$$\begin{aligned} v + (-1)v &= (1 + (-1))v \\ &= 0 \cdot v = 0 \end{aligned}$$

• per esempio, $V = K$ è uno spazio vettoriale su K (perché K campo quindi K anche quindi distr., assoc., el. neutro)spazio vett. K^n • Poniamo $V = K \times \dots \times K = K^n$ con l'operazione $+$ di prodotto cartesiano di gruppi(con \emptyset el. neutro di K , $0_{K^n} = (0, \dots, 0)$ el. neutro di K^n)Definiamo $K \times V \rightarrow V$:

$$\begin{array}{ccc} n \text{ volte} & & n \text{ volte} \\ K \times \underbrace{K \times \dots \times K}_{n \text{ volte}} & \longrightarrow & \underbrace{K \times \dots \times K}_{n \text{ volte}} \\ (\lambda, (v_1, \dots, v_n)) & \longmapsto & (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) \\ & & \lambda(v_1, \dots, v_n) \end{array}$$

questa operazione soddisfa

tutti gli assiomi di spazio vettoriale

distr. a sx:

$$\begin{aligned} \text{② } \lambda \cdot ((v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n)) &= \lambda((v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)) = \\ &= (\lambda(v_1 + w_1), \dots, \lambda(v_n + w_n)) = (\lambda v_1 + \lambda w_1, \dots, \lambda v_n + \lambda w_n) = \\ &= (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) + (\lambda w_1, \dots, \lambda w_n) = \\ &= \lambda(v_1, \dots, v_n) + \lambda(w_1, \dots, w_n) = \lambda v + \lambda w \\ &= \lambda(v + w) \end{aligned}$$

 V , con queste operazioni, è uno spazio vettoriale.

Esempi di spazi vettoriali: (dato K campo)

$$\textcircled{1} \quad K^n, \quad \text{con } n=1, K^1 = K, \quad \text{con } n=0, K^0 = \{\emptyset\}$$

\textcircled{2} matrici con m linee e n colonne a coefficienti in K

$$M_{m,n}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in K \forall i,j \right\} = \left\{ (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} : a_{ij} \in K \forall i,j \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

con operazioni di addizione coefficiente per coefficiente

e moltiplicazione esterna per λ separatamente per ogni coefficiente

$$\lambda = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Note: essenzialmente, $M_{m,n}(K)$ è una riscrittura di $K^{m \times n}$ sotto forma di matrice. (come vettori assembly)

per esempio, $M_{2,3}(K) = K^{2 \times 3}$ è uguale (formalmente si dice) isomorfo a K^6

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2,3}(K) \xrightarrow{1:1} (a, b, c, d, e, f) \in K^6$$

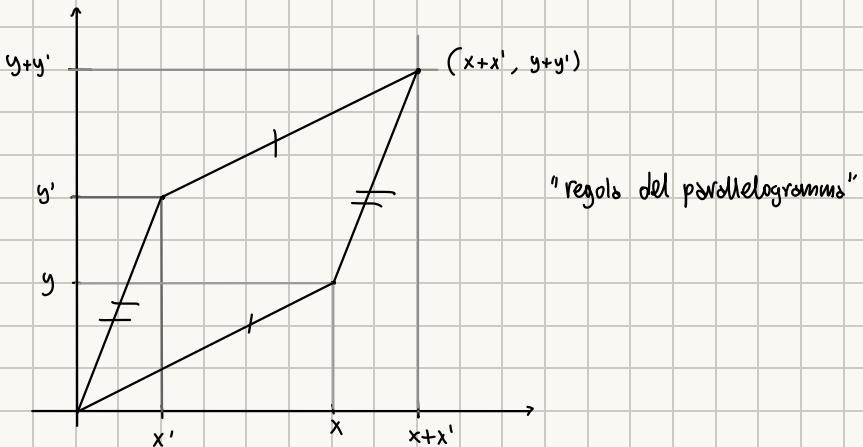
esempio operazioni:

$$A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ij}) \quad \in M_{m,n}(K) = K^{m \times n}$$

$$\cdot A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m,n}(K)$$

$$\cdot \lambda \in K : \lambda A = (\lambda a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$$

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLA SOMMA IN \mathbb{R}^2



\textcircled{3} Polinomi a coefficienti in K campo

$$V = K[x] \quad f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 \dots, \quad g = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 \dots, \quad \lambda \in K$$

$$f+g = f_0 + g_0 + (f_1 + g_1)x + \dots$$

Osservazione: K finito (es. $K = \mathbb{F}_p$)

$$\lambda \cdot f = \lambda f_0 + (\lambda f_1)x + (\lambda f_2)x^2 + \dots$$

ma $K[x]$ infinito

④ lo ha skipato per ora

⑤ \mathbb{C} è uno spazio vettoriale su \mathbb{C}

ma si ha anche che \mathbb{C} è uno spazio vettoriale su \mathbb{R}

$$\mathbb{C} = \{x+iy : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{la struttura di gruppo abelliano è nota}$$

$$\begin{aligned} \cdot \lambda \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \\ z = x+iy \end{aligned} \quad \begin{aligned} \lambda \cdot z &= \lambda(x+iy) = (\lambda x) + i(\lambda y) \\ &= x+iy \end{aligned}$$

def APPLICAZIONE LINEARE (come omom. gruppi)

Dati due spazi vettoriali V, V' su K , un'applicazione $V \xrightarrow{f} V'$ è detta lineare se:

infatti notiamo che se $\lambda = 1$, è l'assioma dell'omomorfismo

$$\forall x, y \in V, \forall \lambda \in K, \quad f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

Se f è biiettiva, si dice isomorfismo.

Se $f: V \rightarrow V'$ isomorfismo esiste, allora si dice che V e V' sono isomorfi e si scrive $V \cong V'$.

def SOTTOSPAZIO VETTORIALE

dato V spazio vettoriale su K ,

$W \subset V$, $W \neq \emptyset$ è un sottospazio vettoriale se: (varie definizioni alternative)

1 - è uno spazio vettoriale per le operazioni indotte da V

ovvero se, come gruppi abelliani, si ha:

$$\cdot W \leq V$$

$$\cdot \forall w \in W, \forall \lambda \in K, \lambda \cdot w \in W$$

2 - $\cdot \forall w, w' \in W$, si ha $w + w' \in W$ (stabilità rispetto alla somma)

$$\cdot \forall w \in W, \forall \lambda \in K, \lambda \cdot w \in W$$

3 - Se è stabile per combinazioni lineari nel modo seguente:

$$\cdot \forall w, w' \in W, \forall \lambda, \lambda' \in K, \text{ si ha}$$

$$\lambda w + \lambda' w' \in W$$

4 - $\forall w_1, \dots, w_n \in V$ e $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n \in W$

5 - $\forall w, w' \in W$ e $\forall \lambda \in K$, $w + \lambda w' \in W$

def COMBINAZIONE LINEARE

Dati $v_1, \dots, v_n \in V$, e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ allora

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ è una combinazione lineare di v_1, \dots, v_n (a coeff. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$)

• Si dice "Span" o "Sottospazio Generato" da v_1, \dots, v_n
il sottospazio vettoriale ottenuto dall'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di un insieme di vettori.

