

ALGEBRA

(appunti delle lezioni del professor Pellarin - con note/osservazioni aggiunte)

[https://open.spotify.com/playlist/3zMsGGKjUNlx3DFJ133ex?
si=rGWujY5LSLy7B1vKdUTHnA&pi=e-SkW9gkIWTLG5](https://open.spotify.com/playlist/3zMsGGKjUNlx3DFJ133ex?si=rGWujY5LSLy7B1vKdUTHnA&pi=e-SkW9gkIWTLG5)



def ANELLO

Un anello (commutativo unitario) è il dato di una SESTUPLA $(A, +, -, \cdot, 0_A, 1_A)$

dove:

$\cdot A \rightarrow$ insieme non vuoto

$\cdot +, \cdot \rightarrow A \times A \rightarrow A$ operazioni binarie

$\cdot - \rightarrow A \rightarrow A$ opposto

$\cdot 0_A \rightarrow 0_A \in A$ elemento neutro addizione

$\cdot 1_A \rightarrow 1_A \in A$ elemento neutro moltiplicazione

questi dati devono soddisfare 8 proprietà

4 sull'addizione $(A, +, -, 0_A, 1_A)$

$$\textcircled{1} \quad \forall a, b \in A, a+b = b+a \quad \text{COMMUTATIVITÀ}$$

$$\textcircled{2} \quad \forall a, b, c \in A, (a+b)+c = a+(b+c) \quad \text{ASSOCIAZIONE DELLA SOMMA}$$

$$\textcircled{3} \quad \forall a \in A, a+0_A = 0_A+a = a \quad \text{ELEMENTO NEUTRO DELLA SOMMA}$$

$$\textcircled{4} \quad \forall a \in A, a+(-a) = 0_A \quad \text{OPPOSTO}$$



queste 4 proprietà indicano che $(A, +, -, 0_A)$ è un GRUPPO ABELIANO in notazione additiva (gruppi, p.57)

$\forall a, b \in A, a+b = b+a$ *That's not your girl, that's an Abelian group!*
and COMMUTATIVITÀ

$\forall a \in A, \exists b \in A : a+b = b+a = e$

An identity element

Inverse elements

$\forall a, b \in A, a+b = b+a$ *That's not your girl, that's an Abelian group!*
and COMMUTATIVITÀ

4 sul prodotto $(A, +, -, \cdot, 0_A, 1_A)$:

$$\textcircled{5} \quad \forall a, b, c \in A, a(b \cdot c) = (a \cdot b)c = abc \quad \text{ASSOCIAZIONE DEL PRODOTTO}$$

$$\textcircled{6} \quad \forall a, b, c \in A, a(b+c) = ab+ac \quad \text{DISTRIBUTIVITÀ}$$

$$(a+b)c = ac+bc$$

rende l'anello "unitario"

$$\textcircled{7} \quad \forall a \in A, a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a \quad \text{EL. NEUTRO DEL PRODOTTO}$$

$$\textcircled{8} \quad \forall a, b \in A, ab = ba \quad \text{COMMUTATIVITÀ DEL PRODOTTO}$$

rende l'anello "commutativo"

esempi: $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1)$ è un anello commutativo unitario

\mathbb{N} non è un anello commutativo unitario perché non definisce un "opposto"

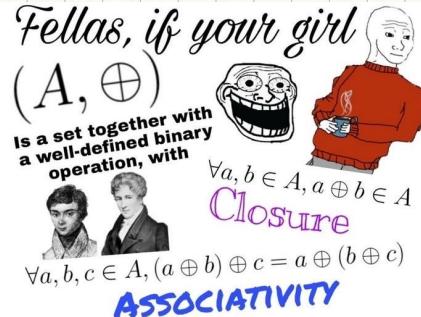
alcune proprietà

$$\cdot \forall a \in A, a \cdot 0_A = 0_A \quad \text{dim: } a \cdot 0_A = a \cdot (0_A + (-0_A)) = a \cdot 0_A + a \cdot -0_A = a \cdot 0_A + (- (a \cdot 0_A)) = 0_A$$

ovvero $a+(-a)$

$$\cdot \text{Se } 0_A = 1_A, \text{ allora } \forall a \in A, \text{ si ha } a = 0_A - \text{ ovvero } A = \{0_A\}$$

$$\text{dim: } a \in A: 1_A = 0_A \implies a = a \cdot 1_A = a \cdot 0_A = 0_A$$



def ELEMENTI INVERTIBILI

Dato A anello comm. con $1_A \neq 0_A$,

$\exists a \in A$ t.c. $\exists b \in A : ab = ba = 1_A$ è detto elemento invertibile

b si dice inverso di a e si scrive $b = a^{-1}$

es: 1_A è invertibile di inverso $1_A^{-1} = 1_A$

Si pone $A^\times = \{a \in A \text{ t.c. } a \text{ è invertibile}\}$ (A^\times è un gruppo)

• A^\times è non vuoto: 1_A è invertibile di inverso 1_A , e $1_A \in A$ per def. di anello comm. un.

quindi, A^\times contiene almeno 1_A

• se $a \in A^\times$, allora $a^{-1} \in A^\times$ (se $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_A$, non solo a^{-1} è l'inverso di a
ma a è l'inverso di $a^{-1} \Rightarrow a^{-1}$ invertibile)

• se $a, b \in A^\times$, allora $ab \in A^\times$ di inverso $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

$$ab \cdot (ab)^{-1} = 1_A \iff \underbrace{ab \cdot b^{-1}}_{1_A} \cdot a^{-1} = 1_A \quad a \cdot 1_A \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} = 1_A$$

• $0_A \notin A^\times \quad \forall a \in A, a \cdot 0_A = 0_A$

es. • $\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\}$ • dato $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1)$, $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

ANELLO $A = \mathbb{Z}$ L'anello \mathbb{Z} (intervi) ha alcune proprietà particolari:

buon ordinamento e ordine totale

esiste il sottoinsieme $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} \subset \mathbb{Z}$ che permette di definire una relazione su \mathbb{Z} :

Si scrive $a < b \iff a - b \in \mathbb{N}^*$

$\forall a \in \mathbb{Z}$, si ha:

$a \in \mathbb{N}^*$	è positivo
$a = 0$	è nullo
$-a \in \mathbb{N}^*$	è negativo

(proprietà di tricotomia)

Ogni sottoinsieme $E \subset \mathbb{N}^*$ non vuoto possiede un più piccolo elemento, per il principio di buon ordinamento

$\exists c \in E$ t.c., $\forall e \in E \setminus \{c\}$, si ha $e > c$

Le relazioni $<$ e \leq sono compatibili con $+$, \cdot , $-$ in questo modo:

• $a < b \iff -b < -a$, $a \leq b \iff -b \leq -a$

• $a < b \wedge c \leq d \implies a+c < b+d$, $a \leq b \wedge c \leq d \implies a+c \leq b+d$

• $0 < a < b \wedge 0 < c < d \implies ac < bd$, $0 \leq a \leq b \wedge 0 \leq c \leq d \implies ac \leq bd$

legge di cancellazione in \mathbb{Z}

Se $\alpha b = \alpha c$ con $\alpha \neq 0$, allora $b = c$.

dim per induzione su $\alpha \geq 1$

- $\alpha = 1$ chiaro (è l'elemento neutro)
- ipotesi induttiva: $\alpha > 1$ e $(\alpha-1)b = (\alpha-1)c$

Supponiamo per assurdo $b \neq c$. Allora (tricotomia) o $b > c$ o $b < c$.

Supponiamo $b > c$. $\Rightarrow (\alpha-1)b + b > (\alpha-1)c + c$
(simmetrico per $b < c$) $\alpha b - b + b > \alpha c - c + c$
 $\alpha b > \alpha c$ impossibile (premessa: $\alpha b = \alpha c$)
quindi necessariamente $b = c$

invertibili in \mathbb{Z} : $\mathbb{Z}^{\times} = \{-1, +1\}$

RELAZIONE DI DIVISIBILITÀ

Introduciamo la relazione: $\alpha, b \in A : \alpha | b \iff \exists c \in A \text{ t.c. } b = \alpha \cdot c$

è una relazione: • riflessiva $\forall \alpha \in A, \alpha = \alpha \cdot 1_A$

- transitiva dati $\alpha, b, c \in A$, $\alpha | b \iff b = \alpha \cdot \alpha' \quad \exists \alpha' \in A$ $\alpha | c \iff c = \alpha \cdot \alpha' \quad \exists \alpha' \in A$
quindi $c = \alpha \cdot \alpha' \cdot \alpha'' = \underbrace{\alpha}_{\alpha''} (\alpha' \cdot \alpha'') \Rightarrow c = \alpha \cdot \alpha'' \iff \alpha | c$

- non simmetrica né antisimmetrica (in generale)

es. $2 | 4$ ma $4 \nmid 2$

è "quasi antisimmetrica" in \mathbb{Z} :

$$\alpha, b \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \alpha | b \text{ e } b | \alpha \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z}^{\times} \text{ t.c. } \alpha = bc$$

(ovvero $\alpha \in \{b, -b\}$ o $\{\alpha, -\alpha\} = \{b, -b\}$)

è però falso in un anello qualsiasi:

Supponiamo $\alpha, b \neq 0$: $b = \alpha \cdot \alpha' \Leftarrow \alpha = bb' \quad \exists \alpha', b' \in \mathbb{Z}$
quindi $b = b \cdot \alpha' \cdot b' \Rightarrow 1 = \alpha' \cdot b' \Rightarrow \alpha', b' \in \{1, -1\}$

è però antisimmetrica su \mathbb{N}^* ($(xy = 1 \iff (x, y) = (1, 1))$)

