

aglaia norza

Linguaggi di Programmazione

appunti delle lezioni

libro del corso: non usato, integrati con le dispense del professor Cenciarelli

10/10/2025

Contents

1	Algebre induttive	3
1.1	I numeri naturali	3
1.2	Algebre, algebre induttive	4
1.3	Omomorfismi, lemma di Lambek	8
1.4	Espressioni	9
1.5	Exp	10

1. Algebre induttive

1.1. I numeri naturali

def. 1: Assiomi di Peano

L'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali si può definire mediante i cinque **assiomi di Peano**:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{succ}(n) \in \mathbb{N}$
3. $\nexists n \in \mathbb{N} \mid 0 = \text{succ}(n)$
4. $\forall n, m \text{ succ}(n) = \text{succ}(m) \Rightarrow n = m$ (iniettività)
5. $\forall S \subseteq \mathbb{N} (0 \in S \wedge (n \in S \Rightarrow \text{succ}(n) \in S) \Rightarrow S = \mathbb{N})$ (assioma di induzione)

assioma di induzione

L'assioma di induzione è necessario per evitare di equiparare ai numeri naturali insiemi che, essenzialmente, contengono una struttura come quella di \mathbb{N} , e un "qualcosa in più". (Se all'interno dell'insieme A che stiamo considerando esiste un altro sottoinsieme proprio che rispetta gli altri assiomi, A non rispetterà il quinto assioma di Peano).

In più, il quinto assioma di Peano ci fornisce essenzialmente una definizione insiemistica di induzione.

def. 2: Principio di Induzione

L'induzione può essere definita, basandosi sulle "proprietà" invece che sull'insiemistica, come segue:

$$\forall P \quad \frac{P(0), \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)}{\forall n \, P(n)}$$

(la notazione equivale a $P(0) \wedge (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n P(n)$)

Possiamo dimostrare che il quinto assioma di Peano è equivalente al principio di induzione (in quanto i concetti di "proprietà" e "sottoinsieme" sono equivalenti).

Infatti, ad ogni proprietà corrisponde un sottoinsieme i cui elementi sono esattamente quelli che soddisfano tale proprietà

Prendiamo quindi $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ è vera}\}$.

In questo modo, dire $P(0)$ equivale a dire $0 \in S$, e dire $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ equivale a dire $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$. E, allo stesso modo, dire $\forall n P(n)$ equivale a dire $\forall n, n \in S$, ovvero $S = \mathbb{N}$.

def. 3: Numeri di von Neumann

Un altro modo di descrivere i numeri naturali viene dal matematico **John von Neumann**, che definisce i numeri naturali ("numeri di von Neumann", \mathcal{N}) in questo modo:

- $0_{\mathcal{N}} = \emptyset$ (ovvero $\{\}$)
- $1_{\mathcal{N}} = \{0_{\mathcal{N}}\}$ (ovvero $\{\{\}\}$)
- $2_{\mathcal{N}} = \{0_{\mathcal{N}}, 1_{\mathcal{N}}\}$ (ovvero $\{\{\}, \{\{\}\}\}$)
- ...

I numeri di von Neumann rispettano gli assiomi di peano! (dalle dispense)

dim!

1.2. Algebre, algebre induttive

nota: insieme unità e funzione nullaria

Ci è utile definire l'**insieme unità** $\mathbb{1} = \{*\}$. $\mathbb{1}$ è un insieme formato da un solo elemento (non ci interessa quale).