- si scrive "Span_K({v₁, ..., v_n})"
- "Vett_K({v₁, ..., v_n})"

esempi:

① Mostrare che $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ non è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 .

prendiamo $w = (1, 0, 0)$, $w' = (0, 1, 0)$, $\lambda = 1$

$$w + \lambda w' = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0) \quad \text{e} \quad 1^2 + 1^2 + 0^2 = 1 + 1 + 0 = 2 \neq 1 \Rightarrow w + w' \notin S$$

metodo alternativo: ogni sottosp. vettoriale di \mathbb{R}^3 deve contenere $0 = (0, 0, 0)$. Qui $(0, 0, 0) \notin S$

el. neutro
somma (op. spaz. vett.)

def SPAN / SOTTOSPAZIO GENERATO

Prendiamo V sp.vett. su K . Sono $v_1, \dots, v_n \in V$.

Poniamo $W = \text{Span}_K(\{v_1, \dots, v_n\}) = \{\text{comb. lineari di } v_1, \dots, v_n\} = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\}$

o Vett_K

è un sottospazio vettoriale.

Per vederlo, consideriamo $w, w' \in W$, $\lambda \in K$, e calcoliamo $w + \lambda w'$

$$\text{Mo} w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, w' = \sum_{i=1}^n \lambda'_i v_i, \text{ quindi } w + \lambda w' = \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i v_i}_{w} + \lambda \sum_{i=1}^n \lambda'_i v_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \lambda \lambda'_i) v_i \Rightarrow w + \lambda w' \in W$$

1° dist. 2° quindi si può scrivere quindi Span_K è un sottosp. vett.! per ⑤
come λv

OSSERVIAMO che $\text{Span}(\{v_1, \dots, v_n\}) = \bigcap_{\substack{W \subset V \\ \text{sottosp. vett.}, \\ W \supset \{v_1, \dots, v_n\}}} W$ intersez. dei sott. vett.
che contengono $\{v_1, \dots, v_n\}$

analogo a sottogruppi generati

quindi è il più piccolo sottospazio vett. di W che contiene $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Si chiama anche il sottospazio vettoriale generato da $\{v_1, \dots, v_n\}$. Talvolta si scrive $\langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$

Ma non spesso
per non confondersi
con i sottogruppi

Oss: L'intersezione tra sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale

dim:

dati W_1, W_2 sott. vett., $W_1 \cap W_2 \subset V$ (perché $W_1, W_2 \subset V$ per def. sottosp.vett., e l'intersezione è un sottosp.vett.)

Sia $v \in W_1 \cap W_2$, e $\lambda \in K$.

Allora, $\lambda v \in W_i$ perché W_i è sottosp.vett. di V (con $i=1, 2$)

Quindi, $\lambda v \in W_1 \cap W_2$

Oss: Se W è sottosp.vett. di V , allora $\emptyset \in W$.

def VETTORI LINEARMENTE INDEPENDENTI

o l.i. o lin. ind.

Dato V sp.vett./K, v_1, \dots, v_n sono linearmente indipendenti se,

dati $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ t.c. $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \emptyset$

Allora $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_K$

$$\sum_i \lambda_i v_i \quad (\sum_i \lambda_i v_i \text{ con } \lambda_i = 0 \text{ per } v_i)$$

Ovvero, se l'unica combinazione lineare di v_1, \dots, v_n che è nulla è quella banale (ovvero quella con tutti $\lambda_i = 0$)

Al contrario, si dicono linearmente dipendenti se esiste almeno una combinazione lineare nulla non banale.

Come vederlo? esempio.

• in \mathbb{R}^2 , $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono l.i.

quindi, due vett. sono l.d. se uno si può scrivere in funzione dell'altro (come multiplo scalare)

$$\text{es } v_1 = 2v_2$$

$$\Leftrightarrow v_1 - 2v_2 = \emptyset$$

Consideriamo una comb. lin. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \emptyset$

$$\text{ovvero } \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \emptyset \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \emptyset \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \emptyset$$

molt. scalare

somma
(vett.)

costruiamo il sistema lineare che ha $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ come soluzioni (si può direttamente mettere i vettori a sistema)

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2(\lambda_1 + 2\lambda_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \iff \lambda_1 = -2\lambda_2 \quad \text{quindi: } \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

si
sottrae termine
a termine

Oss: se ho m vettori $v_1, \dots, v_m \in K^n$ e se $m > n$,
allora v_1, \dots, v_m sono sempre l. d.

es. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono $3 > 2$ vettori in \mathbb{R}^2 , e sono quindi l. d.

Oss: Dato $f: V \xrightarrow{\cong} V'$, v_1, \dots, v_n sono l.i. se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono l.i.
per esempio, $M_{m,n}(K) \cong K^{m \times n}$ può essere utile

esercizi

① notare che $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

② Consideriamo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
uno multiplo dell'altro

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ l.i.}$$

$$\text{si vede che } 2v_1 - v_2 + 0v_3 = \emptyset$$

def MATRICE TRIANGOLARE = M_n - un pedice solo indica righe = # colonne

una matrice $M \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

è detta triangolare superiore se si può scrivere come

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \dots & M_{1n-1} & M_{1n} \\ 0 & M_{22} & M_{23} & \dots & M_{2n-1} & M_{2n} \\ 0 & 0 & M_{33} & \dots & M_{3n-1} & M_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{4n-1} & M_{4n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{n-1,n-1} & M_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & M_{nn} \end{pmatrix}$$

(invece, una triangolare inferiore sarebbe così: $\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ m & m & 0 & 0 \\ m & m & m & 0 \\ m & m & m & m \end{pmatrix}$)

(con gli zeri in alto)

diagonale della

matrice (m_{ij}) con $i=j$

esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- le colonne e le righe di M , viste come vettori di \mathbb{R}^n , sono l.i. $\iff m_{11}, m_{22}, \dots, m_{nn}$ (coeff. diag) sono tutti non nulli

esempio:

le colonne della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono l.d. $\iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono l.d.