La divisibilità è anche compatibile con la somma (e con il prodotto): $\alpha | b, \alpha | c \Rightarrow \alpha | b+c$

$$\alpha | b \Rightarrow \alpha | bc$$

$$\alpha | b \iff \exists \alpha' \text{ t.c. } b = \alpha \cdot \alpha' \quad \alpha | c \iff \exists \alpha'' \text{ t.c. } c = \alpha \cdot \alpha''$$

$$b+c = \alpha \cdot \alpha' + \alpha \cdot \alpha'' = \underbrace{\alpha}_{\alpha'} (\alpha' + \alpha'') \iff \alpha | b+c$$

più generalmente, se $\alpha, \beta \in A$, $\alpha | b$ e $\alpha | c \Rightarrow \alpha | \alpha b + \beta c$ (per compatibilità: $\alpha | b \Rightarrow \alpha | \alpha b$, $\alpha | c \Rightarrow \alpha | \beta c$
quindi $\alpha | \alpha b + \beta c$)

ELEMENTI IRRIDUCIBILI E PRIMI

def elemento irriducibile

$\alpha \in A \setminus A^\times$ è detto irriducibile se:

$$\forall b, c \in A, \alpha = bc \Rightarrow b \in A^\times \text{ o } c \in A^\times$$

o esclusivo (se sono entrambi invertibili, α è invertibile (\times chiusura invertibili) e viene meno la premessa)

def numero primo

$\alpha \in A \setminus A^\times, \alpha \neq 0$ è detto primo se:

$$\forall b, c \in A, \text{ se } \alpha | bc \text{ allora } \alpha | b \text{ o } \alpha | c$$

es. $A = \mathbb{Z}$ $12 = 4 \cdot 3$ con $4, 3 \notin \mathbb{Z}^\times \Rightarrow 12$ non è irr.

$$7 = 1 \cdot 7 = 7 \cdot 1 = -1 \cdot -7 = -7 \cdot -1$$

$$1, -1 \in \mathbb{Z}^\times \Rightarrow 7 \text{ è irr.}$$

es. $6 | 2 \cdot 3$ ma $6 \nmid 2$ e $6 \nmid 3 \Rightarrow 6$ non è primo

Lemma: $p \in \mathbb{Z}$ primo \iff irriducibile

dim. \implies (l'altro verso dimostrato a p.12)

Dato p primo, siano $\alpha, b \in \mathbb{Z}$ t.c. $p = \alpha b$. Quindi $p | \alpha b$. (sappiamo quindi che $p | \alpha$ o $p | b$)
Supponiamo senza perdita di generalità $p | \alpha$.

$$p | \alpha \implies \alpha = p\alpha' \quad \exists \alpha' \in \mathbb{Z} \implies p = \overset{\alpha}{p\alpha'} b \quad \begin{matrix} \text{legge di} \\ \text{cancellazione} \end{matrix} \quad p = p(\alpha' b) \implies 1 = \alpha' b \implies \alpha', b \in \{+1, -1\} = \mathbb{Z}^\times$$

• Se $\alpha' = 1$, allora $\alpha = p \implies p = pb \implies b = 1$.

• Se $\alpha' = -1$, allora $\alpha = -p \implies p = -pb \implies b = -1$.

quindi, p è irriducibile ■ (ogni modo di scriverlo come $p = \alpha b$ porta ad $\alpha, b \in \{-1, +1\}$)

La divisibilità è una relazione di inclusione insiemistica

Dati $\alpha, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\alpha | b \iff b\mathbb{Z} \subset \alpha\mathbb{Z}$

dim. • \implies supponiamo $\alpha | b$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } b = ka.$$

multiplo di b

$$\text{Sia } b' \in b\mathbb{Z}. \text{ Allora } \exists l \text{ t.c. } b' = lb. \quad b = ka \implies b' = \underbrace{l}_{l'} \underbrace{ka}_{k'} = l' \alpha \iff b' \in \alpha\mathbb{Z}$$

• \impliedby supponiamo $b\mathbb{Z} \subset \alpha\mathbb{Z}$.

Allora, $\forall b' \in b\mathbb{Z}, b' \in \alpha\mathbb{Z}$. Per def., $b' \in \alpha\mathbb{Z} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } b' = ka$

Ma $b' = lb$. Quindi, $lb = ka \iff b = \underbrace{k}_{k'} a$, quindi $b = k'a$ (ovvero $\alpha | b$) ■

def valore assoluto

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{1:1} \mathbb{N} \quad \text{dato } \alpha \in \mathbb{Z} : \cdot \text{ se } \alpha = 0, |\alpha| = 0$$

• se $\alpha \neq 0$, $|\alpha| =$ l'unico elemento di \mathbb{N} contenuto nell'insieme $\{\alpha, -\alpha\}$
 $(\{\alpha, -\alpha\} \cap \mathbb{N})$

DIVISIONE EUCLIDEA

Dati $\alpha, n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq 0$, allora esistono unicamente determinati

$$q \in \mathbb{Z}, \quad r \in \{0, \dots, |n|-1\} \quad \text{t.c. } \delta = nq+r$$

$\underbrace{\phantom{0 \leq r < n}}_{0 \leq r < n \text{ (importante)}}$

divisore resto
 |
 quoziente

CONGRUENZA

"congruente a"

$$\alpha \equiv b \pmod{n} \iff n \mid \alpha - b \quad (\text{quindi } b \text{ è il resto di } \alpha/n)$$

Si scrive anche \equiv_n

$\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } a - b = qn$ ovvero il resto della divisione euclidea di $a - b$ per n è 0

La congruenza modulo n è una relazione di equivalenza:

④ riflessivo : $\delta \equiv \delta \text{ mod. } n$ $n|\delta - \delta$ vero perché $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $x|0$

$$\textcircled{2} \text{ Symmetries : } a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n} \quad n | a - b \Rightarrow n | b - a$$

$$n|\alpha - b \iff \alpha - b = qn \iff -(\alpha - b) = -(qn) \iff b - \alpha = -qn \iff n|b - \alpha$$

③ Transitiva: $a \equiv b \pmod{n}$ e $b \equiv c \pmod{n} \iff n | b-a$ e $n | c-b$

$$(\text{visto che } n|a, n|b \Rightarrow n|(a+b)) \implies n|c-b+b-a \implies n|c-a \iff c \equiv a \pmod{n} \iff a \equiv c \pmod{n}$$

Esempi

$$\text{congruente modulo 2 : } \underbrace{\mathbb{Z}}_{[0]} \sqcup \underbrace{\mathbb{Z}+1}_{[1]} \quad \mathbb{Z}/\equiv_2 = \{ 2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}+1 \}$$

$$\text{congruenza modulo 3: } 3\mathbb{Z} \sqcup 3\mathbb{Z} + 1 \sqcup 3\mathbb{Z} + 2 \quad \mathbb{Z}/\equiv_3 = \{3\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}+1, 3\mathbb{Z}+2\} \quad \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (ANELLO)

$\mathbb{Z}/\equiv_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con $n > 0$ è l'insieme quoziante di \mathbb{Z} sulla congruenza mod. n

$$[\delta] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{ x : x \equiv \delta \pmod{n} \right\} = \delta + n\mathbb{Z} \quad \text{ovvero tutti gli el. che danno resto } \delta \text{ divisi per } n$$

gli el. di $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sono le classi di equivalenza mod. n

Si esprimono come

$x + \text{multiplo di } n$

• Si può scrivere $[ə]_n$

$$\text{es. } \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}} = \left\{ \begin{matrix} [0], & [1] \\ \text{tutti i pari} & \text{dispari} \end{matrix} \right\}$$

$$\mathbb{Z}/_3\mathbb{Z} = \left\{ [0], [1], [2] \right\}$$

$\begin{matrix} \parallel \\ [3] \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \parallel \\ [4] \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \parallel \\ [5] \end{matrix} = [-1]$

$$\mathbb{Z}_{/1\mathbb{Z}} = \{[0]\}$$

contiene
tutto \mathbb{Z}

Si vede "a occhio" la classe di equivalenza sottraendo o sommando n.

([a]) - $x + n\mathbb{Z} \rightarrow$ sto solo "scalando" n, rimango nella stessa classe)

$$\text{per esempio } [7] \text{ mod. } 5 = [7-5]_5 = [2]_5 = [-3]_5$$

Le operazioni $+$, $-$, \cdot di \mathbb{Z} sono compatibili con \equiv_n

- ① $\forall a, a' \in \mathbb{Z}, a \equiv_n a' \iff -a \equiv_n -a'$ compatibilità con opposto
- ② $\forall a, a', b, b' \in \mathbb{Z}, a \equiv_n a', b \equiv_n b' \Rightarrow a+b \equiv_n a'+b'$ compatibilità con somma
- ③ $\forall a, a', b, b' \in \mathbb{Z}, a \equiv_n a', b \equiv_n b' \Rightarrow ab \equiv_n a'b'$ compatibilità con prodotto

operatori:

- $-[a] := [-a]$ opposto

- $[a] + [b] = [a+b]$ somma

indipendentemente dalla scelta di rappresentanti (ben definito):

$$\text{scegliamo } a' \in [a], b' \in [b] \quad -[a+b] = \{m: n \mid m - a' - b'\} = \{m: n \mid m - a - b\}$$

$a \equiv_n a', b \equiv_n b'$, quindi per ②

$$\begin{array}{ccc} \text{es. } [1]_3 + [2]_3 & = & [3] \\ || & & || \\ [4] + [-4] & = & [0] \end{array} \quad \Leftrightarrow [a+b] = [a'+b'] \quad \text{quindi è ben definito}$$

- $[a] \cdot [b] = [ab]$ ben definito:

$$a' \in [a], b' \in [b] \quad -[a'b'] = \{m: n \mid a'b'\} = \{m: n \mid ab\}$$

$a' = na, b' = nb$, quindi per ③

Teorema

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, -, \cdot, [0], [1])$ è un anello commutativo unitario. (di cui calcoleremo a breve l'insieme degli invertibili)

Alcuni sottoinsiemi di \mathbb{Z}

$$\cdot n\mathbb{Z} = \{ m \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ con } m = kn \} \quad \text{multiplo di } n$$

$$\cdot \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \mathbb{Z}^*$$

$$\cdot a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ m \in \mathbb{Z} : \exists u, v \in \mathbb{Z} \text{ con } m = ua + vb \}$$

$$2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \{ 0, 2, 4, 3, 6, 9, 5, 8, 7, -1, 1, \dots \} = \mathbb{Z}$$

multipli 2 mult. 3 2+3 2+6 3+4 3-4 4-3

2	7	-4	1	2	5
0	9	6	-3	0	3
-2	-11	-8	-5	-2	1
-4	-13	-10	-7	-4	-1
-6	-15	-12	-9	-6	-3
	-9	-6	-3	0	3