Un altro concetto che ci servirà è quello di **funzione costante** o **nullaria**. Una funzione nullaria f è tale che:

$$f : \mathbb{1} \rightarrow A \mid f() = a \quad a \in A$$

(chiaramente, essa è sempre iniettiva).

nota

Una funzione nullaria su un insieme A può essere vista come un elemento di A (un qualsiasi insieme A è isomorfo a all'insieme di funzioni $\mathbb{1} \rightarrow A$ (l'insieme di funzioni $\mathbb{1} \rightarrow A$ ha la stessa cardinalità di A), il che ci permette di **trattare gli elementi di un insieme come funzioni**.

def. 4: Algebra

Una **algebra** è una tupla (A, Γ) , dove:

- A è l'insieme di riferimento ("carrier" o "insieme sottostante")
- $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i\}$, è l'insieme di funzioni chiamate "operazioni fondamentali" o "costruttori" dell'algebra

la segnatura dei costruttori è: $\gamma_i : A^{\alpha_i} \times K_i \rightarrow A$.

nota

Tra le algebre, consideriamo anche le algebre eterogenee, che prendono argomenti da insiemi diversi da A .

def. 5: Chiusura di un insieme rispetto ad un'operazione

Sia $f : A^n \times K \rightarrow A$ un'operazione su A con parametri esterni $K = (K_1 \times \dots \times K_m)$.

Un insieme $S \subseteq A$ si dice **chiuso** rispetto ad f quando:

$$a_1, \dots, a_n \in S \Rightarrow f(a_1, \dots, a_n, k_1, \dots, k_m) \in S$$

def. 6: Algebra induttiva

Un'algebra A, Γ si dice **induttiva** quando:

1. tutte le $\gamma_i \in \Gamma$ sono iniettive
2. $\forall i, j \mid i \neq j, \text{Im}(\gamma_i) \cap \text{Im}(\gamma_j) = \emptyset$, ovvero tutte le γ_i hanno immagini disgiunte
3. $\forall S \subseteq A$, se S è chiuso rispetto a tutte le γ_i , allora $S = A$ (ovvero il principio di induzione è rispettato)

terza condizione

La terza condizione pone quindi che A sia la più piccola sotto-algebra di se stessa (ovvero non abbia sotto-algebre diverse da se stessa).

nota

Le tre condizioni garantiscono quindi che:

- ci sia solo un modo per costruire ogni elemento dell'algebra (*i, ii*)
- non ci siano "elementi inutili" (*iii*)

Vediamo come possiamo costruire \mathbb{N} come algebra induttiva.

La definizione di algebra induttiva non considera il concetto di "elemento", quindi, per il primo assioma di Peano, usiamo una *funzione costante* $\mathbb{0}$, con segnatura:

$$\mathbb{1} \times \mathbb{N} : x \rightarrow 0$$

Abbiamo quindi una tupla $(\mathbb{N}, \{\text{succ}, \mathbb{0}\})$.

Per dimostrare che questa tupla sia un'algebra induttiva, dobbiamo ora verificare le tre condizioni:

1. tutte le γ_i sono induttive:
 - $\mathbb{0}$ è necessariamente induttiva
 - succ è induttiva per il secondo assioma di Peano

2. tutti i costruttori hanno immagini disgiunte:

- grazie al terzo assioma di Peano ($\exists n \in \mathbb{N} \mid 0 = \text{succ}(n)$), sappiamo che succ e 0 hanno immagini disgiunte

3. principio di induzione:

- è verificato dal quinto assioma di Peano ($0 \in S$ corrisponde alla chiusura rispetto a 0 e $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{succ}(n) \in \mathbb{N}$ corrisponde alla chiusura rispetto a succ)

liste finite come algebra induttiva

Dato un insieme A , indichiamo con $A - \text{list}$ l'insieme delle liste finite di elementi di A .

La tupla $(A - \text{list}, \text{empty}, \text{cons})$ è un'algebra induttiva, dove:

- **empty**: $1 \rightarrow A - \text{list}$ è la funzione costante che restituisce la **lista vuota** " $\langle \rangle$ ".
- **cons**: $A \times A - \text{list} \rightarrow A - \text{list} : \text{cons}(3, \langle 5, 7 \rangle) = \langle 3, 5, 7 \rangle$ è la funzione che **costruisce una lista** aggiungendo un elemento in testa

Il fatto che si tratti di un'algebra induttiva è piuttosto evidente, in quanto i due costruttori hanno immagini chiaramente disgiunte, sono entrambi chiusi per $A - \text{list}$, e c'è un unico modo per costruire ogni lista.

