aglaia norza

Logica Matematica

appunti delle lezioni
libro del corso: tbd

21/10/2025

thisisaglaia@gmail.com
github.com/AglaiaNorza

Contents

1 Logica Proposizionale **3**

1.1 Introduzione 3

1.2 Assegnamenti, tavole di verità 3

1.3 Conseguenza logica 5

1.4 Completezza funzionale 5

1.5 Forme normali 7

1.6 Equivalenza Logica 8

1.7 Formalizzazioni in logica proposizionale 9

1.8 Teorema di compattezza 9

1. Logica Proposizionale

1.1. Introduzione

La logica proposizionale è un linguaggio formale con una semplice struttura sintattica basata su proposizioni elementari (atomiche) e sui seguenti connettivi logici:

- *Negazione* ($\neg$): inverte il valore di verità di un enunciato: se un enunciato è vero, la sua negazione è falsa, e viceversa.
- *Congiunzione* ($\wedge$): il risultato è vero se e solo se entrambi i componenti sono veri.
- *Disgiunzione* ($\vee$): il risultato è vero se almeno uno dei componenti è vero.
- *Implicazione* ($\rightarrow$): rappresenta l'enunciato logico "se ... allora". Il risultato è falso solo se il primo componente è vero e il secondo è falso.
- *Equivalenza* ($\leftrightarrow$): rappresenta l'enunciato logico "se e solo se". Il risultato è vero quando entrambi i componenti hanno lo stesso valore di verità, cioè sono entrambi veri o entrambi falsi.

Introduciamo anche il concetto di disgiunzione esclusiva o "XOR" ($\oplus$), il cui risultato è vero solo se gli operandi sono diversi tra di loro (uno vero e uno falso).

def. 1: Linguaggio proposizionale

Un linguaggio proposizionale è un insieme infinito $\mathcal{L}$ di simboli detti **variabili proposizionali**, tipicamente denotato come $\{p_i : i \in I\}$ (con I "insieme di indici").

def. 2: Proposizione

Una **proposizione** in un linguaggio proposizionale è un elemento dell'insieme PROP così definito:

1. tutte le variabili appartengono a PROP
2. se $A \in$ PROP, allora $\neg A \in$ PROP
3. se $A, B \in$ PROP, allora $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B) \in$ PROP
4. nient'altro appartiene a PROP (PROP è il più piccolo insieme che contiene le variabili e soddisfa le proprietà di chiusura sui connettivi 1 e 2)

Per facilitare la leggibilità delle formule, definiamo le seguenti regole di *precedenza*: $\neg$ ha precedenza su $\wedge, \vee$, e questi ultimi hanno precedenza su $\rightarrow$.

1.2. Assegnamenti, tavole di verità

Per un linguaggio $\mathcal{L}$, un **assegnamento** è una funzione

$$\alpha : \mathcal{L} \rightarrow \{0, 1\}$$

Estendiamo α ad $\hat{\alpha}$: PROP $\rightarrow \{0, 1\}$ in questo modo:

- $\hat{\alpha}(\neg A) = \begin{cases} 1 & A = 0 \\ 0 & A = 1 \end{cases}$

- $\hat{\alpha}(A \land B) = \begin{cases} 1 & \hat{\alpha}(A) = \hat{\alpha}(B) = 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$

- $\hat{\alpha}(A \lor B) = \begin{cases} 0 & \hat{\alpha}(A) = \hat{\alpha}(B) = 0 \\ 1 & altrimenti \end{cases}$

- $\hat{\alpha}(A \to B) = \begin{cases} 0 & \hat{\alpha}(A) = 1 \land \hat{\alpha}(B) = 0 \\ 1 & altrimenti \end{cases}$

notazione

Utilizzeremo α al posto di $\hat{\alpha}$ per comodità di notazione.

Osserviamo che è possibile rappresentare gli assegnamenti in modo compatto utilizzando le **tavole di verità**, una presentazione tabulare della funzione di assegnamento.

Per esempio, possiamo riscrivere la definizione di $\alpha(\neg A)$ come segue:

A	$\neg A$
0	1
1	0

Ogni riga di una tavola di verità corrisponde ad un assegnamento α.

Si noti anche che dalla definizione di α segue che un'implicazione può essere vera senza che ci sia connessione causale o di significato tra antecedente e conseguente (per esempio, "se tutti i quadrati sono pari allora π è irrazionale").