Lemma: dato $E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$:

$$\textcircled{1} -E = E \sim a \in E = ua + vb, -a = (-u)a + (-v)b$$

$$\textcircled{2} \forall \alpha, \beta \in E, \alpha + \beta \in E \sim \alpha = xa + yb, \beta = x'a + y'b \quad \alpha + \beta = (x+x')a + (y+y')b$$

$$\textcircled{3} \forall \alpha \in E, x \in \mathbb{Z}, \alpha x \in E$$

↳ logicamente, se $\alpha = ka + yb, \alpha x = (xk)a + (xy)b$

Lemma Supponiamo $(a, b) \neq (0, 0)$. Allora $\exists! \delta \in \mathbb{N}^*$ t.c. $E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \delta\mathbb{Z}$

(tutte le combinazioni sono multiple di un solo numero)

dim: Possiamo supporre senza perdita di generalità $a, b \neq 0$

Infatti, se per esempio $b=0, a\mathbb{Z} + 0 = a\mathbb{Z}$ e $\delta = |a| \in \mathbb{N}^*$

Poniamo $E^* := E \cap \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}^*$

• osserviamo che $E \neq \emptyset$ ($E = (-E^*) \cup \{0\} \cup E^*$: se $E^* = \emptyset$, si avrebbe $E = \{0\}$, contraddicendo $(a, b) \neq (0, 0)$)

per il principio del minimo, E contiene quindi un più piccolo elemento.

• poniamo $\delta = \min(E^*)$

• osserviamo che $|\delta| \leq a$ e $|\delta| \leq b$

• per la divisione euclidea, $a = q\delta + r$ con $r \in \{0, \dots, \delta-1\}$

notiamo che $r = a - q\delta$. in più, dato che $\delta \in E$, $\delta = ua + vb$ con $u, v \in \mathbb{Z}$

$$\text{quindi, } r = a - q(a - ua - vb) \iff r = a - qua - qvb \iff r = \underbrace{a(1-qu)}_k + b(-qv) \iff r \in E$$

ci sono due possibilità: $\textcircled{1} r = 0$, ovvero $\delta | a$

$\textcircled{2} r > 0$ e $r \in E^*$. Ma, se fosse vero, avremmo $r \geq \delta$, il che è impossibile per $r \in \{0, \dots, \delta-1\}$
quindi necessariamente $r = 0$ e $\delta | a$. per la stessa ragione, $\delta | b$.

• $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \delta | \alpha a + \beta b \implies E \subset \delta\mathbb{Z}$ (per $a | b \iff b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$)

• inoltre, $\delta \in E \iff \delta = ka + kb$. quindi, $\forall x \in \mathbb{Z}, x\delta = xka + xkb \implies x\delta \in E \implies \delta\mathbb{Z} \subset E$

quindi, $E \subset \delta\mathbb{Z}$ e $\delta\mathbb{Z} \subset E \Rightarrow E = \delta\mathbb{Z}$

ogni multiplo
di δ appartiene a E

MASSIMO COMUN DIVISORE

def: dato $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con $(a, b) \neq (0, 0)$

$d \in \mathbb{N}$ è MCD di a e b se:

$$\textcircled{1} \quad d|a \text{ e } d|b$$

$$\textcircled{2} \quad \text{se } \exists \ d' \in \mathbb{N} \text{ t.c. } d'|a \text{ e } d'|b, \text{ allora } d'|d \text{ ogni divisore di } a \text{ e } b \\ \text{divide anche } d$$

Lemmo: se d soddisfa $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$, allora è unico

dim. Supponiamo che d_1, d_2 soddisfino $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$. mostriamo che $d_1 = d_2$

$$\text{si ha } d_2|d_1 \text{ e } d_1|d_2 \implies \{d_1, -d_1\} = \{d_2, -d_2\} \text{ ma } d_1, d_2 \in \mathbb{N}^* \implies d_1 = d_2 \\ \text{devono essere uguali o opposti (vedi non-antisimmetria divisibilità)}$$

def COPRIMI

Se $\text{MCD}(a, b) = 1$, si dice che a e b sono coprimi o primi tra loro

Lemmo

Dato $\delta = \text{MCD}(a, b)$, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \delta\mathbb{Z}$ $\delta > 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$

$$\left(\begin{array}{l} \cdot \text{ se } a \neq 0, b \neq 0 \text{ allora } \delta = |a| > 0 \\ \cdot \text{ se } a \neq 0, b = 0 \text{ allora } \delta = |b| > 0 \end{array} \right)$$

dim: Cond. $\textcircled{1}$ $\delta|a$ vero per $a\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \delta\mathbb{Z}$ ($\delta|a \iff a\mathbb{Z} \subset \delta\mathbb{Z}$)
stessa cosa per $\delta|b$

$\textcircled{2}$ Sia $d' \in \mathbb{N}^*$ t.c. $d'|a$ e $d'|b$.

$$d'|a \iff a\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z} \text{ e } d'|b \iff b\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z}$$

$$\text{quindi, } \underbrace{a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}}_{\delta\mathbb{Z}} \subset d'\mathbb{Z} + d'\mathbb{Z} = d'\mathbb{Z}$$

$$\delta\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z} \iff d'|\delta \blacksquare$$

MINIMO COMUNE MULTIPLO

dati $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, il minimo comune multiplo (mcm) di m_1, \dots, m_k è l'unico intero m t.c.

$$\textcircled{1} \quad m_1, \dots, m_k|m$$

$$\textcircled{2} \quad \text{se } \exists m' \text{ t.c. } m_1, \dots, m_k|m', \text{ allora } m|m'$$

$$\bullet m\mathbb{Z} = m_1\mathbb{Z} \cap m_2\mathbb{Z} \cap \dots \cap m_k\mathbb{Z}$$

$$\bullet \text{ in più, } \text{mcm}(a, b) = \frac{ab}{\text{MCD}(a, b)} \quad a, b \in \mathbb{N}^*$$

ALGORITMO DI EUCLIDE x MCD dati $a, b > 0$, mi permette di trovare $\hat{d} = \text{MCD}(a, b)$

comincio con la divisione euclidea a diviso b (funziona sia con $a \geq b$ che con $b \geq a$, ma conviene fare $a \geq b$ con $a > b$)

$$a = q_0 b + r_0 \quad (0 \leq r_0 < b) \quad \begin{matrix} \text{poi continuo dividendo} \\ \text{\scriptsize x def resto} \end{matrix}$$

$$b = q_1 r_0 + r_1 \quad (0 \leq r_1 < r_0)$$

$$r_0 = q_2 r_1 + r_2 \quad (0 \leq r_2 < r_1)$$

$\therefore r_0, r_1, r_2 \dots$ decrescono - arriveranno a 0

$$r_{n-2}' = q_n r_{n-1} + r_n \quad (0 \leq r_n < r_{n-1})$$

l'ultimo resto diverso da 0

è l'MCD

$$r_{n-1} = q_n r_n + 0$$

esempio: $a = 3522, b = 321$

$$3522 = 10 \cdot 321 + 312$$

$$\textcircled{1} \quad 3522 \div 321 \quad 3522 = 10 \cdot 321 + \underline{312}$$

$$321 = 1 \cdot 312 + 9$$

$$\textcircled{2} \quad 321 \div 312 \quad 321 = 1 \cdot 312 + \underline{9}$$

$$312 = 34 \cdot 9 + 6$$

$$\textcircled{3} \quad 312 \div 9 \quad 312 = 34 \cdot 9 + \underline{6}$$

$$9 = 1 \cdot 6 + 3$$

$$\textcircled{4} \quad 9 \div 6 \quad 9 = 1 \cdot 6 + \underline{3}$$

$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$

$$\textcircled{5} \quad 6 \div 3 \quad 6 = 2 \cdot 3 + \underline{0}$$

$3 = \text{MCD}(3522, 321)$

IDENTITÀ DI BÉZOUT

Dati $a, b \in \mathbb{Z}$ con $(a, b) \neq (0, 0)$ e con $\delta = \text{MCD}(a, b)$

Allora esistono due interi u, v t.c. $\delta u + bv = \delta$

come calcolare u, v ?

NOTA BENE:

u e v NON SONO unicamente determinati

prendiamo come esempio l'algoritmo di Euclide della pagina precedente.

stiamo cercando u, v t.c. $3 = u \cdot 3522 + v \cdot 321$

(metodo migliore imo)

partendo da sotto (metodo Pellerin)
scriviamo il penultimo passo dell'algoritmo
in funzione del resto, e sostituendo i resti
"risalendo"

$$3 = 9 - 1 \cdot 6$$

$$6 = 312 - 34 \cdot 9$$

$$3 = 9 - 1 \cdot (312 - 34 \cdot 9) \quad (\text{svolgo})$$

$$3 = -312 + 35 \cdot 9$$

$$9 = 321 - 1 \cdot 312$$

$$3 = -312 + 35 \cdot (321 - 312)$$

$$3 = 35 \cdot 321 + 36 \cdot -312$$

$$312 = 3522 - 10 \cdot 321$$

$$3 = 321 \cdot 35 + 36 \cdot -(3522 \cdot 10 \cdot 321)$$

$$3 = \underline{395} \cdot 321 - \underline{36} \cdot 3522$$

partendo da sopra (metodo Tutor)

partendo dal PRIMO passo dell'algoritmo,
li riscrivo tutti in funzione del resto sostituendo
dove possibile

• in più, per non confondermi, scrivo a e b

al posto dei due numeri iniziali

$$a = 3522, b = 321$$

$$312 = a - 10$$

$$9 = 321(b) - 312 \quad (\text{sostituisco})$$

$$9 = b - a + 10b = -a + 11b$$

$$6 = 312 \quad (\text{sostituisco}) - 34 \cdot 9 \quad (\text{sostituisco})$$

$$6 = a - 10b - 34 \cdot (-a + 11b) = a - 10b + 34a - 374b = 35a - 384b$$

$$3 = 9 \quad (\text{sostituisco}) - 6 \quad (\text{sostituisco})$$

$$3 = -a + 11b - (35a - 384b) = -36a + 395b$$

$$\text{ovvero } 3 = \underline{-36} \cdot 3522 + \underline{395} \cdot 321$$

abbiamo trovato u e v !

trovata!