liste infinite

Le liste infinite non possono essere un'algebra induttiva, in quanto contengono una sotto-algebra induttiva (quella delle liste finite).

alberi binari come algebre induttive

L'insieme degli alberi binari finiti (B-trees, leaf, branch), dove:

- **B-trees** = $\{t \mid t \text{ è una foglia, oppure } t = \langle t_1, t_2 \rangle \text{ con } t_1, t_2 \in \text{B-trees}\}$
- **leaf**: $1 \rightarrow \text{B-trees}$ (foglia)
- **branch**: $\text{B-trees} \times \text{B-trees} \rightarrow \text{B-trees} : (t_{sx}, t_{dx}) \rightarrow t$ (costruisce rami in modo che t_{sx} e t_{dx} siano i due sottoalberi di t)

è un'algebra induttiva.

theorem 1: numero di nodi di un albero binario

Un albero binario con n foglie ha $2n - 1$ nodi

proof!

Si può dimostrare per induzione strutturale sui costruttori degli alberi.

- **(caso base)**: la proprietà è vera per l'albero formato da una sola foglia costruito con leaf (\circ) - esso ha infatti $n = 1$ foglie e $2n - 1 = 1$ nodi.
- **(ipotesi induttiva)**: ogni argomento dei costruttori rispetta la proprietà
- dobbiamo quindi verificare che il costruttore branch, dati due argomenti che rispettano la proprietà, la mantenga
- **(passo induttivo)**: abbiamo $t = \text{branch}(t_1, t_2)$.

Sia $n = n_1 + n_2$ il numero di foglie di t , dove le foglie di t_1 sono n_1 e quelle di t_2 sono n_2 .

Per ipotesi, t_1 ha $2n_1 - 1$ nodi e t_2 ne ha $2n_2 - 1$. Dunque, t avrà $(2n_1 - 1) + (2n_2 - 1) + 1$ nodi, ovvero $2(n_1 + n_2) - 1 = 2n - 1$, qed.

i booleani come algebra non induttiva

Consideriamo l'algebra (B, not) , dove $B = \{0, 1\}$ e $\text{not}: B \rightarrow B : b \rightarrow \neg b$.

Notiamo che not è sicuramente iniettiva, e che, poiché è l'unico costruttore, anche la seconda caratteristica delle algebre induttive è rispettata.

Notiamo però che l'algebra non rispetta il terzo requisito. Se consideriamo infatti $\emptyset \subseteq B$, notiamo che not è chiusa rispetto ad esso.

Infatti, l'implicazione $x \in \emptyset \Rightarrow \text{not}(x) \in \emptyset$ risulta vera per falsificazione della premessa (non esistono elementi in \emptyset).

(\emptyset, not) è quindi una sotto-algebra induttiva di B , che però è diversa da essa. L'implicazione della terza condizione $(x \in \emptyset \Rightarrow \text{not}(x) \in \emptyset) \Rightarrow \emptyset = B$ è falsa, e (B, not) non è quindi un'algebra induttiva.

1.3. Omomorfismi, lemma di Lambek

digressione - teoria delle categorie

Facciamo una piccola parentesi che introduce alcune nozioni di teoria delle categorie (perché è molto interessante).

La teoria delle categorie studia in modo astratto le strutture matematiche. Una categoria \mathcal{C} consiste di:

- una classe $\text{ob}(\mathcal{C})$, i cui elementi sono chiamati **oggetti**
- una classe $\text{mor}(\mathcal{C})$, i cui elementi sono chiamati **morfismi** (o mappe o frecce); ogni morfismo $f : a \rightarrow b$ ha associati un unico oggetto sorgente a e un unico oggetto destinazione b .
- per ogni terna di oggetti $a, b, c \in \mathcal{C}$, è definita una funzione $\text{mor}(b, c) \times \text{mor}(a, b) \rightarrow \text{mor}(a, c)$ chiamata **composizione di morfismi**. La composizione di $f : b \rightarrow c$ con $g : a \rightarrow b$ si indica con $f \circ g : a \rightarrow c$

la composizione deve soddisfare i seguenti assiomi:

(*associatività*): se $f : a \rightarrow b$, $g : b \rightarrow c$ e $h : c \rightarrow d$, allora $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

(*identità*): per ogni oggetto x esiste un morfismo $\text{id}_x : x \rightarrow x$ chiamato **morfismo identità**, tale che per ogni morfismo $f : a \rightarrow x$ vale $\text{id}_x \circ f = f$ e per ogni morfismo $g : x \rightarrow b$ si ha $g \circ \text{id}_x = g$.

Quindi, ogni oggetto è associato ad un unico morfismo identità. Questo permette di dare una definizione di categoria basata esclusivamente sulla classe dei morfismi: gli **oggetti vengono identificati con i corrispondenti morfismi identità**.

All'interno della teoria delle categorie, una funzione iniettiva $f : B \rightarrow C$ si chiama **monomorfismo**. Visto che non si possono utilizzare gli elementi per definire l'iniettività, un monomorfismo è descritto come una funzione f tale che:

$$\forall A, \forall h, k : A \rightarrow B, \quad h \circ f = k \circ f \Rightarrow h = k$$

(se le funzioni h e k sono identiche ogni volta che vengono composte con f , significa che non ci sono valori in f che sono assunti da più di un elemento di B)

def. 7: Algebre con la stessa segnatura

Due algebre (A, Γ_A) e (B, Γ_B) hanno la stessa segnatura se, sostituendo A con B in tutte le $\gamma_i \in \Gamma_A$, si ottiene Γ_B .

(La segnatura di un'algebra è data dalle signature delle sue operazioni).

def. 8: Omomorfismo

Date due algebre con la stessa segnatura (A, Γ) e $(B, \Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_k\})$, un omo-

morfismo è una funzione $f : A \rightarrow B$ tale che:

$$\forall i \quad f(\gamma_i(a_1, \dots, a_k, k_1, \dots, k_m)) = \delta_i(f(a_1), \dots, f(a_k), k_1, \dots, k_m)$$

(con k_1, \dots, k_m parametri esterni)

(definizione algebrica: $\forall a, b \in A$, date \circ operazione di A e \bullet operazione di B , si ha $f(a \circ b) = f(a) \bullet f(b)$)

un omomorfismo "rispetta le operazioni"

- nota: la composizione di due omomorfismi è a sua volta un omomorfismo

def. 9: Isomorfismo

Un isomorfismo è un omomorfismo biiettivo.

(Due algebre sono isomorfe (\cong) quando esiste un isomorfismo tra loro)

theorem 2: Omomorfismo tra algebre con stessa segnatura

Sia A un'algebra induttiva. Per ogni algebra B (non necessariamente induttiva) con la stessa segnatura, esiste un **unico omomorfismo** $A \rightarrow B$.

theorem 3: Lemma di Lambek

Due algebre induttive A e B con la **stessa segnatura** sono necessariamente **isomorfe**.

proof!

- Siccome A è un'algebra induttiva, $\exists!$ omomorfismo $f : A \rightarrow B$.
- Allo stesso modo, $\exists!$ omomorfismo $g : B \rightarrow A$.
- Componendo i due omomorfismi, si ottiene un omomorfismo $g \circ f$ con segnatura $A \rightarrow A$.
- Sappiamo che per ogni algebra esiste l'omomorfismo "identità".
- Sappiamo anche, per il teorema sopra, che esiste un unico omomorfismo $A \rightarrow A$.

Ne segue necessariamente che $g \circ f = \text{Id}_A$. (lo stesso discorso si applica a $f \circ g = \text{Id}_B$)

- $g \circ f = \text{Id} \iff g = f^{-1}$, quindi g e f sono funzioni invertibili (= biettive) $\Rightarrow g, f$ sono isomorfismi $\Rightarrow A \cong B$

1.4. Espressioni

Definiamo un **linguaggio** L come insieme di stringhe.