(gli zeri non influenzano)

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ l.d. perché

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 \end{cases} \iff \lambda_2 = -2\lambda_3 \quad \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \end{cases} \quad \text{se pongo } \lambda_3 = 1 \text{ allora} \\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, -2, 1) \neq (0, 0, 0)$$

e si ottiene la comb. nulla, ma non banale

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esercizi (x casi)

$$\textcircled{1} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

in \mathbb{R}^3 , $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dimostrare che e_1, \dots, e_n sono l.i. e che, considerando inoltre $e_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, allora e_1, \dots, e_n, e_{n+1} sono l.d.
e caratterizzare tutte le comb. lin. nulle

\textcircled{2} \textcircled{3} $V = M_n(\mathbb{K})$, mostrare che le matrici

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad 1 \leq i, j \leq n \quad \text{tutti zeroi} \quad \text{Matr. } n \times n$$

sono l.i.

$$\textcircled{4} \quad \text{Mostrare che } (e_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \text{ e } f: \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ sono l.d.} \quad \text{tutti uno}$$

DIVERSI MODI DI RAPPRESENTARE UNA MATRICE

$A \in M_{m,n}(K)$

$$\cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\cdot A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \text{ con } A_i: i\text{-esima riga di } A$$

$$\cdot A = (A^1 \dots A^n) \text{ con } A^j: j\text{-esima colonna di } A$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \quad A_1 = (\text{dot}) \quad A_2 = (\text{def}), \quad A^1 = \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

PRODOTTO TRA MATRICI

prodotto scalare di una matrice linea e una matrice colonna

$$U = (v_1, \dots, v_n) \in M_{1,n}(K), \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$$

$$\langle U, V \rangle = \sum_{i=1}^n U_i V_i = U_1 V_1 + \dots + U_n V_n$$

con questo prodotto scalare definiamo un'operazione: $M_{m,K}(K) \times \underbrace{M_{K,n}(K)}_{= \rightarrow} \rightarrow M_{m,n}(K)$

$$\text{dove } (A, B) \mapsto A \cdot B = \langle A_i, B^j \rangle_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\overbrace{M_{1,K}(K)}^{A_1} \overbrace{\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}}^B \overbrace{(B^1 \dots B^n)}_{M_{K,1}(K)} \quad \text{è un'operazione associativa e distributiva}$$

esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2,3}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3,2}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \text{linea 1 A, colonna 1 B} & \text{linea 1 A, colonna 2 B} \\ \text{linea 2 A, col. 1 B} & \text{linea 2 A, col. 2 B} \end{pmatrix}$$

$$\text{ovvero } B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 & 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

esercizio

• calcolare $B \cdot A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 & 2 \cdot 3 + 5 \cdot 6 \\ 3 \cdot 1 + 6 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 & 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 23 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{pmatrix}$$

MATRICE IDENTITÀ $1_n, \text{Id}_n \in M_n(K)$ in $M_n(K)$, la matrice

$$1_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

tutti zeri e
diagonale di uno

svolge il ruolo di elemento neutro per il prodotto righe-colonne tra matrici

es. in M_2 , $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

o in M_3 , $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

def MATRICI INVERTIBILIUna matrice $A \in M_n(K)$ è invertibile se $\exists A' \in M_n$ t.c. $A \cdot A' = A' \cdot A = 1_n$

$$GL_n(K) := \{A \in M_n(K) : A \text{ invertibile}\}$$

GRUPPO LINEARE GENERALE

da Wikipedia: è un gruppo moltiplicativo
(prodotto matriciale)**MATRICI 2×2** Notiamo che $M_2(K)$, dotato delle operazioni di $+$, \cdot , con el. neutri: $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

è un anello unitario (non commutativo)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

def determinante di una matrice 2×2

data $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$, $\det(A) := ad - bc \in K$

matrici 2×2 invertibili (Lemma)

si scrive anche:

 $A \in M_2(K)$ è invertibile per la moltiplicazione linee per colonne

$$\iff \det(A) \neq 0 \quad (\iff \det(A) \in K^\times)$$

$$A \in GL_2(K), \quad A \in (M_2(K))^\times$$

di inverso *

$$(A \text{ invertibile} \iff \exists A' \in M_2 \text{ t.c. } A \cdot A' = A' \cdot A = 1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

dim:

$$\textcircled{1} \quad \det(A) \neq 0 \implies A \in GL_2(K)$$

Poniamo $A' = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in M_2$
 $\neq 0$ per ip.

$$\text{Calcoliamo } AA' = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Id}_2$$

$$\text{e } A'A = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Id}_2$$

prod.
scolare colonna.

Sappiamo quindi che $A' = A^{-1}$

Lemmo: dati $A, B \in M_2(K)$ non lo dimostriamo
allora $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

② $A \in GL_2(K) \implies \det(A) \neq 0$

$$A \in M_2(K)^{\times} \iff \exists A' \in M_2(K)^{\times} \text{ t.c. } AA' = A'A = I_2$$

Calcoliamo i determinanti: $\det(AA') = \det(A'A) = 1 \neq 0$
 $\det(A) \det(A')$ || lemma || $\det(A') \det(A)$
 $\implies \det(A), \det(A') \neq 0$ (K non ha divisori di 0) ■

notiamo che $\det(A') = \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
in particolare, $\det: M_2(K)^{\times} \longrightarrow K^{\times}$ è un omomorfismo di gruppi

noto: $GL_2(\mathbb{R})$ non è abeliano: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ e $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Esercizio

$$M_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2^4 = \mathbb{F} \times \mathbb{F} \times \mathbb{F} \times \mathbb{F}$$

di cardinalità $2^4 = 16$

liste completa degli el. di $M_2(\mathbb{F}_2)$ (con $1 = [1], 2 = [2]$)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Mostrare che
 $GL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$

$$\square \in GL_2(\mathbb{F})$$

SPAZIO

SVOLGIMENTO

FUTURO

SISTEMI LINEARI

Dato un campo K , un sistema lineare di m equazioni e n indeterminati a coeff. in K

è un sistema di equazioni del tipo:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = b_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

Coeffienti $\in K$

Termini noti / costanti $\in K$

Risolvere un sistema significa descrivere l'insieme di tutti i vettori

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \text{ tali che tutte le equazioni sono soddisfatte simultaneamente}$$

• Un sistema lineare $(*)$ si dice compatibile se il sottoinsieme $\text{Sol}(*)$ di K^n delle sue soluzioni è non vuoto.