Lemma di Gauss

se $a, b \in \mathbb{Z}^*$ e $\text{MCD}(a, b) = 1$, allora $a | bc \Rightarrow a | c$

dim:

$$\text{MCD}(a, b) = 1 \iff a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}, \text{ quindi } \exists u, v \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } au + bv = 1.$$

Moltiplicando per c , $acu + bcv = c$

per ipotesi, $a | bc$, quindi $bc = ka$

$$acu + kav = 0 \iff a(\underbrace{uc + kv}_{k'}) = c \quad \text{quindi } a | c \blacksquare$$

altro verso dimostrato a p.5

ricordiamo: p irriducibile \rightarrow se $p | ab$ allora $\exists a \in A^* \circ b \in A^*$

dimostriamo p irriducibile $\Rightarrow p$ primo

p primo \rightarrow se $p | ab$, allora $p | a \circ p | b$

• claim: se p irriducibile e $p \nmid a$, allora $a\mathbb{Z} + p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

infatti, sfruttamenti $\exists \delta > 1$ t.c. $\delta | a \wedge \delta \nmid p$. ma p irriducibile $\Rightarrow \delta = p$.

(divisori di un irriducibile p)

Avremmo quindi $p | a$ (CONTRADDIZIONE)

in \mathbb{Z} sono ± 1 e $\pm p$, e $\delta > 1$)

Quindi: $\nexists \delta \neq 1$ e $a\mathbb{Z} + p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

• Supponiamo ora $p | ab$ con p irriducibile

Se $p | a$ ho finito: supponiamo $p \nmid a$.

Ma allora (x il claim) $a\mathbb{Z} + p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Moltiplicando per b : $ab\mathbb{Z} + pb\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$

divisibile divisibile quindi $c | b$
per p per p

$$b\mathbb{Z} \subset p\mathbb{Z} \Rightarrow p | b \blacksquare$$

Elementi invertibili di $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times} = \{ [a] : \exists [b] \text{ con } [a] \cdot [b] = [1] \}$$

sabiamo visto che $[a] \cdot [b] = [ab]$

$$(\text{mod. } n) \quad [ab] = 1 \iff n | ab - 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } ab - 1 = kn$$

$$\iff a \underline{b - kn} = 1 \quad \text{è un'identità di Bézout per } a, n$$

quindi: $\text{MCD}(a, b) = 1$

$$\text{quindi: } (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times} = \{ [a] : a \in \mathbb{Z}, \text{MCD}(a, n) = 1 \}$$

gli invertibili sono le classi
dei coprimi a a n

esiste quindi un'applicazione biiettiva:

$$\{ r \in \{0, \dots, n-1\} \text{ t.c. } \text{MCD}(r, n) = 1 \} \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times} \text{ che porta } r \mapsto [r]$$

esempio: $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{ [0], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11] \}$

invertibili

Cosa si osserva quando n è primo?

$n = p$ primo. Sia $r \in \{1, \dots, p-1\}$. Allora, $\text{MCD}(p, r) = 1$

p primo e irr.
se $d > 1 \mid p$, $d = p$

Alltrimenti, se si avesse $d = \text{MCD}(p, r) > 1$, si avrebbe $d \mid p$, $d \mid r \Rightarrow d = p$ e quindi $p \mid r$.

Ma, per def. resto, $r < p \rightarrow \text{CONTRADDIZIONE}$.

Quindi $\text{MCD}(p, r) = 1$

O mai invertibile

Si ottiene quindi $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \{[r] : 1 \leq r \leq p-1\}$ ovvero $\forall [r] \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{[0]\}$, $[r]$ è invertibile

CAMPO

def: A anello commutativo unitario t.c. $\forall a \setminus \{0\}, a \in A^\times$ si dice campo

Esempi: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ è quindi un campo.

• anche \mathbb{Q} e \mathbb{R} sono campi.

PICCOLO TEOREMA DI FERMAT

Dato p primo e $n \in \mathbb{Z}$, $n^p \equiv n \pmod{p}$.

• in più: se $[n] \neq [0]$ (ovvero se $[n] \in \mathbb{F}_p^\times$), allora so che $[n]$ è invertibile di inverso $[x]$

So che $[n] = [n]^p$, e quindi che $[x][n]^p = 1$

Sì ha $[x][n]^p = [\underbrace{x}_{\text{inverso}}][\underbrace{n}_{\text{inverso}}][\underbrace{n^{p-1}}_{[n]^p}] = [n]^{p-1}$

dim claim: in $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ campo, si ha $([a] + [b])^p = [a]^p + [b]^p$

dimostriamo il claim. scegliamo a e b rappresentanti di $[a], [b]$

$$(a+b)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} b + \binom{p}{2} a^{p-2} b^2 + \dots + \binom{p}{p-2} a^2 b^{p-2} + \binom{p}{p-1} a b^{p-1} + b^p$$

sviluppo di Newton

• con $0 < i < p$, abbiamo $\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!} \in \mathbb{N}$ e quindi $i!(p-i)! \mid p$

• supponiamo $1 \leq i \leq p-1$

Siccome $p \nmid i$, si ha $p \nmid i!$ ($i!$ si scomponete in $i(i-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ tutti $< p$ e p non può essere un loro prodotto in quanto primo)

Similmente, $p > p-i$ e quindi $p \nmid (p-i)!$

$$\text{quindi ho } p! = \underbrace{k}_{\mathbb{N}} \cdot \underbrace{i!(p-i)!}_{b} \quad \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ (per *)}$$

(visto che $p \nmid i$ e $p \nmid (p-i)!$) ho anche $p \nmid b$.

Ma $p \mid p! = ab$. Quindi, visto che p primo e $p \nmid b$, allora $p \mid a$ per il lemma di Gauss.

$$\text{Mo } a = k = \binom{p}{i} \quad \text{perché } p! = \frac{p!}{i!(p-i)!} \cdot i!(p-i)!$$

Quindi, tutti i coefficienti "in mezzo" nello sviluppo di Newton (nello forms $\binom{P}{i}$, qualcosa) si riducono a 0 e rimangono solo a^p e b^p

- ho dimostrato che se $1 \leq i \leq p-1$ e p primo, si ha $\binom{P}{i} = \binom{P}{p-i} \equiv_p 0$

$$\text{e, riducendo, ottengo } ([a] + [b])^p = [a]^p + \binom{P}{1} [a]^{p-1} [b] + \dots + [b]^p \equiv_p [a]^p + [b]^p$$

Torniamo alla dimostrazione principale

$$[0]^p = [0], \quad [1]^p = [1], \quad [2]^p = ([1] + [1])^p = [1]^p + [1]^p = [1] + [1] = [2]$$

$$[3] = ([2] + [1])^p = [2]^p + [1]^p = [2] + [1] = [3]$$

quindi, per induzione (con ipotesi: $[n-1]^p = [n-1]$)

$$[n]^p = ([n-1] + [1])^p = [n-1]^p + [1]^p = [n-1] + [1] = [n]$$

quindi, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n^p \equiv n$ con p primo



$$(x+y)^n = x^n + y^n$$

$$(x+y)^n \neq x^n + y^n$$

for a prime number n ,
if x and y are members of
a commutative ring of
characteristic n then
 $(x+y)^n = x^n + y^n$

PRECISAZIONE

Se $[n] \neq [0]$, ovvero se $[n] \in \mathbb{F}_p$

allora $[n]$ invertibile di inverso $[n']$.

$$\text{Per il PTF, so già che } [n] = [n]^p \quad \text{e} \quad [n'] [n^p] = [n'] [n] \stackrel{\substack{= \\ \text{def. inverso}}}{=} 1$$

p primo $\Rightarrow p \geq 2$ si può decomporre in $p-1 \geq 1 + p$

$$[n'] [n]^p = [n'] [n] = [1]$$

$$\begin{array}{c} \text{Il } [n]^p \\ \text{è } \\ [n'] \cdot \underbrace{[n] [n]^{p-1}}_{\substack{\text{sono} \\ \text{inversi} \\ \text{quindi} = [1]}} = [n'] [n] = [1] \end{array}$$

$$\text{quindi } [1] [n]^{p-1} = [1] \quad \text{se } [n] \neq [0]$$

(il PTF ha dei difetti.)

