

[https://open.spotify.com/playlist/3zMsGGKjUNIx3DFJ133ex?
si=rGWujY5LSLy7B1vKdUTHnA&pi=e-SkW9gkIWTLG5](https://open.spotify.com/playlist/3zMsGGKjUNIx3DFJ133ex?si=rGWujY5LSLy7B1vKdUTHnA&pi=e-SkW9gkIWTLG5)



Si vuole creare una teoria generale che contenga come esempio \mathbb{Z} e le sue operazioni

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{-} \mathbb{Z} \quad \text{opposto}, \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{+} \mathbb{Z} \quad \text{somma e prodotto (binarie)}$$

l'altro modo di esprimere l'addizione



Ci sono diverse condizioni di compatibilità tra le operazioni:

$$\Delta(b+c) = ab+ac, \Delta+b = b+\Delta, \Delta+(b+c) = (\Delta+b)+c$$

def ANELLO es. $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

poi lo chiameremo solo A

Un anello (commutativo unitario) è il dato di una SESTUPLA $(A, +, -, \cdot, 0_A, 1_A)$

dove:

- $A \longrightarrow$ insieme non vuoto
- $+, - : A \times A \longrightarrow A$ operazioni binarie
- $- : A \longrightarrow A$ opposto
- $0_A \in A$ elemento neutro addizione
- $1_A \in A$ elemento neutro moltiplicazione

questi dati devono soddisfare 8 proprietà:

4 sull'addizione $(A, +, -, 0_A, 1_A)$

- ① $\forall a, b \in A, a+b = b+a$ COMMUTATIVITÀ
- ② $\forall a, b, c \in A, (a+b)+c = a+(b+c)$ ASSOCIAZIATIVITÀ DELLA SOMMA
- ③ $\forall a \in A, a+0_A = 0_A+a = a$ EL NEUTRO SOMMA
- ④ $\forall a \in A, a+(-a) = 0_A$ (OPPOSTO)



queste 4 proprietà indicano che $(A, +, -, 0_A)$ è un GRUPPO ABELIANO in notazione additiva

$\forall a, b \in A, a+b = b+a$ That's not your girl, that's an Abelian group!
and Commutativity

$\exists e \in A : \forall a \in A, e+a = a+e = a$ An identity element

$\forall a \in A, \exists b \in A : a+b = b+a = e$ Inverse elements

$\forall a, b, c \in A, (a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$ ASSOCIAZIATIVITÀ
COMMUTATIVITÀ

4 sul prodotto $(A, +, -, \cdot, 0_A, 1_A)$:

$$\textcircled{5} \quad \forall a, b, c \in A, a(b \cdot c) = (a \cdot b)c = abc \quad \text{ASSOCIAZIATIVITÀ DEL PRODOTTO}$$

$$\textcircled{6} \quad \forall a, b, c \in A, a(b+c) = ab+ac \quad \text{DISTRIBUTIVITÀ}$$

$$(a+b)c = ac+bc$$

$$\textcircled{7} \quad \forall a \in A, a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a \quad \text{EL NEUTRO DEL PRODOTTO}$$

rende l'anello "UNITARIO"

$$\textcircled{8} \quad \forall a, b \in A, a \cdot b = b \cdot a \quad \text{COMMUTATIVITÀ DEL PRODOTTO}$$

rende l'anello "COMMUTATIVO"

l'anello $A = \mathbb{Z}$ ha proprietà più specifiche:

BUON ORDINAMENTO E ORDINE TOTALE

- esiste il sottoinsieme $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} \subset \mathbb{Z}$ che permette di definire una relazione su \mathbb{Z} :

si scrive $a > b \iff a - b \in \mathbb{N}^*$

$$\forall a \in \mathbb{Z} \text{ si ha: } \begin{cases} a \in \mathbb{N}^* & \text{è positivo} \\ a = 0 & \text{è nullo} \\ -a \in \mathbb{N}^* & \text{è negativo} \end{cases} \quad (\text{proprietà di tricotomia})$$

- Ogni sottoinsieme $E \subset \mathbb{N}^*$ non vuoto possiede un più piccolo elemento per

$\langle \exists c \in E \text{ tc. } \forall e \in E \setminus \{c\} \text{ si ha } e > c \rangle \text{ BUON ORDINAMENTO}$

un anello commutativo e unitario che soddisfa le proprietà di tricotomia e buon ordinamento "è essenzialmente" \mathbb{Z}

- se $a < b \quad c < d$ allora $a+c < b+d$ e $-a > -b$ allora l'operazione + e > sono compatibili in modo simile, c'è compatibilità tra \circ e $>$

legge di cancellazione in \mathbb{Z}

Se $ab = ac$ con $a \neq 0$ allora $b=c$.

altrimenti basta mult per -1 entrambi le parti

Infatti, supponendo $a > 0$

Induzione su $a \geq 1$

$\cdot a=1$ è chiaro perché 1 è l'el. neutro

\cdot Supponiamo per ip. induttiva che $a > 1$ e $(a-1)b = (a-1)c$

Supponiamo x ass. che $b \neq c$. Allora $\circ b > c \circ b < c$. Supponiamo $b > c \implies (a-1)b + b > (a-1)c + c$

tricotomia

$\circ -b + b > -c + c$ premessa $ab = ac$

$\circ ab > ac$, che è impossibile quindi necessariamente $b=c$

def ELEMENTI INVERTIBILI dato A anello $1_A \neq 0_A$

$a \in A$ t.c. $\exists b \in A : ab = b a = 1_A$ (a) è detto elemento invertibile.

(si dice che b è inverso di a e si scrive $b = a^{-1}$) es. se a è invertibile allora a^{-1} è unicamente determinato

inverso di a : el che, moltiplicato per a , dà 1_A

es. 1_A è invertibile di inverso $1_A^{-1} = 1_A$

$$a \cdot b = \underbrace{a \cdot b'}_{{\text{dovono essere}}} = 1 \text{ con } b, b' \in A$$

$$\text{allora } (a \cdot b) b' = 1_A \cdot b' = b'$$

$$\text{quindi } \xrightarrow{(3)} \text{uguali}$$

$$(a \cdot b') b = 1_A \cdot b = b$$

$$\text{quindi } \xrightarrow{(2)} \text{uguali}$$

$$(a \cdot b) b' = a(b \cdot b') = a(b' \cdot b) = ab' \cdot b$$

$$\text{quindi } \xrightarrow{(1)} \text{uguali}$$

Si pone $A^x = \{ \alpha \in A \text{ t.c. } \alpha \text{ è invertibile} \}$ A^x è un gruppo

verificare ① A^x è non vuoto ② se $\alpha \in A^x$ allora $\alpha^{-1} \in A^x$

③ se $a, b \in A^x$ sono invertibili, allora $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

④ $\mathbb{Z}^x = \{1, -1\}$

esercizio $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1)$ è un anello (cu). Calcolare l'insieme degli elementi invertibili

risposta: $\mathbb{Q}^x = \{r \in \mathbb{Q}; r \neq 0\}$ $[1] = [1_A]$

PICCOLI ESEMPI

① $\forall \alpha \in A, \alpha \cdot 0_A = 0_A$

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0_A &= \underbrace{\alpha \cdot (0_A + (-0_A))}_{0_A \text{ (assioma)}} = \alpha \cdot 0_A + \alpha \cdot (-0_A) \\ &= \alpha \cdot 0_A + (-(\alpha \cdot 0_A)) \text{ elemento} + \text{il suo opposto quindi } \alpha \cdot 0_A = 0_A \\ &= 0_A \times \text{assioma} \end{aligned}$$

② Supponiamo $0_A = 1_A$.

Mostriamo che $\forall \alpha \in A, \alpha = 0_A = 1_A$ ($A = \{0_A\}$)

$$\alpha \in A : 1_A = 0_A \implies \underbrace{\alpha \cdot 1_A}_{=\alpha} = \underbrace{\alpha \cdot 0_A}_{0_A} \text{ quindi, } \forall \alpha, \alpha = 0_A$$

③ se $1_A \neq 0_A$ allora $0_A \notin A^x$.

Supponiamo per assurdo $\exists x \in A^x$ t.c. $1_A = x \cdot 0_A = 0_A$ contraddizione

gli assiomi implicano che 0_A non è mai invertibile

Si pone $A^\times = \{a \in A \text{ t.c. } a \text{ è invertibile}\}$ A^\times è un gruppo

verificare ① A^\times è non vuoto ② se $a \in A^\times$ allora $a^{-1} \in A^\times$

③ se $a, b \in A^\times$ sono invertibili, allora $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

④ $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$

① A^\times non è vuoto.

Abbiamo visto che 1_A è sempre invertibile e $1_A \in A$ per def. di omessa comm. un. (semplice)

quindi, $1_A \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$

② se $a \in A^\times$ allora $a^{-1} \in A^\times$

vista in classe
se $a \in A^\times$, vuol dire che \exists unicamente determinato $b \in A : ab = ba = 1_A$.

Supponiamo per assurdo che $b \notin A^\times$.

se $b \notin A^\times$, $\nexists x \in A \text{ t.c. } bx = xb = 1_A$. ma questo è falso. esiste ed è a .

$\forall x \in A, bx = xb \neq 1_A$ falso per a

③ se $a, b \in A^\times$, allora $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \Leftrightarrow a^{-1}b^{-1} \cdot ab = 1_A \quad (\text{per definizione})$$

$$\Leftrightarrow a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot a \cdot b = 1_A \quad (\text{e, poiché unicamente determinato})$$

se $a^{-1}b^{-1} \cdot ab = 1_A$

e $(a \cdot b)^{-1} \cdot ab = 1_A$ allora $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

visto che $a^{-1} \cdot a = 1_A$ e $b^{-1} \cdot b = 1_A$

$$a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot a \cdot b \quad \begin{matrix} \text{commutatività} \\ \text{e associtività} \end{matrix} \quad (a \cdot a^{-1}) \cdot (b \cdot b^{-1}) = 1_A$$

$1_A \cdot 1_A = 1_A$ vero perché 1_A il.

neutro della mult.

quindi $x \cdot 1_A = 1_A$

④ $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$

• dimostriamo $1, -1 \in \mathbb{Z}^\times$

① su \mathbb{Z} , $1_A = 1$. Visto che 1_A è sempre invertibile, $1 \in \mathbb{Z}^\times$

② $-1 = -(-1)$ se $-1^{-1} = 1$, allora $-(-1)^{-1} = -(-1)$ moltiplica per -1 da entrambe le parti
quindi $-1 \in \mathbb{Z}^\times$ e $-1^{-1} = -1$

③ dimostriamo che $\forall x \in \mathbb{Z}, x \notin \{1, -1\} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}^\times$

Supponiamo per assurdo $x \in \mathbb{Z}, x \notin \{1, -1\}, x \in \mathbb{Z}^\times$

Allora $x \cdot y = 1_A$. su \mathbb{Z} , $1_A = 1$, quindi $x \cdot y = 1$

Ma, su \mathbb{Z} , le uniche coppie che moltiplicate danno 1 sono $(-1, -1)$ e $(1, 1)$

Per ipotesi, $x \notin \{1, -1\}$, quindi CONTRADDIZIONE

esercizio $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1)$ è un anello (cu). Calcolare $\mathbb{Q}^{\times} = \{x \in \mathbb{Q} : x \text{ è invertibile}\}$

- invertibili: $\exists x \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } \exists y \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } xy = 1$

- in \mathbb{Q}^{\times} , $1_A = 1$.

quindi $\exists x \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } \exists y \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } xy = 1$

① dimostriamo che $0 \notin \mathbb{Q}^{\times} \rightarrow 0 = 0_A \in \mathbb{Q}_A \text{ e } 0_A \text{ non è invertibile per definizione}$
(ma, comunque, basta fare: $0 \cdot y = 1$ impossibile perché $0 \cdot y = 0$)

② dimostriamo che $\forall q \in \mathbb{Q}, q \neq 0, q \in \mathbb{Q}^{\times}$

$qx = 1 \iff x = \frac{1}{q} \text{ e } \frac{1}{q} \in \mathbb{Q}$. Trovato x t.c. $qx = 1$ (per vedere inviamente che $x \neq 0$ non va)
perché $\frac{1}{0}$ impossibile
(non sono sicura che questo basti, ngl.)

esercizio: c'è un unico elemento neutro

Siamo v, v' due elementi neutri per la moltiplicazione

$$\begin{array}{lll} \forall a \in A \quad av = ua = a & \text{con } a = v & vv' = v'u = v \\ \quad av' = u'a = a & \text{con } a = v' & v'u \cancel{=} vv' = v' \end{array} \quad \text{quindi } v = v'$$

Dedurre che anche l'elemento neutro per l'addizione è unicamente determinato

Relazione di divisibilità

Introduciamo la relazione: $a, b \in A : a|b \iff \exists c \in A \text{ t.c. } b = a \cdot c$.

$$2|6 : 6 = 2 \cdot 3$$

• è una relazione **riflessiva**: $\forall a \in A, a = a \cdot 1_A$

• è una relazione **transitiva**: $a, b, c \in A$ supponiamo $a|b \iff b = a \cdot a' \exists a' \in A$

• Non è simmetrica né antisimmetrica
ma su N^* è antisimmetrica

$$b|c \iff c = b \cdot b' \exists b' \in A$$

$$\Rightarrow c = a \cdot a' \cdot b' = a(\underbrace{a' \cdot b'}_{a''}) \Rightarrow c = a \cdot a'' \iff a|c$$

• se $a|b \wedge a|c$ allora $a|b+c$ (compatibilità)

$$a|b \iff \exists a' \text{ t.c. } b = a \cdot a' \quad a|c \iff \exists a'' \in A \text{ t.c. } c = a \cdot a''$$

$$b+c = a \cdot a' + a \cdot a'' = a \underbrace{(a'+a'')}_{a'''} \iff a|b+c$$

più generalmente, se $\alpha, \beta \in A$, $\alpha|b, \alpha|c \Rightarrow \alpha|b+\beta c$ (la dimostrazione è banale)

$$\alpha b + \beta c = \alpha \cdot a \cdot a' + \beta \cdot a \cdot a'' = a \underbrace{(\alpha a' + \beta a'')}_{a'''}$$

dim. $\alpha, \beta \in A$

$\alpha|b, \alpha|c \Rightarrow \alpha|a \alpha b + \beta c$

• $\alpha|b \Rightarrow \alpha|\alpha b$ per def. di moltiplicazione

• $\alpha|c \Rightarrow \alpha|\beta c$

per la dim. d. compatibilità, $\alpha|\alpha b + \beta c$

In \mathbb{Z} la relazione di divisibilità è quasi antisimmetrica:

ignoriamo il caso 0

$$a, b \in \mathbb{Z} \quad a|b \wedge b|a \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z}^* \text{ t.c. } a = bc \quad (\text{ovvero } a \in \{b, -b\} \cup \{0, -0\} = \{b, -b\})$$

0) $|1 \Rightarrow 1 = 0 \cdot b$ 0 non divide mai un el. non nullo quindi possiamo supporre $a, b \neq 0$

$$a|b, b|a \Rightarrow b = a \cdot a', a = b \cdot b' \exists a, b \in \mathbb{Z}$$

$$b = b \cdot a' \cdot b' \quad \text{con } b \neq 0, \text{ legge di cancellazione} \quad b' = b \cdot a' \cdot b' \Rightarrow 1 = a' \cdot b' \Rightarrow a' \cdot b' \in \{1, -1\}$$

$$\Rightarrow \{a, -a\} = \{b, -b\}$$

• non è simmetrica \rightarrow supponiamo $a|b$ simmetrica. Allora $a|b$ ($\exists c \text{ t.c. } b = a \cdot c$) $\Rightarrow b|a$ ($\exists c' \text{ t.c. } a = b \cdot c'$)

$$\text{quindi, } b = b \cdot c' \cdot c \quad \text{con } b \neq 0 \quad b = b \cdot c' \cdot c \iff 1 = c \cdot c' \iff (c, c') \in \{(1, 1), (-1, -1)\}$$

oppure, con esempio: $2|4$ ma $4 \not| 2$

• non è antisimmetrica: se fosse antisimmetrica, $a|b \wedge b|a \Rightarrow a = b$

ma (ragionamento di prima) $1 = c'c \iff (c, c') \in \{(1, 1), (-1, -1)\}$

$$\begin{cases} (c', c) = (1, 1) \Rightarrow b = a \\ (c', c) = (-1, -1) \Rightarrow b = -a \end{cases}$$

def elemento irriducibile

invertibili

$\alpha \in A \setminus A^\times$ è detto irriducibile se

$\forall b, c \in A, \alpha = bc \Rightarrow b \in A^\times \text{ o } c \in A^\times$

es. $A = \mathbb{Z}$ $12 = 4 \cdot 3$ ma $4, 3 \notin \mathbb{Z}^\times \Rightarrow 12$ non è irr.

$$7 = 1 \cdot 7 = 7 \cdot 1 = -1 \cdot -7 = -7 \cdot -1 \quad 7 \text{ è irriducibile}$$

$1 \in \mathbb{Z}$ non è irriducibile perché abbiamo definito $\alpha \in A \setminus A^\times$

def numero primo

invertibili

$\alpha \in A \setminus A^\times, \alpha \neq 0$ è detto primo se

$\forall b, c \in A, \text{ se } \alpha | bc \Rightarrow \alpha | b \text{ oppure } \alpha | c$

Supponiamo $A = \mathbb{Z}$

lemma $p \in \mathbb{Z}$ primo $\Rightarrow p$ è irriducibile

dim p primo, siano $a, b \in \mathbb{Z}$ t.c. $p = ab \Rightarrow p | a \cdot b$

$$ab = p \cdot 1$$

Supponiamo senza perdita di generalità $p | a$

$$\text{sost. } a = p a'$$

$$p | a \Rightarrow a = p a' \exists a' \in \mathbb{Z} \Rightarrow p = p a' b \quad \begin{matrix} \text{legge di} \\ \text{concessione} \end{matrix} \quad p = p(a'b) \Leftrightarrow 1 = a'b \Rightarrow a', b \in \{+1, -1\} = \mathbb{Z}^\times$$

Se $a' = 1$ allora $a = p \Rightarrow p = pb \Rightarrow b = 1$

Se $a' = -1$ allora $a = -p \Rightarrow p = p - b \Rightarrow -b = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow p$ è irriducibile

!! ogni modo di scriverlo come
 $p = ab$ porta ad $a, b \in \{-1, 1\}$
 $A^\times \text{ in } \mathbb{Z}$

def valore assoluto

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{1.1}} \mathbb{N} \quad a \in \mathbb{Z} \quad \bullet \text{ se } a = 0 \quad |a| = 0$$

• se $a \neq 0, |a| =$ l'unico elemento di \mathbb{N} contenuto nell'insieme
di due elementi $\{a, -a\}$

ALGORITMO DELLA DIVISIONE EUCLIDEA

$a, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ allora esistono unicamente determinati

$q \in \mathbb{Z}, r \in \{0, \dots, |n|-1\}$ t.c. $a = nq + r$

resto
quoziente

è una riformulazione
del principio del minimo su \mathbb{N}

def CONGRUENZA

b è il resto di $\frac{2}{\sqrt{n}}$

$$a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid a - b$$

$$\iff \exists q \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } d-b = qn$$

ovvero, il resto della divisione escluse di $a - b$ per n è 0

- La congruenza modulo n è di equivalenza

④ Transitivität: $a \equiv b \pmod{n}$ und $b \equiv c \pmod{n} \iff n \mid b-a$ und $n \mid c-b$

$$n|\alpha : n|\beta \Rightarrow n|\alpha + \beta \quad n|c-b+b-a \Rightarrow n|c-a \Leftrightarrow a \equiv c \pmod{n}$$

Scw. rifl. e simm.