Per descrivere la sintassi di linguaggi formali (la grammatica), usiamo la BNF (Backus-Naur Form), con questa sintassi:

$$\langle \text{simbolo} \rangle ::= _ \text{espressione} _$$

Esempio: prendiamo come esempio questa grammatica:

$$M, N ::= 5 \mid 7 \mid M + N \mid M * N$$

Le espressioni che seguono questa grammatica, sono del tipo:

- "5" o "7"
- un'espressione $M + N$ o $M * N$, in cui M e N rispettano a loro volta la grammatica

Introduciamo una funzione $eval : L \rightarrow \mathbb{N}$, che valuta le espressioni del linguaggio:

- $eval(5) = 5$
- $eval(7) = 7$
- $eval(M + N) = eval(M) + eval(N)$
- $eval(M * N) = eval(M) * eval(N)$

Possiamo notare subito che $(L, eval)$ non è un'algebra induttiva. Infatti, una stringa come "5 + 7 * 5" potrebbe essere stata generata in due modi diversi: $(5 + 7) * 5$ e $5 + (7 * 5)$.

Possiamo però stipulare che sia induttiva. Ci basta infatti considerare $+$, $*$, 5 e 7 come costruttori dell'algebra. In questo modo, $(5 + 7) * 5$ risulta essere un oggetto diverso da $5 + (7 * 5)$. È quindi possibile dimostrare che $(L, 5, 7, +, *)$ è un'algebra induttiva.

1.5. Exp

def. 10: Linguaggio Exp

Introduciamo il linguaggio Exp , con grammatica:

$$M, N = k \mid x \mid M + N \mid \text{let } x = M \text{ in } N$$

dove:

- k è una costante
- x è una variabile ($\in Var$)
- $M + N : Exp \times Exp \rightarrow Exp$ è la somma tra due espressioni
- $\text{let} : Var \times Exp \times Exp \rightarrow Exp$ assegna alla variabile x il valore M all'interno di N

esempi:

- $let\ x = 3\ in\ x + x + 2$ viene valutata come 8
- $let\ x = 3\ in\ 12$ viene valutata come 12

Questo linguaggio causa però facilmente ambiguità. Per esempio, come valutiamo un'espressione come $let\ x = 3\ in\ let\ y = x\ in\ let\ x = 5\ in\ y$?

Per esplicitare la struttura del termine, è necessario legare le occorrenze delle variabili alle dichiarazioni.

def. 11: Variabili libere, legate, scope

Si dice che un'occorrenza di una variabile x è **libera** in un termine t quando non compare nel corpo di N nessun sottoterminale di t nella forma $let\ x = M\ in\ N$ (quindi, quando non le viene assegnato un valore).

Ogni occorrenza libera di x in un termine N si dice **legata** (bound) alla dichiarazione di x nel termine $let\ x = M\ in\ N$.

Lo scope di una dichiarazione è l'insieme delle occorrenze libere di x in N .

Lo **scope di una variabile** è la porzione di programma all'interno della quale una variabile può essere riferita.

Introduciamo una funzione $free : Exp \rightarrow \mathcal{P}(Var)$, che restituisce l'insieme delle variabili libere di un'espressione:

$$\begin{aligned} free(k) &= \emptyset \\ free(x) &= \{x\} \\ free(M + N) &= free(M) \cup free(N) \\ free(let\ x = M\ in\ N) &= free(M) \cup (free(N) - \{x\}) \end{aligned}$$

(eliminiamo la x , dalle variabili libere in N perché viene dichiarata dal $let\ x$, ma non la eliminiamo da M perché potrebbe comparire al suo interno come variabile libera, e M non fa parte dello scope di $let\ x$ (esempio: in $let\ x = x\ in\ x$, la x è libera perché compare libera in $= x$))

esempio: $free(let\ x = 7\ in\ x + y) = \{y\}$