aglaia norza

# Logica Matematica

appunti delle lezioni
libro del corso: tbd

12/10/2025

thisisaglaia@gmail.com
github.com/AglaiaNorza

# Contents

# 1. Logica Proposizionale

## 1.1. Introduzione

La logica proposizionale è un linguaggio formale con una semplice struttura sintattica basata su proposizioni elementari (atomiche) e sui seguenti connettivi logici:

- *Negazione* ($\neg$): inverte il valore di verità di un enunciato: se un enunciato è vero, la sua negazione è falsa, e viceversa.
- *Congiunzione* ($\wedge$): il risultato è vero se e solo se entrambi i componenti sono veri.
- *Disgiunzione* ($\vee$): il risultato è vero se almeno uno dei componenti è vero.
- *Implicazione* ($\rightarrow$): rappresenta l'enunciato logico "se ... allora". Il risultato è falso solo se il primo componente è vero e il secondo è falso.
- *Equivalenza* ($\leftrightarrow$): rappresenta l'enunciato logico "se e solo se". Il risultato è vero quando entrambi i componenti hanno lo stesso valore di verità, cioè sono entrambi veri o entrambi falsi.

**def. 1: Linguaggio proposizionale**

Un linguaggio proposizionale è un insieme infinito $\mathcal{L}$ di simboli detti **variabili proposizionali**, tipicamente denotato come $\{p_i : i \in I\}$ (con $I$ "insieme di indici").

**def. 2: Proposizione**

Una **proposizione** in un linguaggio proposizionale è un elemento dell'insieme PROP così definito:

1. tutte le variabili appartengono a PROP
2. se $A \in$ PROP, allora $\neg A \in$ PROP
3. se $A, B \in$ PROP, allora $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B) \in$ PROP
4. nient'altro appartiene a PROP (PROP è il più piccolo insieme che contiene le variabili e soddisfa le proprietà di chiusura sui connettivi 1 e 2)

Per facilitare la leggibilità delle formule, definiamo le seguenti regole di *precedenza*: $\neg$ ha precedenza su $\wedge, \vee$, e questi ultimi hanno precedenza su $\rightarrow$.

Per formalizzare le tavole di verità, introduciamo anche il concetto di assegnamento. Ogni riga di una tavola di verità corrisponde ad un assegnamento diverso.

Per un linguaggio $\mathcal{L}$, un **assegnamento** è una funzione

$$\alpha : \mathcal{L} \to \{0, 1\}$$

Estendiamo $\alpha$ ad $\hat{\alpha}$ : PROP $\to \{0, 1\}$ in questo modo:

- $\hat{\alpha}(\neg A) = \begin{cases} 1 & A = 0 \\ 0 & A = 1 \end{cases}$
- $\hat{\alpha}(A \wedge B) = \begin{cases} 1 & \hat{\alpha}(A) = \hat{\alpha}(B) = 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$
- $\hat{\alpha}(A \vee B) = \begin{cases} 0 & \hat{\alpha}(A) = \hat{\alpha}(B) = 0 \\ 1 & altrimenti \end{cases}$
- $\hat{\alpha}(A \to B) = \begin{cases} 0 & \hat{\alpha}(A) = 1 \wedge \hat{\alpha}(B) = 0 \\ 1 & altrimenti \end{cases}$

Si noti che dalla definizione segue che un'implicazione può essere vera senza che ci sia connessione causale o di significato tra antecedente e conseguente (per esempio, "se tutti i quadrati sono pari allora $\pi$ è irrazionale").

In secondo luogo, segue anche che una proposizione è sempre vera se il suo antecedente è falso (il che rispecchia la pratica matematica di considerare vera a vuoto una proposizione ipotetica la cui premessa non si applica).

Questo è giustificabile come segue:

- vogliamo che $(A \wedge B) \to B$ sia sempre vera
- il caso $1 \to 1$ deve essere vero, perché corrisponde al caso in cui $A$ e $B$ sono vere; il caso $0 \to 0$ deve essere vero, perché corrisponde al caso in cui $A \wedge B$ è falso perché $B$ è falso; il caso $0 \to 0$ deve essere vero perché corrisponde al caso in cui $A \wedge B$ è falso perché $B$ è falso; il caso $0 \to 1$ deve essere vero perché corrisponde al caso in cui $A \wedge B$ è falso perché $A$ è falso ma $B$ è vero. Resta dunque soltanto il caso $1 \to 0$, che non corrisponde a nessun caso di $A \wedge B \to B$.

**notazione**

Utilizzeremo $\alpha$ al posto di $\hat{\alpha}$ per comodità di notazione.

Osserviamo che, data $A = p_1, p_2, \ldots, p_k$ e due assegnamenti $\alpha$ e $\beta$ t.c.:

$$\alpha(p_1) = \beta(p_1)$$
$$\ldots$$
$$\alpha(p_k) = \beta(p_k)$$

allora necessariamente $\alpha(A) = \alpha(B)$.

**soddisfacibilità**

Se per una formula $A$ e un assegnamento $\alpha$ si ha $\alpha(A) = 1$, si dice che "$A$ soddisfa $\alpha$" (o "$A$ è vera sotto $\alpha$").

- Se $A$ ha almeno un assegnamento che la soddisfa, si dice **soddisfacibile** ($A \in \texttt{SAT}$).
- Se non esiste un assegnamento che la soddisfa, $A$ si dice **insoddisfacibile** ($A \in \texttt{UNSAT}$).
- Se $A$ è soddisfatta da tutti i possibili assegnamenti, si dice **tautologia** (o "verità logica") ($A \in \texttt{TAUT}$).

**def. 3: conseguenza logica**