$$\mathbb{Z}_{\equiv \text{mod } n} = \left\{ \begin{matrix} n\mathbb{Z}, & n\mathbb{Z}+1, & \dots, & n\mathbb{Z}+n-1 \\ [0] & [1] & & [n-1] \\ & & & [n-1] \end{matrix} \right\}$$

② riflessiva : $\delta = \delta \bmod n$ $n \mid \delta - \delta$ vero perché $\forall x \in \mathbb{Z}, x \neq 0, x \mid 0$

$$\textcircled{3} \text{ simmetrico: } a \equiv_n b \implies b \equiv_n a \quad n | a - b \implies n | b - a$$

$$n > -b \iff a - b = qn \iff -(a - b) = -(qn) \iff b - a = -qn \quad \text{quindi } n | b - a$$

Esempi: congruenze moduli 2

$$\mathbb{Z} = \underbrace{2\mathbb{Z}}_{[0]} \sqcup \underbrace{2\mathbb{Z} + 1}_{[1]} \quad \mathbb{Z}/\equiv_{\text{mod}_2} = \{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} + 1\}$$

convergente mod. 3

$$\mathbb{Z} \equiv_{\text{mod } 3} = \{ 3\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z} + 1, 3\mathbb{Z} + 2 \}$$

$$\mathbb{Z}/\equiv_n = \mathbb{Z}_{n\mathbb{Z}} \quad n > 0 \quad \text{insieme quoziente}$$

di \mathbb{Z} su congr. modulo n

l'componente
mod. n

quindi $\mathbb{Z}_{2\mathbb{Z}} = \{[0], [1]\}$ $\mathbb{Z}_{3\mathbb{Z}} = \{[0], [1], [2]\}$ $\mathbb{Z}_{1\mathbb{Z}} = \{[0]\}$

tutti gli interi

$[2]_3 = \{m \in \mathbb{Z} : m \equiv 2 \pmod{3}\} = \{m \in \mathbb{Z} : 3 | m-2\}$

Le operazioni: + - di \mathbb{Z} sono compatibili con \equiv_n ($n > 0$)

① $\forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{Z}, \alpha \equiv \alpha' \pmod{n} \iff -\alpha \equiv -\alpha' \pmod{n}$ compatibilità con opposto

② $\forall \alpha, \alpha', b, b' \in \mathbb{Z}, \alpha \equiv_n \alpha', b \equiv_n b' \Rightarrow \alpha + b \equiv_n \alpha' + b'$ comp. con somma

③ $\forall \alpha, \alpha', b, b' \in \mathbb{Z}, \alpha \equiv_n \alpha', b \equiv_n b' \Rightarrow \alpha b \equiv_n \alpha' b'$ comp. con prodotto

dim ②

$$2 \mid 5-1 \quad \text{e} \quad 2 \mid 1-5$$

$$\alpha \equiv_n \alpha' \iff n \mid \alpha - \alpha' \quad \text{e} \quad n \mid \alpha' - \alpha$$

$$n \mid b' - b \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \underline{\alpha'} - \underline{\alpha} = nk$$

$$n \mid b' - b \iff \exists k' \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \underline{b'} - \underline{b} = nk'$$

Dove ottenere $\alpha + b \equiv_n \alpha' + b'$

sommare le due formule

$$\Rightarrow \underline{\alpha'} + \underline{b'} - (\underline{\alpha} + \underline{b}) = n(k+k') \iff \alpha' + b' \equiv_n \alpha + b$$

quindi $n(\alpha' + b') - \alpha + b$
(perché $n \cdot \text{qualcosa} = \text{quello}$)

dim. ①

$$\forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{Z}, \alpha \equiv_n \alpha' \iff -\alpha \equiv_n -\alpha'$$

$$\alpha \equiv_n \alpha' \iff n \mid \alpha - \alpha' \iff \alpha - \alpha' = qn \iff -\alpha + \alpha' = -qn$$

dim. ③

$$\forall \alpha, \alpha', b, b' \in \mathbb{Z}, \alpha \equiv_n \alpha', b \equiv_n b' \Rightarrow \alpha b \equiv_n \alpha' b'$$

ovvero $\alpha b - \alpha' b' = kn \quad \text{o} \quad \alpha b = kn + \alpha' b'$

$$\alpha = qn + \alpha' \quad \text{e} \quad b = q'n + b' \quad \text{quindi } \alpha b = (\alpha + qn)(b + q'n) = \alpha b' + n(q'b' + \alpha'q' + qq'n)$$

$\alpha b = \alpha' b' + n(k)$

OPERATORI

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ definiamo $[a] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $[a] = a + n\mathbb{Z}$ insieme degli interi che si esprimono come $a +$ multiplo di n (interi che hanno come resto a)

- $[a] := [-a]$ questa funz. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è ben definita: opposto in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

definiamo

• $[a] + [b] := [a+b]$ ben definito (ovvero indipendente dalla scelta di rapp. di $[a] \in [b]$)

$$\text{scelgiamo } a' \in [a] \quad \text{e } b' \in [b] \quad \text{e calcoliamo } [a'+b'] = \left\{ m : n \mid m - a' - b' \right\} = \left\{ m : n \mid m - (a+b) \right\}$$

per (2), perché $[a] = [a']$
quindi $a \equiv a'$
e stessa cosa per b

$\Leftrightarrow [a+b] = [a'+b']$ l'operazione + introdotta su $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è ben definita

$$\text{esempi: } [1]_3, [2]_3 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \quad [1] + [2] = [3] = [0]$$

$$\text{altri rapp. } [1] = [4] \quad [2] = [-4]$$

$$\text{quindi } [4 + -4] = [0]$$

• definiamo inoltre $[a], [b] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $[a] \cdot [b] = [ab]$ ben definito

$$\text{scelgiamo } a' \in [a] \quad \text{e } b' \in [b], [ab] = \left\{ m : n \mid m - a'b' \right\} \quad \begin{aligned} \text{ma } a' &= na \\ &\text{e } b' = nb \\ &\text{quindi, per (3)} \end{aligned} = \left\{ m : n \mid m - ab \right\}$$

$$\text{esempi: } [1]_3, [2]_3 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \quad [1] \cdot [2] = [2]$$

$$\text{e } [4 \cdot -4] = [-16] = [2] \quad \begin{aligned} \text{perché } \frac{2}{3} &= 0 \text{ resto } 2 \\ &\text{e } \frac{-16}{3} = -6 \text{ resto } 2 \end{aligned}$$

TEOREMA

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, -, \cdot, [0], [1])$ è un ANELLO (comm. un.)

alcuni sottoinsiemi di \mathbb{Z}

• $n\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ con } m = kn\}$ multipli di n

• $\mathbb{Z} \setminus \{0\} = \mathbb{Z}^*$

• $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} := \{m \in \mathbb{Z} : \exists k, k' \in \mathbb{Z} \text{ con } m = ka + kb\}$ multipli di $a +$ multipli di b

$$2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \left\{ 0, 2, 4, \frac{8}{3}, 6, \frac{9}{3}, 5, \frac{10}{3}, 8, \frac{14}{3}, 7, \frac{16}{3}, -1, \frac{-10}{3}, 1, \frac{2}{3} \right\} = \mathbb{Z}$$

mod. 2 mod. 3 $2+3$ $2+6$

vedremo $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \text{MCD}(a, b)\mathbb{Z}$

in particolare $\text{MCD}(2, 3) = 1 \quad 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z}$

2	-7	-4	-1	2	5
0	-9	-6	-3	0	3
-2	-11	-8	-5	-2	1
-4	-13	-10	-7	-4	-1
-6	-15	-12	-9	-6	-3
	-9	-6	-3	0	3

La divisibilità è una relazione di inclusione di sottoinsiemi

$$a, b \in \mathbb{Z}^* \quad a|b \iff b \mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} \quad \text{solo se i multipli di } b \text{ sono un sott. dei multipli di } a$$

• Supponiamo $a|b$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } b = ka$$

se $a|b$, allora
ogni multiplo di b può essere riscritto
come $b \cdot$ qualcosa. Ma, per def di $|$, $b = a \cdot$ qualcosa.
quindi, un multiplo di b è un multiplo di a

per definizione, $b = ka \Rightarrow b' = \underbrace{l}_{l'} \underbrace{ka}_{= l'a} = l'a \iff b' \in a\mathbb{Z}$

dimostriamo $b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} \Rightarrow a|b$

• Supponiamo $b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$

Allora $\forall b' \in b\mathbb{Z}, b' \in a\mathbb{Z}$. Per definizione, $b' \in a\mathbb{Z} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } b' = ka$

ma $b' = lb$. Quindi, $lb = ka \iff b = \underbrace{k}_{k'} \underbrace{l}_{= l'a} a \quad \text{quindi } b = ka \blacksquare$

Lemma: $E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ con $a, b \neq 0$, allora $\exists! \delta \in \mathbb{N}^*$ t.c. $E = \delta\mathbb{Z}$

tutte le
combinazioni sono
multiple di un certo
numero unico

dimostrazione

el. d: $E > 0$

poniamo $E^* := E \cap \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}^*$

• osserviamo che $E^* \neq \emptyset$

- infatti, se $a, b > 0$, esiste una coppia $(k, k') \in \mathbb{N}^2$ t.c. $k_a + k'b > 0$

$\in E^*$

- se invece $a > 0$ e $b < 0$, $\exists (k, k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ t.c. $k_a + k'b > 0$

(e, per $a < 0$, $b > 0$ $\exists (k, k') \in -\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e per $a < 0$, $b < 0$ $\exists (k, k') \in -\mathbb{N} \times -\mathbb{N}$)

• poniamo $\delta = \min(E^*)$ ben definito in \mathbb{N}^* (principio del minimo)

• osserviamo che $\delta \leq |a|$ e $\delta \leq |b|$

infatti $|a| \in E^*$ (perché $E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$) $\subset \delta = \min(E^*)$

• per la DIVISIONE EUCLIDEA $a = q\delta + r$, $r \in \{0, 1, \dots, \delta-1\}$

notiamo che $r = a - q\delta$

$a \in E$, $\delta \in E^* \subset E \implies \delta = ua + vb$ con $u, v \in \mathbb{Z}$

sempre per
 $E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$

quindi $r = a - q(ua + vb) \iff r = a - qua - qvb \iff r = \underbrace{a(1-qu)}_k + b(-qv) \quad$ quindi $r = ak + bk' \iff r \in E$

Ci sono 2 opzioni: ① $r = 0$, $\delta | a$ ($a = q\delta + r$) e abbiamo finito

per $\delta = \min(E^*)$

② altrimenti, $r > 0$ e $r \in E^*$. Se fosse vero, $r \geq \delta$. Ma questo è impossibile per $a = q\delta + r$ con $r \in \{0, 1, \dots, \delta-1\}$

$r \neq \delta$

quindi necessariamente $r = 0$ e $\delta | a$. Per la stessa ragione, $\delta | b$.

• $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $\delta | \alpha a + \beta b \implies E \subset \delta\mathbb{Z}$ per la dim sopra ($a | b \iff b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$)

d'altronde, $\delta \in E \iff \delta = ka + kb'$

$\forall l \in \mathbb{Z}$, $l\delta = lk a + lk' b \implies l\delta \in E$

se i multipli di δ sono

elementi di E , allora $\Rightarrow \delta\mathbb{Z} \subset E$

$\delta\mathbb{Z}$ è contenuto in E

(per def $=$)

QUINDI, visto che $E \subset \delta\mathbb{Z}$ e $E \supset \delta\mathbb{Z}$, $E = \delta\mathbb{Z}$

cosa abbiamo fatto? POSTI: $E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ con $a, b \neq 0$ • $E^* = E \cap \mathbb{N}^*$ (dimostrato $E \neq \emptyset$) • $\delta = \min(E^*)$

notiamo che

• a e b si può riscrivere come $a = q\delta + r$. Questo implica che $r < \delta-1$ (per questioni resto)

• e che $r \in E$, perché $\delta = ua + vb$ e $r = a - q\delta \iff r = a - (ua + vb)$ che porta a $r = \underbrace{a(1-qu)}_k + b(-qv)$

• r può essere $0 > 0 = 0$. Ma se fosse > 0 , dovrebbe essere anche $< \delta-1$ per def resto e $\delta = \min$, il che è IMPOSSIBILE

quindi, $r = 0 \Rightarrow$ abbiamo dimostrato che $\delta | a$ (e $\delta | b$)

δ divide i numeri di E \iff formata da $\alpha a + \beta b$

ora: visto che $\delta | a$ e $\delta | b$, $\delta | a+b$ e $\delta | \alpha a + \beta b$. Questo implica $\delta\mathbb{Z} \supset E$

e, visto che $\delta \in E$ allora i suoi multipli $\in E$. Questo implica $\delta\mathbb{Z} \subset E$

quindi, $\delta\mathbb{Z} \subset E$ e $\delta\mathbb{Z} \supset E \iff \delta\mathbb{Z} = E$

MASSIMO COMUN DIVISORE

data $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con $(a, b) \neq (0, 0)$

def $d \in \mathbb{N}$ è MCD di a e b se:

$$\textcircled{1} \quad d | a \text{ e } d | b$$

\textcircled{2} se $d' \in \mathbb{N}$ t.c. $d'|a$ e $d'|b$, allora $d'|d$ ogni divisore di a e b
divide anche d

lemma:

se d soddisfa \textcircled{1} e \textcircled{2}, allora è unico.

dim.

Supponiamo che d_1, d_2 soddisfano \textcircled{1} e \textcircled{2}. Mostriamo che $d_1 = d_2$.

$d_2 = k \cdot d_1 \text{ e } d_1 = l \cdot d_2$ quindi d_1 e d_2 devono essere uguali o opposti

$$\text{Si ha } d_2 | d_1 \text{ e } d_1 | d_2 \Rightarrow \{d_1, -d_1\} = \{d_2, -d_2\} \Rightarrow d_1 = d_2$$

• Si scrive $d = \text{MCD}(a, b)$

def COPRIMI \rightarrow Se $\text{MCD}(a, b) = 1$, si dice che a e b sono primi tra loro o coprimi

lemma

$$d = \text{MCD}(a, b) \quad a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z} \quad d > 0, a, b \neq 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \cdot \text{ se } a=0, b \neq 0 \text{ allora } d = |b| > 0 \\ \cdot \text{ se } a \neq 0, b=0 \text{ allora } d = |a| > 0 \end{array} \right)$$

dim.

$$d\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} \supset a\mathbb{Z} \rightarrow d | a \\ \supset b\mathbb{Z} \rightarrow d | b \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{condizione } \textcircled{1} \\ \text{verificata} \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad (\text{mostro } d' | d \Leftrightarrow d\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z})$$

Ogni divisore di
 a e b divide il MCD

per la cond. \textcircled{2}: sia $d' \in \mathbb{N}$ t.c. $d' | a \text{ e } d' | b$

$$d' | a \Leftrightarrow a\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z} \quad \text{e} \quad d' | b \Leftrightarrow b\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z}$$

$$\text{quindi } \underbrace{a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}}_{= d\mathbb{Z}} \subset \overbrace{d'\mathbb{Z} + d'\mathbb{Z}}^{= 2d'\mathbb{Z}} = d'\mathbb{Z}$$

$$d\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z} \Leftrightarrow d' | d \quad \text{cond. } \textcircled{2} \text{ verificata}$$

ALGORITMO DI EUCLIDE x MCD

dati: $a, b > 0$ $\delta = \text{MCD}(a, b)$

comincia con la divisione euclidea a, b (\circ $b, a - \text{è uguale}$)

$$a = q_0 b + r_0 \quad (0 \leq r_0 < b) - x \text{ def. resto}$$

$$b = q_1 r_0 + r_1 \quad (0 \leq r_1 < r_0)$$

$$r_0 = q_2 r_1 + r_2 \quad (0 \leq r_2 < r_1)$$

$\therefore r_0, r_1, r_2 \dots$ decrescono - arriveranno ≥ 0

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n \quad (0 \leq r_n < r_{n-1})$$

$$r_{n-1} = q_n r_n + 0$$

$\delta !!$ (MCD)

esercizio d'esempio

$$a = 3522, b = 321$$

$$3522 = 10 \cdot 321 + 312$$

$$321 = 1 \cdot 312 + 9$$

$$312 = 34 \cdot 9 + 6$$

$$9 = 1 \cdot 6 + 3$$

$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$

$$3522 = 10 \cdot 321 + 312$$

$$321 = 1 \cdot 312 + 9$$

$$312 = 34 \cdot 9 + 6$$

$$9 = 1 \cdot 6 + 3$$

$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$

$$3 = \text{MCD}(3522, 321)$$

ma, da qui, sappiamo che vale $\delta \mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } 3 = 3522u + 321v$$

Come calcolare u e v ? IDENTITÀ DI BÉZOUT

Solviamo tra le $\longrightarrow 3 = 9 - 1 \cdot 6$

iterazioni di euclide

e prendiamo

il resto

$$6 = 312 - 34 \cdot 9$$

$$3 = 9 - 1(312 - 34 \cdot 9) = 9 - 312 + 9 \cdot 34$$

$$3 = -312 + 35 \cdot 9$$

$$9 = 321 - 1 \cdot 312$$

$$3 = -312 + 35 \cdot (321 - 312) = 35 \cdot 321 - 312 \cdot 35$$

$$3 = 35 \cdot 321 - 312 \cdot 35$$

$$312 = 3522 - 10 \cdot 321$$

$$3 = 35 \cdot 321 - (3522 - 10 \cdot 321) \cdot 36 = 35 \cdot 321 - 3522 \cdot 36 + 321 \cdot 36 \cdot 10 \\ = 321(35 + 360) - 3522 \cdot 36$$

$$3 = 321 \cdot 395 - 36 \cdot 3522$$

abbiamo trovato v e u !! (bravi tutti)

Lemma di Gauss se $a, b \in \mathbb{Z}^*$ e $c \in \mathbb{Z}$ e se $\text{MCD}(a, b) = 1$ allora $a|bc \Rightarrow a|c$

dim.

$$\text{MCD}(a, b) = 1 \iff a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

Sono primi tra loro ($\text{MCD} = 1$)

$$\text{quindi } \exists u, v \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } au + bv = 1$$

$$au + bv = 1$$

$$\text{moltiplico tutto per } c \quad acu + bcv = c$$

$a|bc$ per ipotesi, quindi $bc = ka$

$$acu + bcv = c \iff a(\underbrace{uc + bv}_{\exists 1 \text{ t.c. } c=1}) = c \quad \text{quindi } a|c \quad \blacksquare$$

Lemma $p \in \mathbb{N}, p > 1$, allora p irriducibile $\Rightarrow p$ primo

dimostrazione + claim se p è irriducibile e $p \nmid a$, allora $a\mathbb{Z} + p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

infatti, altrimenti $\exists \delta > 1$ t.c. $\delta | a$, $\delta | p$

ma visto che p irr., $\delta = p \Rightarrow p | a$ CONTRADDIZIONE

Supponiamo $p | ab$ con p irriducibile. (Devo dim. che $p | a$ o $p | b$)

Se $p \nmid a$, ho finito \rightarrow suppongo $p \nmid b$.

Ma allora $a\mathbb{Z} + p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Moltiplico tutto per b $\rightarrow \underbrace{ab\mathbb{Z}}_{\text{div per } p} + \underbrace{pb\mathbb{Z}}_{\text{div per } p} = b\mathbb{Z}$ quindi $b\mathbb{Z} \subset p\mathbb{Z} \Rightarrow p | b$ (perché \subset è una rel. di \subset)

fun fact del collega di Pellorin.