- se $[\alpha] \in \mathbb{F}_p^\times$, calcolare $[\alpha]^{-1}$ usando il PTF

$$\text{So che } [\alpha]^{p-1} = [1] \quad (\text{PTF}).$$

$$\begin{array}{c} \text{Scrivendo } [\alpha]^{p-1} = [\alpha]^{p-2} \cdot [\alpha] \\ \text{(quindi } [1] = \underbrace{[\alpha]^{p-2} \cdot [\alpha]}_{\text{inversi}}) \end{array}$$

$$\text{Dunque } [\alpha]^{-1} = [\alpha]^{p-2}$$

$$\text{es. } p = 689 \quad (\text{primo})$$

Voglio calcolare $[2]^{-1}$. "Basta" calcolare $[2]^{p-2}$, ovvero $[2]^{689}$.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 333, 666, 641, 591, 491, 291, 582, 473, 255, 510, 329, 658, 625, 5
 59, 427, 163, 326, 652, 613, 535, 379, 67, 134, 268, 536, 381, 71, 142, 284, 568, 445, 199, 398, 105, 2
 10, 420, 149, 298, 596, 501, 311, 622, 553, 415, 139, 278, 556, 421, 151, 302, 604, 517, 343, 686, 681,
 671, 651, 611, 531, 371, 51, 102, 204, 408, 125, 250, 500, 309, 618, 545, 399, 107, 214, 428, 165, 330
 , 660, 629, 567, 442, 195, 390, 89, 178, 356, 21, 42, 84, 168, 336, 672, 653, 615, 539, 387, 83, 166, 3
 32, 664, 637, 583, 475, 259, 518, 345, 690, 689, 687, 683, 675, 659, 627, 563, 435, 179, 358, 25, 50, 1
 00, 200, 400, 109, 218, 436, 181, 362, 33, 66, 132, 264, 528, 365, 39, 78, 156, 312, 624, 557, 423, 155
 , 310, 620, 549, 407, 123, 246, 492, 293, 586, 481, 271, 542, 393, 95, 190, 380, 69, 138, 276, 552, 413
 , 135, 270, 540, 389, 87, 174, 348, 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 589, 487, 283, 566, 441, 191, 382
 , 73, 146, 292, 584, 477, 263, 526, 361, 31, 62, 124, 248, 496, 301, 602, 513, 335, 670, 649, 607, 523,
 355, 19, 38, 76, 152, 304, 608, 525, 359, 27, 54, 108, 216, 432, 173, 346, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128
 , 256, 512, 333, 666, 641, 591, 491, 291, 582, 473, 255, 510, 329, 658, 625, 559, 427, 163, 326, 652, 6
 13, 535, 379, 67, 134, 268, 536, 381, 71, 142, 284, 568, 445, 199, 398, 105, 210, 420, 149, 298, 596, 5
 01, 311, 622, 553, 415, 139, 278, 556, 421, 151, 302, 604, 517, 343, 686, 681, 671, 651, 611, 531, 371,
 51, 102, 204, 408, 125, 250, 500, 309, 618, 545, 399, 107, 214, 428, 165, 330, 660, 629, 567, 443, 195
 , 390, 89, 178, 356, 21, 42, 84, 168, 336, 672, 653, 615, 539, 387, 83, 166, 332, 664, 637, 583, 475, 2
 59, 518, 345, 690, 689, 687, 683, 675, 659, 627, 563, 435, 179, 358, 25, 50, 100, 200, 400, 109, 218, 4
 36, 181, 362, 33, 66, 132, 264, 528, 365, 39, 78, 156, 312, 624, 557, 423, 155, 310, 620, 549, 407, 123
 , 246, 492, 293, 586, 481, 271, 542, 393, 95, 190, 380, 69, 138, 276, 552, 413, 135, 270, 540, 389, 87,
 174, 348, 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 589, 487, 283, 566, 441, 191, 382, 73, 146, 292, 584, 477,
 263, 526, 361, 31, 62, 124, 248, 496, 301, 602, 513, 335, 670, 649, 607, 523, 355, 19, 38, 76, 152, 30
 4, 608, 525, 359, 27, 54, 108, 216, 432, 173, 346, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 333, 666, 641
 , 591, 491, 291, 582, 473, 255, 510, 329, 658, 625, 559, 427, 163, 326, 652, 613, 535, 379, 67, 134, 26
 8, 536, 381, 71, 142, 284, 568, 445, 199, 398, 105, 210, 420, 149, 298, 596, 501, 311, 622, 553, 415, 1
 39, 278, 556, 421, 151, 302, 604, 517, 343, 686, 681, 671, 651, 611, 531, 371, 51, 102, 204, 408, 125,
 250, 500, 309, 618, 545, 399, 107, 214, 428, 165, 330, 660, 629, 567, 443, 195, 390, 89, 178, 356, 21,
 42, 84, 168, 336, 672, 653, 615, 539, 387, 83, 166, 332, 664, 637, 583, 475, 259, 518, 345, 690, 689, 6
 87, 683, 675, 659, 627, 563, 435, 179, 358, 25, 50, 100, 200, 400, 109, 218, 436, 181, 362, 33, 66, 132
 , 264, 528, 365, 39, 78, 156, 312, 624, 557, 423, 155, 310, 620, 549, 407, 123, 246, 492, 293, 586, 481
 , 271, 542, 393, 95, 190, 380, 69, 138, 276, 552, 413, 135, 270, 540, 389, 87, 174, 348, 5, 10, 20, 40,
 80, 160, 320, 640, 589, 487, 283, 566, 441, 191, 382, 73, 146, 292, 584, 477, 263, 526, 361, 31, 62, 1
 08, 216, 432, 173, 346, 1, 689' (689)

ma notiamo che le classi

sono cicliche - possiamo trovare

l'inverso molto prima di 689

- è quello precedente all'1,

perciò sappiamo che $[n]^{p-1} = [1]$
(e cerchiamo $[n]^{p-2}$)

questo funziona bene con 2, ma, per esempio, non con 3

⑤ per ogni intero n , $2n^{17} + 2n^{15} + 3n^3 + 3n$ è divisibile per 5

[esercizio](#)

- la classe mod 5 ($\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$) ha le stesse operazioni di \mathbb{Z}

$$\left[2n^{17} + 2n^{15} + 3n^3 + 3n \right]_5 \text{ deve essere } [0]$$

oper. in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$= [2] \cdot [n]^{17} + [2] \cdot [n]^{15} + [3] \cdot [n]^3 + [3] \cdot [n] = [0]$$

un intero $n \pmod{5}$ ha resto da 1 a 4 (quindi mi basta verificare queste classi)

- se $n \equiv_5 0 \iff [n] = [0]$ allora è chiaramente verificato

altr: così:

\bar{n}	$[n]^3$	$[n]^{15}$	$[n]^{17}$	$3[n]$	$3[n]^3$	$2[n]^{15}$	$2[n]^{17}$	$3[n] + 3[n]^3 + 2[n]^{15} + 2[n]^{17}$
$n \equiv 1$	$[1]$	$[1]$	$[1]$	$3[1]$	$3[1]^3$	$2[1]^{15}$	$2[1]^{17}$	$3[1] + 3[1]^3 + 2[1]^{15} + 2[1]^{17}$
	$[1] = [1 \cdot 1 \cdot 1] = [1]$	$[1] = [1 \cdot 1 \cdot 1]$	$[1] = [1]$	$3 \cdot 1$	$3 \cdot 1$	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 1$	$3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 10 = 0$
$n \equiv 2$	$[2]$	$[3]$	$[2]$	$[2]$	$[3] + [3] + [2] + [2]$	$[2] + [2] + [2] + [2]$	$[2] + [2] + [2] + [2]$	$[2] + [2] + [2] + [2] = 8 = 0$
$n \equiv 3$	$[3]$	$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[4] + [4] + [1] + [1]$	$[4] + [4] + [1] + [1]$	$[4] + [4] + [1] + [1]$	$[4] + [4] + [1] + [1] = 12 = 2$
$n \equiv 4$	$[4]$	$[4]$	$[4]$	$[2]$	$[2] + [2] + [3] + [3]$	$[2] + [2] + [3] + [3]$	$[2] + [2] + [3] + [3]$	$[2] + [2] + [3] + [3] = 12 = 2$

divisibile per
5 in tutti i casi

studiando le potenze 2 mod 5

$$[2]^0 = [1] \quad [2]^1 = [2] \quad [2]^2 = [4] \quad [2]^3 = [3] \quad [2]^4 = [1]$$

è ciclico:

$$[2]^5 = [2] \cdot [2]^4 = [2] \cdot [1] = [2] \quad \text{il ciclo è lungo 4, quindi } [2]^m = [2]^{q \cdot 4 + r} = [2]^{q \cdot 4} \cdot [2]^r = [2]^r$$

$$[2]^6 = [2] \cdot [2]^5 = [4]$$

quindi per calcolare $[2]^n$ basta calcolare $[2]^r$ resto div. per 4

potenze 3 mod 5:

$$[3]^0 = [1] \quad [3]^1 = [3] \quad [3]^2 = [4] \quad [3]^3 = [2] \quad [3]^4 = [1]$$

potenze 4 mod 5

$$[4]^0 = [1] \quad [4]^1 = [4] \quad [4]^2 = [1] \quad [4]^3 = [4] \quad [4]^4 = [1]$$

③ Nessun intero in $4\mathbb{Z} + 3$

calcoliamo le classi resto modulo 4 dei quadrati

\bar{n}	\bar{n}^2	la somma dei quadrati mod 4 può essere soltanto
0	0	
1	1	
2	0	
3	1	

	+	$\bar{0} \quad \bar{1}$	in particolare, non è mai $\bar{3}$
		$\bar{0} \quad \bar{0} \quad \bar{1}$	
		$\bar{1} \quad \bar{1}$	

no (si può vedere con la riduzione mod 8 e una tabella 3d)

Variante: è vero che ogni intero > 0 è somma di 3 quadrati? Si può dimostrare che ogni intero > 0 è somma di 4 quadrati (Lagrange)

FIBONACCI

(F_n) $n \geq 0$ definito induttivamente: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

proprietà

$$\text{MCD}(F_m, F_n) = F_{\text{MCD}(m, n)}$$

$$\text{in particolare, } \text{MCD}(F_m, F_{m+1}) = F_1 = 1$$

dim. x induzione con algoritmo di Euclideo

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$$\text{MCD}(F_n, F_{n+1}) = \delta_n$$

$$\mathbb{Z} F_n + \mathbb{Z} F_{n+1} = \mathbb{Z} \delta_n \quad \text{devo dimostrare} = 1\mathbb{Z}$$

||

$$\left\{ \exists F_n + b F_{n+1} : \exists, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

|| def. Fibonacci

$$\left\{ \exists F_n + b(F_n + F_{n-1}) : \exists, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

ci serve

dimostrare

$$\mathbb{Z} F_{n-1} + \mathbb{Z} F_n \quad \text{così} \rightarrow \text{ipotesi induttiva: } \mathbb{Z} F_{n-1} + \mathbb{Z} F_n = \mathbb{Z}$$

(claim)

17/10

claim: = (serve che la funzione sia suriettiva)

$$\left\{ (\alpha+b) F_n + b F_{n-1} : \alpha, b \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{Z} F_{n-1} + \mathbb{Z} F_n = \left\{ u F_{n-1} + v F_n : u, v \in \mathbb{Z} \right\}$$

mi serve dim applicazione biiettiva:

$$f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$$

$$(\alpha, b) \mapsto (\alpha+b, b) \quad \text{sia } f(\mathbb{Z}^2) \text{ l'immagine} = \{ u F_n, v F_{n-1} : (u, v) \in f(\mathbb{Z}^2) \}$$

se lo dimostro, dimostro che

ogni volta che prendo α, b posso trovare u e v t.c. $u = \alpha + b$, $v = b$ e viceversa (basta che sia suriettiva)

ma dimostriamo biiettiva

Mostriamo f suriettiva - questo basta per giustificare il claim

Possiamo mostrare che f biiettiva (+ forse)