Altrimenti, si dice incompatibile.

es. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$ è incompatibile $\begin{cases} x_1 = 0 \end{cases}$ è compatibile, con $\text{Sol} = \{(0)\} \subset K^1$
 $(1 \neq 0 \text{ in ogni campo})$

Per quanto riguarda i sistemi lineari, i seguenti problemi sono importanti:

- ① Decidere se un sistema è compatibile
- ② Descrivere tutte le soluzioni nel caso compatibile
- ③ Nel caso compatibile, descrivere l'insieme delle soluzioni attraverso un insieme di "parametri minimi"

ESPRESSIONE MATRICIALE DI UN SISTEMA LINEARE SU K

Il sistema $(*)$ si può riscrivere alternativamente nel modo seguente

matrice dei coeff.
 $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K) , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K) , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} \langle A_1, X \rangle \\ \langle A_2, X \rangle \\ \vdots \\ \langle A_m, X \rangle \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K)$$

prodotto matriciale linea · colonna
 da ogni linea di A (coeff. $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}$)
 per l'unica colonna di X

quindi il sistema lineare $(*)$ può essere
 riformulato in modo compatto attraverso
 l'equazione in matrici:

$$A \cdot X = b$$

esempio

dati $A \in GL_m(K)$, $b \in M_{m,1}(K)$,

il sistema $(*) A\mathbf{x} = b$ è sempre compatibile e ammette un'unica soluzione \mathbf{x} .

Infatti, sia A^{-1} l'inverso di A . Allora, $\mathbf{x} \in M_{m,1}(K)$ è soluzione di $(*) \iff A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}b \iff \mathbf{x} = b$

Quindi, $\text{Sol}(\star) = \{(b)\}$.

MATRICE COMPLETA ASSOCIATA A UN SISTEMA LINEARE

Consideriamo un sistema lineare:

$$(*) = A\mathbf{x} = b$$

giustapposizione di b ad A

tutti i suoi dati sono contenuti nella matrice: $(A|b) \in M_{m,n+1}(K)$

matrice completa del sistema

• se $b = \emptyset$ il sistema è omogeneo

altrimenti, è non omogeneo

OSS: $A\mathbf{x} = b \iff x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n = b$

esemp.

$\iff b$ è combinazione lineare di A^1, \dots, A^n

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad (K = \mathbb{R})$$

$\iff b \in \text{Span}_K(A^1, \dots, A^n)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{quindi } x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

dire che $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ è soluzione di $(*)$ significa

che $x_1 A^1 + x_2 A^2 + x_3 A^3 + x_4 A^4 = b$

ovvero $(*)$ è compatibile $\iff b \in \text{Span}_{\mathbb{R}}(A^1, A^2, A^3, A^4)$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 5 \end{cases} \iff x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

questo sistema è compatibile $\iff \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$\text{il che è vero, infatti } \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 5 \end{cases} \iff x_1 = 5 - x_3$$

$$\begin{cases} 10 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 = 5 - x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 9 - x_3 \\ x_1 = 5 - x_3 \end{cases}$$

ammette soluzioni, e.s. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

STRUTTURA DELL'INSIEME DI SOLUZIONI DI UN SISTEMA LINEARE

Consideriamo il sistema $Ax = b$ (*) con $A \in M_{m,n}(K)$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$, $b \in M_{m,1}(K)$

NOTAZIONE

Se (*) è incompatibile, poniamo $\text{Sol}(A|b) = \emptyset$

Se (*) è compatibile, poniamo $\text{Sol}(A|b) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \text{ t.c. } x \text{ è sol. di } (*) \right\}$

Proposizione

$\text{Sol}(A|b)$ è un sottospazio vettoriale di $K^n \iff b = 0$

(sappiamo che sott.vett. \implies sp.vett. \implies gruppo, e non può essere un gruppo se non ha l'elemento neutro $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$)

e non può avere l'el. neutro $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ se $b \neq 0$, perché $\alpha_1 0 + \alpha_2 0 + \dots + \alpha_n 0$ non può essere $\neq 0$

(se 0 è tra le sol, $b = 0$ per forza)

dim

- Se $b \neq 0$, visto che $\text{Sol}(A|b) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ t.c. } A^1 x_1 + A^2 x_2 + \dots + A^n x_n = b \right\} \not\ni \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, e $\text{Sol}(A|b)$ non è s.v. di K^n .
- Supponiamo quindi che $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

Mostriamo che $\text{Sol}(A|0)$ è un s.v. di K^n .

Prendiamo $X, X' \in \text{Sol}(A|0)$ e $\alpha, \alpha' \in K$. Devo mostrare che $\alpha X + \alpha' X' \in \text{Sol}(A|0)$

p.80
def ③ sottosp. vett.
stabilità per comb. lineari

$$X \in \text{Sol}(A|0) \iff AX = 0 \quad \& \quad X' \in \text{Sol}(A|0) \iff AX' = 0$$

$$A(\alpha X + \alpha' X') = \alpha A X + \alpha' A X' = \alpha \cdot 0 + \alpha' \cdot 0 = 0 \implies \alpha X + \alpha' X' \in \text{Sol}(A|0)$$

prodotto scalare
è commutativo

Teorema

Supponiamo di avere un sistema

$$(*) \quad AX = b, \quad A \in M_{m,n}(K), \quad b \in M_{m,1}(K), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$$

Supponiamo inoltre che $(*)$ sia compatibile ($\text{Sol}(A|b) \neq \emptyset$) $\hookrightarrow K^n$
 (cioè è equivalente a $b \in \text{Span}_K(A^1, \dots, A^n) \subset M_{m,1}(K)$)

Sia $x_0 \in \text{Sol}(A|b)$. Allora,

$$\text{Sol}(A|b) = x_0 + \text{Sol}(A|\emptyset)$$

struttura simile al CRT

dim

Sia $X \in \text{Sol}(A|b)$. Allora, $X = X - x_0 + x_0$ ovvero $X = \underbrace{x_0}_{\substack{\text{così ho} \\ x_0 + \text{Sol}(A|\emptyset)}} + \underbrace{X - x_0}_{\substack{\text{ovvero} \\ X - x_0 \in \text{Sol}(A|\emptyset)}}$

① Per mostrare che $\text{Sol}(A|b) \subset x_0 + \text{Sol}(A|\emptyset)$, basta verificare che $X - x_0 \in \text{Sol}(A|\emptyset)$, ovvero che $A(X - x_0) = \emptyset$

Noi sappiamo che $AX = b$ e che $AX_0 = b \Rightarrow \underbrace{AX - AX_0}_{\substack{b-b \\ A(X - x_0)}} = \emptyset \Rightarrow X - x_0 \in \text{Sol}(A|\emptyset)$ mostrato \subset