In secondo luogo, segue anche che una proposizione è sempre vera se il suo antecedente è falso (il che rispecchia la pratica matematica di considerare vera a vuoto una proposizione ipotetica la cui premessa non si applica).

Questo è giustificabile come segue:

- vogliamo che $(A \land B) \to B$ sia sempre vera
- il caso $1 \to 1$ deve essere vero, perché corrisponde al caso in cui A e B sono vere;

  il caso $0 \to 0$ deve essere vero, perché corrisponde al caso in cui $A \land B$ è falso perché B è falso;
  il caso $0 \to 0$ deve essere vero perché corrisponde al caso in cui $A \land B$ è falso perché B è falso;

  il caso $0 \to 1$ deve essere vero perché corrisponde al caso in cui $A \land B$ è falso perché A è falso ma B è vero;

  resta dunque soltanto il caso $1 \to 0$, che non corrisponde a nessun caso di $A \land B \to B$.

In più, si vuole che valga, per contrapposizione $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$.

Osserviamo che, data $A = p_1, p_2, \ldots, p_k$ e due assegnamenti α e β t.c.:

$$\alpha(p_1) = \beta(p_1)$$
$$\ldots$$
$$\alpha(p_k) = \beta(p_k)$$

allora necessariamente $\alpha(A) = \alpha(B)$.

soddisfacibilità

Se per una formula A e un assegnamento α si ha $\alpha(A) = 1$, si dice che "A soddisfa α" (o "A è vera sotto α").

- Se A ha almeno un assegnamento che la soddisfa, si dice **soddisfacibile** ($A \in$ `SAT`).
- Se non esiste un assegnamento che la soddisfa, A si dice **insoddisfacibile** ($A \in$ `UNSAT`).
- Se A è soddisfatta da tutti i possibili assegnamenti, si dice **tautologia** (o "verità logica") ($A \in$ `TAUT`).

Introduciamo anche alcune regole che

1.3. Conseguenza logica

def. 3: Conseguenza logica

Sia T una *teoria*, ossia un insieme $\{A_1, \dots, A_n\}$ proposizioni in un dato linguaggio proposizionale, e sia $A \in$ PROP .

Diciamo che A è **conseguenza logica** di T se

$$\forall \alpha,\ \alpha(T) = 1 \rightarrow \alpha(A) = 1$$

ovvero se ogni assegnamento che soddisfa T soddisfa anche A_{n+1}.

Scriviamo in tal caso $T \vDash A_{n+1}$, oppure $A_1, \dots, A_n \vDash A$.

Si ha che:

- $T \nvDash A$ significa che $\exists \alpha$ t.c. $\alpha(T) = 1 \land \alpha(A) = 0$
- $\emptyset \vDash A$ o, equivalentemente $\vDash A \iff A$ è una tautologia

lemma 1: Equivalenze

1. $T \vDash A$
2. $\vDash (A_1 \land \dots \land A_n) \rightarrow A$
3. $(A_1 \land \dots \land A_n) \in$ `UNSAT`

sono equivalenti.

1.4. Completezza funzionale

Data una tavola di verità arbitraria con n argomenti, esiste una proposizione A che ha esattamente quella tavola di verità?

Una proposizione A contenente le n variabili proposizionali $a_1, a_2, \dots, a_n$ determina una funzione di n argomenti $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ ("**funzione di verità**"), tale che il valore di f_A su un argomento $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$ sia dato da un arbitrario assegnamento α tale che $\alpha(p_k) = x_k$ per $k \in [1, n]$.

theorem 1: Teorema

Sia $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ una funzione di verità. Esiste una proposizione A con n variabili proposizionali tale che, per ogni assegnamento α:

$$\alpha(A) = f(\alpha(a_1), \alpha(a_2), \ldots, \alpha(a_n))$$

dimostrazione

Si dimostra per induzione su n.

- **caso base**: $n = 1$ abbiamo quattro possibili f:

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 0, \quad & f_1(1) &= 0 \\ f_2(0) &= 1, \quad & f_2(1) &= 1 \\ f_3(0) &= 0, \quad & f_3(1) &= 1 \\ f_4(0) &= 1, \quad & f_4(1) &= 0 \end{aligned}$$

  Alla funzione f_1 corrisponde la formula $(p \wedge \neg p)$, alla funzione f_2 la formula $(p \vee \neg p)$, alla funzione f_3 la formula p, e alla funzione f_4 la formula $(\neg p)$.

