(utili x esercizi, non approfondite o dimostrate)

GENERALI

anello

$a+b = b+a$ comm +

$(a+b)c = a+(b+c)$ ass. +

$a + 0_A = 0_A + a = a$ el neutro +

$a + (-a) = 0_A$ opposto

$a \cdot b = b \cdot a$ comm · anello commutativo

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ass ·

$a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a$ el neutro · anello unitario

$a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ distr

Cancellazione in un anello A

Se a non divisore di 0_A, $ab = ac \Rightarrow b = c$

(in $\mathbb{Z}$, se $a \neq 0$)

INVERTIBILI

$ab = ba = 1_A$

prop. inversi: $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$

il prodotto di due invertibili è invertibile

EL. IRRIDUCIBILE

$a \in A \setminus A^\times$ $\forall b, c \in A$,

$a = bc \Rightarrow b$ o $c \in A^\times$

N. PRIMO

$a \in A \setminus A^\times$, $a \neq 0$

$\forall b, c \in A$, $a \mid bc \Rightarrow a \mid b$ o $a \mid c$

primo $\Longleftrightarrow$ irriducibile

CAMPO

A anello comm. un.

t.c. $\forall a \in A \setminus \{0\}$

$a \in A^\times$

noto: $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} = \mathbb{F}_p$ campo

(e, in $\mathbb{F}_p$, $([a]+[b])^p = [a]^p + [b]^p$)

DOMINIO

A anello $\neq \{0\}$ in cui

l'unico divisore di zero è 0_A

MONDO DELLA DIVISIBILITÀ

(div. euclidea) $a, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ $\exists! \, q \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0, \dots, |n|-1\}$

t.c. $a = qn + r$

utile! $r < n$

è una rel di $\subset$: $a \mid b \Longleftrightarrow b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$

DIVISIBILITÀ E CONGRUENZA MOD N

$a \mid b \Longleftrightarrow b = a \cdot c$

b resto a/b

$a \equiv_n b \Longleftrightarrow n \mid a - b$

è una rel di equivalenza $\longrightarrow$ utile! $a \equiv_n b \overset{\text{simm.}}{\Longleftrightarrow} b \equiv_n a$

$(n \mid a-b \Longleftrightarrow n \mid b-a)$

nota:

$a \equiv_n a'$, $b \equiv_n b' \Rightarrow a+b \equiv_n a'+b'$

$ab \equiv_n a'b'$

utili!!

1. Gauss: se $MCD(a,b) = 1$

allora $a \mid bc \Rightarrow a \mid c$

$(a, b \in \mathbb{Z}^*, c \in \mathbb{Z})$

lemma: se $MCD(a, b, c) = 1$ ($\in \mathbb{Z}$)

e $a, b \mid c$ allora $ab \mid c$

nel mondo $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$

$[a] + [b] = [a+b]$

$[a] \cdot [b] = [ab]$

FERMAT

$n^p \equiv_p n$ (p primo)

quindi $n^{p-1} \equiv 1$

Conseguenza: $[n]_p^{-1} = [n]^{p-2}$

MCD

$\delta = MCD(a,b)$ se

① $\delta \mid a$, $\delta \mid b$

② dato $d' \in \mathbb{N}$ t.c. $d' \mid a$ e $d' \mid b$

allora $d' \mid \delta$

- $\delta\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$

id Bézout $\delta = u \cdot a + v \cdot b$ $\exists u, v \in \mathbb{Z}$

Fibo e MCD: $MCD(F_n, F_{n+1}) = 1$

TEOREMA FONDAMENTALE ARITMETICA

$\forall a \in \mathbb{Z}^*$, ① l'insieme $I_a = \{p \text{ primo} : p \mid a\}$ è finito

② $a = \pm 1 \cdot \prod_p p^{v_p(a)}$ unici e $\in \mathbb{N}$

(ogni numero è una combinazione di primi elevati a qualcosa)