James P Jones, Daishachiro Sato, Hideo Wada, Douglas Wiens

$f(a, b, c, \dots, z)$ sostituendo le lettere (variabili) con elementi di \mathbb{N} ottengo elementi di \mathbb{Z}

$$\mathbb{N}^{26} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$$

$$f(\mathbb{N}^{26}) \subset \mathbb{Z} \quad \text{il teorema dice che } f(\mathbb{N}^{26}) \cap \mathbb{N}^* = \{x : x \text{ primo}\} = \{2, 3, 5, 7, \dots\} = \mathbb{P}$$

$$\text{per esempio } f^{-1}(\{13\}) = \emptyset$$

⑤ per ogni intero n , $2n^{17} + 2n^{15} + 3n^3 + 3n$ è divisibile per 5

• la classe mod 5 ($\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$) ha le stesse operazioni di \mathbb{Z}

$$\left[2n^{17} + 2n^{15} + 3n^3 + 3n \right]_5 \text{ deve essere } [0]$$

oper. in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$= [2] \cdot [n]^{17} + [2] \cdot [n]^{15} + [3] \cdot [n]^3 + [3] \cdot [n] = [0]$$

un intero $n \pmod{5}$ ha resto da 1 a 4 (quindi mi basta verificare queste classi)

• se $n \equiv_5 0 \iff [n] = [0]$ allora è chiaramente verificato

altr: così:

\bar{n}	$[n]^3$	$[n]^{15}$	$[n]^{17}$	$3[n]$	$3[n]^3$	$2[n]^{15}$	$2[n]^{17}$	$3[n] + 3$
$n \equiv 1$	$[1]$	$[1]$	$[1]$	$[3]$	$[3]$	$[2]$	$[2]$	$[0]$
	$[1] \cdot [1] \cdot [1] = [1]$	$[1] \cdot [1] \cdot [1] = [1]$	$[1] \cdot [1] \cdot [1] = [1]$	$[3] \cdot [3] \cdot [3] = [3]$	$[3] \cdot [3] \cdot [3] = [3]$	$[2] \cdot [2] \cdot [2] = [2]$	$[2] \cdot [2] \cdot [2] = [2]$	$[3] + 3 = [0]$
$n \equiv 2$	$[2]$	$[3]$	$[3]$	$[1]$	$[1]$	$[4]$	$[1]$	$[0]$
	$[2] \cdot [3] \cdot [3] = [2]$	$[3] \cdot [2] \cdot [2] = [3]$	$[3] \cdot [3] \cdot [3] = [2]$	$[1] \cdot [1] \cdot [1] = [1]$	$[1] \cdot [1] \cdot [1] = [1]$	$[4] \cdot [4] \cdot [4] = [4]$	$[1] \cdot [1] \cdot [1] = [1]$	$[0] + 3 = [3]$
$n \equiv 3$	$[3]$	$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[1]$	$[4]$	$[0]$
	$[3] \cdot [2] \cdot [2] = [3]$	$[2] \cdot [3] \cdot [3] = [2]$	$[2] \cdot [2] \cdot [2] = [2]$	$[3] \cdot [3] \cdot [3] = [3]$	$[4] \cdot [4] \cdot [4] = [4]$	$[1] \cdot [1] \cdot [1] = [1]$	$[4] \cdot [4] \cdot [4] = [4]$	$[0] + 3 = [3]$
$n \equiv 4$	$[4]$	$[4]$	$[4]$	$[4]$	$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[0]$
	$[4] \cdot [4] \cdot [4] = [2]$	$[4] \cdot [4] \cdot [4] = [2]$	$[4] \cdot [4] \cdot [4] = [2]$	$[2] \cdot [2] \cdot [2] = [2]$	$[2] \cdot [2] \cdot [2] = [2]$	$[3] \cdot [3] \cdot [3] = [3]$	$[2] \cdot [2] \cdot [2] = [2]$	$[0] + 3 = [3]$

divisibile per
5 in tutti i casi

Studiamo le potenze 2 mod 5

$$[2]^0 = [1] \quad [2]^1 = [2] \quad [2]^2 = [4] \quad [2]^3 = [3] \quad [2]^4 = [1]$$

è ciclico:

$$[2]^5 = [2] \cdot [2]^4 = [2] \cdot [1] = [2] \quad \text{il ciclo è lungo 4, quindi } [2]^m = [2]^{\frac{m}{4} \cdot 4 + r} = [2]^{\frac{m}{4} \cdot 4} \cdot [2]^r = [2]^r$$

$$[2]^6 = [2] \cdot [2]^5 = [4]$$

quando per calcolare $[2]^n$ basta calcolare $[2]^r$ resto div. per 4

potenze 3 mod 5:

$$[3]^0 = [1] \quad [3]^1 = [3] \quad [3]^2 = [4] \quad [3]^3 = [2] \quad [3]^4 = [1]$$

potenze 4 mod 5

$$[4]^0 = [1] \quad [4]^1 = [4] \quad [4]^2 = [1] \quad [4]^3 = [4] \quad [4]^4 = [1]$$

④ Calcolare $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ con $N \in \mathbb{N}$

$$\cdot A = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{\equiv_N}$$

$$\cdot [a] + [b] = [a+b] \quad e \quad [a] \cdot [b] = [ab] \quad (\text{premesse})$$

• con l'elemento $[0]$ ($= N\mathbb{Z}$) per l'elemento neutro per + e con l'elemento $[1]$ ($= N\mathbb{Z}+1$) per il neutro di \cdot , si ottiene che A è un anello unitario commutativo.

Si cerca

$$A^\times = \{[n] \text{ t.c. } \exists [m] \text{ con } [m] \cdot [n] = [1]\} \quad ("insieme delle unità")$$

③ Si $\exists [a] \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$: esiste $b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ t.c. $[a] \cdot [b] = [1]$

$$[ab] = [1] \iff N \mid ab - 1 \quad \text{è invertibile} \iff \text{esiste un qualsiasi rapp. quando faccio } ab-1, \text{ è div per } N$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } kN = ab - 1$$

porta 1 e kn dall'altra parte

$$\iff ab - kN = 1 \quad \text{è un'identità di Bézout per } a, N$$

$\iff a \text{ e } N$ sono primi fra loro!

$$\text{quindi } (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times = \{[a] : a \in \mathbb{Z} \text{ e } \text{MCD}(a, N) = 1\}$$

Esiste quindi un'applicazione biiettiva $\{r \in \{0, \dots, N-1\} \text{ t.c. } \text{MCD}(r, N) = 1\} \rightarrow (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$

$$r \mapsto [r]$$

$N = 24 = 2^3 \cdot 3$ verificare che $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times = \{r : z \mid r, 3 \nmid r\}$ tenendo i coprimi

$$\text{esempio } (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17}, \bar{18}, \bar{19}, \bar{20}, \bar{21}, \bar{22}, \bar{23}\}$$

che cosa si osserva quando N è primo?

$$\cdot N = p \text{ primo} : \text{ Si } r \in \{\bar{1}, \dots, \bar{p-1}\}$$

$\text{MCD}(p, r) = 1$. Altrimenti, qualora si avesse $d = \text{MCD}(p, r) > 1$ avrei: $d \mid p$, $d \mid r \Rightarrow d = p$

e si avrebbe $p \mid r$. Ma $r < p$ (perché è resto) \rightarrow CONTRADDIZIONE. Quindi r coprimo p

Si ottiene $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \{[r] : 1 \leq r \leq p-1\} \quad \forall r \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, r è invertibile

def CAMP

A anello commutativo unitario t.c. $\forall a \in A \setminus \{0\}$ invertibile
si dice campo

in particolare, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ è un campo

PICCOLO TEOREMA DI FERMAT

es. 5 dato p primo e $n \in \mathbb{Z}$, $n^p \equiv_p n$

Ricordiamo:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \#\{U \subset \{1, \dots, n\} : \#U = m\} \quad 0 \leq m \leq n$$

in $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ campo, ovvero $\mathbb{F}_p^\times = \{[1], [2], \dots, [p-1]\}$
non vero in \mathbb{Z}

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

$$\bullet ([a] + [b])^p = [a]^p + [b]^p \text{ con } [a], [b] \in \mathbb{F}_p$$

Sceglieremo rapp. a, b per le classi $[a], [b]$

$$(a+b)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} b + \binom{p}{2} a^{p-2} b^2 + \dots + \binom{p}{p-2} a^2 b^{p-2} + \binom{p}{p-1} a b^{p-1} + b^p \quad (\text{NEWTON})$$

• $0 < i < p$ (non $\leq \geq$ perché so che la rid. mod. p di 0 e p è 0)

(SCRIVIAMO $\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!} \in \mathbb{N}$, quindi si ha che $i!(p-i)! \mid p$ (appunto perché la frazione è \mathbb{N}))

• Supponiamo $1 \leq i \leq p-1$ e inoltre $i! = i(i-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

quindi, siccome $p > i$, si ha $p \nmid i$ (perché i si scompongono in fattori tutti $< p$ (quindi nessuno di questi è p) e p non può essere il prodotto tra alcuni di questi perché è primo)

Similmente, $p > p-i$ e quindi $p \nmid (p-i)!$

$$\text{quindi, ho } p! = \underbrace{k}_{\geq} \cdot \underbrace{i!(p-i)!}_{b} \quad (\text{da qui } *) \quad \exists k \in \mathbb{N}^*$$

(visto che $p \nmid i!$ e $p \nmid (p-i)!$) ho anche $p \nmid b$.

ma $p \mid ab = p!$ visto che p primo e $p \nmid b$, allora $p \mid a$ per il lemma di Gauss.
per def. fattoriale

$$\text{ma } a = k = \binom{p}{i} \quad \text{perché } p! = \frac{p!}{i!(p-i)!} \cdot i!(p-i)!$$

$(\in [0] \text{ mod } p)$

quindi, tutti i coeff. "in mezzo" nello sv. di Newton (nello forma $\binom{p}{i} \cdot \text{qualcosa}$) si riducono a 0 e rimangono solo a^p e b^p .

• ho dim. che se $1 \leq i \leq p-1$ e p primo, si ha: $\binom{p}{i} = \binom{p}{p-i} \equiv_p 0$

$$\text{e, riducendo, ottengo } ([a] + [b])^p = [a]^p + \binom{p}{1} [a]^{p-1} [b] + \dots + [b]^p \equiv_p [a]^p + [b]^p$$

TORNIAMO ALLA DIM. PRINCIPALE (PTF)

$$[0]^p = [0] \quad [2]^p = ([1] + [1])^p = [1]^p + [1]^p = [1] + [1] = [2]$$

$$[1]^p = [1] \quad [\bar{1}]^p = ([2] + [1])^p = [2]^p + [1]^p = [\bar{2}] + [1] = [\bar{1}]$$

quindi, per induzione (ipotesi: fino a $n-1$, $[n-1]^p = [n-1]$)

$$[n]^p = ([n-1] + [1])^p = [n-1]^p + [1]^p = [n-1] + [1] = [n]$$

which is very cool

if you ask me!!

quindi, $\forall n \in \mathbb{Z}, n^p \equiv_p n$ (con p primo)



$$(x+y)^n = x^n + y^n$$



$$(x+y)^n \neq x^n + y^n$$



for a prime number n , if x and y are members of a commutative ring of characteristic n then
 $(x+y)^n = x^n + y^n$

PRECISAZIONE

Se $[n] \neq [0]$, ovvero se $[n] \in \mathbb{F}_p$

allora $[n]$ invertibile di inverso $[n']$.

$$\text{Per il PTF, so già che } [n] = [n]^p \quad \text{e} \quad [n'] [n^p] = [n'] [n] \stackrel{\substack{= \\ \text{def. inverso}}}{=} 1$$

p primo $\Rightarrow p \geq 2$ si può decomporre in $p-1 \geq 1 + p$

$$[n'] [n]^p = [n'] [n] = [1]$$

$$\begin{array}{c} \text{Il } [n]^p \\ \text{è } \\ [n'] \cdot \underbrace{[n] [n]^{p-1}}_{\substack{\text{sono} \\ \text{inversi} \\ \text{quindi} = [1]}} = [n'] [n] = [1] \end{array}$$

$$\text{quindi } [1] [n]^{p-1} = [1] \quad \text{se } [n] \neq [0]$$

(il PTF ha dei difetti.)

- se $[\alpha] \in \mathbb{F}_p^\times$, calcolare $[\alpha]^{-1}$ usando il PTF

$$\text{So che } [\alpha]^{p-1} = [1] \quad (\text{PTF}).$$

$$\begin{array}{c} \text{Scrivendo } [\alpha]^{p-1} = [\alpha]^{p-2} \cdot [\alpha] \\ \text{(quindi } [1] = \underbrace{[\alpha]^{p-2} \cdot [\alpha]}_{\text{inversi}}) \end{array}$$

$$\text{Dunque } [\alpha]^{-1} = [\alpha]^{p-2}$$

$$\text{es. } p = 689 \quad (\text{primo})$$

Voglio calcolare $[2]^{-1}$. "Basta" calcolare $[2]^{p-2}$, ovvero $[2]^{689}$.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 333, 666, 641, 591, 491, 291, 582, 473, 255, 510, 329, 658, 625, 5
 59, 427, 163, 326, 652, 613, 535, 379, 67, 134, 268, 536, 381, 71, 142, 284, 568, 445, 199, 398, 105, 2
 10, 420, 149, 298, 596, 501, 311, 622, 553, 415, 139, 278, 556, 421, 151, 302, 604, 517, 343, 686, 681,
 671, 651, 611, 531, 371, 51, 102, 204, 408, 125, 250, 500, 309, 618, 545, 399, 107, 214, 428, 165, 330
 , 660, 629, 567, 442, 195, 390, 89, 178, 356, 21, 42, 84, 168, 336, 672, 653, 615, 539, 387, 83, 166, 3
 32, 664, 637, 583, 475, 259, 518, 345, 690, 689, 687, 683, 675, 659, 627, 563, 435, 179, 358, 25, 50, 1
 00, 200, 400, 109, 218, 436, 181, 362, 33, 66, 132, 264, 528, 365, 39, 78, 156, 312, 624, 557, 423, 155
 , 310, 620, 549, 407, 123, 246, 492, 293, 586, 481, 271, 542, 393, 95, 190, 380, 69, 138, 276, 552, 413
 , 135, 270, 540, 389, 87, 174, 348, 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 589, 487, 283, 566, 441, 191, 382
 , 73, 146, 292, 584, 477, 263, 526, 361, 31, 62, 124, 248, 496, 301, 602, 513, 335, 670, 649, 607, 523,
 355, 19, 38, 76, 152, 304, 608, 525, 359, 27, 54, 108, 216, 432, 173, 346, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128
 , 256, 512, 333, 666, 641, 591, 491, 291, 582, 473, 255, 510, 329, 658, 625, 559, 427, 163, 326, 652, 6
 13, 535, 379, 67, 134, 268, 536, 381, 71, 142, 284, 568, 445, 199, 398, 105, 210, 420, 149, 298, 596, 5
 01, 311, 622, 553, 415, 139, 278, 556, 421, 151, 302, 604, 517, 343, 686, 681, 671, 651, 611, 531, 371,
 51, 102, 204, 408, 125, 250, 500, 309, 618, 545, 399, 107, 214, 428, 165, 330, 660, 629, 567, 443, 195
 , 390, 89, 178, 356, 21, 42, 84, 168, 336, 672, 653, 615, 539, 387, 83, 166, 332, 664, 637, 583, 475, 2
 59, 518, 345, 690, 689, 687, 683, 675, 659, 627, 563, 435, 179, 358, 25, 50, 100, 200, 400, 109, 218, 4
 36, 181, 362, 33, 66, 132, 264, 528, 365, 39, 78, 156, 312, 624, 557, 423, 155, 310, 620, 549, 407, 123
 , 246, 492, 293, 586, 481, 271, 542, 393, 95, 190, 380, 69, 138, 276, 552, 413, 135, 270, 540, 389, 87,
 174, 348, 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 589, 487, 283, 566, 441, 191, 382, 73, 146, 292, 584, 477,
 263, 526, 361, 31, 62, 124, 248, 496, 301, 602, 513, 335, 670, 649, 607, 523, 355, 19, 38, 76, 152, 30
 4, 608, 525, 359, 27, 54, 108, 216, 432, 173, 346, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 333, 666, 641
 , 591, 491, 291, 582, 473, 255, 510, 329, 658, 625, 559, 427, 163, 326, 652, 613, 535, 379, 67, 134, 26
 8, 536, 381, 71, 142, 284, 568, 445, 199, 398, 105, 210, 420, 149, 298, 596, 501, 311, 622, 553, 415, 1
 39, 278, 556, 421, 151, 302, 604, 517, 343, 686, 681, 671, 651, 611, 531, 371, 51, 102, 204, 408, 125,
 250, 500, 309, 618, 545, 399, 107, 214, 428, 165, 330, 660, 629, 567, 443, 195, 390, 89, 178, 356, 21,
 42, 84, 168, 336, 672, 653, 615, 539, 387, 83, 166, 332, 664, 637, 583, 475, 259, 518, 345, 690, 689, 6
 87, 683, 675, 659, 627, 563, 435, 179, 358, 25, 50, 100, 200, 400, 109, 218, 436, 181, 362, 33, 66, 132
 , 264, 528, 365, 39, 78, 156, 312, 624, 557, 423, 155, 310, 620, 549, 407, 123, 246, 492, 293, 586, 481
 , 271, 542, 393, 95, 190, 380, 69, 138, 276, 552, 413, 135, 270, 540, 389, 87, 174, 348, 5, 10, 20, 40,
 80, 160, 320, 640, 589, 487, 283, 566, 441, 191, 382, 73, 146, 292, 584, 477, 263, 526, 361, 31, 62, 1
 08, 216, 432, 173, 346, 1, 689' (689)

ma notiamo che le classi

sono cicliche - possiamo trovare

l'inverso molto prima di 689

- è quello precedente all'1,

perciò sappiamo che $[n]^{p-1} = [1]$
(e cerchiamo $[n]^{p-2}$)

questo funziona bene con 2, ma, per esempio, non con 3

③ Nessun intero in $4\mathbb{Z} + 3$

calcoliamo le classi resto modulo 4 dei quadrati

\bar{n}	\bar{n}^2	la somma dei quadrati mod 4 può essere soltanto
0	0	
1	1	
2	0	
3	1	

	+	$\bar{0} \quad \bar{1}$	in particolare, non è mai $\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0} \quad \bar{1}$	
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0} \quad \bar{1}$	

no (si può vedere con la riduzione mod 8 e una tabella 3d)

Variante: è vero che ogni intero > 0 è somma di 3 quadrati? Si può dimostrare che ogni intero > 0 è somma di 4 quadrati (Lagrange)

FIBONACCI

(F_n) $n \geq 0$ definito induttivamente: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

proprietà

$$\text{MCD}(F_m, F_n) = F_{\text{MCD}(m, n)}$$

$$\text{in particolare, } \text{MCD}(F_m, F_{m+1}) = F_1 = 1$$

dim. x induzione con algoritmo di Euclideo

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$$\text{MCD}(F_n, F_{n+1}) = \delta_n$$

$$\mathbb{Z} F_n + \mathbb{Z} F_{n+1} = \mathbb{Z} \delta_n \quad \text{devo dimostrare} = 1\mathbb{Z}$$

||

$$\left\{ \exists F_n + b F_{n+1} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

|| def. Fibonacci

$$\left\{ \exists F_n + b(F_n + F_{n-1}) : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

ci serve



$$\mathbb{Z} F_{n-1} + \mathbb{Z} F_n$$

così → ipotesi induttiva: $\mathbb{Z} F_{n-1} + \mathbb{Z} F_n = \mathbb{Z}$

(claim)

