aglaia norza

Logica Matematica

appunti delle lezioni
libro del corso: tbd

16/10/2025

thisisaglaia@gmail.com
github.com/AglaiaNorza

Contents

1. Logica Proposizionale

1.1. Introduzione

La logica proposizionale è un linguaggio formale con una semplice struttura sintattica basata su proposizioni elementari (atomiche) e sui seguenti connettivi logici:

- *Negazione* ($\neg$): inverte il valore di verità di un enunciato: se un enunciato è vero, la sua negazione è falsa, e viceversa.
- *Congiunzione* ($\wedge$): il risultato è vero se e solo se entrambi i componenti sono veri.
- *Disgiunzione* ($\vee$): il risultato è vero se almeno uno dei componenti è vero.
- *Implicazione* ($\rightarrow$): rappresenta l'enunciato logico "se ... allora". Il risultato è falso solo se il primo componente è vero e il secondo è falso.
- *Equivalenza* ($\leftrightarrow$): rappresenta l'enunciato logico "se e solo se". Il risultato è vero quando entrambi i componenti hanno lo stesso valore di verità, cioè sono entrambi veri o entrambi falsi.

Introduciamo anche il concetto di disgiunzione esclusiva o "XOR" ($\oplus$), il cui risultato è vero solo se gli operandi sono diversi tra di loro (uno vero e uno falso).

def. 1: Linguaggio proposizionale

Un linguaggio proposizionale è un insieme infinito $\mathcal{L}$ di simboli detti **variabili proposizionali**, tipicamente denotato come $\{p_i : i \in I\}$ (con I "insieme di indici").

def. 2: Proposizione

Una **proposizione** in un linguaggio proposizionale è un elemento dell'insieme PROP così definito:

1. tutte le variabili appartengono a PROP
2. se $A \in$ PROP, allora $\neg A \in$ PROP
3. se $A, B \in$ PROP, allora $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B) \in$ PROP
4. nient'altro appartiene a PROP (PROP è il più piccolo insieme che contiene le variabili e soddisfa le proprietà di chiusura sui connettivi 1 e 2)

Per facilitare la leggibilità delle formule, definiamo le seguenti regole di *precedenza*: $\neg$ ha precedenza su $\wedge, \vee$, e questi ultimi hanno precedenza su $\rightarrow$.

1.2. Assegnamenti, tavole di verità

Per un linguaggio $\mathcal{L}$, un **assegnamento** è una funzione

$$\alpha : \mathcal{L} \to \{0, 1\}$$

Estendiamo α ad $\hat{\alpha}$: PROP $\to \{0, 1\}$ in questo modo:

- $\hat{\alpha}(\neg A) = \begin{cases} 1 & A = 0 \\ 0 & A = 1 \end{cases}$
- $\hat{\alpha}(A \wedge B) = \begin{cases} 1 & \hat{\alpha}(A) = \hat{\alpha}(B) = 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$
- $\hat{\alpha}(A \vee B) = \begin{cases} 0 & \hat{\alpha}(A) = \hat{\alpha}(B) = 0 \\ 1 & altrimenti \end{cases}$
- $\hat{\alpha}(A \to B) = \begin{cases} 0 & \hat{\alpha}(A) = 1 \wedge \hat{\alpha}(B) = 0 \\ 1 & altrimenti \end{cases}$

notazione

Utilizzeremo α al posto di $\hat{\alpha}$ per comodità di notazione.

Osserviamo che è possibile rappresentare gli assegnamenti in modo compatto utilizzando le **tavole di verità**, una presentazione tabulare della funzione di assegnamento.

Per esempio, possiamo riscrivere la definizione di $\alpha(\neg A)$ come segue:

A	$\neg A$
0	1
1	0

Ogni riga di una tavola di verità corrisponde ad un assegnamento α.

Si noti anche che dalla definizione di α segue che un'implicazione può essere vera senza che ci sia connessione causale o di significato tra antecedente e conseguente (per esempio, ”se tutti i quadrati sono pari allora π è irrazionale”).