Richiamo: $A \xrightarrow{f} B$ f biiettiva $\iff \forall b \in B, f^{-1}(\{b\})$ singleton

prop del corso $\Rightarrow f$ biiett. $\iff \exists g: B \rightarrow A$ t.c. $f \circ g = \text{id}_B$ ($\forall b \in B, f(g(b)) = b, \forall a \in A, g(f(a)) = a$)

$$f(a, b) = (a+b, b) =: (u, v)$$

$$\begin{cases} a+b = u \\ b = v \end{cases}$$

unica soluzione (biiettività) (singleton f^{-1})

inverso

$$\text{pongo } g: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2, \quad g(u, v) \mapsto (u-v, v)$$

$$(f \circ g)(u, v) = f(g(u, v)) = f(u-v, v) = u-v+v, v = (u, v)$$

$$(g \circ f)(a, b) = g(f(a, b)) = g(a+b, b) = (a+b-b, b) = (a, b)$$

$\left. \begin{array}{l} \text{sono idempotenti:} \\ f \text{ e } g \text{ biiettive} \end{array} \right\}$

x fibonacci indice ≥ 0

$$\text{Abbiamo dimostrato } \forall n > 0 \quad F_{n+1}\mathbb{Z} + F_n\mathbb{Z} = F_n\mathbb{Z} + F_{n-1}\mathbb{Z} = F_{n-1}\mathbb{Z} + F_{n-2}\mathbb{Z} = \dots = F_1\mathbb{Z} + F_0\mathbb{Z} =$$

$$= F_1\mathbb{Z} + \{0\} = \mathbb{Z}$$

$$\text{ho dim. che } \forall n > 0 \quad F_n\mathbb{Z} + F_{n-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \iff \text{MCD}(F_n, F_{n-1}) = 1 \quad \blacksquare$$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ARITMETICA

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}^*$$

① l'insieme $I = \{ p \text{ primo} : p | \alpha \}$ è finito (il numero di primi che dividono α è finito)

② $\alpha = (\pm 1) \cdot \prod_{\substack{p \\ \text{primo}}} p^{v_p(\alpha)}$ dove $v_p(\alpha) \in \mathbb{N}$ unicamente determinato.

(ogni numero $\neq 0$ è il prodotto di una certa combinazione di numeri primi elevati a un certo esponente
- quelli che non vogliono saranno elevati a 0 -)

OSS

si sa che $P = \{ p \in \mathbb{N}, p \text{ primo} \}$ è infinito.

Siccome

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}, I_\alpha \text{ è finito, } \prod_{\substack{p \\ \text{primo}}} p^{v_p(\alpha)} = \prod_{p \in I_\alpha} p^{v_p(\alpha)} \cdot \prod_{p \notin I_\alpha} p^{v_p(\alpha)}$$

sarà 0 ("non ci servono")

posso dividere i primi in divisori di α e non-divisori di α e suddividere la produttoria

esempio:

$$\begin{aligned} \alpha = 7! &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 7 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2^4 \end{aligned}$$

$$\text{quindi } v_p(\alpha) = \begin{cases} 1 & p=7 \\ 1 & p=5 \\ 2 & p=3 \\ 4 & p=2 \\ 0 & p>7 \end{cases}$$

OSS: dato $\alpha = \prod_p p^{v_p(\alpha)}$ e $b = \prod_p p^{v_p(b)}$

$$\begin{aligned} \alpha = 12 &= 2^2 \cdot 3 \\ b = 15 &= 5 \cdot 3 \implies v_2(\alpha) = 2 & v_2(b) = 0 \\ & & v_3(\alpha) = 1 & v_3(b) = 1 \end{aligned}$$

$$\bullet \alpha \cdot b = \prod_p p^{v_p(\alpha)} \prod_p p^{v_p(b)} = \prod_p p^{v_p(\alpha) + v_p(b)}$$

$$v_5(\alpha \cdot b) = 0 \quad v_5(b) = 1$$

$$\bullet p^{v_p(\alpha)} p^{v_p(b)} = p^{v_p(\alpha) + v_p(b)}$$

$$v_p(\alpha \cdot b) = v_p(12 \cdot 15) = v_p(\alpha) + v_p(b)$$

(enunciato) $\forall \alpha > 0, \exists$ un numero finito di primi distinti p_1, \dots, p_r t.c. $\alpha = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$
e questa fattorizzazione è unicamente determinata.

$$v_2(\alpha \cdot b) = 2 \quad v_3(\alpha \cdot b) = 2 \quad v_5(\alpha \cdot b) = 1 \quad v_p(\alpha \cdot b) = 0 \quad p \geq 7$$

dimostrazione teorema $\Delta = (\pm 1) \prod_p p^{v_p(\Delta)}$

• posso supporre $\Delta > 0$ senza perdita di generalità

① Supponiamo per assurdo \mathbb{P}_{Δ} infinito - vuol dire che esiste una collezione infinita di primi t.c. $p \mid \Delta$

ma $p \mid \Delta \Rightarrow p \leq \Delta$ e impossibile infiniti interi $\leq \Delta$ contr.

② Procediamo per induzione:

$$\cdot \Delta = 1 \quad V_p(1) = \emptyset \quad \forall p \quad 1 = \prod_p p^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$$

• Supponiamo $\Delta > 1$.

dove così ① Δ primo \rightarrow allora $\Delta = \prod_p p^{v_p(\Delta)} \quad V_p(\Delta) = \begin{cases} \emptyset & p \neq \Delta \\ 1 & p = \Delta \end{cases}$

② Δ non primo, Δ non è irriducibile

si può scrivere in fattori diversi da 1 e Δ

$$\Rightarrow \Delta = U \cdot V \quad \text{con} \quad 1 < U < \Delta \quad \& \quad 1 < V < \Delta$$

per ipotesi induttiva, visto che $U, V < \Delta$ posso usare la formula del prodotto

posso scrivere $U = \prod_p p^{v_p(U)}, \quad V = \prod_p p^{v_p(V)}$

$$\Delta = UV = \prod_p p^{v_p(U) + v_p(V)} \blacksquare$$

altre proprietà (in teoria esercizi ma mi sembrano più proprietà)

① $a|b \iff \forall p, V_p(a) \leq V_p(b)$

dim • supponiamo $V_p(a) < V_p(b)$

$$\iff V_p(b) - V_p(a) \geq 0 \in \mathbb{N}$$

poniamo $k = \prod_p p^{V_p(b) - V_p(a)}$ è quindi un intero

osserviamo che $V_p(b) - V_p(a) = 0$ per p abbastanza grande

$$k \cdot a = \prod_p p^{V_p(b) - V_p(a)} \prod_p p^{V_p(a)} = \prod_p p^{V_p(b) - V_p(a) + V_p(a)} = \prod_p p^{V_p(b)} = b$$

quindi $b = k \cdot a \quad \exists k \in \mathbb{N}$ e quindi $a|b$

• supponiamo $a|b$

$$\implies b = ka \quad \exists k \in \mathbb{N}^*$$

per il teorema fondamentale:

$$\prod_p p^{V_p(b)} = \prod_p p^{V_p(ka)} \cdot \prod_p p^{V_p(a)}$$

osservo che
 ≥ 0 perché
k intero

quindi $\prod_p p^{V_p(b)} = \prod_p p^{V_p(k) + V_p(a)}$

per unicità della fattorizzazione: $V_p(b) = \underbrace{V_p(k)}_{\geq 0} + V_p(a) \iff V_p(a) = V_p(b) - V_p(k)$

$$\forall p, V_p(b) \geq V_p(a) \blacksquare$$

② $a, b \in \mathbb{N}^*, \quad \text{MCD}(a, b) = \prod_p p^{\min(V_p(a), V_p(b))}$

dim. $\delta = \text{MCD}(a, b)$ è l'unico intero di \mathbb{N}^* t.c.

① $\delta|a \quad e \quad \delta|b$

② $\forall d' \in \mathbb{N} \quad d'|a \quad e \quad d'|b \implies d'|\delta$

considerando che $\delta|b \iff \forall p, V_p(\delta) \leq V_p(b)$

③ $\forall p, V_p(\delta) \leq V_p(a) \quad e \quad V_p(\delta) \leq V_p(b)$

② Se $\exists d' \text{ t.c. } \forall p \quad v_p(d') \leq v_p(a) \leftarrow v_p(d') \leq v_p(b)$

Allora $\forall p, \quad v_p(d') \leq v_p(\delta)$:

③ $\iff v_p(\delta) \leq \min(v_p(a), v_p(b))$

④ \iff se d' è tale che $v_p(d') \leq \min(v_p(a), v_p(b))$

Allora $v_p(d') \leq v_p(\delta)$

$\forall p, \quad v_p(\delta)$ è il più grande degli interi n t.c. $n \leq \min(v_p(a), v_p(b))$

quindi $v_p(\delta) = \min(v_p(a), v_p(b))$ (se è il massimo tra $i \leq, i \neq$)

esercizio

$$a, b, c \in \mathbb{N}^* \quad \text{MCD}(a, b, c) \mid \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c)$$

pongo $x, y, z = v_p(a), v_p(b), v_p(c)$ (per comodità)

$$\text{MCD}(a, b, c) \mid \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c) \iff \exists n \text{ t.c. } \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c) = n \cdot \text{MCD}(a, b, c)$$