17/10

claim: = (serve che la funzione sia suriettiva)

$$\left\{ (\alpha+b) F_n + b F_{n-1} : \alpha, b \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{Z} F_{n-1} + \mathbb{Z} F_n = \left\{ u F_{n-1} + v F_n : u, v \in \mathbb{Z} \right\}$$

mi serve dim applicazione biiettiva:

$$f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$$

$$(\alpha, b) \mapsto (\alpha+b, b) \quad \text{sia } f(\mathbb{Z}^2) \text{ l'immagine} = \{ u F_n, v F_{n-1} : (u, v) \in f(\mathbb{Z}^2) \}$$

se lo dimostro, dimostro che

ogni volta che prendo α, b posso trovare u e v t.c. $u = \alpha+b$, $v = b$ e viceversa

(basta che sia suriettiva)
ma dimostriamo biiettiva

Mostriamo f suriettiva - questo basta per giustificare il claim

Possiamo mostrare che f biiettiva (+ forse)

Richiamo: $A \xrightarrow{f} B$ f biiettiva $\iff \forall b \in B, f^{-1}(\{b\})$ singleton

prop del corso $\Rightarrow f$ biiett. $\iff \exists g: B \rightarrow A$ t.c. $f \circ g = \text{Id}_B$ ($\forall b \in B, f(g(b)) = b, \forall a \in A, g(f(a)) = a$)

$$f(a, b) = (a+b, b) =: (u, v)$$

$$\begin{cases} a+b = u \\ b = v \end{cases}$$

unica soluzione (biiettività) (singleton f^{-1})

inverso

$$\text{pongo } g: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2, \quad g(u, v) \mapsto (u-v, v)$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(u, v) &= f(g(u, v)) = f(u-v, v) = u-v+v, v = (u, v) \\ (g \circ f)(a, b) &= g(f(a, b)) = g(a+b, b) = (a+b-b, b) = (a, b) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{x fibonacchi indice } \geq 0 \\ \text{sono identità:} \\ f \text{ e } g \text{ biiettive} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Abbiamo dimostrato } \forall n > 0 \quad F_{n+1} \mathbb{Z} + F_n \mathbb{Z} &= F_n \mathbb{Z} + F_{n-1} \mathbb{Z} = F_{n-1} \mathbb{Z} + F_{n-2} \mathbb{Z} = \dots = F_1 \mathbb{Z} + F_0 \mathbb{Z} = \\ &= F_1 \mathbb{Z} + \{0\} = \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{ho dim. che } \forall n > 0 \quad F_n \mathbb{Z} + F_{n-1} \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \iff \text{MCD}(F_n, F_{n-1}) = 1 \quad \blacksquare$$

Esercizio 5 Dimostrare che $2^n \not\equiv 1 \pmod{n}$ $\forall n > 1$ x CASA

$$2^n \not\equiv_n 1 \quad \forall n > 1$$

$$n^p \equiv_p n \quad \text{e } n^{p-2} \text{ inverso } n^p$$

$$n^{p-1} \equiv_p 1$$

2 casi:

$$\textcircled{1} \quad n \text{ primo} \rightarrow \text{Fermat: } [2^{n-1}]_n = [1]_n$$

$$[2^n] = [2^{n-1}] \cdot [2] = [1] \cdot [2] = [2]$$

$$\textcircled{2} \quad n \text{ non primo} \rightarrow n = a, b \text{ con } 1 < a < n, \quad 1 < b < n$$

$$\text{sicuramente } n = p \cdot k \text{ con } p \text{ primo e } 2^n = 2^{pk} = (2^p)^k$$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ARITMETICA

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}^*$$

① l'insieme $I = \{ p \text{ primo} : p | \alpha \}$ è finito (il numero di primi che dividono α è finito)

② $\alpha = (\pm 1) \cdot \prod_{\substack{p \\ \text{primo}}} p^{v_p(\alpha)}$ dove $v_p(\alpha) \in \mathbb{N}$ unicamente determinato.

(ogni numero $\neq 0$ è il prodotto di una certa combinazione di numeri primi elevati a un certo esponente
- quelli che non vogliono saranno elevati a 0 -)

OSS

si sa che $P = \{ p \in \mathbb{N}, p \text{ primo} \}$ è infinito.

Siccome

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}, I_\alpha \text{ è finito, } \prod_{\substack{p \\ \text{primo}}} p^{v_p(\alpha)} = \prod_{p \in I_\alpha} p^{v_p(\alpha)} \cdot \prod_{p \notin I_\alpha} p^{v_p(\alpha)}$$

sarà 0 ("non ci servono")

posso dividere i primi in divisori di α e non-divisori di α e suddividere la produttoria

esempio:

$$\begin{aligned} \alpha = 7! &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 7 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2^4 \end{aligned}$$

$$\text{quindi } v_p(\alpha) = \begin{cases} 1 & p=7 \\ 1 & p=5 \\ 2 & p=3 \\ 4 & p=2 \\ 0 & p>7 \end{cases}$$

OSS: dato $\alpha = \prod_p p^{v_p(\alpha)}$ e $b = \prod_p p^{v_p(b)}$

$$\begin{aligned} \alpha = 12 &= 2^2 \cdot 3 \\ b = 15 &= 5 \cdot 3 \implies v_2(\alpha) = 2 & v_2(b) = 0 \\ & & v_3(\alpha) = 1 & v_3(b) = 1 \end{aligned}$$

$$\bullet \alpha \cdot b = \prod_p p^{v_p(\alpha)} \prod_p p^{v_p(b)} = \prod_p p^{v_p(\alpha) + v_p(b)}$$

$$v_5(\alpha \cdot b) = 0 \quad v_5(b) = 1$$

$$\bullet p^{v_p(\alpha)} p^{v_p(b)} = p^{v_p(\alpha) + v_p(b)}$$

$$v_p(\alpha \cdot b) = v_p(12 \cdot 15) = v_p(\alpha) + v_p(b)$$

(enunciato) $\forall \alpha > 0, \exists$ un numero finito di primi distinti p_1, \dots, p_r t.c. $\alpha = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$
e questa fattorizzazione è unicamente determinata.

$$v_2(\alpha \cdot b) = 2 \quad v_3(\alpha \cdot b) = 2 \quad v_5(\alpha \cdot b) = 1 \quad v_p(\alpha \cdot b) = 0 \quad p \geq 7$$

dimostrazione teorema $\Delta = (\pm 1) \prod_p p^{v_p(\Delta)}$

• posso supporre $\Delta > 0$ senza perdita di generalità

① Supponiamo per assurdo \mathbb{P}_{Δ} infinito - vuol dire che esiste una collezione infinita di primi t.c. $p \mid \Delta$

ma $p \mid \Delta \Rightarrow p \leq \Delta$ e impossibile infiniti interi $\leq \Delta$ contr.

② Procediamo per induzione:

$$\cdot \Delta = 1 \quad V_p(1) = \emptyset \quad \forall p \quad 1 = \prod_p p^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$$

• Supponiamo $\Delta > 1$.

dove così ① Δ primo \rightarrow allora $\Delta = \prod_p p^{v_p(\Delta)} \quad V_p(\Delta) = \begin{cases} \emptyset & p \neq \Delta \\ 1 & p = \Delta \end{cases}$

② Δ non primo, Δ non è irriducibile

si può scrivere in fattori diversi da 1 e Δ

$$\Rightarrow \Delta = U \cdot V \quad \text{con} \quad 1 < U < \Delta \quad \& \quad 1 < V < \Delta$$

per ipotesi induttiva, visto che $U, V < \Delta$ posso usare la formula del prodotto

posso scrivere $U = \prod_p p^{v_p(U)}, \quad V = \prod_p p^{v_p(V)}$

$$\Delta = UV = \prod_p p^{v_p(U) + v_p(V)} \blacksquare$$

altre proprietà (in teoria esercizi ma mi sembrano più proprietà)

① $a|b \iff \forall p, V_p(a) \leq V_p(b)$

dim • supponiamo $V_p(a) < V_p(b)$

$$\iff V_p(b) - V_p(a) \geq 0 \in \mathbb{N}$$

poniamo $k = \prod_p p^{V_p(b) - V_p(a)}$ è quindi un intero

osserviamo che $V_p(b) - V_p(a) = 0$ per p abbastanza grande

$$k \cdot a = \prod_p p^{V_p(b) - V_p(a)} \prod_p p^{V_p(a)} = \prod_p p^{V_p(b) - V_p(a) + V_p(a)} = \prod_p p^{V_p(b)} = b$$

quindi $b = k \cdot a \quad \exists k \in \mathbb{N}$ e quindi $a|b$

• supponiamo $a|b$

$$\implies b = k \cdot a \quad \exists k \in \mathbb{N}^*$$

per il teorema fondamentale:

$$\prod_p p^{V_p(b)} = \prod_p p^{V_p(k \cdot a)} = \prod_p p^{V_p(a)}$$

osservo che
 ≥ 0 perché
k intero

quindi $\prod_p p^{V_p(b)} = \prod_p p^{V_p(k \cdot a) + V_p(a)}$

per unicità della fattorizzazione: $V_p(b) = \underbrace{V_p(k \cdot a) + V_p(a)}_{\geq 0} \iff V_p(a) = V_p(b) - V_p(k \cdot a)$

$$\forall p, V_p(b) \geq V_p(a) \blacksquare$$

② $a, b \in \mathbb{N}^*, MCD(a, b) = \prod_p p^{\min(V_p(a), V_p(b))}$

dim. $\delta = MCD(a, b)$ è l'unico intero di \mathbb{N}^* t.c.

① $\delta|a$ e $\delta|b$

② $\forall d' \in \mathbb{N} \quad d'|a \quad e \quad d'|b \implies d'|\delta$

considerando che $\delta|b \iff \forall p, V_p(\delta) \leq V_p(b)$

③ $\forall p, V_p(\delta) \leq V_p(a) \quad e \quad V_p(\delta) \leq V_p(b)$

② Se $\exists d' \text{ t.c. } \forall p \quad v_p(d') \leq v_p(a) \leftarrow v_p(d') \leq v_p(b)$

Allora $\forall p, \quad v_p(d') \leq v_p(\delta)$:

③ $\iff v_p(\delta) \leq \min(v_p(a), v_p(b))$

④ \iff se d' è tale che $v_p(d') \leq \min(v_p(a), v_p(b))$

Allora $v_p(d') \leq v_p(\delta)$

$\forall p, \quad v_p(\delta)$ è il più grande degli interi n t.c. $n \leq \min(v_p(a), v_p(b))$

quindi $v_p(\delta) = \min(v_p(a), v_p(b))$ (se è il massimo tra $i \leq, i \neq$)

Esercizio

$$a, b, c \in \mathbb{N}^* \quad \text{MCD}(a, b, c) \mid \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c)$$

pongo $x, y, z = v_p(a), v_p(b), v_p(c)$ (per comodità)

$$\text{MCD}(a, b, c) \mid \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c) \iff \exists n \text{ t.c. } \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c) = n \cdot \text{MCD}(a, b, c)$$

Come dimostrare la lezione:

$$\bullet \text{MCD}(a, b, c) = \prod_p p^{\min(x, y, z)} \quad \bullet \text{MCD}(a, c) = \prod_p p^{\min(x, z)} \quad \bullet \text{MCD}(b, c) = \prod_p p^{\min(y, z)}$$

$$\bullet \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c) = \prod_p p^{\min(x, z) + \min(y, z)}$$

$$\text{quindi } \text{MCD}(a, b, c) \mid \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c) \iff \prod_p p^{\min(x, z) + \min(y, z)} = \prod_p p^{\min(x, y, z)} \cdot \prod_p p^k$$

$$\iff \min(x, z) + \min(y, z) = \min(x, y, z) + k$$

3 casi:

$$\textcircled{1} \min = z$$

$$\textcircled{2} \min = x$$

$$\textcircled{3} \min = y$$

$$\begin{aligned} \text{qui } \min(x, z) &= z \text{ e } \min(y, z) = z \\ \text{e } \min(x, y, z) &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{quindi } z+z &= z+k \\ \text{ovvero } k &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{qui } \min(x, z) &= x \\ \text{e } \min(y, z) &= z \circ y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z & \\ &\swarrow \quad \downarrow \\ &y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+z &= x+k \\ \text{ovvero } k &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{qui } \min(y, z) &= y \\ \text{e } \min(x, z) &= x \circ z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x & \\ &\swarrow \quad \downarrow \\ &z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y &= y+k \\ \text{ovvero } k &= x \\ k &= x \\ k &= z \end{aligned}$$

$$\text{quindi } n = \prod_p p^k \text{ con } k \text{ definito sopra}$$

DIVISORI DI ZERO

in $\mathbb{Z}_{/6\mathbb{Z}}$, $\{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$ dato A snello

$[2] \cdot [3] = [0]$ con $[2], [3] \neq [0]$

ma in \mathbb{Z} non succededef $\alpha \in A$ è divisore di zerose $\exists b \in A \setminus \{0\}$ t.c. $\alpha b = 0_A$ in A qualiasi (tranne se $1_A = 0_A$, $A = \{0\}$) 0_A è divisore di 0

- se $A = K$ CAMPO (es. $A = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$)

cioè $\forall \alpha \in K \setminus \{0\}$, α invertibile $K^\times = K \setminus \{0\}$ L'unico divisore di zero in K è 0_K dim • Supponiamo α divisore di zero:da qui in poi usiamo 0 per 0_K

$\exists b \neq 0$ t.c. $\alpha b = 0$

però b è invertibile $\rightarrow \exists b^{-1} \in K^\times$ t.c. $b \cdot b^{-1} = 1_K$ quindi posso moltiplicare termine α termine per b^{-1}

$$\underbrace{\alpha b b^{-1}}_1 = \underbrace{0}_0 b^{-1}$$

$$\alpha = 0$$

in \mathbb{Z} in \mathbb{Z} , se α è divisore di 0 , allora $\alpha = 0$ (anche se \mathbb{Z} non è un campo)dim • sia α divisore di zero $\iff \exists b \in \mathbb{Z}^* \text{ t.c. } \alpha b = 0 \quad (-\alpha)(-\alpha) = \alpha b = 0$ Senza perdita di generalità, supponiamo $\alpha \geq 0$

$$\exists b \text{ t.c. } \alpha b = 0 \iff 0 = \alpha b = \underbrace{b + b + b + \dots + b}_{\alpha \text{ volte}} \geq b > 0$$

questo è impossibile se $\alpha > 0$.quindi, $\alpha = 0$ ■def dominiodato A snello, $A \neq \{0\}$, si dice che A è un dominio se l'unico divisore di zero in A è 0_A .

- Ogni campo è un dominio, e \mathbb{Z} è un dominio

es) mostrare che $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ è un dominio $\iff N$ primo (\iff campo) (noi non ho capito se basta dimostrare dominio $\iff N$ primo visto che abbiamo già visto in classe che $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ campo)

• dimostriamo $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dominio $\rightarrow N$ primo

Supponiamo $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dominio. Allora, l'unico divisore di 0_{k_N} è 0_{k_N}

Supponiamo per assurdo N non primo $\rightarrow \exists a, b, 1 < a < n, 1 < b < n$ t.c. $N = ab$

quindi, $[a] \cdot [b] = [ab] = [0]$. k_N non è dominio. CONTRAD.

• dimostriamo che N primo $\rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dominio

($\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dominio $\iff \forall [a], [b]$ t.c. $[a] \cdot [b] = [0]$, o $[a] = [0]$ o $[b] = [0]$)

Supponiamo $\exists [a], [b] \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ t.c. $[a] \cdot [b] = [0]$

$[a] \cdot [b] = [ab] = [0]$, significa $N | ab$ (il resto è 0)

Ma, se $N | ab$, poiché N primo, o $N | a$ o $N | b$. (per def. primo)

Ma, se $N | a$, $[a] = [0]$ e se $N | b$, $[b] = [0]$

Quindi, uno dei due divisori è zero

- Se $\alpha \in A$ non è divisore di zero ($\forall b \in A \setminus \{0\}, \alpha b \neq 0$) e $\alpha x = 0_A \implies x = 0_A$

Lemma legge di cancellazione (in A snello)

Se $\alpha \in A$ non divisore di zero, allora $\alpha b = \alpha c \implies b = c$

dim:

$$\alpha b = \alpha c \iff \alpha(b-c) = 0 \quad \text{visto che } \alpha \text{ non è divisore di } 0 \implies b-c = 0 \iff b = c$$

$\alpha \neq 0$

OSSERVAZIONE: Questo implica la legge di cancellazione in \mathbb{Z} (dominio) ($\alpha \neq 0$ perché 0 unico divisore di 0 in \mathbb{Z})

risoluzione di equazioni in A (in particolare $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

$$\alpha X = b \quad \alpha, b \in A$$

X indeterminato (può essere un valore o un insieme)
mentre x (minuscolo) è un valore

- in $A = \mathbb{Z}$ una soluzione di $\alpha X = b$ esiste $\iff \alpha | b$

infatti, se l'insieme delle soluzioni $\neq \emptyset$ e se
 x soluzione, si ha $\alpha x = b \iff \alpha | b$ (def. |)

Se, invece, $\alpha | b \implies \exists k \in \mathbb{Z}$ t.c. $b = \alpha k$ e prendo $k = x$

esempio: $2x = 3$ insieme delle soluzioni $= \{x \in \mathbb{Z} : 2x = 3\} = \emptyset$ vorrebbe dire $2 | 3$ - impossibile

$$2x = 6 \quad \{x \in \mathbb{Z} : 2x = 6\} = \{3\} \quad \text{osserviamo } 6 = 2 \cdot 3 \quad \text{quindi } 2x = 2 \cdot 3 \implies x = 3$$

- $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\alpha X = b$$

- Nel caso in cui A è un anello qualsiasi e $\alpha \in A^\times$ di inverso α^{-1} , posso moltiplicare termine α termine per α^{-1}

$$\underbrace{\alpha^{-1} \alpha}_1 X = \alpha^{-1} b \quad \text{quindi l'eq. ha l'unica soluzione } X = \alpha^{-1} b$$

(es $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$)

- Se per esempio $A = K$ campo

$$\alpha X = b \quad \text{con } \alpha \neq 0 \quad \text{ammette sempre l'unica soluzione } X = \alpha^{-1} b$$

proposizione $\exists X = b \quad \exists, b \in A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

ammette soluzioni $\iff \text{MCD}(\alpha, n) \mid \beta$ con $\alpha = [\alpha] \quad b = [\beta] \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

dim:

• Dimostro ammette soluzioni $\implies \text{MCD}(\alpha, n) \mid \beta$

$$[\alpha][x] - [\beta] = [0]$$

quindi $\exists n \in \mathbb{Z}$ quindi multiplo
di n

Sia $[x]$ soluzione: $\alpha[x] = b$ quindi $[\alpha][x] = [\beta] \iff \alpha x - \beta \in n\mathbb{Z}$

$$\iff \alpha x - \beta = nk \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff \alpha x - nk = \beta \implies \beta \in \alpha\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \delta\mathbb{Z} \iff \delta \mid \beta$$

$\beta \in \text{multiplo}$
 $\text{di } \delta$

• Ora dimostro $\text{MCD}(\alpha, n) \mid \beta \implies$ ammette soluzioni

Sappiamo $\delta = \text{MCD}(\alpha, n) \mid \beta \iff \beta = \delta x \implies \beta \in \alpha\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$

$$\iff \exists u, v \text{ t.c. } \beta = u\alpha + vn \iff \beta - u\alpha = vn$$

\times def congr. mod

$$\iff \beta \equiv_n u\alpha \iff [\beta] = [u][\alpha]^{=\delta} \quad b = x\delta$$

esempio: $[3]X = \emptyset$ in $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$$\alpha = 3, \beta = \emptyset, n = 6 \quad \text{MCD}(\alpha, n) = 3 \mid \emptyset = \beta$$

ci sono soluzioni. $X = [2]$ è soluzione ($[3] \cdot [2] = [6] = [0] \text{ in } \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$)