- **caso induttivo**: (assumiamo che il teorema valga per $n-1$ variabili, e dimostriamo che vale per n)

  Se $n > 1$, scriviamo il grafico di

$$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

  in forma di tavola di verità in questo modo:

p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$f(p_1, \ldots, p_n)$	
0	$\cdots$	$\cdots$	0	$\cdots$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	grafico di una funzione f_0
0	$\cdots$	$\cdots$	1	$\cdots$	
1	$\cdots$	$\cdots$	0	$\cdots$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	grafico di una funzione f_1
1	$\cdots$	$\cdots$	1	$\cdots$	

  Se non consideriamo la prima colonna (p_1), la tavola di verità descrive il grafico di due funzioni, f_0 e f_1, a $n-1$ argomenti.

  Sappiamo, quindi, per ipotesi induttiva, che esistono due formule A_0 e A_1 a $n-1$ variabili tali che, per ogni assegnamento α:

$$\alpha(A_0) = f_0(\alpha(p_1), \alpha(p_2), \ldots, \alpha(p_n))$$

$$\alpha(A_1) = f_1(\alpha(p_1), \alpha(p_2), \ldots, \alpha(p_n))$$

  Dobbiamo ora combinare le due formule considerando anche la colonna p_1.

  Possiamo farlo tramite la formula $A = (\neg p_1 \to A_0) \wedge (p_1 \to A_1)$.

  Dimostriamo che A soddisfa il teorem: dobbiamo dimostrare che, dato un assegnamento qualsiasi α, si ha:

$$\alpha(A) = f(\alpha(p_1), \alpha(p_2), \ldots, \alpha(p_n))$$

  Distinguiamo i due casi:

- $\alpha(p_1) = 1$
  in questo caso, si ha:
  $$\alpha\Big((\underset{=1}{\neg p_1 \rightarrow} A_0) \wedge (\underset{=1}{p_1} \rightarrow A_1)\Big)$$
  e la formula vale quindi 1 $\iff \alpha(A_1) = 1$.
  Ma $\alpha(A_1) = f_1(\alpha(p_2), \ldots, \alpha(p_n))$, quindi la formula si comporta esattamente come f_1:
  $$f(\alpha(p_1), \alpha(p_2), \ldots, \alpha(p_n)) = f(1, \alpha(p_2), \ldots, \alpha(p_n)) = f_1(\alpha(p_2), \ldots, \alpha(p_n)).$$
  Quindi, in questo caso, vale
  $$\alpha(A) = (\alpha(p_1), \alpha(p_2), \ldots, \alpha(p_n))$$
- $\alpha(p_1) = 0$
  in questo caso, si ha:
  $$\alpha\Big((\underset{=1}{\neg p_1} \rightarrow A_0) \wedge (p_1 \underset{=1}{\rightarrow} A_1)\Big)$$
  che vale 1 $\iff \alpha(A_0) = 1$.
  Quindi si può fare lo stesso ragionamento di sopra, ma per A_1 e f_0.

  Potremmo anche costruire una funzione f che rappresenta il comportamento di A:
  $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_2, \ldots, x_n) & \text{se } x_1 = 1, \\ f_0(x_2, \ldots, x_n) & \text{se } x_1 = 0. \end{cases}$$

1.5. Forme normali

notazione

Chiamiamo ”letterale” una variabile proposizionale o una negazione di una variabile proposizionale

È utile individuare alcune forme normali canoniche.

def. 4: Forma Normale Disgiuntiva

Diciamo che A è in Forma Normale Disgiuntiva (**DNF**, *Disjunctive Normal Form*) se A è una disgiunzione di congiunzioni di letterali, ossia è nella forma seguente:

$$\bigvee_{i \leq n} \bigwedge_{j \leq m_i} A_{ij} = (A_{1,1} \wedge \cdots \wedge A_{1,m_1}) \vee \cdots \vee (A_{n,1} \wedge \cdots \wedge A_{n,m_n})$$

def. 5: Forma Normale Congiuntiva

Diciamo che A è in Forma Normale Congiuntiva (**CNF**, *Conjunctive Normal Form*) se A è una disgiunzione di congiunzioni di letterali, ossia è nella forma seguente:

$$\bigwedge_{i \leq n} \bigvee_{j \leq m_i} A_{ij} = (A_{1,1} \vee \cdots \vee A_{1,m_1}) \wedge \cdots \wedge (A_{n,1} \vee \cdots \vee A_{n,m_n})$$

1.6. Equivalenza Logica

def. 6: Equivalenza logica

Due formule $A, B \in$ PROP sono logicamente equivalenti ($A \equiv B$) quando, per ogni assegnamento α si ha $\alpha(A) = \alpha(B)$.