Come dimostrare la lezione:

$$\bullet \text{MCD}(a, b, c) = \prod_p p^{\min(x, y, z)} \quad \bullet \text{MCD}(a, c) = \prod_p p^{\min(x, z)} \quad \bullet \text{MCD}(b, c) = \prod_p p^{\min(y, z)}$$

$$\bullet \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c) = \prod_p p^{\min(x, z) + \min(y, z)}$$

$$\text{quindi } \text{MCD}(a, b, c) \mid \text{MCD}(a, c) \cdot \text{MCD}(b, c) \iff \prod_p p^{\min(x, z) + \min(y, z)} = \prod_p p^{\min(x, y, z)} \cdot \prod_p p^k$$

$$\iff \min(x, z) + \min(y, z) = \min(x, y, z) + k$$

3 casi:

$$\textcircled{1} \min = z$$

$$\textcircled{2} \min = x$$

$$\textcircled{3} \min = y$$

$$\begin{aligned} \text{qui } \min(x, z) &= z \text{ e } \min(y, z) = z \\ \text{e } \min(x, y, z) &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{quindi } z+z &= z+k \\ \text{ovvero } k &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{qui } \min(x, z) &= x \\ \text{e } \min(y, z) &= z \circ y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &\swarrow \\ x+z &= x+k \\ \text{ovvero } k &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{qui } \min(y, z) &= y \\ \text{e } \min(x, z) &= x \circ z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &\swarrow \\ x+y &= y+k \\ \text{ovvero } k &= x \end{aligned} \quad \begin{aligned} z &\swarrow \\ z+y &= y+k \\ \text{ovvero } k &= z \end{aligned}$$

$$\text{quindi } n = \prod_p p^k \text{ con } k \text{ definito sopra}$$

DIVISORI DI ZERO

in $\mathbb{Z}_{/6\mathbb{Z}}$, $\{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$ dato A snello

$[2] \cdot [3] = [0]$ con $[2], [3] \neq [0]$

ma in \mathbb{Z} non succededef $\alpha \in A$ è divisore di zerose $\exists b \in A \setminus \{0\}$ t.c. $\alpha b = 0_A$ in A qualiasi (tranne se $1_A = 0_A$, $A = \{0\}$) 0_A è divisore di 0

- se $A = K$ CAMPO (es. $A = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$)

cioè $\forall \alpha \in K \setminus \{0\}$, α invertibile $K^\times = K \setminus \{0\}$ L'unico divisore di zero in K è 0_K dim • Supponiamo α divisore di zero:da qui in poi usiamo 0 per 0_K

$\exists b \neq 0$ t.c. $\alpha b = 0$

però b è invertibile $\rightarrow \exists b^{-1} \in K^\times$ t.c. $b \cdot b^{-1} = 1_K$ quindi posso moltiplicare termine α termine per b^{-1}

$$\cancel{\alpha} \cancel{b} b^{-1} = \cancel{0} \cancel{b}^{-1}$$

$$\alpha = 0$$

in \mathbb{Z} in \mathbb{Z} , se α è divisore di 0 , allora $\alpha = 0$ (anche se \mathbb{Z} non è un campo)dim • sia α divisore di zero $\iff \exists b \in \mathbb{Z}^* \text{ t.c. } \alpha b = 0 \quad (-\alpha)(-\alpha) = \alpha b = 0$ Senza perdita di generalità, supponiamo $\alpha \geq 0$

$$\exists b \text{ t.c. } \alpha b = 0 \iff 0 = \alpha b = \underbrace{b + b + b + \dots + b}_{\alpha \text{ volte}} \geq b > 0$$

questo è impossibile se $\alpha > 0$.quindi, $\alpha = 0$ ■def dominiodato A snello, $A \neq \{0\}$, si dice che A è un dominio se l'unico divisore di zero in A è 0_A .

- Ogni campo è un dominio, e \mathbb{Z} è un dominio

es) mostrare che $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ è un dominio $\iff N$ primo (\iff campo) (noi non ho capito se basta dimostrare dominio $\iff N$ primo visto che abbiamo già visto in classe che $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ campo)

• dimostriamo $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dominio $\rightarrow N$ primo

Supponiamo $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dominio. Allora, l'unico divisore di 0_{k_N} è 0_{k_N}

Supponiamo per assurdo N non primo $\rightarrow \exists a, b, 1 < a < n, 1 < b < n$ t.c. $N = ab$

quindi, $[a] \cdot [b] = [ab] = [0]$. k_N non è dominio. CONTRAD.

• dimostriamo che N primo $\rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dominio

($\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dominio $\iff \forall [a], [b]$ t.c. $[a] \cdot [b] = [0]$, o $[a] = [0]$ o $[b] = [0]$)

Supponiamo $\exists [a], [b] \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ t.c. $[a] \cdot [b] = [0]$

$[a] \cdot [b] = [ab] = [0]$, significa $N | ab$ (il resto è 0)

Ma, se $N | ab$, poiché N primo, o $N | a$ o $N | b$. (per def. primo)

Ma, se $N | a$, $[a] = [0]$ e se $N | b$, $[b] = [0]$

Quindi, uno dei due divisori è zero

- Se $\alpha \in A$ non è divisore di zero ($\forall b \in A \setminus \{0\}, \alpha b \neq 0$) e $\alpha x = 0_A \implies x = 0_A$

Lemma legge di cancellazione (in A snello)

Se $\alpha \in A$ non divisore di zero, allora $\alpha b = \alpha c \implies b = c$

dim:

$$\alpha b = \alpha c \iff \alpha(b-c) = 0 \quad \text{visto che } \alpha \text{ non è divisore di } 0 \implies b-c = 0 \iff b = c$$

$\alpha \neq 0$

OSSERVAZIONE: Questo implica la legge di cancellazione in \mathbb{Z} (dominio) ($\alpha \neq 0$ perché 0 unico divisore di 0 in \mathbb{Z})

risoluzione di equazioni in A (in particolare $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

$$\alpha X = b \quad \alpha, b \in A$$

X indeterminato (può essere un valore o un insieme)
mentre x (minuscolo) è un valore

- in $A = \mathbb{Z}$ una soluzione di $\alpha X = b$ esiste $\iff \alpha | b$

infatti, se l'insieme delle soluzioni $\neq \emptyset$ e se
 x soluzione, si ha $\alpha x = b \iff \alpha | b$ (def. |)

Se, invece, $\alpha | b \implies \exists k \in \mathbb{Z}$ t.c. $b = \alpha k$ e prendo $k = x$

esempio: $2x = 3$ insieme delle soluzioni $= \{x \in \mathbb{Z} : 2x = 3\} = \emptyset$ vorrebbe dire $2 | 3$ - impossibile

$$2x = 6 \quad \{x \in \mathbb{Z} : 2x = 6\} = \{3\} \quad \text{osserviamo } 6 = 2 \cdot 3 \quad \text{quindi } 2x = 2 \cdot 3 \implies x = 3$$

- $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\alpha X = b$$

- Nel caso in cui A è un anello qualsiasi e $\alpha \in A^\times$ di inverso α^{-1} , posso moltiplicare termine α termine per α^{-1}

$$\underbrace{\alpha^{-1} \alpha}_1 X = \alpha^{-1} b \quad \text{quindi l'eq. ha l'unica soluzione } X = \alpha^{-1} b$$

(es $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$)

- Se per esempio $A = K$ campo

$$\alpha X = b \quad \text{con } \alpha \neq 0 \quad \text{ammette sempre l'unica soluzione } X = \alpha^{-1} b$$

proposizione $\exists X = b \quad \exists, b \in A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

ammette soluzioni $\iff \text{MCD}(\alpha, n) \mid \beta$ con $\alpha = [\alpha] \quad b = [\beta] \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

dim:

• Dimostro ammette soluzioni $\implies \text{MCD}(\alpha, n) \mid \beta$

$$[\alpha][x] - [\beta] = [0]$$

quindi $\exists n \in \mathbb{Z}$ quindi multiplo
di n

Sia $[x]$ soluzione: $\alpha[x] = b$ quindi $[\alpha][x] = [\beta] \iff \alpha x - \beta \in n\mathbb{Z}$

$$\iff \alpha x - \beta = nk \quad \exists k \in \mathbb{Z} \iff \alpha x - nk = \beta \implies \beta \in \alpha\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \delta\mathbb{Z} \iff \delta \mid \beta$$

$\beta \in \text{multiplo}$
 $\text{di } \delta$

• Ora dimostro $\text{MCD}(\alpha, n) \mid \beta \implies$ ammette soluzioni

Sappiamo $\delta = \text{MCD}(\alpha, n) \mid \beta \iff \beta = \delta x \implies \beta \in \alpha\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$

$$\iff \exists u, v \text{ t.c. } \beta = u\alpha + vn \iff \beta - u\alpha = vn$$

\times def congr. mod

$$\iff \beta \equiv_n u\alpha \iff [\beta] = [u][\alpha]^{=\delta} \quad b = x\delta$$

esempio: $[3]X = \emptyset$ in $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$$\alpha = 3, \beta = \emptyset, n = 6 \quad \text{MCD}(\alpha, n) = 3 \mid \emptyset = \beta$$

ci sono soluzioni. $X = [2]$ è soluzione ($[3] \cdot [2] = [6] = [0] \text{ in } \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$)

$X = [4]$ è soluzione ($[3] \cdot [4] = [12] = [0]$)

o anche $[3] \cdot [2] \cdot [2] = [0] \cdot [2] = [0]$)

$X = [0]$ è soluzione ($[3] \cdot [0] = [0]$)

l'insieme delle soluzioni è $\{[0], [2], [4]\} \subset A$

parentesi tutoraggio: equazioni diofantee

Risolvere la seguente equazione diofantea: $\frac{858}{a}x + \frac{253}{b}y = \frac{33}{c}$