② Mostriamo adesso che $\forall y \in \text{Sol}(A|\emptyset)$, $x_0 + y \in \text{Sol}(A|b)$

Dico calcolare $A(x_0 + y) = \underbrace{Ax_0}_{\substack{\text{perché} \\ x_0 \in \text{Sol}(A|b)}} + \underbrace{Ay}_{\substack{\text{perché} \\ y \in \text{Sol}(A|\emptyset)}} = b + \emptyset = b \Rightarrow x_0 + \text{Sol}(A|\emptyset) \subset \text{Sol}(A|b)$ mostrato \subset

Quindi, $\text{Sol}(A|b) = x_0 + \text{Sol}(A|\emptyset)$ ■

esempio

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 4 \\ x_3 = 5 \end{array} \right. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

noto che $x_3 = 5$ - sostituisco "a cascata"

$x_3 = 5, \quad x_2 = 9, \quad x_1 = -32$

$$\text{Sol}(*) = \left\{ \begin{pmatrix} -32 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

equivalentemente, grazie al teorema precedente, posso scrivere

$$\text{Sol}(A|b) = x_0 + \text{Sol}(A|\emptyset) = \begin{pmatrix} -32 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset M_{3,1}(\mathbb{R})$$

ALGORITMO DI GAUSS

Introduciamo una relazione sulle matrici complete di $M_{m,n+1}(K)$
 ↴
 n indet. e b giù l'opposto

$M, M' \in M_{m,n+1}(K) \quad M \sim M' \iff \text{Sol}(M) = \text{Sol}(M')$
 ↴
 abbastanza ovvio (l'ugualanza è di equiv)
 è una relazione di equivalenza

$$AX = b \rightsquigarrow M(A|b)$$

Ideas di Gauss: usare un insieme "semplice" di trasformazioni su $M_{m,n+1}(K)$ che lasciano invarienti le classi \sim di equivalenza
 (ogni classe ha un rapp. unico matrice "a gradini", le cui soluzioni si vedono subito)

operazioni elementari:

- ① PERMUTARE LE RIGHE ↴ non nullo
- ② MOLTIPLICARE UN'EQ DEL SISTEMA PER UNO SCALARE $\lambda \in K^*$ ↴ una riga qualsiasi
- ③ SOSTITUIRE UNA RIGA CON SE STESSA + UN MULTIPLO SCALARE DI UN'ALTRA RIGA ↴ somma vett.
 ↴ es. 3a riga $\leftarrow 2 \cdot 2a$ riga)

Gauss ha mostrato che, operando con un numero finito

di operazioni del tipo ①, ②, ③, se ne ottiene un'altra, M' , con $M \sim M'$

più sinteticamente

Date due matrici $M, M' \in M_{m,n+1}(K)$, scriviamo

↪ simbolo scelto da Perron (↪asymp su LateX)

$M \asymp M' \iff M'$ si può ottenere da M attraverso un numero finito di operazioni ①, ②, ③
 ↴ è una rel. di equiv.

Teorema

$M \asymp M' \implies M \sim M'$ (non vale il contrario - è possibile che due matrici unrelated abbiano le stesse soluzioni)

esempio:

I sistemi lineari associati alle seguenti matrici ammettono lo stesso insieme di soluzioni:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_3 \xrightarrow{2} \frac{1}{2}R_3 \\ R_2 \xrightarrow{3} R_2 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_3 \xrightarrow{3} R_3 - R_1 \\ -1 \cdot R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{questa riga è una tautologia } (0=0) \\ \text{ma non la tolgo} \\ \text{perché siamo in } M_{3,4}(\mathbb{R})}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\substack{R_1 \xrightarrow{3} R_1 - R_2}} \end{array}$$

↪ gradini ridotto (definito dopo)

e per il teorema, $\text{Sol}\left(\begin{array}{l} x+2z=1 \\ y-z=1 \end{array}\right) = \text{Sol}(M) = \mathcal{E}$ ↴ soluzione sistema om. associata a $\text{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ (sottosp. vett. generato dalle sol. dell'omogeneo associato)

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ t.c. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

↪ riscritto il sistema

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ y-z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-2z \\ y=1+z \end{cases}$$

↪ qui (al posto di $z = \dots$) c'è $z = 0$, quindi la sostituiamo con un'altra tautologia ($z=z$) $\left(\begin{array}{c} \vdots \\ z \\ \vdots \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{array} \right) + z \left(\begin{array}{c} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{array} \right)$

def MATRICE A GRADINI

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & * & * \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

pivot

caso "estremi"

Non devono per forza esserci tutti zeri in fondo

triang. sup. con 1 sulle diag.

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & * \end{array} \right)$$

matrice di zeri:

$$\left(\begin{array}{c} \text{circle with diagonal line} \end{array} \right)$$

- tra una riga e l'altra, l'uno deve essere almeno sulla colonna successiva al precedente

(cioè, $\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$ No, $\begin{matrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ Sì, $\begin{matrix} 0 & 1 & ** \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ Sì)

Più formalmente, A è a gradini se:

- ① $A_{ij} = 0 \Rightarrow A_{jh} = 0 \quad \forall j > i$
- ② Se $A_{ii} \neq 0$, allora il primo coeff. non nullo (pivot) è un 1
- ③ Se il pivot della riga i appare nella colonna j , allora il pivot della riga $i+1$ appare nella colonna $h > j$

Teorema ALGORITMO DI GAUSS

$\forall M \in M_{m,n+1}(K), \exists \Gamma \in M_{m,n+1}(K)$ t.c. $M \xrightarrow{\sim} \Gamma$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow -R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{a gradini}}$$

def MATRICE A GRADINI RIDOTTA

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \dots & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & & & & & & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \end{array} \right)$$

è una matrice a gradini t.c.