Introduciamo alcune regole utili per verificare l'equivalenza tra proposizioni.

Con un piccolo abuso di notazione, definiamo 1 e 0 come le formule per cui $\forall\alpha,\ \alpha(1) = 1$ e $\alpha(0) = 0$.

In questo modo, abbiamo:

Involuzione	$\neg\neg A \equiv A$
Assorbimento (con 0 e 1)	$A \vee 0 \equiv A$ $A \wedge 1 \equiv A$
Cancellazione	$A \vee 1 \equiv 1$ $A \wedge 0 \equiv 0$
Terzo escluso (*tertium non datur*)	$A \vee \neg A \equiv 1$ $A \wedge \neg A \equiv 0$
Leggi di De Morgan	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
Commutatività	$A \vee B \equiv B \vee A$ $A \wedge B \equiv B \wedge A$
Associatività	$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
Distributività	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
I teorema di assorbimento	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$ $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
II teorema di assorbimento	$A \vee (\neg A \wedge B) \equiv A \vee B$ $A \wedge (\neg A \vee B) \equiv A \wedge B$

Table 1.1: Principali leggi di equivalenza logica

1.7. Formalizzazioni in logica proposizionale

Il concetto di soddisfacibilità ci permette di usare insiemi di formule proposizionali per catturare determinate strutture matematiche.

Per esempio: sia X un insieme. Consideriamo il linguaggio proposizionale composto dalle variabili $p_{(x,y)}$ per ogni $(x, y) \in X \times X$, e consideriamo il seguente insieme T di proposizioni in questo linguaggio:

1. $\neg p_{x,x} \ \forall x \in X$ (antiriflessività)
2. $p_{x,y} \to \neg p_{y,x} \ \forall x \in X$ (asimmetria)
3. $(p_{x,y} \wedge p_{y,z}) \to p_{x,z} \ \forall x, y, z \in X$ (transitività)
4. $(p_{x,y} \vee p_{y,x}) \ \forall x \neq y \in X$ (ordine totale)

Usiamo una teoria T per poter gestire anche casi di insiemi infiniti. Infatti, sappiamo che una teoria infinita è soddisfatta se e solo se lo sono tutte le sue proposizioni.

L'insieme $T = T_X$ esprime il concetto di **ordine totale stretto** su X. Infatti, se avessimo un assegnamento α che soddisfa tutte le proposizioni di T, l'ordine indotto da tutte le variabili vere sotto α sarebbe un ordine totale stretto di X.

Se α è un assegnamento, definiamo la relazione $\prec_\alpha$ su X come segue:

$$x \prec_\alpha y \leftrightarrow \alpha(p_{x,y}) = 1$$

Si ha che per ogni assegnamento α che soddisfca T_X, l'ordine $\prec_\alpha$ indotto da α è un ordine totale stretto su X.

Dall'altra parte, se $\prec$ è un ordine totale stretto su X, e $\alpha_\prec$ è l'assegnamento indotto da $\prec$ così definito:

$$\alpha_\prec(p_{x,y}) = 1 \leftrightarrow (x \prec y)$$

Si ha che, per ogni ordine totale stretto $\prec$ su X, l'assegnamento $\alpha_\prec$ indotto da $\prec$ sulle variabili $p_{x,y}$ soddisfa T.

Ovvero, un assegnamento α soddisfa la teoria T_X se e solo se l'ordine indotto da α su X è un ordine totale.

Colorabilità

1.8. Teorema di compattezza

def. 7: Monotonia della conseguenza logica

Si dice che la nozione di conseguenza logica è **monotona**, ovvero che

$$T' \vDash A \wedge T' \subseteq T \ \Rightarrow \ T \vDash A$$

(se $A_1, A_2, \ldots, A_k \vDash A$, allora $T \vDash A$ per ogni teoria T contenente $A_1, A_2, \ldots, A_k$)

Nonostante non sembri intuitivamente vero, vale anche il viceversa:

theorem 2: Teorema di compattezza v.1

Se $T \models A$, esiste un sottoinsieme finito T_0 di T tale che $T_0 \models A$

Introduciamo il concetto di una teoria finitamente soddisfacibile:

def. 8: `FINSAT`

Una teoria si dice **finitamente soddisfacibile** ($\in$ `FINSAT`) se *ogni* suo sottoinsieme finito è soddisfacibile.