- $a \cdot b = \prod_p p^{v_p(a) + v_p(b)}$

- $p^{v_p(a)} \cdot p^{v_p(b)} = p^{v_p(a) + v_p(b)}$

conseguenze

$a \mid b \Longleftrightarrow \forall p, \; v_p(a) \leq v_p(b)$

$MCD(a,b) = \prod_p p^{\min(v_p(a), v_p(b))}$

POLINOMI (sono domini)

def polinomio

$P = \sum_{i \geq 0} a_i X^i$

operazioni

$P+Q := \sum_{i \geq 0} (a_i + b_i) X^i$

$P \cdot Q := \sum_{k \geq 0} c_k X^k$ Cauchy

$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$

grado di un polinomio

- $\deg(0) = -\infty$ ($\deg(a) = -\infty \iff a = 0$)
- $\deg(P) = \max\{i \in \mathbb{N}, a_i \neq 0\}$

$\deg: K[x] \longrightarrow \mathbb{N} \sqcup \{-\infty\}$

- $\deg(a+b) \leq \max(\deg(a), \deg(b))$

($\deg(a+b) = \max(\deg(a), \deg(b))$ se $\deg(a) \neq \deg(b)$)

- $\deg(ab) = \deg(a) + \deg(b)$

POLINOMI MONICI

$P = a_0 + ax + \ldots + a_n x^n$

con $a_n = 1$ (coeff. deg massimo)

- prodotto di monici è monico

C-VALORE ASSOLUTO

$|P|_c := c^{\deg(P)}$ $c > 1$

$|0| := 0 = c^{-\infty}$

- $|a|_c = 0 \iff a = 0$
- $|ab|_c = |a|_c \cdot |b|_c$
- $|a+b|_c \leq \max(|a|_c, |b|_c)$

$\leq |a|_c + |b|_c$

FATTORIZZAZIONE UNICA

$\forall H \in A \setminus \{0\}$

$H = \lambda \cdot \prod_{\substack{p \text{ irr,} \\ p \in A^+}} p^{v_p(H)}$

con

($v_p(H) \in \mathbb{N}$ e $\{p : v_p(H) \neq 0\}$ finito)

(div. euclidea) $a, b \in A = K[X]$ $(a,b) \neq (0,0)$

$\exists! \, (q,r) \in A$ t.c. $a = qb + r$ con $\deg(r) < \deg(b)$

ovvero $|r|_c < |b|_c$

inversi

$A^\times = K^\times$

(sono le "costanti" inverse del campo)

(anche qui vale $a|b, b|a \iff \exists \lambda \in A^\times$ t.c. $b = \lambda a$)

($A/HA = \{a + H_a : a \in A$ t.c. $\deg(a) < \deg(H)\}$ è anello c.u.$\}$)

(anche qui MCD)

VALUTAZIONE

$F \in K[X] = F_0 + F_1 X + \ldots + F_n X^n$

$ev_x(F) = F_0 + F_1 x + \ldots + F_n x^n$

$ev: K[X] \longrightarrow K$

- $ev_x^{-1}(\{0\}) = (X - x)A$

(pol. che si annullano in x)

FATTORIZZAZIONE

i polinomi irriducibili sono:

- in $\mathbb{C}[X]$: $\deg(P) = 1$ (forma $X - \alpha$ $\alpha \in \mathbb{C}$)
- in $\mathbb{R}[X]$ ① $\deg(P) = 1$

② $\deg(P) = 2$ e $\Delta = a^2 - 4b < 0$

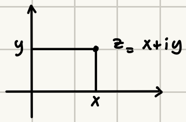
polinomi noti:

$n \geq 1$ $X^n - 1 = \prod_{i=0}^{n-1} (X - x^i)$ con $x = e^{\frac{2\pi i}{n}}$

NUMERI COMPLESSI $\quad \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

- $\mathbb{C} = \{ x + iy \ : \ x, y \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ $\quad i : \sqrt{-1}$ caratterizzato come $i^2 = -1$

numero complesso: $z = \overbrace{x}^{\text{parte reale}} + i \underbrace{y}_{\text{parte immaginarie}}$



operazioni: $-z = -x + i(-y)$ opposto

$z + z' = (x + x') + i(y + y')$

$zz' =$