- ④ dato un pivot di modo che

$$a_{ij} = 1, \text{ allora } \forall k \in \{1, \dots, i-1\}, a_{kj} = 0$$

(sopra ogni pivot ci sono solo zeri)

ALGORITMO "RINFORZATO"

$\forall M \in M_{m,n+1}(K), \exists ! \Gamma \in M_{m,n+1}(K)$ a gradini ridotta t.c. $M \xrightarrow{\sim} \Gamma$

continuiamo l'esempio di prima

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + 2R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{a gradini ridotta}}$$

$$\text{Sol}(M) = \text{Sol} \left(\begin{pmatrix} x & z \\ y & 0 \\ t & -2 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ t.c. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \text{Span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

domanda: $\text{Sol}(M) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \text{Span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$? Si, perché x_0 soluzione particolare non è unico
 è sol part.: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = X - x_0 \in \text{Sol}(A|b)$

esercizio

$$\in M_{3,5+1} \quad \cup \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \cup \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array} \right) \quad \cup \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array} \right) \quad \cup \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array} \right) \rightarrow \text{gradini ridotti}$$

$R_3 \mapsto \frac{1}{2}R_3$
Switch tra $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array} \right)$$

Vediamo da qui che quelle tre righe "rappresentano" x_3, x_4, x_5 quindi i valori

(in un sistema avremmo)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = \frac{1}{2} \\ x_4 = 0 \\ x_5 = \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Sol}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \text{Span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

perché? invece, $\text{Span}_{\mathbb{R}}$ viene dall'omogeneo associato, in cui X_3, X_4, X_5 sono invece "vincolati" a 0

- le uniche "libere" (tutte le cui combinazioni formano le soluzioni dell'omogeneo) sono X_1, X_2 per questo, $\text{Span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ qui sono "1"

4/12

esercizio

② dire se il seguente sistema è compatibile e trovare tutte le soluzioni ($K = \mathbb{R}$)

Soluzioni: matrice colonna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ t.c. le equazioni in (*) siano simultaneamente soddisfatte

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y - 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ x + y + z = -2 \end{array} \right.$$

① trascriviamo in matrici complete

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

② lo trasformiamo in forma a gradini (+ ridotta) con l'algoritmo di Gauss

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad \cup \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad \cup \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad \cup \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$R_1 \mapsto R_1 - 2R_3$ $R_1 \mapsto R_1 - R_2$ $R_1 \mapsto -\frac{1}{3}R_1$

posso anche fare una m. a gradini: "al contrario" e poi permutare le righe

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$R_1 \leftrightarrow R_3$

è a gradini, ora va ridotta.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \text{Sol}(*) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Si possono fare due passaggi insieme, ma occhio a non operare sulle stesse righe

perché le sol. dell'omogeneo sono 0)

③ interpretiamo z come un parametro invece che un'indeterminata
(decido io il valore)

$$(***) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y - 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ x + y + z = -2 \end{array} \right.$$

determinare l'insieme E dei valori del parametro $z \in \mathbb{R}$ t.c. (**) sia compatibile

• z è un parametro, quindi il sistema è da considerarsi a indeterminate x, y

ovvero a soluzioni in \mathbb{R}^2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1+2z \\ 2+z \\ -2-z \end{pmatrix}$$

Gauss

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1+2z & \\ 0 & 1 & 2+z & \\ 1 & 1 & -2-z & \end{array} \right) \xrightarrow{\text{R}_1 \leftrightarrow R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5+4z & \\ 0 & 1 & 2+z & \\ 1 & 1 & -2-z & \end{array} \right) \xrightarrow{\text{R}_2 \leftrightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3+3z & \\ 0 & 1 & 2+z & \\ 1 & 1 & -2-z & \end{array} \right) \xrightarrow{\text{R}_3 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2-z & \\ 0 & 1 & 2+z & \\ 0 & 0 & 3+3z & \end{array} \right)$$

Il sistema associato è

$$\begin{cases} x+y = -2-z \\ y = 2+z \\ 0 = 3+3z \end{cases}$$

che è compatibile $\iff z = -1$

$$(0 = 3+3z)$$

notiamo che $z = -1$

era anche nella sol. precedente

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Quindi $\mathcal{E} = \{-1\}$. Il sistema diventa quindi:

$$\begin{cases} x+y = -1 \\ y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{in forma triangolare superiore,} \\ \text{di soluzione } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Note: praticamente ho portato

Un po'
inutile

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

def RANGO DI UNA MATRICE

Dato $A \in M_{m,n}(K)$, il **rango** è il numero di pivot di una sua forma a gradini (ridotta o non ridotta)

(ovvero il numero di righe non nulle.)

Notazione: $\text{rg}(A) \in \mathbb{N} : A \in M_{m,n}(K)$ $\cdot \text{rg}(A) = 0 \iff A = (\emptyset)$
 è impossibile che una matrice non nulla lo diventi con le operazioni date.

OSS: per definizione, se la matrice A' è ottenuta a partire dalla matrice A applicando operazioni elementari, allora $\text{rg}(A') = \text{rg}(A)$

ridurre non cambia il
nr. di pivot

(non l'ha detto)

è il massimo numero di righe (o colonne) l.i. della matrice (infatti, se riduco la matrice, le righe l.d. diventeranno nulle.)

$$\text{es. } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ 2 & 4 & 6 & \\ 1 & 1 & 1 & \end{array} \right) \xrightarrow{\text{riduzione}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 6 \end{array} \right) = 2 \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right)$$

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \quad \text{rg}(A) = \text{rg} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{array} \right) = \text{rg} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array} \right) = 3$$

3 pivot
(non mi serve trasformarli in 1 per vederlo)

OSSERVAZIONI

① Una matrice $A \in M_{m,n}(K)$ può avere
il massimo rango $(A) = \min(m, n)$

e esempi "limite"

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & & & * & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \end{array} \right)$$

se c'è un pivot per colonna,
 $\text{rg}(A) = n$ (colonne), che $i < m$ (righe)

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & & & * & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \end{array} \right)$$

se c'è un pivot per riga,
 $\text{rg}(A) = m$ e $m < n$

(se la matrice è
quadrata con diagonale
di pivot, $m = n$
quindi $\min(m, n) = m = n$
chiaramente)

② $\text{rg}(A) \leq \text{rg}(A|b)$ qualunque sia data una colonna $b \in M_{m,1}(K)$
("aumentando" la matrice, il range non può diminuire)

qui può esserci al massimo un pivot in più

- visto che si mescolano le righe ma mai le colonne,
la parte a sinistra sarà uguale -
(A)

se ne deduce che $\text{rg}(A) \leq \text{rg}(A|b)$

OK.

- Rouché-Capelli theorem in English speaking countries, Italy and Brazil;
- Kronecker-Capelli theorem in Austria, Poland, Ukraine, Croatia, Romania, Serbia and Russia;
- Rouché-Foncón theorem in France;
- Rouché-Frobenius theorem in Spain and many countries in Latin America;
- Frobenius theorem in the Czech Republic and in Slovakia.