$X = [4]$ è soluzione ($[3] \cdot [4] = [12] = [0]$)

o anche $[3] \cdot [2] \cdot [2] = [0] \cdot [2] = [0]$)

$X = [0]$ è soluzione ($[3] \cdot [0] = [0]$)

l'insieme delle soluzioni è $\{[0], [2], [4]\} \subset A$

parentesi tutoraggio: equazioni diofantee

Risolvere la seguente equazione diofantea: $\frac{858}{a}x + \frac{253}{b}y = \frac{33}{c}$

① Calcolo l'MCD (a, b)

$$858 = 3 \cdot 253 + 99$$

$$253 = 2 \cdot 99 + 55$$

$$99 = 1 \cdot 55 + 44$$

$$55 = 1 \cdot 44 + 11$$

$$44 = 4 \cdot 11 + 0$$

$$d = \text{MCD}(858, 253) = 11$$

② Mi assicuro che l'MCD divide c

(altrimenti, l'eq. non ha soluzioni)

$$11 \mid 33 ? \text{ sì}$$

③ Calcolo l'identità di Bézout

(il tutor lo fa da sopra e usando a, b invece dei numeri corrispondenti)

$$99 = 858 - 3 \cdot 253 = a - 3b$$

$$55 = 253 - 2 \cdot 99 = b - 2(a - 3b) = -2a + 7b$$

$$44 = 99 - 55 = a - 3b - (-2a + 7b) = 3a - 10b$$

$$11 = 55 - 44 = -2a + 7b - (3a - 10b) = -5a + 17b$$

$$\text{quindi } 11 = -5a + 17b$$

④ Devo trovare $\underline{\underline{33}} = x\underline{a} + yb$: moltiplico a dx e sx per arrivare al numero che cerco

$$11 = -5a + 17b$$

$$\underline{x^3} \quad 33 = 3(-5a + 17b) = -15a + 51b = \underbrace{-15}_{x_0} \cdot 858 + \underbrace{51}_{y_0} \cdot 253$$

ho trovato x_0 e y_0 soluzioni particolari dell'equazione

⑤ Trovo le soluzioni generali

(Soluzioni intere dell'omogeneo associato)

(termine non moltiplicato da x_0)

$$X = x_0 + \frac{b}{\text{MCD}(a, b)} K \quad K \in \mathbb{Z}$$

$$Y = y_0 - \frac{a}{\text{MCD}(a, b)}$$

$$\text{quindi } X = -15 + \frac{253}{11} K = -15 + 23K$$

$$K \in \mathbb{Z}$$

$$Y = 51 - \frac{858}{11} K = 51 - 78K$$

Lemma

$a, b, c \in \mathbb{Z}$ $a, b | c$ e $\text{MCD}(a, b) = 1$ allora $ab | c$

dim:

$$a, b | c \iff c = ak = bh \quad (\exists h, k \in \mathbb{Z})$$

$$\implies a | bh \quad (\text{o anche } b | ah, \text{ ma sceglieremo } a | bh)$$

• Devo dimostrare $\text{MCD}(a, b) = 1 \implies a | h^*$ $\implies ab | c$ moltiplicando per b da entrambi i lati ($c = bh$)

• $\text{MCD}(a, b) = 1 \iff b$ è invertibile modulo a

$$\iff \exists b' \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } bb' \equiv 1 + a\mathbb{Z}$$

(b invertibile se $by \equiv 1$ ovvero $by - 1 \equiv 0$
 $\iff by - k \equiv 1 \quad \text{MCD}(a, b) = 1 \iff ax + by = 1$
 prendo $x = -k$ e queste cose sono uguali)

$$\begin{aligned} \cdot \text{ Dicendo } a | bh \implies a | b' | b'b h &= (1 + ak)h \iff a | b' - hk \\ \iff a | b' - hk &= h \iff a(b' - hk) = h \quad \text{quindi } a | h \blacksquare \end{aligned}$$

III secolo dal matematico Sun Tsu! (\neq the art of war Sun Tsu)

TEOREMA CINESE DEI RESTI

Poniamo $r_1, \dots, r_s \in \mathbb{N}^*$ e supponiamo $\text{MCD}(r_i, r_j) = 1 \quad \forall i \neq j$ \Rightarrow due coprimi

Consideriamo inoltre $c_1, \dots, c_s \in \mathbb{Z}$

Allora il sistema

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} x \equiv c_1 \pmod{r_1} \\ x \equiv c_2 \pmod{r_2} \\ \vdots \\ x \equiv c_s \pmod{r_s} \end{array} \right. \text{ ha un'unica soluzione modulo } R := r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_s$$

ovvero l'insieme $E_* = \{x \text{ soluzione in } \mathbb{Z} \text{ di } (*)\}$ è $x_0 + R\mathbb{Z}$

Come calcolare una soluzione particolare x_0 di $(*)$?

$$\bullet R = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_s \quad \bullet \text{ poniamo } R_i = \frac{R}{r_i} = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \overset{\text{"non } c_i \text{ in "}}{r_i} \cdot \dots \cdot r_s = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{i-1} \cdot r_{i+1} \cdot \dots \cdot r_s$$

e notiamo che $\text{MCD}(R_i, r_i) = 1$ (perché r_i, r_j ecc primi fra loro e in R_i "manca" proprio r_i)

Visto che sono primi fra loro, questa proprietà può essere riformulata dicendo che $[R_i]$ classe di R_i in $\mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}$

è invertibile di inverso $[s_i] \in \mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}$ $[R_i][s_i] = [1]$

Quindi, $\underbrace{[R_i]}_{[1]} \underbrace{[s_i]}_{[y_i] \in \mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}} [c_i] = [c_i]$ quindi abbiamo costruito elementi $[y_1], \dots, [y_s] \in \mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}$ formati dall'inverso di R_i e c_i

• Ora, dimostriamo che $x_0 = \sum_{i=1}^s y_i R_i \in \mathbb{Z}$ è soluzione di $(*)$

* credo che "basti" il lemma di Gauss? Sospendo e $\text{MCD}(a, b) = 1$
 $a | bh$ e $\text{MCD}(a, b) = 1$ allora $a | bc \Rightarrow a | c$
 allora $a | h$
 (combinano i vincoli, per Gauss $a, b \in \mathbb{Z}^*$
 e non \mathbb{Z} , ma non credo ci sarebbe
 perdita di generalità chiedere
 al prof.)

$x_0 = \sum_{i=1}^s y_i R_i \in \mathbb{Z}$ è soluzione di (*)

infatti, se $i \neq j$, $r_i | R_j$ perché R_j è il prodotto di tutti "gli r " tranne r_i ,
quindi l'unico che non lo divide è r_i

Quindi $x_0 = \sum_{j=1}^s y_j R_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s y_j R_j + y_i R_i$ isoliamo il termine non divisibile per r_i (quindi il resto)
il tutto è quindi $\equiv_{r_i} y_i R_i$
(definito come)
 $\equiv_{r_i} c_i$ quindi abbiamo trovato x_0
congruente a $c_i \text{ mod } r_i$

Questo è valido $\forall i = 1, \dots, s$ dunque $x_0 = \sum_j y_j R_j$ è una sol. particolare di (*)

Sistema omogeneo associato

$$\begin{aligned} *_{(H)}: \quad & \left\{ \begin{array}{l} x \equiv 0 \pmod{r_1} \\ x \equiv 0 \pmod{r_2} \\ \vdots \\ x \equiv 0 \pmod{r_s} \end{array} \right. \\ & x \equiv_r 0, \quad i=1 \dots s \end{aligned}$$

Soluzioni? $x \equiv_{r_1} 0 \iff r_1 | x$
 $x \equiv_{r_2} 0 \iff r_2 | x$

ma r_1, r_2 sono primi fra loro, quindi (x lemma) $r_1 r_2 | x$ (Si può andare avanti fino a r_s :
 $x \equiv_{r_3} 0 \iff r_3 | x$, $\text{MCD}(r_1, r_2, r_3) = 1 \Rightarrow r_1 r_2 r_3 | x$ ecc..)

Iterando, ottengo che $R := r_1 \dots r_s | x$

Quindi, l'insieme delle soluzioni di $(*)_H$ è $E_H = R\mathbb{Z}$ (i multipli di R)

proposizione

L'insieme delle soluzioni di (*), E_* è dato da $x_0 + R\mathbb{Z}$

dim: • $E_* \supset x_0 + R\mathbb{Z}$ è chiaro. Infatti, se $x \in x_0 + R\mathbb{Z}$, allora $x = x_0 + Rk \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

ma $Rk \equiv_{r_i} 0 \quad \forall i = 1 \dots s$ ($r_i | Rk$, perché $r_i | R$ - R è il prodotto di tutti gli r_i)

• Addizionando con x_0 , che è soluzione particolare, ottengo $x \equiv_{r_i} c_i + 0 \equiv c_i \pmod{r_i}$

• Dimostriamo $E_* \subset x_0 + R\mathbb{Z}$

$$x \equiv_{r_i} c_i \iff x - c_i \equiv_{r_i} 0$$

(old sistema)

Sia x soluzione dr (*). Allora, $x - x_0 \equiv_{r_i} 0 \quad \forall i = 1 \dots s$

$\implies x - x_0 \in R\mathbb{Z}$ x Lemma ($r_i | x - x_0$, quindi $r_1 r_2 \dots r_s | x - x_0$, quindi $x - x_0$ multiplo di R)

$\implies x \in x_0 + R\mathbb{Z} \implies E_* \subset x_0 + R\mathbb{Z}$

piccola parentesi pratico: quello che ci hanno detto al TUTORAGGIO sul teorema cinese del resto

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{11} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \cdot r_1 = 11, \quad r_2 = 5, \quad r_3 = 2 \\ \text{se sono coprimi, ammette un'unica soluzione modulo R} \end{array}$$

$$\bar{x} = R_1 \bar{x}_1 + R_2 \bar{x}_2 + R_3 \bar{x}_3 + Rk \quad k \in \mathbb{Z}$$

con $R = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ e $R_i = \frac{R}{r_i}$ e \bar{x}_i t.c. $R_i x \equiv c \pmod{r_i}$

① $r_1 = 11 \quad r_2 = 5 \quad r_3 = 2$ sono coprimi? sì.

② $R = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 11 \cdot 5 \cdot 2 = 110$ ricordiamo $c_1 = 1 \quad c_2 = 2 \quad c_3 = 1$

$$R_1 = \frac{11 \cdot 5 \cdot 2}{11} = 10 \quad R_2 = \frac{11 \cdot 5 \cdot 2}{5} = 22 \quad R_3 = \frac{11 \cdot 5 \cdot 2}{2} = 55$$

③ $\bar{x}_i = R_i x \equiv_r c$

• $\bar{x}_1 = 10x \equiv 1 \pmod{11}$

è un'equazione diofantea di tipo

$10x - 11h = 1$ che posso scrivere
(per non avere il -)

con $y = -h \quad 10x + 11y = 1$ (cerco solo x)

risolvo l'eq.: • $\text{MCD}(10, 11) = 1$

Bézout $1 = 10 \cdot \underline{-1} + 11 \cdot 1$

(ho trovato)

x_0 particolare

$22 = 4 \cdot 5 + 2$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$

quindi (Bézout)

$1 = 5 - 2 \cdot 2$

$1 = 5 - 2 \cdot (22 - 4 \cdot 5)$

$1 = \underline{-2} \cdot 22 + 9 \cdot 5$

• $\bar{x}_3 = 55x \equiv 1 \pmod{2}$

55 è dispari, quindi

$\equiv 1 \pmod{2}$

$1x \equiv 1 \pmod{2}$

$[x_3] \equiv [1] \pmod{2}$

• metto l' x particolare $x = x_0 + \frac{b}{\text{MCD}(a, b)} k$

nella formula

$$x = -1 + \frac{11}{1} k$$

k deve essere $0 \leq k \leq d-1$ (MCD)

• quindi $k \in \{0\} \rightarrow x = -1 + 0 = -1$

ma qui cerchiamo $= 2^*$

quindi moltiplico per 2

$$2 = -4 \cdot 22 + 18 \cdot 5$$

$$x = -4 + \frac{5}{1} k$$

Siamo in
mod 11

quindi $[x_1] \equiv [-1] \equiv [10]$

$k \in \{0\} \quad [x_2] \equiv [4] \equiv [1]$

④ metto tutto nella formula finale $(\bar{x} = R_1 \bar{x}_1 + R_2 \bar{x}_2 + R_3 \bar{x}_3 + Rk)$

$177 - 110$

$$[x] = 10 \cdot 10 + 22 \cdot 1 + 55 \cdot 1 + 110k = 177 + 110k = 67 + 110k$$

Esercizio 8 (foglio 3)

Esercizio 8. Trovare tutti gli interi $x \in \mathbb{Z}$ che soddisfino

- (i) $4x \equiv 7 \pmod{15}$
- (ii) $6x \equiv 8 \pmod{9}$
- (iii) $\begin{cases} 1025x \equiv 5312065 \pmod{8} \\ 36x \equiv 322 \pmod{5} \\ 4x \equiv 7 \pmod{3} \end{cases}$
- (iv) $4x \equiv 3 \pmod{385}$.

METODO PELLARIN CRT

$$\textcircled{1} \quad 4x \equiv 7 \pmod{15}$$

① calcolo l'MCD tra 4 e 15

$$\text{MCD}(4, 15) = 1 \iff [4] \text{ invertibile mod. 15}$$

$$\exists n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } 4 \cdot n \equiv_1 1 \quad (\text{es. } n=4)$$

lo faccio perché voglio che quel $4x$ diventa un $(1)x$

② trasformo $4x$ in $x \rightarrow$ moltiplico entrambi i lati per 4

$$4 \cdot 4x \equiv_{15} 28$$

$$x \equiv_{15} 13$$

(moltiplichi con resto 13)

$$\text{quindi, le sol. sono } \mathcal{E} = 15\mathbb{Z} + 13$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} 1025x \equiv 5312065 \pmod{8} \\ 36x \equiv 322 \pmod{5} \\ 4x \equiv 7 \pmod{3} \end{cases}$$

① notiamo che r_1, r_2, r_3 sono primi tra loro ✓

② semplifichiamo le congruenze

$$\textcircled{4} \pmod{8} \quad 1025 = 1024 + 1 = 2^{10} + 1 = \underbrace{(2^3)^2 \cdot 2}_{\equiv_8 0 \text{ perciò}} + 1 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$\cdot 5312065$$

$$\textcircled{5} \quad 8 \mid 40 \quad \text{quindi } 8 \mid 40 \cdot 10\mathbb{Z}$$

$$\text{notiamo che } 5312065 = 4000000 + 1312065$$

$$\text{visto che } 8 \mid 4 \cdot 10^6 \quad 5312065 \equiv_8 1312065$$

$$8 \mid 1200000 \equiv_8 112065 \quad 8 \mid 120000 \equiv_8 -7935$$

$$8 \mid 8000 \equiv_8 65 \equiv_8 1$$

il sistema diventa quindi

$$\begin{cases} x \equiv_8 1 \\ x \equiv_5 2 \\ x \equiv_3 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \quad \text{calcoliamo le altre cose: } R = 3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$$

$$R_1 = r_2 r_3 = 15$$

$$R_2 = r_1 r_3 = 24$$

$$R_3 = r_1 r_2 = 40$$

$$\textcircled{2} \quad 6x \equiv 8 \pmod{9}$$

notiamo che 6 e 9 non sono coprimi.

$$6x \equiv_9 8 \iff 6x - 8 = 9 \cdot k$$

$$\iff 8 = \underbrace{6x - 9k}_{\text{ma questo è impossibile}}$$

notiamo che questi sono divisibili per 3 (MCD 3, 9)

mentre 8 non lo è

$$\mathcal{E} = \emptyset$$

$$\textcircled{2} \cdot 36 \equiv_5 1$$

$$\cdot 322 \quad 5 \mid 320 \quad \equiv_5 2$$

$$\textcircled{3} \cdot 4 \equiv_3 1$$

$$\cdot 7 \equiv_3 1$$

④ troviamo gli inversi S_i :

$$R_1 = 15 \text{ è invertibile modulo } r_1 = 8 \quad 7 \cdot 15 \stackrel{-1}{\equiv} 1 \text{ di inverso } S_1 = 7$$

$$R_2 = 24 \quad 24 \cdot 4 \stackrel{-1}{\equiv} 1 \quad S_2 = 4$$

$$R_3 = 40 \quad 40 \cdot 1 \stackrel{-1}{\equiv} 1 \quad S_3 = 1$$

⑤ calcoliamo $y_i = S_i c_i$ e li inseriamo nella formula finale

i	S_i	c_i	y_i
1	7	1	7
2	4	2	$8 \stackrel{-1}{\equiv} 3$
3	1	1	1

$$X_0 = \sum_{i=1}^3 y_i R_i = 7 \cdot 15 + 3 \cdot 24 + 1 \cdot 40 = 217 \quad \text{soltuzione particolare}$$

$$\text{Soltuzione generale: } E = 217 + 120Z$$

POLINOMI in una indeterminata \Rightarrow coeff in un campo

K campo = $\mathbb{F}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Un polinomio in X a coefficienti in K è definito come

$$P = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^i \quad \text{con } \alpha_i \in K \text{ coefficienti, } n \in \mathbb{Z} \text{ (dipende dal polinomio)}$$

$\alpha_i = 0 \quad \forall i > 0$ (abbastanza grande)

esempio

$$K = \mathbb{R}, \quad 0, \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i \quad K = \mathbb{F}_2 \quad [1]x^5 + [0]x^4 + [2]x^3 + [6]x^2 + [1]x + [1] = x^5 + x + [1]$$

→ insieme di polinomi

$A = K[X]$ è l'insieme dei polinomi (ogni $P \in A$)

L'insieme di polinomi ha una struttura ad anello (comm. un.) $(A, -, +, \cdot, 0, 1)$

Definiamo infatti le operazioni di somma e prodotto:

$$\text{con } P = \sum_{i \geq 0} \alpha_i X^i \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i > 0 \quad Q = \sum_{i \geq 0} b_i X^i \quad b_i = 0 \quad \forall i > 0$$

- $P + Q := \sum_{i \geq 0} (\alpha_i + b_i) X^i$

prodotto di Cauchy

- $P \cdot Q := \sum_{k \geq 0} c_k X^k \quad \text{con } c_k = \sum_{i+j=k} \alpha_i b_j \quad \begin{array}{l} \text{(qui si nota che } c_k = 0 \quad \forall k > 0 \\ \text{- per numeri abbastanza grandi,} \\ \alpha_i \neq 0 \quad b_j \text{ saranno } 0 \end{array}$

→ grado di un polinomio

$$P \in A[X] \quad P = \sum_{i \geq 0} \alpha_i X^i \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i > 0 \quad \text{con } P \neq 0 \quad (\text{ovvero } \{i \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \alpha_i \neq 0\} \text{ finito non vuoto})$$

$$\deg(P) = \max \{i \in \mathbb{N}, \alpha_i \neq 0\} \quad \text{grado massimo} \quad \bullet \text{ Si pone } \deg(0) := -\infty$$

Quindi, l'insieme dei gradi è $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ $\deg: K[X] \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$

- elementi di grado zero $\{P \in K[X] : \deg(P) = 0\} = K^\times$ ↗ sono gli invertibili del campo, ovvero (per def campo) tutti gli el del campo sono $\neq 0$ (quindi sono le "costanti")