In secondo luogo, segue anche che una proposizione è sempre vera se il suo antecedente è falso (il che rispecchia la pratica matematica di considerare vera a vuoto una proposizione ipotetica la cui premessa non si applica).

Questo è giustificabile come segue:

- vogliamo che $(A \wedge B) \to B$ sia sempre vera
- il caso $1 \to 1$ deve essere vero, perché corrisponde al caso in cui A e B sono vere;

  il caso $0 \to 0$ deve essere vero, perché corrisponde al caso in cui $A \wedge B$ è falso perché B è falso; il caso $0 \to 0$ deve essere vero perché corrisponde al caso in cui $A \wedge B$ è falso perché B è falso;

il caso $0 \to 1$ deve essere vero perché corrisponde al caso in cui $A \wedge B$ è falso perché A è falso ma B è vero;

resta dunque soltanto il caso $1 \to 0$, che non corrisponde a nessun caso di $A \wedge B \to B$.

In più, si vuole che valga, per contrapposizione $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$.

Osserviamo che, data $A = p_1, p_2, \dots, p_k$ e due assegnamenti α e β t.c.:

$$\alpha(p_1) = \beta(p_1)$$
$$\dots$$
$$\alpha(p_k) = \beta(p_k)$$

allora necessariamente $\alpha(A) = \alpha(B)$.

soddisfacibilità

Se per una formula A e un assegnamento α si ha $\alpha(A) = 1$, si dice che "A soddisfa α" (o "A è vera sotto α").

- Se A ha almeno un assegnamento che la soddisfa, si dice **soddisfacibile** ($A \in \texttt{SAT}$).
- Se non esiste un assegnamento che la soddisfa, A si dice **insoddisfacibile** ($A \in \texttt{UNSAT}$).
- Se A è soddisfatta da tutti i possibili assegnamenti, si dice **tautologia** (o "verità logica") ($A \in \texttt{TAUT}$).

Introduciamo anche alcune regole che

1.3. Conseguenza logica

def. 3: Conseguenza logica

Sia T una *teoria*, ossia un insieme $\{A_1, \dots, A_n\}$ proposizioni in un dato linguaggio proposizionale, e sia $A \in$ PROP .

Diciamo che A è **conseguenza logica** di T se

$$\forall \alpha,\ \alpha(T) = 1 \to \alpha(A) = 1$$

ovvero se ogni assegnamento che soddisfa T soddisfa anche A_{n+1}.

Scriviamo in tal caso $T \vDash A_{n+1}$, oppure $A_1, \dots, A_n \vDash A$.

Si ha che:

- $T \nvDash A$ significa che $\exists \alpha$ t.c. $\alpha(T) = 1 \wedge \alpha(A) = 0$
- $\emptyset \vDash A$ o, equivalentemente $\vDash A \iff A$ è una tautologia

lemma 1: Equivalenze

1. $T \vDash A$
2. $\vDash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to A$
3. $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \in \texttt{UNSAT}$

sono equivalenti.

1.4. Completezza funzionale

da fare

1.5. Forme normali

notazione

Chiamiamo ”letterale” una variabile proposizionale o una negazione di una variabile proposizionale

È utile individuare alcune forme normali canoniche.

def. 4: Forma Normale Disgiuntiva

Diciamo che A è in Forma Normale Disgiuntiva (**DNF**, *Disjunctive Normal Form*) se A è una disgiunzione di congiunzioni di letterali, ossia è nella forma seguente:

$$\bigvee_{i \leq n} \bigwedge_{j \leq m_i} A_{ij} = (A_{1,1} \wedge \cdots \wedge A_{1,m_1}) \vee \cdots \vee (A_{n,1} \wedge \cdots \wedge A_{n,m_n})$$

def. 5: Forma Normale Congiuntiva

Diciamo che A è in Forma Normale Congiuntiva (**CNF**, *Conjunctive Normal Form*) se A è una disgiunzione di congiunzioni di letterali, ossia è nella forma seguente:

$$\bigwedge_{i \leq n} \bigvee_{j \leq m_i} A_{ij} = (A_{1,1} \vee \cdots \vee A_{1,m_1}) \wedge \cdots \wedge (A_{n,1} \vee \cdots \vee A_{n,m_n})$$