Teorema ROUCHE - CAPELLI

vedi anche p.98

Si consideri il sistema $(*) AX = b$ con $A \in M_{m,n}(K)$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$

① Il sistema $(*)$ è compatibile $\iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$

colonne (= indeterminate)

② Se $(*)$ è compatibile, poniamo $s := n - \text{rg}(A) \geq 0$ "grado di libertà" del sistema

Esistono allora vettori $v_1, \dots, v_s \in \text{Sol}(A|0)$ linearmente indipendenti t.c. $\text{Sol}(A|0) = \text{Span}_K(v_1, \dots, v_s)$

Quindi, dato $v_0 \in \text{Sol}(A|b)$, si ha $\text{Sol}(A|b) = v_0 + \sum_{i=1}^s K v_i$

x parentesi mia
x copiare meglio:

esempio grado 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b \\ 0 & 0 & -1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \quad (\text{sono le colonne})$$

ho 3 incognite
ma 1 è "libera"
(2 sono vincolate)

non pivot

ho 4 incognite
ma 1 è "libera"

grado 3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & * & * & * & b \\ 0 & 1 & * & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & * & * & \end{array} \right)$$

costante

infatti (esempi di prima)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad s = n - \text{rg}(A)$$

$\therefore s = 3 - 3$

"(0)"

(visivamente vedo
subito 0
colonne "libere")

quindi $\text{Sol}(A|0) = \text{Span}_K \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

la sol è unica:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Sol}(A|0) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

"(0)"

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2-z & \\ 0 & 1 & 2+z & \\ 0 & 0 & 3+3z & \end{array} \right)$$

se qui c'è 0 va bene perché non ci sono altri pivot

e $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$

(quindi se $z = -1$, è compatibile)

se invece $z \neq -1$,

$\text{rg}(A) = 2 < 3 = \text{rg}(A|b)$ e il sistema è incompatibile

esercizio

studiare le soluzioni del seguente sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 6 \\ x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 5 \\ x_2 + x_5 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1 \leftrightarrow R_3 \\ R_4 \leftrightarrow R_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_3 \\ R_3 \leftarrow R_4}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_4 \leftarrow R_4 - R_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

$$R_2 = R_3 \text{ di prima}$$

$$R_3 = R_4 \text{ " "}$$

$$R_4 = R_2 \text{ " "}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \leftarrow R_4}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

4 pivot

qui si vede che $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$

quindi, per Rouché-Capelli, il sistema d'origine è compatibile

dopo qualche calcolo →

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right) \text{ è gradini ridotti}$$

Vett p.80
 Abbiamo visto che $\text{Span}_K(V_1, \dots, V_k) = \{ \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_k V_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K \}$
 Più generalmente, se $\emptyset \neq S \subset V$ qualsiasi, si pone $\text{Span}_K(S) = \{ \text{"combinazioni lineari finite di vettori in } S\}$, ovvero $\text{Span}_K(S) = \bigcap_{\substack{W \text{ sottosp. di } V \\ S \subset W}} W$

- **FATTO:** $\text{Span}_K(S)$ è un sottospazio vettoriale di V .

es. $W \subset V$ sottospazio. Allora, $W = \text{Span}_K(W)$

def SISTEMA DI GENERATORI, SOTTOSPazio FINITAMENTE GENERATO

- Se $W = \text{Span}_K(S)$, allora S è un sistema di generatori per W .
- Se $\exists S$ finito con $W = \text{Span}_K(S)$, allora W è finitamente generato (f.g.)
 può essere generato ANCHE da un insieme infinito (non ci interessa)
 - quello che conta è che possa essere generato da uno finito

es. $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$, $S = \{v\}$

$$W = \text{Span}_{\mathbb{R}}(S) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(v) \quad W \text{ è f.g.}$$

def sistema di generatori LIBERO

$\emptyset \neq S \subset V$ è libero o linearmente indipendente se, comunque scelto un sottoinsieme finito
 $F = \{V_1, \dots, V_n\} \subset S$, allora V_1, \dots, V_n sono l.i. (ogni combinazione lineare finita di vettori di S nulla è banale)

def BASE

Dato W sottospazio vett., $S \subset W$ è una base di W se

- ① S è un sistema di generatori di W , ovvero $W = \text{Span}_K(S)$
- ② S è libero

"su K "

Proposizione 1: Per ogni spazio vettoriale V/K , esiste una base $B \subset V$.

Inoltre, date due basi (B, B') di V , allora esiste una funzione biiettiva $f: B \rightarrow B'$

quindi: in particolare, se esiste una base finita di cardinalità n , allora ogni base è finita, di cardinalità n .

def DIMENSIONE di uno sp.vett.

Dato uno spazio vettoriale V/K f.g., la dimensione $\dim_K(V)$ è l'intero $n \in \mathbb{N}$ tale che ogni base (B) di V ha cardinalità n .

N.B. $\dim_K(K) = 0 \iff V \text{ è banale} - V = \{0\}$

Proposizione 2: se W è un sottospazio vettoriale di V f.g. di dimensione n ,
allora anche W è f.g. e, data l la sua dimensione $l := \dim_K(W)$, si ha $l \leq n$

un sottospazio vett. ha sempre
dim <= dim spazio (che è logico,
perché \subseteq)

Applicazione alla notazione di rango di una matrice

Lemme Dato una matrice $A \in M_{m,n}(K)$, $\text{rg}(A) = \dim_K(\underbrace{\text{Span}_K(A_1, \dots, A_m)}_{\# \text{pivot}})$

sottosp. vett. di $M_{1,n}(K)$

(ogni riga è una matrice riga con n colonne)

$\text{Span}_K(A_1, \dots, A_m)$ è l'insieme delle comb. lin. delle righe di A ,

una base di $\text{Span}_K(\dots)$ è un insieme di vettori l.i. che generano $\text{Span}_K(\dots)$,

quindi la dim della span (cardinalità delle basi) è il numero massimo di righe l.i. \rightarrow ovvero il rango (se trasformo una matrice in forma a gradini ridotti, le righe l.i. diventeranno nulle)

dim

Sia A' la matrice a gradini ridotti tale che $A \leq A'$. Allora, ogni riga di A' è combinazione lineare delle righe di A .

Quindi,

$$\text{Span}_K(A'_1, \dots, A'_m) \subset \text{Span}_K(A_1, \dots, A_m)$$

ogni el. appartiene

per la prop. 2, $\dim_K(\text{Span}_K(A'_1, \dots, A'_m)) \leq \dim_K(\text{Span}_K(A_1, \dots, A_m))$

Ma ogni trasformazione elementare di Gauss è invertibile (\cup è una rel. di equivalenze)

Quindi, $\dim_K(\text{Span}_K(A'_1, \dots, A'_m)) = \dim_K(\text{Span}_K(A_1, \dots, A_m))$.