Lemmas

$$\textcircled{1} \quad \deg(\alpha) = -\infty \iff \alpha = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \deg(\alpha b) = \deg(\alpha) + \deg(b)$$

$$\textcircled{3} \quad \deg(\alpha + b) \leq \max(\deg(\alpha), \deg(b))$$

$$\text{e } \deg(\alpha + b) = \max(\deg(\alpha), \deg(b)) \text{ se } \deg(\alpha) \neq \deg(b)$$

se i gradi sono uguali gli el. di grado maggiore si potrebbero annullare e il grado sarebbe < (es. $(x^3+x) + (-x^3+2)$)

$$\text{es. } \alpha = x^2 + x + 1 \quad \deg = 2 \quad b = x + 1 \quad \deg = 1 \quad \alpha + b = x^2 + 2x + 2 \quad \deg = 2$$

ANALOGIE TRA I POLINOMI E \mathbb{Z}

$$\mathbb{Z} \quad A = K[X]$$

anello di polinomi
Compone

operazioni:

$$\begin{array}{c} \cdot \mathbb{Z} \xrightarrow{1:1} \mathbb{N} \text{ val assoluto} \\ \alpha \longrightarrow \begin{cases} \alpha & \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \alpha \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

proprietà

- ① $|\alpha| = 0 \iff \alpha = 0$
- ② $|\alpha b| = |\alpha| \cdot |b|$
- ③ $|\alpha + b| \leq |\alpha| + |b|$ diseg. triangolare

$$\cdot A \xrightarrow{\deg} \mathbb{N} \sqcup \{-\infty\} \text{ grado polinomio}$$

$$① \deg(\alpha) = -\infty \iff \alpha = 0$$

$$② \deg(\alpha b) = \deg(\alpha) + \deg(b)$$

$$③ \deg(\alpha + b) \leq \max(\deg(\alpha), \deg(b))$$

ci sono delle corrispondenze, ma serve qualcosa di più vicino

def c-valore assoluto di un polinomio

Dato un polinomio $P \in A \setminus \{0\}$

Scegliamo $c > 1$

$$|P|_c := c^{\deg(P)} \quad (\text{dipende da } c)$$

Allora proprietà

$$① |\alpha|_c = 0 \iff \alpha = 0$$

$$② |\alpha b|_c = |\alpha|_c \cdot |b|_c$$

$$③ |\alpha + b|_c \leq \max(|\alpha|_c, |b|_c) \leq |\alpha|_c + |b|_c$$

invece, se $P = 0$

$$|0|_c := 0 = c^{-\infty}$$

$$\text{Per } ② \quad |\alpha b|_c = c^{\deg(\alpha b)} = c^{\deg(\alpha) + \deg(b)} = |\alpha|_c \cdot |b|_c$$

$$\text{Per } ③ \quad |\alpha + b|_c = c^{\deg(\alpha + b)} \leq c^{\max(\deg(\alpha), \deg(b))} \leq c^{\deg(\alpha)} + c^{\deg(b)}$$

ALGORITMO DELLA DIVISIONE EUCLIDEA SUI POLINOMI

Teorema $\alpha, b \in A = K[X] \quad (\alpha, b) \neq (0, 0)$

Esiste unica $(q, r) \in A \times A$ t.c. $\alpha = qb + r$ dove $\deg(r) < \deg(b)$ ovvero $|r|_c < |b|_c$

divisione in colonne

$$\begin{array}{l} \alpha = x^4 + x + 1 \\ b = x^3 - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^4 + \\ x^3 - 2 \\ \hline x^4 \end{array} \quad \begin{array}{r} x+1 \\ -2x \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 \quad -2 \\ \hline X \end{array} \quad \begin{array}{l} ① x^4/x^3 \\ ② \text{moltiplico per } (x^3 - 2) \\ ③ \text{sottraggo} \\ ④ \text{grado} < \text{quindi fine} \end{array}$$

$q = x, \quad r = 3x + 1$

\mathbb{Z} $A = K[x]$

inter:

polinomi

TABELLA ANALOGIE

TRA \mathbb{Z} e $K[x]$

divisione euclidea

divisione euclidea

(il grande ripasso delle proprietà di \mathbb{Z})

valore assoluto

 $| \cdot |_c \circ \deg$ \mathbb{N}^*

("positivi")

 $A^+ = \{ \text{polinomi monici} \}$ in forma $P = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ con $a_n \neq 1$ (coeff. grado massimo)• il prodotto di monici è monico
(ma la somma non necessariamente) $\mathbb{Z}^\times = \{ \pm 1 \}$

inversi sui polinomi:

 $A^\times = K^\times$ sia $a \in A^\times \exists b \in A^\times \text{ t.c. } ab = 1$ $\Rightarrow \deg(a) + \deg(b) = 0 \quad (\deg(ab) = 0 = \deg(a) + \deg(b))$ $\Rightarrow \deg(a) = \deg(b) \in \mathbb{N} \text{ (o } -\infty)$ $\Rightarrow \deg(a) = \deg(b) = 0$ $\Rightarrow a, b \in K^\times \text{ ("costanti" diverse da 0)}$ divisibilità in \mathbb{Z} $a|b \iff$ $\exists H \in A \text{ t.c. } b = aH$ $\iff b \in aA$ $\{a : 1 \in A\}$ $a|b \iff$ $\exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } b = ak$ $\iff b \in a\mathbb{Z}$ $\iff b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$ $\iff bA \subset aA$ proprietà di $|$ su A

① riflessiva

② transitiva

 $a|b, b|c \iff cA \subset bA \subset aA$ $\iff cA \subset aA \iff a|c$

③ quasi riflessiva ma non:

 $a, b \in A. \text{ Supponiamo } a|b \wedge b|a$ $\iff \exists v \in A \text{ t.c. } b = av, \exists u \in A \text{ t.c. } a = bv$ quindi $a = uv \iff \deg(a) = \deg(u) + \deg(v) + \deg(a)$ possiamo supporre $a, b \neq 0$ $\deg(a) = \deg(a) + \deg(u) + \deg(v) \iff 0 = \deg(u) + \deg(v)$ $\iff \deg(u) = \deg(v) = 0$ $\iff u = \lambda \in K^\times, v = \mu \in K^\times \text{ (sempre per la questione } \deg(0) = \text{"costante" } != 0)$ Quindi $\exists \lambda \in K^\times = A^\times \text{ t.c. } b = \lambda a$

Lemmas $A = K[X]$ è un dominio d'integrità

\mathbb{Z} è un dominio d'integrità

dim Sia $P \in A$ divisore di zero

$$\exists Q \in A \setminus \{\emptyset\} \text{ t.c. } PQ = \emptyset$$

$$\deg(PQ) = \deg(\emptyset) = \deg(P) + \deg(Q) = -\infty$$

impossibile somma due numeri $\in \mathbb{N} = -\infty$

$$\text{Quindi } \deg(P) = -\infty \iff P = \emptyset$$

$$a \equiv b \pmod{n}$$

$$\iff n | a - b$$

$$a, b \in A, H \in A \setminus \{\emptyset\}$$

$$a \equiv b \pmod{H} \text{ rel d'eq.}$$

$$\text{es. transitività } a \equiv_H b, b \equiv_H c$$

$$\iff H | a - b \wedge H | b - c$$

$$\iff a - b = Hv \quad \exists v \in A, b - c = Hw \quad \exists w \in A$$

$$a - b = b - c = H(v + w)$$

$$\iff H | a - c \iff a \equiv_H c$$

$$A/H \text{ snello}$$

commutativo unitario

$$A/H = \{[a] : a \in A\} = \{a + H_0 : a \in A \text{ t.c. } \deg(a) < \deg(H)\}$$

$$a \in A, [a] = a + H_0 \subset A$$

$$a \in \mathbb{Z}, [a] = a + n\mathbb{Z}$$

$$\text{Sistema compl. Rapp. mod } H = \{a \in A : \deg(a) < \deg(H)\}$$

non alterano il grado di a rispetto a H

de: MCD in \mathbb{Z}

de: MCD in A

Bézout in \mathbb{Z} :

$$a, b \in A, \text{ poniamo } aA + bA = \{m \in A \text{ t.c. } \exists v, v \in A \text{ con } m = va + vb\}$$

Lemmas Bézout in $A = K[X]$

$$a, b \in A \text{ t.c. } (a, b) \neq (0, 0)$$

$$\text{allora } aA + bA = \Delta A \quad \exists! \delta \in A^+$$

monico
(notiamo che infatti è l'insieme "analogo" a \mathbb{N}^* in A)

dimostri che \mathcal{E}^+ contiene un el. di grado minimo unico (δ)

(mostrare non vuoto $(a, b) \neq \emptyset$, principio Minimo)

$$\mathcal{E} = aA + bA, \quad \mathcal{E}^+ = \{m \in \mathcal{E} \text{ t.c. } m \in A^+\}$$

polinomi monici

MCD

$$(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

prop. $\exists! d \in \mathbb{N}^*$ t.c.

$$\textcircled{1} \quad d | a \wedge d | b$$

\textcircled{2} se $d' \in A$ t.c.

$$d' | a \wedge d' | b \Rightarrow d' | d$$

MCD

$$(a, b) \in A^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

prop. $\exists! d \in A^+$ t.c.

$$\textcircled{1} \quad d | a \wedge d | b$$

\textcircled{2} se $d' \in A$ t.c.

$$d' | a \wedge d' | b \Rightarrow d' | d$$

$$\text{inoltre } d = \delta = \text{MCD}(a, b)$$

$$\text{inoltre } d = \delta = \text{MCD}(a, b)$$

$$\text{coprimi } a, b \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \text{MCD}(a, b) = 1$$

$$\text{coprimi } a, b \in A \text{ t.c. } \text{MCD}(a, b) = 1$$

$$\text{irriducibile } a \in A \setminus A^\times$$

$$a \text{ irriducibile se } \forall b, c \in A : a = bc$$

$$\text{allora } a | b \text{ o } c \in A^\times$$

$$\text{primo } a \in A \setminus A^\times, a \neq 0$$

$$\text{primo se } a | bc \Rightarrow a | b \text{ o } a | c$$

$$\text{irriducibile } P \in A \setminus A^\times \quad (\deg(P) > 0)$$

$$P \text{ è irriducibile se, scrivendo } P = QR$$

$$\text{allora si ha } a | Q \in A^\times \text{ o } R \in A^\times$$

osservazione:

$$X - x \text{ è irriducibile } \forall x \in K$$

$$X - x = U \cdot V$$

$$\deg(X - x) = \deg(U) + \deg(V)$$

$$\Rightarrow \{\deg(U), \deg(V)\} = \{0, 1\} \text{ almeno uno è invertibile (di grado 0)}$$

Lemmas: primo \iff irriducibile

Lemmas: P irriducibile \iff P primo

Teorema Fondamentale Aritmetica

$\forall a \in \mathbb{Z}^*$ a si decomponga
in modo unico come:

$$d = (\pm 1) \cdot \prod_{p \text{ primo}} p^{v_p(a)}$$

$v_p(a) \in \mathbb{N}$, $\{p : v_p(a) \neq 0\}$ finito

Teorema della Fattorizzazione Unica

Ogni $H \in A - \{\emptyset\}$ si decomponga
in modo unico come prodotto:

$$H = \lambda \cdot \prod_{\substack{P \text{ irr.} \\ P \in A^+}} P^{v_P(H)} \quad v_P(H) \in \mathbb{N} \text{ e} \\ \{P : v_P(H) \neq 0\} \text{ finito}$$

FATTORIZZAZIONE

in $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ la fattorizzazione è "facile" (è facile caratterizzare i polinomi irriducibili), invece in $K = \mathbb{F}_p, \mathbb{Q}$ la fattorizzazione è difficile

teorema

• in $\mathbb{C}[x]$ i monici irriducibili sono tutti i polinomi nella forma $X - \alpha : \alpha \in \mathbb{C}$ (polinomi di primo grado)

• in $\mathbb{R}[x]$, se P monico irriducibile, allora o: ① $\deg(P) = 1$ ($X - \alpha : \alpha \in \mathbb{R}$)

② se $\deg(P) = 2$

$$(P = X^2 + \alpha X + b) \text{ allora } \Delta = \alpha^2 - 4b < 0$$

def VALUTAZIONE

dati $k \in K$, $F \in K[X] = F_0 + F_1X + \dots + F_nX^n$

la valutazione di F in x

è $ev_x(F) = F_0 + F_1x + \dots + F_nx^n$ (è la "sostituzione" di X)

$$ev: K[X] \longrightarrow K$$

OSSERViamo:

$$\textcircled{1} ev_x(F+G) = ev_x(F) + ev_x(G)$$

$$\textcircled{2} ev_x(F \cdot G) = ev_x(F) \cdot ev_x(G)$$

$$\textcircled{3} \lambda \in k, ev_x(\lambda) = \lambda \text{ (costanti) e non invertibili perché vale per 0}$$

• Si dice che $ev_x: K[X] \longrightarrow K$ è un ^{OMO}MORFISMO DI ANELLI

esempio: $F = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$, $x=1$, $ev_x(F) = X^2 + 1 = 2$

Lemma Sia $x \in K$

allora $ev_x^{-1}(\{0\}) = (X-x)A$ $\curvearrowleft K[X]$ $(x \in K \text{ tali che sostituire danno 0})$
polinomi che si annullano in X

dim:

• dimostra $ev_x^{-1}(\{0\}) \supset (X-x)A$ \curvearrowleft

Sia $Q = (X-x)H$. Allora $ev_x(Q) = ev_x(X-x) \cdot ev_x(H) = 0$
 $\implies Q \in ev_x^{-1}(\{0\})$

• dimostra $ev_x^{-1}(\{0\}) \subset (X-x)A$

Sia $P \in A$ t.c. $ev_x(P) = 0$.

per l'algoritmo di divisione euclidea per $X-x$ $\exists! (q, r) \in A \times A$ t.c. $P = q(X-x) + r$ $\deg(r) < \deg(X-x)$ $\deg(r) \in \{-\infty, 0\} \iff r \in K$
 $r = 0, r \text{ const} \neq 0$

$$ev_x(P) = ev_x(q(X-x) + r) = ev_x(q) \underbrace{ev_x(X-x)}_{0 \text{ per ipotesi}} + ev_x(r)$$

P ha una radice in x

$$\implies ev_x(r) = 0 \text{ e, per ③ } r = ev_x(r) = 0 \text{ quindi } X-x | P \iff P \in (X-x)A \blacksquare$$

(P ha una radice in $x \iff X-x | P$, $ev_x(P) = 0$)

es. 1 scheda

Fattorizzare (non c'è una tecnica universale)

- $X^2 + X + 6$ in $\mathbb{R}[X]$ un polinomio di grado 1 in $K[X]$ è sempre irriducibile.

In $\mathbb{R}[X]$ anche i polinomi di grado 2 (SOLO) con $\Delta < 0$ sono irriducibili

nessuna radice reale

$$\textcircled{4} \quad \Delta(bx^2 + bx + c) = b^2 - 4ac = 1 - 24 = -23 < 0 \quad \text{è irriducibile} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \exists v_x (x^2 + x + 6) \neq 0$$

essendo irriducibile, la sua fattorizzazione è uguale a se stesso: " $X^2 + X + 6$ "

- $X^3 - 6x^2 + 11x - 6$ in $\mathbb{R}[X]$

per i polinomi grado 3 si può andare a tentativi

· $\exists v_0$ no ($c'è -6$)

$$\exists v_1 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 12 - 6 - 6 = 0$$

1 è radice, quindi il pol. irriducibile $x-1$ divide il polinomio $\iff x-1 \mid x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

calcolo il quoziente:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x-1 \\ \hline x^3 - x^2 & x^2 - 5x^2 + 6 \\ -5x^2 + 11x - 6 & \\ \hline -5x^2 + 5x & \\ 6x - 6 & \\ \hline 6x - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

poi uso la formula quadratica:

$$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$$

quindi: $x_i = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \quad (\text{entrambi dividono } x-1 \text{ e sono coprimi, quindi il loro prodotto divide } (x-1)^2)$$

$$\text{quindi: } P = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

Avrei anche potuto provare $\exists v_1, \exists v_2, \exists v_3$ e vedere che avrebbe funzionato

- $X^2 - 2X + 2$ in $\mathbb{C}[X]$ $C = \{x+iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \text{ ovvero } i^2 = -1\}$

pensiamo prima in $\mathbb{R}[X]$ un'eventuale fattorizzazione rimarrebbe in $\mathbb{C}[X]$ (al massimo da affinare)

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \quad \text{è irriducibile in } \mathbb{R}[X]$$

ma si fattorizza in $\mathbb{C}[X]$ perché ommette le radici

$$x_1 = \frac{2+2i}{2} = i+1 \quad x_2 = \frac{2-2i}{2} = i-1$$

$$F = (x - (i+1))(x - (i-1))$$

■ $F = x^3 - 1$ si ha $\text{ev}_1(F) = 0$ per qualunque campo

$F = (x-1) G$ div.
escludes
FALCA $= (x-1)(x^2+x+1)$ ha $\Delta < \emptyset$, irriducibile
(anche in \mathbb{Q} - se lo è in \mathbb{R})

La fattorizzazione in $\mathbb{R}[x]$ è $(x-1)(x^2+x+1)$ (idem in $\mathbb{Q}[\mathbb{R}]$)

in \mathbb{C} : radici $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$

la fatt. in $\mathbb{C}[x]$ è $F = (x-1)(x-x_1)(x-x_2)$

\mathbb{C}

NUMERI COMPLESSI

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$i := \sqrt{-1}$ caratterizzato dalla condizione $i^2 = -1$

possiamo anche scrivere $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$

realizzazione cartesiana di \mathbb{C}

Operazioni: posti $z = x + iy$ $z' = x' + iy'$

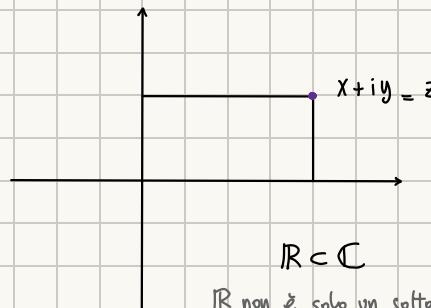
$$\bullet -z := -x + i(-y) \in \mathbb{C} \quad \text{opposto}$$

$$z + z' := (x + x') + i(y + y') \in \mathbb{C} \quad \text{somma}$$

$$\bullet zz' := (x + iy)(x' + iy') = xx' + ix'y + ix'y' + i^2yy' = \\ = xx' - yy' + i(x'y + xy') \in \mathbb{C} \quad \text{prodotto}$$

• NUOVA operazione: CONIUGAZIONE COMPLESSA sopra

• $(\mathbb{C}, -, +, \cdot, 0, 1)$ è unello commutativo unitario



la parte reale $\operatorname{Re}(z) = x$
la parte immaginaria $\operatorname{Im}(z) = y$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

\mathbb{R} non è solo un sottoinsieme,
ma un SOTTOCAMPO (sottoinsieme campo di un campo)

→ esponenziale di Euler

$$e^{iy} := \cos(y) + i \sin(y) \in \mathbb{C} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad y \mapsto e^{iy}$$

Euler ha notato che, se $\theta, \eta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\eta}$$

prop. potenze

$$e^{i(\theta+\eta)}$$

||

$$[\cos(\theta) + i \sin(\theta)] \cdot [\cos(\eta) + i \sin(\eta)]$$

||

$$\cos(\theta)\cos(\eta) + \cos(\theta)i\sin(\eta) + i\sin(\theta)\cos(\eta) + i^2\sin(\theta)\sin(\eta)$$

$$(i^2 = -1) - \sin(\theta)\sin(\eta)$$

||

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$$\text{con } \theta = \theta + \eta$$

raggruppo parte reale e immaginaria

$$\cos(\theta)\cos(\eta) - \sin(\theta)\sin(\eta)$$

$$+ i(\cos(\theta)\sin(\eta) + \cos(\eta)\sin(\theta))$$

$$\cdot \cos(\theta)\cos(\eta) - \sin(\theta)\sin(\eta) = \cos(\theta + \eta)$$

$$\cdot \cos(\theta)\sin(\eta) + \cos(\eta)\sin(\theta) = \sin(\theta + \eta)$$

$$\cos(\theta + \eta) + i \sin(\theta + \eta)$$

• in modo simile si trova $(e^{iy})^n = e^{iny} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

non l'ha fatto ma l'ha trovata su internet
(+ formula di De Moivre: $\cos(\theta) + i \sin(\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$)