Possiamo quindi introdurre una nuova versione del teorema di compattezza:

theorem 3: Teorema di compattezza v.2

`FINSAT` $\Rightarrow$ `SAT`, ovvero se ogni sottoinsieme di T è soddisfacibile, anche T è soddisfacibile.

lemma 2: Teorema di compattezza v.1 $\equiv$ v.2

I due punti seguenti (le due versioni del teorema di compattezza) sono equivalenti:

1. $T \models A \iff \exists\, T_0 \overset{fin}{\subseteq} T\ t.c.\ T_0 \models A$
2. $T \in \texttt{SAT} \iff T \in \texttt{FINSAT}$

dim.

- ① $\Rightarrow$ ②

  Supponiamo per assurdo che $T \in \texttt{FINSAT} \Rightarrow T \in \texttt{SAT}$, e che $T \models A$ ma che $\forall T_0 \overset{fin}{\subseteq} T,\ T_0 \not\models A$.

  $T \not\models A$ significa $T \cup \{\neg A\} \in \texttt{SAT}$.

  Quindi, visto che `FINSAT` $\Rightarrow$ `SAT`, $T \cup \{\neg A\} \in \texttt{SAT}$, il che va in contraddizione con l'ipotesi $T \models A$.

- ② $\Rightarrow$ ①

  Supponiamo per assurdo che $T \models A \Rightarrow \exists T_0 \overset{fin}{\subseteq} T\ t.c.\ T_0 \models A$, che $T \in \texttt{FINSAT}$, ma che $T \notin \texttt{SAT}$ ($T \in \texttt{UNSAT}$).

  Se $T \in \texttt{UNSAT}$, possiamo dire che $T \models p \wedge \neg p$ (tutto è conseguenza logica di una teoria insoddisfacibile).

  Per ②, quindi, $\exists T_0\ t.c,\ T_0 \overset{fin}{\subseteq} T \models p \wedge \neg p$, il che va in contraddizione con $T \in \texttt{FINSAT}$. □

theorem 4: Estendibilità di `SAT`

Se T è soddisfacibile, allora $T \cup \{A\}$ è soddisfacibile oppure $T \cup \{\neg A\}$ è soddisfacibile.

dimostrazione dalle dispense

Sia α un assegnamento che soddisfa T. Se $\alpha(A) = 1$ allora $T \cup \{A\}$ è soddisfacibile. Se $\alpha(A) = 0$, $T \cup \{\neg A\}$ è soddisfacibile.

dimostrazione vista in classe

Supponiamo $T \in \texttt{SAT}$, $T \cup \{A\} \in \texttt{UNSAT}$ e $T \cup \{\neg A\} \in \texttt{UNSAT}$. Avremmo entrambi $T \vDash \{\neg A\}$ e $T \vDash A$, il che è impossibile se $T \in \texttt{SAT}$.

Un concetto analogo vale per `FINSAT`.

theorem 5: Estendibilità di `FINSAT`

Sia $T \in \texttt{FINSAT}$. Per ogni formula A, $T \cup \{A\} \in \texttt{FINSAT}$ o $T \cup \{\neg A\} \in \texttt{FINSAT}$

dim

Supponiamo per assurdo che $T \cup \{A\} \notin \texttt{FINSAT}$ e $T \cup \{\neg A\} \notin \texttt{FINSAT}$.

Vuol dire che esistono $B \overset{fin}{\subseteq} T \cup \{A\}$ e $C \overset{fin}{\subseteq} T \cup \{\neg A\}$ insoddisfacibili.

Dato che per ipotesi $T \in \texttt{FINSAT}$, sappiamo che $A \in B, C$. Possiamo quindi introdurre $\hat{B} = B \setminus \{A\}$ e $\hat{C} = C \setminus \{A\}$.

Sappiamo che l'insieme $\hat{B} \cup \hat{C} \in \texttt{FINSAT}$, in quanto sottoinsieme finito di T.

Sia α un assegnamento che lo soddisfa. Se $\alpha(A) = 1$, allora soddisfa anche B. Se $\alpha(A) = 0$, soddisfa anche C. In entrambi i casi abbiamo una contraddizione.