Si vede che $\dim_K(\text{Span}_K(A'_1, \dots, A'_m)) = \text{rg}(A')$ perché le righe contenenti i pivot sono l.i. (lo sp. vett. le ha come base) ■

Applicazioni alle soluzioni di un sistema lineare (ROUCHÉ-CAPPELLI)

Dato un sistema lineare (*) $AX = b$, $M := (A|b)$, $A \in M_{m,n}(K)$,

il teorema di Rouché-Capelli p.95 Si riformula.

① (*) è compatibile $\iff \dim_K(M^1, \dots, M^{n+1}) = \dim_K(A^1, \dots, A^n)$ ($\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$)

② $\dim_K(\underbrace{\text{Sol}(A|b)}_{\substack{\text{spazio vett.} \\ \text{delle sol. del} \\ \text{sistema omogeneo}}}) = \underbrace{n - \text{rg}(A)}_S$ (da teorema: esistono S vettori $v_1, \dots, v_S \in \text{Sol}(A|b)$ l.i.
t.c. $\text{Sol}(A|b) = \text{Span}_K(v_1, \dots, v_S)$)
quindi $S = \dim$ base \uparrow)

③ N.B. $\text{rg}(A) = \dim_K(\text{Span}_K(A_1, \dots, A_m)) = \dim_K(\text{Span}_K(A^1, \dots, A^n))$

Esercizi

*f sulle slide, ma preferisco x
f abbiamo visto che è uno sp. vett. (p.78)*

Sia $W = K_d[X]$ il sottoinsieme di polinomi di $V = K[X]$ di grado $\leq d$.

W è un sottosp. vett. di $K[X]$.

- ① ② Mostrire che $K_d[X]$ è f.g. e ③ calcolarne una base.

f.g.

② dato $P \in K_d[X] =: W$, $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \dots + \alpha_n X^n$ con $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in K$ e, se $\alpha_n \neq 0$ allora $n \leq d$

è una comb. lineare di

quindi, $P \in \text{Span}_K(1, X, X^2, \dots, X^d)$ - ovvero, $S = \{1, X, X^2, \dots, X^d\}$ è un sistema di generatori di $K_d[X]$

Siccome S è finito, $K_d[X]$ è f.g.

base

③ bisogna trovare un sistema di generatori l.i.

Un polinomio è nullo \iff i suoi coeff. sono tutti nulli.

Ma un polinomio $\in K_d[X]$ è una comb. lin. di $1, X, X^2, \dots, X^d$, quindi l'unico comb. lineare nullo di $1, X, X^2, \dots, X^d$ è quello banale.

$\Rightarrow \{1, X, X^2, \dots, X^d\}$ è una base $\Rightarrow \dim_K(K_d[X]) = d+1$

• Ma non è l'unica base:

dato $d=1$, $S = \{1, X\}$.

Se sostituisco X con $X+1$ e costruisco $S' = \{1, X+1\}$, S' è un sistema di generatori:

$$P = \alpha_0 + \alpha_1 X = \alpha_0 + \alpha_1 (X+1) - \alpha_1 = (\underbrace{\alpha_0 - \alpha_1}_{\in \text{span}(1)}) \cdot 1 + \alpha_1 (X+1) \quad \text{comb. lineare di } 1, X+1$$

$\Rightarrow \forall P \in K_1[X]$, si ha che $P \in \text{Span}_K(1, X+1) \Rightarrow K_1[X] \subset \text{Span}_K(1, X+1)$

Sia adesso $Q \in \text{Span}_K(1, X+1) \Rightarrow Q = b_0 + b_1(X+1) = \underbrace{b_0 + b_1}_{\in \text{span}(1)} + b_1 X \in K_1[X]$

$\Rightarrow K_1[X] = \text{Span}_K(1, X+1) = \text{Span}_K(1, X)$

le comb. di $(1, X+1)$ sono anche comb. di $(1, X)$

$1, X+1$ sono l.i., quindi anche $\{1, X+1\}$ è una base di $K_1[X]$

GENERALIZZANDO

Dato un qualsiasi $\{1, X, X^2, \dots, X^d\}$ base di $K_d[X]$,

se si sostituisce un elemento di questa base con un polinomio di $K_d[X]$ ottenuto:

- ① permutando ② moltiplicando per uno scalare ③ sostituendo con se stesso più una combinazione lineare degli altri
(operazioni di Gauss)

uscirà un'altra base.

[trovare in $K[x]$ un sistema di generatori che non è una base]

per esempio, $\{1, 1, x, x^2, x^3\}$ è un sistema di generatori ($\forall P = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3, P \in \text{Span}_K(\{1, x, x^2, x^3\}) \subset \text{Span}_K(\{1, 1, x, x^2, x^3\})$)
in generale, se $S \subseteq S'$, $\text{Span}_K(S) \subseteq \text{Span}_K(S')$

la comb. lin. $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot x + \lambda_4 \cdot x^2 + \lambda_5 \cdot x^3$

con $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ è non banale e nulla $\Rightarrow \{1, 1, x, x^2, x^3\}$ non è libero.

$$\downarrow 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

② Mostrare che $V = K[x]$ non è f.g. e calcolarne una base

Supponiamo per assurdo che V sia f.g.

vorrebbe dire che esiste una base finita di cardinalità n tale che

$V = \text{Span}_K(P_0, P_1, \dots, P_n)$, $P_i \in V = K[x]$. (quindi ogni polinomio è comb. lineare di P_0, \dots, P_n)

Sia $d = \max(\deg(P_i), i=0, \dots, n)$ (quindi esisterebbe un grado massimo)

Sia $P \in V$. Allora $P = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i$

il grado massimo che P può avere, visto che λ_i sono costanti (e non possono far aumentare di grado), è

$$\deg(P) \leq \max\{\deg(P_0), \dots, \deg(P_n)\} = d \quad (\text{definito sopra})$$

Introduciamo un elemento $Q \in V$ con grado $n+1$ (che chiaramente esiste in $K[x]$)

Sia $Q \in V$ di grado $n+1$

Se $Q \in V$, vuol dire che può essere scritto come comb. lin. dei generatori

$Q \in \text{Span}_K(P_0, \dots, P_n)$ \downarrow contraddizione

ma questo è impossibile, perché abbiamo visto sopra che quelle combinazioni hanno grado massimo n .

Quindi, $K[x]$ non è f.g. e ha base $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ infinita.

FATTI generalizzati dall'es.

- Se $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ è base di V , allora un sottoinsieme $B' \subset V$ ottenuto attraverso ①, ②, ③ è un'altra base.

- Se $S \subseteq S'$, $\text{Span}_K(S) \subseteq \text{Span}_K(S')$

- $V = K[x]$ non è f.g.