Esempi numeri complessi (Eulero, De Moivre)

$$e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1 + i0 = 1$$

$$e^{i\cdot 0} = \cos(0) + i \sin(0) = 1 + i0 = 1$$

$$1 = e^{i2\pi} = e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot 3} = (e^{\frac{2\pi i}{3}})^3 \quad \text{poniamo } x = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$x^3 = 1$ quindi x è radice di $x^3 - 1$ $\operatorname{ev}_x(x^3 - 1) = 0$

• Osserviamo $1 = 1^2 = (e^{\frac{2\pi i}{3}})^{3 \cdot 2} = (e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot 2})^3 = (e^{\frac{4\pi i}{3}})^3$ quindi anche x^2 è radice di $x^3 - 1$

$$\cdot x^0 = e^{\frac{0\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{0\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0\pi}{3}\right) = 1$$

$$\cdot x^1 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\cdot x^2 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

L'insieme $\{x^0, x^1, x^2\} = R$ ha 3 elementi distinti e

$$\forall y \in R, \operatorname{ev}_y(x^3 - 1) = 0 \implies x^3 - 1 = (x - x^0)(x - x^1)(x - x^2)$$

$$\text{in (4)} \quad e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad e^{\frac{4\pi i}{3}} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

CONIUGAZIONE COMPLESSA nuova operazione di \mathbb{C}

Per $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\bar{z} = x - iy \quad \text{cambio segno alla parte immaginaria}$$

poniamo anche $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h(z) = \bar{z}$

proprietà

$$\textcircled{1} \quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad (h(z+z') = h(z) + h(z'))$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'} \quad (h(zz') = h(z)h(z'))$$

$$\textcircled{3} \quad \overline{-z} = -\bar{z} \quad (h(-z) = -h(z))$$

$$\textcircled{4} \quad h \text{ è una biiezione} \quad h^{-1} = h$$

h è un
isomorfismo
di snelli

DA APPUNTI EXXSS
(non l'ho fatto a lezione non serve saperlo)
ero solo curiosità mia

omomorfismo: dati (G, \cdot) , (H, \odot)
strutture algebriche dello stesso tipo
un omomorfismo è $f: G \rightarrow H$
tale che $f(g \cdot h) = f(g) \odot f(h) \quad \forall g, h \in G$

isomorfismo: $f: G \rightarrow H$
se è OMOMORFISMO ed è BIETTIVA

es. mostrare $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4}$: $z = x + iy \quad z' = x' + iy'$

$$\textcircled{1} \quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

$$\overline{z+z'} = \overline{(x+x') + i(y+y')} = \overline{x+x' - i(y+y')} = \bar{x} - iy + \bar{x}' - iy' = (\text{raccogliendo}) x+x' + i(y+y')$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{xx' - yy' + i(xy' + xy)} = xx' - yy' - i(xy' + xy) \quad \overline{\bar{z} \cdot \bar{z'}} = \bar{x} - iy \cdot (x' - iy) = xx' - ixy' - ix'y + i^2yy' = xx' - yy' - i(xy' + xy)$$

$$\textcircled{3} \quad \overline{-z} = -\bar{z}$$

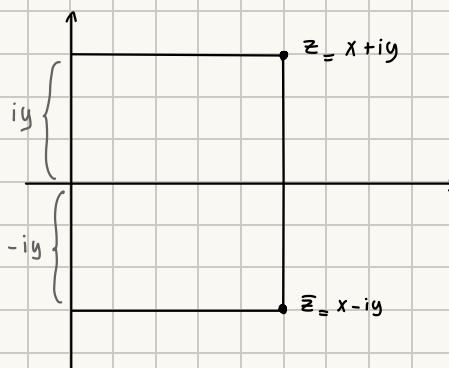
$$-\bar{z} = -\overline{x+i(-y)} = -x-i(-y) \quad -\bar{z} = -(x-iy) = -x-i(-y)$$

reali e \bar{z}

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$$

nei reali, $z = \bar{z}$
(i numeri reali non hanno
parte immaginaria)

$$z = x + i0 \iff z = x - i0$$



graficamente, $(-)$ corrisponde alla riflessione rispetto all'asse \mathbb{R}
 $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \bar{z}$

Formule fondamentali

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2$$

$= 0 \iff x = y = 0$
 $> 0 \iff z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

valore assoluto complesso

• \mathbb{C} è un campo

(uso l'inverso di $z\bar{z}$ per trovare quello di z)

dim: dato $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, prendo $z\bar{z} = x^2 + y^2$ e lo moltiplico per il suo inverso: $(x^2 + y^2)^{-1}$

$$\underbrace{z\bar{z}(x^2 + y^2)^{-1}}_{\text{inverso di } z} = 1 \quad \text{quindi ogni elemento non nullo di } \mathbb{C} \text{ è invertibile} \blacksquare$$

"Sui libri si trova:"

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{(x^2 + y^2)} = 1$$

esempi:

$$\cdot z = 2 = 2+i0 \in \mathbb{R} \quad \bar{z} = 2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

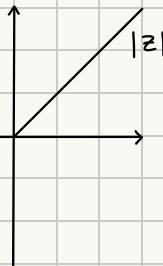
$$\cdot z = i = 0+1 \cdot i \quad \bar{z} = -i \quad x^2 + y^2 = 1 \quad z^{-1} = \frac{-i}{1} = -i$$

$$\cdot z = 1+i \quad \bar{z} = 1-i \quad z\bar{z} = 2 \quad z^{-1} = \frac{1-i}{2} \quad (1+i) \frac{1-i}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Valore assoluto complesso

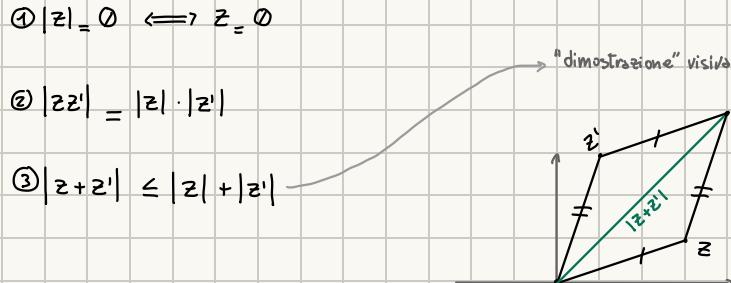
proprietà

$$\textcircled{1} |z| = 0 \iff z = 0$$



$$\textcircled{2} |zz'| = |z| \cdot |z'|$$

$$\textcircled{3} |z+z'| \leq |z| + |z'|$$



per le proprietà dei triangoli:
lunghezza lato < somma 1. altri lati

Proprietà / esercizio

$$\forall g \in \mathbb{R} \quad \textcircled{1} |e^{ig}| = 1 \quad \textcircled{2} (e^{ig})^{-1} = \overline{e^{ig}} = e^{-ig}$$

dim:

$$\textcircled{1} e^{ig} = \cos(g) + i \sin(g) \quad \left| e^{ig} \right| = \sqrt{\underbrace{\cos(g)^2 + \sin(g)^2}_{=1 \text{ (prop sin, cos)}}} = \sqrt{1} = 1$$

• $e^{ig} \neq 0$, quindi è invertibile

$$e^{ig} \cdot e^{-ig} = e^{ig} e^{-ig} \quad \text{con } \eta = -g = e^{i(g-\eta)} = e^{i0} = 1 \quad \text{quindi } e^{-ig} = (e^{ig})^{-1} \text{ (inverso)}$$

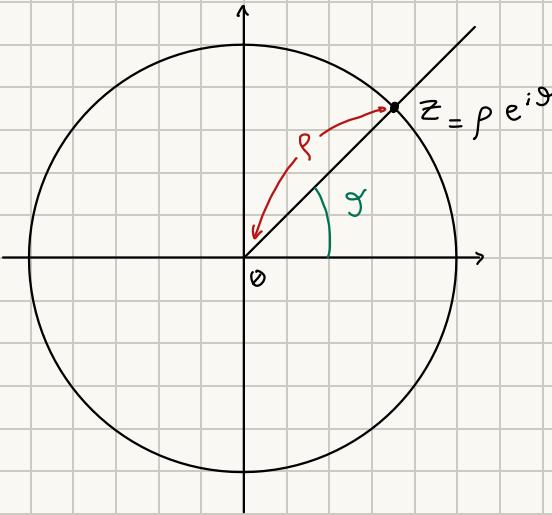
$$\overline{e^{ig}} = \overline{\cos(g) + i \sin(g)} = \frac{\overline{e^{ig}}}{\cos(g)^2 + \sin(g)^2} = \frac{\overline{e^{ig}}}{1} \quad \text{ma anche } \frac{\overline{e^{ig}}}{|\overline{e^{ig}}|^2} \quad \text{quindi } \frac{1}{\overline{e^{ig}}} \quad \text{quindi } \overline{e^{ig}} = (e^{ig})^{-1}$$

RAPPRESENTAZIONE POLARE

dati $z \in \mathbb{C}$ $z = x + iy$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

Lemme

- esiste $\vartheta \in \mathbb{R}$ t.c. $z = \rho e^{i\vartheta}$
- oltre, $\vartheta + 2\pi\mathbb{Z}$ è unicamente determinato



dim (E g...)

$$\rho = \sqrt{z\bar{z}}, z' := \rho^{-1} \cdot z$$

$$\cdot z' \bar{z}' = \rho^{-1} z \bar{\rho^{-1} z} = \rho^{-2} z\bar{z} = \rho^{-2} \cdot \rho^2 = 1$$

il coniugato di un reale è il reale stesso
ora so che è l'inverso

$$\cdot z' = x' + iy'$$
$$\exists \vartheta \text{ t.c. } x' = \cos(\vartheta) \quad y' = \sin(\vartheta) \quad \textcircled{1}$$

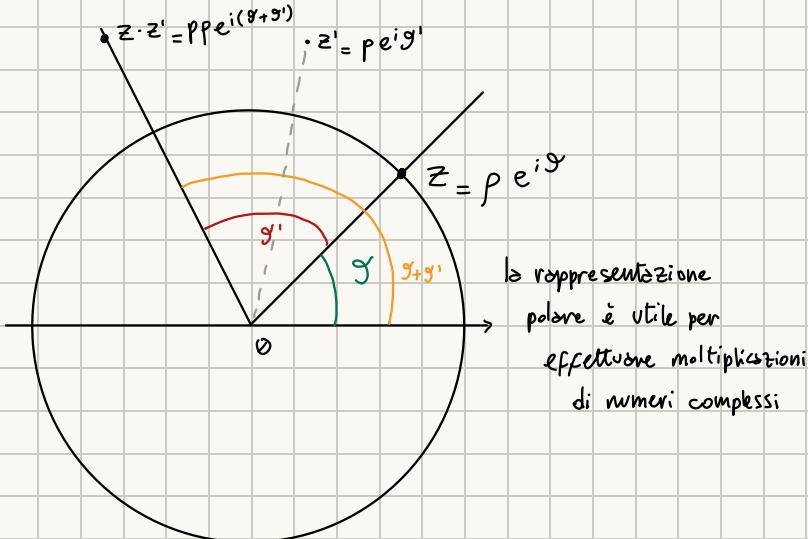
$$\Rightarrow (\text{sostituisco in } z' = x' + iy') \quad z' = \cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta) = e^{i\vartheta} \quad \text{quindi (per } z' = \rho^{-1} z) \quad z = \rho e^{i\vartheta}$$

Le soluzioni di $\textcircled{1}$ sono esattamente gli elementi di $\vartheta + 2\pi\mathbb{Z}$ per un certo $\vartheta \in [0, 2\pi)$

• Su \mathbb{R} c'è la relazione di congruenza mod. 2π

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha \equiv \beta \pmod{2\pi} \iff \alpha - \beta \in 2\pi\mathbb{Z} \quad (\text{che è una rel. di equivalenza})$$

da cui $\vartheta + 2\pi\mathbb{Z}$ è una classe di equivalenza e si identifica con un elemento di $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (anche se non è un insieme)



OSSERVAZIONE	$\sqrt{\cos(\vartheta)^2 + \sin(\vartheta)^2}$
$z \in \mathbb{C}$ è della forma $e^{i\vartheta} \iff z = 1$	
viceversa se $ z = 1$ allora la sua distanza dall'origine è 1. Quindi giace sul cerchio delle unità di \mathbb{C}	
$\Rightarrow \exists \vartheta \text{ t.c. } z = \cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)$	

def ALGEBRICAMENTE CHIUSO

K campo è detto algebricamente chiuso se: $\forall F \in K[X] \setminus K$ no el. del campo ("costanti")

$$\exists x \in K \text{ t.c. } x \text{ è radice di } F \iff \exists x \in K : X-x \mid F$$

(se ha almeno una radice in K)

Lemma

K è algebricamente chiuso se i soli polinomi irriducibili e monici sono i polinomi $X-x$, $x \in K$ (grado 1)

dimostrazione

• (\Rightarrow lemma) Sia $P \in K[X]$ irriducibile e monico.

Siccome K è chiuso algebricamente (per ipotesi) $\exists x \in K$ t.c. $X-x \mid P$

$$P = (X-x)Q \text{ con } Q \in K[X] \setminus \{\emptyset\}$$

$\deg(P) = 1 + \deg(Q)$ · se P è di grado 1, ho già dimostrato.

· se $\deg(P) \geq 2$ allora $\deg(Q) \geq 1$. Quindi, $Q \notin K[X]^* = K^*$ ($= K \setminus \{\emptyset\}$)

ma anche $(X-x) \notin K[X]^*$. Questo contraddice P irriducibile $\implies \deg(P) = 1$
 $\implies P = X-x$

• (\Leftarrow lemma) Supponiamo $\{P \in K[X] \text{ monico irriducibile}\} = \{X-x : x \in K\}$

Sia P monico $\deg \geq 1$. Allora $P = \prod_{\substack{Q \text{ irr.} \\ \in K}} Q^{v_Q(P)}$ i soli irr. e monici hanno $\deg = 1$

$\prod_{x \in K} (X-x)$

Sia $x \in K$ t.c. $v_{X-x}(P) \neq 0$. Allora $X-x \mid P \iff v_{X-x}(P) = 0$
 $\iff x \text{ è radice di } P \blacksquare$

Corollario: MOLTEPLICITÀ

K algebricamente chiuso $\implies \forall F \in K[X] \setminus \{\emptyset\}$ si scrive in modo unico come

$$F = \lambda \prod_{x \in K} (X-x)^{v_x(F)}$$

$v_x(F)$ è la MOLTEPLICITÀ di F in x

$$\text{Si ha che } \{x : v_x(F) \neq 0\} = \{x : v_x(F) = 0\} = \{x \text{ radice di } F\} = R$$

chiaramente un pol.
si decomponi solo con le sue radici

Questo insieme ha cardinalità $\leq \deg(F) := n$

$$\deg(F) = \sum_{x \in K} v_x(F) = \sum_{x \in R} v_x(F) \geq \sum_{x \in R} 1 = \text{cardinalità di } R \quad (\text{ovvero, perché un pol. di grado } n \text{ ha } \leq n \text{ soluzioni})$$

esp. dei polinomi
in cui si scomponete

Teorema (fondamentale dell'algebra)

\mathbb{C} è algebricamente chiuso

(dim. omessa perché usa elementi dell'analisi)

Teorema

$\forall K$ campo esiste sempre un altro campo algebricamente chiuso che lo contiene

esempio \mathbb{R} non è algebricamente chiuso ma $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$(x^2 + 1 \Delta < 0 \text{ è irr. e non ha grado 1})$

31/10

FATTORIZZAZIONE DI VARI POLINOMI

- $X^n - 1 \quad (n \leq 5)$

il polinomio $X^n - 1$ ha sempre radice 1 (e $X-1 \mid X^n - 1$)

$$X^n - 1 = (X-1)Q \quad \begin{matrix} \deg(Q) = n-1 \\ \text{unicamente determinata} \end{matrix}$$

più precisamente $Q = X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1$

↓

$$\text{infatti } (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1) = X^n + X^{n-1} + \dots + X^2 + X - (X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1) = X^n - 1$$

- $n=3 \quad X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1) \quad \text{fattorizzazione in } \mathbb{R}[X]$

$$\text{in } \mathbb{C}[X] \quad X^2 + X + 1 = \left(X + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(X + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

(io che ragiona...)

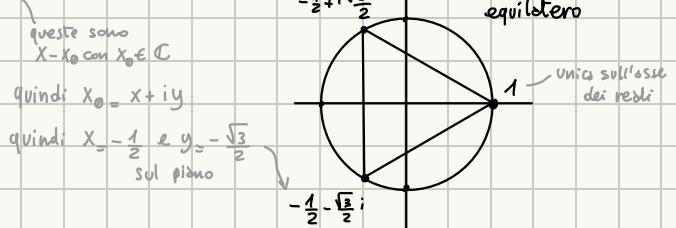
per la rapp. polare, $\exists \vartheta$ t.c. $z = \rho e^{i\vartheta}$

nel cerchio delle unità, $\rho = 1$, $z = e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)$

quindi $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono $\cos \vartheta$ e $\sin \vartheta$ di un ϑ - quale?

$$\cos(\vartheta) = -\frac{1}{2} \text{ se } \vartheta = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \sin(\vartheta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ se } \vartheta = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{7\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\vartheta = \frac{2\pi}{3} \quad \text{quindi } z = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad (\text{per } -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ è } \frac{4\pi}{3})$$



$$-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = x = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad \text{①} \quad -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = x^2 = (e^{\frac{2\pi i}{3}})^2 = (e^{\frac{2\pi i}{3}})^{-1} \cdot (e^{\frac{2\pi i}{3}})^{-1} \quad \text{②}$$

$$\text{② } -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4\pi i}{3}} = e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot 2} = (e^{\frac{2\pi i}{3}})^2$$

② abbiamo già dimostrato P.49 che $(e^{i\vartheta})^{-1} = \overline{(e^{i\vartheta})} = e^{-i\vartheta}$

quindi basta che $e^{\frac{4\pi i}{3}} = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$ → questo è vero per periodicità:

$$\frac{4\pi i}{3} = -\frac{2\pi i}{3} + 2\pi i$$

OSSERVAZIONE: n pari ha anche la radice -1 (perché $(-1)^n = 1$)

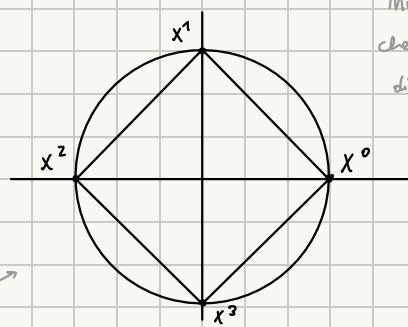
- $n=4 \quad X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i) \text{ in } \mathbb{R}[X]$