1.6. Equivalenza Logica

def. 6: Equivalenza logica

Due formule $A, B \in$ PROP sono logicamente equivalenti ($A \equiv B$) quando, per ogni assegnamento α si ha $\alpha(A) = \alpha(B)$.

Introduciamo alcune regole utili per verificare l’equivalenza tra proposizioni.

Con un piccolo abuso di notazione, definiamo 1 e 0 come le formule per cui $\forall \alpha,\ \alpha(1) = 1$ e

$\alpha(0) = 0$.

In questo modo, abbiamo:

Involuzione	$\neg\neg A \equiv A$
Assorbimento (con 0 e 1)	$A \vee 0 \equiv A$ $A \wedge 1 \equiv A$
Cancellazione	$A \vee 1 \equiv 1$ $A \wedge 0 \equiv 0$
Terzo escluso (*tertium non datur*)	$A \vee \neg A \equiv 1$ $A \wedge \neg A \equiv 0$
Leggi di De Morgan	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
Commutatività	$A \vee B \equiv B \vee A$ $A \wedge B \equiv B \wedge A$
Associatività	$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
Distributività	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
I teorema di assorbimento	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$ $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
II teorema di assorbimento	$A \vee (\neg A \wedge B) \equiv A \vee B$ $A \wedge (\neg A \vee B) \equiv A \wedge B$

Table 1.1: Principali leggi di equivalenza logica

1.7. Formalizzazioni in logica proposizionale

Il concetto di soddisfacibilità ci permette di usare insiemi di formule proposizionali per catturare determinate strutture matematiche.

Per esempio: sia X un insieme. Consideriamo il linguaggio proposizionale composto dalle variabili $p_{(x,y)}$ per ogni $(x, y) \in X \times X$, e consideriamo il seguente insieme T di proposizioni in questo linguaggio:

1. $\neg p_{x,x} \;\; \forall x \in X$ (antiriflessività)
2. $p_{x,y} \to \neg p_{y,x} \;\; \forall x \in X$ (asimmetria)
3. $(p_{x,y} \wedge p_{y,z}) \to p_{x,z} \;\; \forall x, y, z \in X$ (transitività)
4. $(p_{x,y} \wedge p_{y,z}) \to p_{x,z} \;\; \forall x, y, z \in X$ (ordine totale)

L'insieme $T = T_X$ esprime il concetto di **ordine totale stretto** su X. Infatti, se avessimo un assegnamento α che soddisfa tutte le proposizioni di T, l'ordine indotto da tutte le variabili vere sotto α sarebbe un ordine totale stretto di X.

Se α è un assegnamento, definiamo la relazione $\prec_\alpha$ su X come segue:

$$x \prec_\alpha y \leftrightarrow \alpha(p_{x,y}) = 1$$

Si ha che per ogni assegnamento α che soddisfca T_X, l'ordine $\prec_\alpha$ indotto da α è un ordine totale stretto su X.

Dall'altra parte, se $\prec$ è un ordine totale stretto su X, e $\alpha_\prec$ è l'assegnamento indotto da $\prec$ così definito:

$$\alpha_\prec(p_{x,y}) = 1 \leftrightarrow (x \prec y)$$

Si ha che, per ogni ordine totale stretto $\prec$ su X, l'assegnamento $\alpha_\prec$ indotto da $\prec$ sulle variabili $p_{x,y}$ soddisfa T.

Ovvero, un assegnamento α soddisfa la teoria T_X se e solo se l'ordine indotto da α su X è un ordine totale.