$(X-1)(X+1)(X-i)(X+i) \text{ in } \mathbb{C}[X]$

$$X^4 = (X - x^0)(X - x^1)(X - x^2)(X - x^3)$$

$$\text{con } x = e^{\frac{2\pi i}{4}} = e^{\frac{\pi i}{2}} = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_0 + i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_1 = i$$

$$= (X - i^0)(X - i^1)(X - i^2)(X - i^3) = (X-1)(X-i)(X+1)(X+i)$$



Iniziamo ad osservare

che se α è radice

di $X^4 - 1$, allora

$\alpha \in \mathbb{R}$

o anche $\bar{\alpha}$ è radice

$$\blacksquare \quad n=5 \quad X^5 - 1 = (X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) \quad \text{in } \mathbb{R}[X]$$

prodotto di due quadratici irriducibili monici

i due quadrati irriducibili (in \mathbb{R}) monici:

$$P_1 = (X-x)(X-\bar{x}) \in \mathbb{R}[X]$$

$$P_2 = (X-x^2)(X-\bar{x}^2) \in \mathbb{R}[X]$$

(e non quattro di primo grado perché c'è un fattore di grado 1 \iff c'è una radice reale)

e in $X^5 - 1$ c'è solo 1)

$$\text{infatti, } P_1 = (X-x)(X-\bar{x}) = X^2 - (x+\bar{x})X + x\bar{x}$$

$$P_2 = (X-x^2)(X-\bar{x}^2) = X^2 - (x^2+\bar{x}^2) + |x^2|^2$$

con:

$$\bullet \quad x = \alpha + i\beta \quad \therefore \bar{x} = \alpha - i\beta \quad \therefore x + \bar{x} = 2\alpha \in \mathbb{R} = 2 \operatorname{Re}(x^2) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

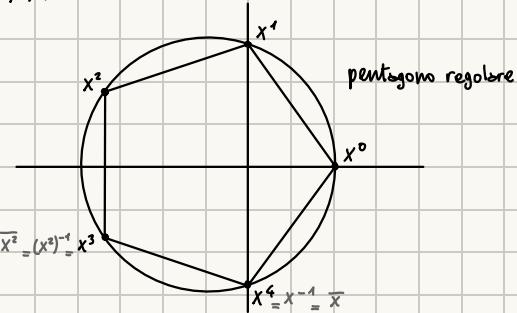
$$\bullet \quad x\bar{x} = x^2 + \beta^2 \geq 0 = 1 \quad (\text{ricorda } z\bar{z} = 1) \quad \therefore x^2 + \bar{x}^2 = 2 \operatorname{Re}(x^2) = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \quad \therefore |x^2|^2 = 1$$

$$P_1 = X^2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1 \quad , \quad P_2 = X^2 - 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X + 1 \quad \text{fatt. in } \mathbb{R}[X] = (X-x^0)P_1P_2$$

• in $\mathbb{C}[X]$, $X^5 - 1$ ha le radici distinte $\left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)^k$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\left(\left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)^k\right)^5 = \left(e^{\frac{2\pi i}{5} \cdot 5}\right)^k = \left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)^k = 1$$

$$\text{sono distinte perché } \left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)^k = \cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right) \quad \text{x De Moivre}$$



$$\text{quindi } X^5 - 1 = \prod_{i=0}^4 (X-x^i) = (X-x^0) \left[(X-x) \left(\frac{X-x^4}{X-x^2} \right) \right] \left[(X-x^2) \left(\frac{X-x^4}{X-x^3} \right) \right]$$

$$\text{osservazione: con } n \geq 1, \quad X^n - 1 = \prod_{i=0}^{n-1} (X-x^i) \quad \text{con } x = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$



def POLINOMIO CONIUGATO

Dato $F = f_0 + f_1 X + \dots + f_n X^n \in \mathbb{C}[X]$, poniamo $\bar{F} = \bar{f}_0 + \bar{f}_1 X + \dots + \bar{f}_n \bar{X}^n$

OSSERVAZIONE: $F \in \mathbb{R} \iff F = \bar{F}$ in \mathbb{R} , $x = \bar{x}$

Inoltre, se $F \in \mathbb{R}[X]$ e $\text{ev}_z(F) = 0$, allora $\text{ev}_{\bar{z}}(F) = 0$

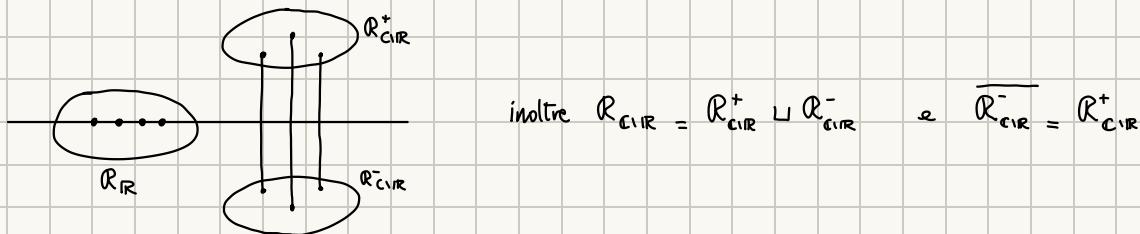
dim: $\text{ev}_z(F) = \text{ev}_{\bar{z}}(\bar{F})$ e, siccome la somma complessa è compatibile con $+$, $-$.

$$= \overline{\text{ev}_z(F)} = \bar{0} = 0$$

Lemma Dato $F \in \mathbb{R}[X]$

detto R l'insieme delle sue radici, allora $R = R_{\mathbb{R}} \cup R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^+ \cup R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^-$ dove $R_{\mathbb{R}} = R \cap \mathbb{R}$

$R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^+ = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ t.c. } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \operatorname{Im}(z) > 0 \text{ e scrivendo } z = \sum_{i \in \mathbb{R}} x_i + iy, y > 0\}$, $R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^- = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ t.c. } \operatorname{Im}(z) < 0\}$



Lemma già dimostrato utilizzato

$X^2 + \beta X + \gamma \in \mathbb{R}[X]$ è irriducibile $\iff \Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$

dim

Supponiamo P irriducibile.

$R_{\mathbb{R}} = \emptyset$, quindi $R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} = \{z, \bar{z}\}$, $R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^+ = \{z\}$, $R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^- = \{\bar{z}\}$

$$P = (X-z)(X-\bar{z}) = X^2 - (z+\bar{z})X + z\bar{z} \\ \stackrel{z \in \mathbb{R}}{=} z^2 - 2zX + |z|^2$$

$$\Delta = (z+\bar{z})^2 - 4z\bar{z} = z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 - 4z\bar{z} = (z-\bar{z})^2$$

$$\text{scrivo } z = x+iy \quad z-\bar{z} = 2iy, \quad \text{quindi } (z-\bar{z})^2 = (2iy)^2 = 4i^2y^2 = 4y^2 \cdot -1 = -4y^2 < 0$$

Lemma

Ogni $F \in \mathbb{R}[X]$ si spezza in $\mathbb{R}[X]$ in prodotto $F = \lambda \prod_{x \in R_{\mathbb{R}}} (X-x)^{v_x(F)} \prod_{z \in R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}} \underbrace{[(X-z)(X-\bar{z})]}_{v_z(F)}$

dim: siccome C è algebricamente chiuso,

$$F = \lambda \prod_{z \in C} (X-z)^{v_z(F)} = \lambda \prod_{z \in R_{\mathbb{R}}} (X-z)^{v_z(F)} \prod_{z \in R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}} (X-z)^{v_z(F)}$$

se $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ si ha $\bar{z} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Quindi, possiamo scegliere, senza perdita di generalità, $z = x+iy$ con $y > 0$ e \bar{z} appartenente a \mathbb{R}

Sì conclude osservando che $R = R_{\mathbb{R}} \cup R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^+ \cup R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^-$

Lemma (in teoria esercizio ma mi sembra più un lemma)

Sia $P \in \mathbb{R}[x]$ di grado dispari. Allora P ammette almeno una radice reale.

$$\text{questo implica } \deg(P) = \# \underset{\substack{\text{card.} \\ P}}{R_{\mathbb{R}}} + \# \underset{\substack{\text{i coniugati} \\ S}}{R_{C \setminus \mathbb{R}}} = \# \underset{\substack{\text{pari} \\ P}}{R_{\mathbb{R}}} + 2 \# \underset{\substack{\text{dispari} \\ S}}{R_{C \setminus \mathbb{R}}}$$

Si come P è di grado dispari, $\deg(P) = 2n+1 = \# R_{\mathbb{R}} + 2S$ Ma allora $2n+1 = r + 2s \iff r = 2n - 2s + 1 \iff r \equiv 1 \pmod{2} \implies r \neq 0$

c'è servito il teorema dei valori intermedi (dell'Analisi)

se $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua t.c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$

allora $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $h(x_0) = 0$

$$P = X^{2n+1} + \alpha_{2n} X^{2n} + \dots + \alpha_0 \in \mathbb{R}[x] \text{ dispari}$$

sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = ev_x(P)$: è continua e soddisfa $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
da cui $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) = 0 \iff x_0$ radice di f

esercizio 1

$$P = X^4 - 10X^2 + 1 \quad \text{in } (\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$$

• in \mathbb{C}

$$\text{tentiamo le radici. pongo } Y = X^2 \quad P = Y^2 - 10Y + 1$$

$$\Delta > 0, \text{ radici } y_1 = 5 - 2\sqrt{6} > 0, \quad y_2 = 5 + 2\sqrt{6} > 0$$

$$5 > 2\sqrt{6} \iff 25 > 4 \cdot 6$$

$$y^2 - 10y + 1 = (x^2 - 5 + 2\sqrt{6})(x^2 - 5 - 2\sqrt{6}) = \underset{\substack{\text{in } \mathbb{Q}}}{(x + \sqrt{5+2\sqrt{6}})} \underset{\alpha_1}{(x + \sqrt{5-2\sqrt{6}})} \underset{\alpha_2}{(x - \sqrt{5-2\sqrt{6}})} \underset{\alpha_3}{(x - \sqrt{5+2\sqrt{6}})} \underset{\alpha_4}{\text{è la fatt. in } \mathbb{R}[x] \text{ e anche in } \mathbb{C}[x]}$$

POSSIBILI FATTORIZZAZIONI IN IRR. DI POLINOMI IN $\mathbb{Q}[x]$

$Q \in \mathbb{Q}[x]$ (uguale per un campo qualsiasi)

• $\deg(Q) = 1$ è irriducibile

• $\deg(Q) = 3$ ② \mathbb{Q} irriducibile

• $\deg(Q) = 4$ ③ \mathbb{Q} irriducibile

② $Q = P_1 P_2$ $\deg(P_1) = 1, \deg(P_2) = 3$ irriducibili c'è radice

• $\deg(Q) = 2$ ④ \mathbb{Q} irriducibile

② $Q = P_1 P_2$ dove $\deg(P_1) = 1, \deg(P_2) = 2$ irriducibile

③ $Q = P_1 P_2$ $\deg(P_1) = \deg(P_2) = 2$ irriducibili non c'è radice

② $Q = P_1 P_2$ con P_1, P_2 irriducibili di grado 1

④ $Q = P_1 P_2 P_3$ $\deg(P_1) = 2, \deg(P_2) = \deg(P_3) = 1$ c'è radice

TEORIA DEI GRUPPI

GRUPPI

dato G insieme = \emptyset con * operazione binaria su G ovvero: $G \times G \rightarrow G$ seleziona un elemento distinto e .
 $(a, b) \rightarrow a * b$

Ho una terna $G = (G, *, e)$ - è un gruppo se:

non per forze distinte

① $\forall a, b, c \in G, a * (b * c) = (a * b) * c$ si scrive allora $a * b * c$ ASSOCIAZIATIVITÀ

② $\forall a \in G, a * e = e * a = a$ elementi neutri per l'operazione binaria

③ $\forall a \in G, \exists a' \in G$ t.c. $a * a' = a' * a = e$ inverso per l'operazione

le prime 4 condizioni

degli anelli comm. un.

descrivono un gruppo

Inoltre, se

④ $\forall a, b \in G, a * b = b * a$, allora G è un gruppo abeliano (o commutativo)

gruppi in notazione additiva

$(G, +, 0)$ si scrive + per l'operazione e 0 per l'el. neutro

si dice in notazione additiva

oss: di solito, i gruppi in notazione additiva sono commutativi

In notazione additiva, l'inverso di $a \in G$ si chiama OPPOSTO e si scrive $-a$

esempio: $(A, -, +, \cdot, 0_A, 1_A)$ Anello

Allora $(A, +, 0_A)$ è un gruppo abeliano in notazione additiva

estendendo un gruppo da

un anello, questo sarà abeliano

(la commutatività è obbligatoria negli anelli)

quindi $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, 0)$ $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, 0)$ ES SUDE

gruppo in notazione moltiplicativa

$(G, \cdot, 1)$ si scrive · per l'

In questi casi, non è garantita la commutatività

L'inverso di $a \in G$ si scrive a^{-1}

esempio $(A, -, +, \cdot, 0_A, 1_A)$ Anello

Allora $A^{\times} = (A^{\times}, \cdot, 1_A)$ è un gruppo in notazione moltiplicativa

Infatti abbiamo visto

① che il prodotto di el. invertibili è invertibile

② che il prodotto è associativo

③ $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$ SCRIVI MEGLIO

def SOTTOGRUPPO

Dato un gruppo G (notazione moltiplicativa) e un sottoinsieme $H \subset G$ non vuoto.

Si dice che H è un sottogruppo di G se

$$\forall a, b \in H, \text{ si ha } a \cdot b^{-1} \in H$$

↳ se $a \in G$ m_b
se $a \in H$ allora H sottogr.

(si scrive $H < G$)

Osservazione H è stabilizzato (il prodotto di due elementi è in H)

H è un gruppo. $\exists \cdot b^{-1}$ con $b = a$

Se $a \in H$, $a \cdot a^{-1} = 1_G \in H$ quindi $1_G \in H$

Se non è vuoto ha elemento neutro

Ma allora $\forall b \in H$, $1_G \cdot b^{-1} = b^{-1} \in H$ quindi $b^{-1} \in H$

e $1_G = 1_H$

Infine, prendendo $a, b \in H$, $b^{-1} \in H \Leftarrow a \cdot (b^{-1})^{-1} = ab \in H$

OMOMORFISMO di gruppi

Dati G_1, G_2 due gruppi (in notazione moltiplicativa)

Sia $G_1 \xrightarrow{f} G_2$ un'applicazione

f è un omomorfismo di gruppi se

① $f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$

② $\forall a \in G_1, f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

③ $\forall a, b \in G_1, f(ab) = f(a)f(b)$ l'ordine conta! non si sa se è abeliano
in G_1 in G_2
op. di G_2

esercizio: mostrare che $f: G_1 \rightarrow G_2$ è un omomorfismo di gruppi $\Leftrightarrow a, b \in G \quad f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1}$

def ISOMORFISMO

Sia $f: G_1 \rightarrow G_2$ omomorfismo di gruppi:

Se f è biettiva, allora si dice che f è un isomorfismo

esercizio $f: G_1 \rightarrow G_2$ isomorfismo

Sappiamo che f biettiva $\Leftrightarrow \exists f^{-1}: G_2 \rightarrow G_1$ app. biettiva t.c. $f \circ f^{-1} = id_{G_1}, f^{-1} \circ f = id_{G_2}$

dimostrare che f^{-1} è un isomorfismo

Inoltre $G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3$ con f, g om. gr.

Allora $g \circ f: G_1 \rightarrow G_3$ è un omom... e in più se f, g sono isom.

PRENDI DA
SLIDE

ESEMPI

$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} m\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ (notazione additiva) è un gruppo: $a, b \in m\mathbb{Z} \Rightarrow a = m\alpha, b = m\beta \Rightarrow a+b = m\alpha + m\beta = m(\alpha + \beta)$ è stabilizzato ($+ h_0 \oplus$ el neutrino)

con $f(n) := mn$ applicazione

è un isomorfismo di gruppi.

Inoltre ① $f(n-n') = m(n-n') = mn-mn' = f(n)-f(n')$ è un omomorfismo di gruppi

② iniettiva $f(p) = f(q) \iff pm = qm \iff m(p-q) = 0 \iff p=q$

③ suriettiva $y \in m\mathbb{Z}$. $\exists x \in \mathbb{Z}$ t.c. $y = mx$ ponendo $x = k$ si ha $f(k) = mk$

$G_1 = \mathbb{R}$ con $+$
 $G_2 = \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x > 0\}$ con \cdot

Notare che $\mathbb{R}_{>0} < \mathbb{R}^\times$ $a, b \in \mathbb{R}_{>0} \quad a > 0, b > 0, b^{-1} > 0 \quad ab^{-1} > 0 \quad ab^{-1} \in \mathbb{R}^\times$

Poniamo

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \quad f(x) := e^x$$

$$g: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(y) := \underset{\ln}{\log}(y) \quad e^{\log y} = y \iff e^{\log(\cdot)} = \text{Id}_{\mathbb{R}} \quad \log(e^y) = y \iff \log(e^{(\cdot)}) = \text{Id}_{\mathbb{R}}$$

Sono due isomorfismi di gruppi, l'uno inverso dell'altro

$$f^{-1} = g, \quad g^{-1} = f$$

$$g(y) = \log(y)$$

$$\text{Inoltre } f(0) = e^0 = 1 = 1_{G_2} \in G_2$$

$$g(1) = 0$$

$$f(-x) = e^{-x} = (e^x)^{-1} \text{ compatibile con inverso}$$

$$g(y^{-1}) = \log(y^{-1}) = -g(y)$$

$$f(x-x') = e^{x-x'} = e^x e^{-x'} = f(x)f(x)^{-1}$$

$$g(y^y) = g(y) - g(y)$$

Sia $G_1 \xrightarrow{f} G_2$ omomorfismo (notazione moltiplicativa)

costruzioni canoniche di un sottogruppo

Lemma costruire a partire da un omomorfismo $G_1 \rightarrow G_2$, il Kernel/nucleo

insieme di $g \in G_1$ che puntano all'el neutrino di G_2

$$H = \{g \in G_1 : f(g) = 1_{G_2}\} = f^{-1}(\{1_{G_2}\}) \subset G_1$$

è un sottogruppo: $H < G_1$ si chiama NUCLEO di f e si scrive $H = \text{Ker}(f)$

dim

$a, b \in H$ con $f(a) = f(b) = 1_{G_2}$

se ottengo $1_{G_2} \in H$

$$f(a b^{-1}) = f(a) f(b^{-1}) = f(a) f(b)^{-1} = 1_{G_2} \cdot 1_{G_2}^{-1} = 1 \quad \text{quindi } ab^{-1} \in H$$

homomorf grupp.

Lemma

Sia $f: G_1 \rightarrow G_2$ omomorfismo di grupp:

"kernel banale"

si ha che $\text{Ker}(f) = \{1_G\} \iff f \text{ è iniettivo}$

↑ è un sottogruppo di G_1

(il sott. singleton con el. neutro
di un gruppo è un sottogruppo)

(in un gruppo qualsiasi ha 2 sott. evidenti: $\{1_G\}$ e sé stesso)

dim

\implies Supponiamo $\text{Ker}(f) = \{1_{G_1}\} \subset \{x \in G_1 \text{ t.c. } f(x) = 1_{G_2}\}$

siano $x, x' \in G_1$ t.c. $f(x) = f(x') \iff f(x) f(x')^{-1} = 1_{G_2}$

$f(x x'^{-1})$

STARÀ NELLA PROVA (HA PROMESSO)

$\{1_G\}$ è il più piccolo sottogruppo
(Non \emptyset)

$$\iff x(x')^{-1} \in \text{Ker}(f) = \{1_{G_1}\} \iff x(x')^{-1} = 1_{G_1}$$

$$x(x')^{-1} = 1_{G_1}, x' \Rightarrow x = x' \Rightarrow f \text{ iniettivo}$$

\iff Supponiamo f iniettivo.

Sia $x \in \text{Ker}(f)$. Allora $f(x) = 1_{G_2}$

(x def)

Ma f è un omomorfismo di grupp, da cui deduco $f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$

Siccome $f(x) = f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$ e f iniettivo, si deve avere $x = 1_{G_1} \Rightarrow \text{Ker}(f) = \{1_{G_1}\}$