① Calcolo l'MCD (a, b)

$$858 = 3 \cdot 253 + 99$$

$$253 = 2 \cdot 99 + 55$$

$$99 = 1 \cdot 55 + 44$$

$$55 = 1 \cdot 44 + 11$$

$$44 = 4 \cdot 11 + 0$$

$$d = \text{MCD}(858, 253) = 11$$

② Mi assicuro che l'MCD divide c

(altrimenti, l'eq. non ha soluzioni)

$$11 | 33 ? \text{ sì}$$

③ Calcolo l'identità di Bézout

(il tutor lo fa da sopra e usando a, b invece dei numeri corrispondenti)

$$99 = 858 - 3 \cdot 253 = a - 3b$$

$$55 = 253 - 2 \cdot 99 = b - 2(a - 3b) = -2a + 7b$$

$$44 = 99 - 55 = a - 3b - (-2a + 7b) = 3a - 10b$$

$$11 = 55 - 44 = -2a + 7b - (3a - 10b) = -5a + 17b$$

$$\text{quindi } 11 = -5a + 17b$$

④ Devo trovare $\underline{\underline{33}} = x\underline{a} + yb$: moltiplico a dx e sx per arrivare al numero che cerco

$$11 = -5a + 17b$$

$$\underline{x^3} \quad 33 = 3(-5a + 17b) = -15a + 51b = \underbrace{-15}_{x_0} \cdot 858 + \underbrace{51}_{y_0} \cdot 253$$

ho trovato x_0 e y_0 soluzioni particolari dell'equazione

⑤ Trovo le soluzioni generali

(Soluzioni intere dell'omogeneo associato)

(termine non moltiplicato da x_0)

$$x = x_0 + \frac{b}{\text{MCD}(a, b)} K \quad K \in \mathbb{Z}$$

$$y = y_0 - \frac{a}{\text{MCD}(a, b)} K$$

$$\text{quindi } x = -15 + \frac{253}{11} K = -15 + 23K$$

$$K \in \mathbb{Z}$$

$$y = 51 - \frac{858}{11} K = 51 - 78K$$

Lemma

$a, b, c \in \mathbb{Z}$ $a, b | c$ e $\text{MCD}(a, b) = 1$ allora $ab | c$

dim:

$$a, b | c \iff c = ak = bh \quad (\exists h, k \in \mathbb{Z})$$

$$\implies a | bh \quad (\text{o anche } b | ah, \text{ ma scegliamo } a | bh)$$

• Devo dimostrare $\text{MCD}(a, b) = 1 \implies a | h^*$ $\implies ab | c$ moltiplicando per b da entrambi i lati ($c = bh$)

• $\text{MCD}(a, b) = 1 \iff b$ è invertibile modulo a

(b invertibile se $by \equiv 1 \pmod{a}$ ovvero $by - 1 \equiv 0 \pmod{a}$
 $\iff by - ka = 1 \quad \text{MCD}(a, b) = 1 \iff ax + by = 1$
 prendo $x = -ka$ e queste cose sono uguali)

$$\iff \exists b' \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } bb' \equiv 1 + a\mathbb{Z}$$

• Dicendo $a | bh \implies a | b'$ $b' | b'bh = (1 + ak)h \iff a | b' = h + ak$

$$\iff ab' - ahk = h \iff a(b' - hk) = h \quad \text{quindi } a | h \blacksquare$$

III secolo dal matematico Sun Tsu! (\neq the art of war Sun Tsu)

TEOREMA CINESE DEI RESTI

Poniamo $r_1, \dots, r_s \in \mathbb{N}^*$ e supponiamo $\text{MCD}(r_i, r_j) = 1 \quad \forall r_i \neq r_j$ > due > due coprimi

Consideriamo inoltre $c_1, \dots, c_s \in \mathbb{Z}$

Allora il sistema

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} x \equiv c_1 \pmod{r_1} \\ x \equiv c_2 \pmod{r_2} \\ \vdots \\ x \equiv c_s \pmod{r_s} \end{array} \right. \text{ ha un'unica soluzione modulo } R := r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_s$$

ovvero l'insieme $E_* = \{x \text{ soluzione in } \mathbb{Z} \text{ di } (*)\}$ è $x_0 + R\mathbb{Z}$

Come calcolare una soluzione particolare x_0 di $(*)$?

$$\bullet R = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_s \quad \bullet \text{ poniamo } R_i = \frac{R}{r_i} = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \overset{\text{"non } c_i \text{ in "}}{r_i} \cdot \dots \cdot r_s = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{i-1} \cdot r_{i+1} \cdot \dots \cdot r_s$$

e notiamo che $\text{MCD}(R_i, r_i) = 1$ (perché r_i, r_j ecc primi fra loro e in R_i "manca" proprio r_i)

Visto che sono primi fra loro, questa proprietà può essere riformulata dicendo che $[R_i]$ classe di R_i in $\mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}$

$$\text{è invertibile di inverso } [s_i] \in \mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z} \quad [R_i][s_i] = [1]$$

Quindi, $\underbrace{[R_i]}_{[1]} \underbrace{[s_i]}_{[y_i] \in \mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}} [c_i] = [c_i]$ quindi abbiamo costruito elementi $[y_1], \dots, [y_s] \in \mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}$ formati dall'inverso di R_i e c_i

• Ora, dimostriamo che $x_0 = \sum_{i=1}^s y_i R_i \in \mathbb{Z}$ è soluzione di $(*)$

$x_0 = \sum_{i=1}^s y_i R_i \in \mathbb{Z}$ è soluzione di (*)

infatti, se $i \neq j$, $r_i | R_j$ perché R_j è il prodotto di tutti "gli r " tranne r_i ,
quindi l'unico che non lo divide è r_i

Quindi $x_0 = \sum_{j=1}^s y_j R_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s y_j R_j + y_i R_i$ isoliamo il termine non divisibile per r_i (quindi il resto)
il tutto è quindi $\equiv_{r_i} y_i R_i$
(definito come)
 $\equiv_{r_i} c_i$ quindi abbiamo trovato x_0
congruente a $c_i \text{ mod } r_i$

Questo è valido $\forall i = 1, \dots, s$ dunque $x_0 = \sum_j y_j R_j$ è una sol. particolare di (*)

Sistema omogeneo associato

$$\begin{aligned} *_{(H)}: \quad & \left\{ \begin{array}{l} x \equiv 0 \pmod{r_1} \\ x \equiv 0 \pmod{r_2} \\ \vdots \\ x \equiv 0 \pmod{r_s} \end{array} \right. \\ & x \equiv_r 0, \quad i=1 \dots s \end{aligned}$$

Soluzioni? $x \equiv_{r_1} 0 \iff r_1 | x$
 $x \equiv_{r_2} 0 \iff r_2 | x$

ma r_1, r_2 sono primi fra loro, quindi (x lemma) $r_1 r_2 | x$ (Si può andare avanti fino a r_s :
 $x \equiv_{r_3} 0 \iff r_3 | x$, $\text{MCD}(r_1, r_2, r_3) = 1 \Rightarrow r_1 r_2 r_3 | x$ ecc..)

Iterando, ottengo che $R := r_1 \dots r_s | x$

Quindi, l'insieme delle soluzioni di $(*)_H$ è $E_H = R\mathbb{Z}$ (i multipli di R)

proposizione

L'insieme delle soluzioni di (*), E_* è dato da $x_0 + R\mathbb{Z}$

dim: • $E_* \supset x_0 + R\mathbb{Z}$ è chiaro. Infatti, se $x \in x_0 + R\mathbb{Z}$, allora $x = x_0 + Rk \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

ma $Rk \equiv_{r_i} 0 \quad \forall i = 1 \dots s$ ($r_i | Rk$, perché $r_i | R$ - R è il prodotto di tutti gli r_i)

• Addizionando con x_0 , che è soluzione particolare, ottengo $x \equiv_{r_i} c_i + 0 \equiv c_i \text{ mod } r_i$
 $\Leftrightarrow x \equiv_{r_i} x_0$

• Dimostriamo $E_* \subset x_0 + R\mathbb{Z}$

$$x \equiv_{r_i} c_i \iff x - c_i \equiv_{r_i} 0$$

(old sistema)

Sia x soluzione dr (*). Allora, $x - x_0 \equiv_{r_i} 0 \quad \forall i = 1 \dots s$

$\Rightarrow x - x_0 \in R\mathbb{Z}$ x Lemma ($r_i | x - x_0$, quindi $r_1 r_2 \dots r_s | x - x_0$, quindi $x - x_0$ multiplo di R)

$\Rightarrow x \in x_0 + R\mathbb{Z} \Rightarrow E_* \subset x_0 + R\mathbb{Z}$

piccola parentesi pratico: quello che ci hanno detto al TUTORAGGIO sul teorema cinese del resto

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{11} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{2} \end{array} \right. \quad \cdot \quad r_1 = 11, \quad r_2 = 5, \quad r_3 = 2$$

Se sono coprimi, ammette un'unica soluzione modulo R

$$\bar{x} = R_1 \bar{x}_1 + R_2 \bar{x}_2 + R_3 \bar{x}_3 + Rk \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{con } R = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \quad e \quad R_i = \frac{R}{r_i} \quad e \quad \bar{x}_i \text{ t.c. } R_i x \equiv c \pmod{r_i}$$

① $r_1 = 11 \quad r_2 = 5 \quad r_3 = 2$ sono coprimi? Sì.

② $R = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 11 \cdot 5 \cdot 2 = 110$ ricordiamo $c_1 = 1 \quad c_2 = 2 \quad c_3 = 1$

$$R_1 = \frac{11 \cdot 5 \cdot 2}{11} = 10 \quad R_2 = \frac{11 \cdot 5 \cdot 2}{5} = 22 \quad R_3 = \frac{11 \cdot 5 \cdot 2}{2} = 55$$

③ $\bar{x}_i = R_i x \equiv_r c$

• $\bar{x}_1 = 10x \equiv 1 \pmod{11}$

è un'equazione diofantea di tipo

$$10x - 11h = 1 \quad \text{che posso scrivere} \quad (\text{per non avere il } -)$$

con $y = -h \quad 10x + 11y = 1$ (cerco solo x)

Risolvo l'eq.: • $\text{MCD}(10, 11) = 1$

Bézout $1 = 10 \cdot \underline{-1} + 11 \cdot 1$

(ho trovato)

x_0 particolare

$$22 = 4 \cdot 5 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

quindi (Bézout)

$$1 = 5 - 2 \cdot 2$$

$$1 = 5 - 2 \cdot (22 - 4 \cdot 5)$$

$$1 = \underline{-2} \cdot 22 + 9 \cdot 5$$

• $\bar{x}_3 = 55x \equiv 1 \pmod{2}$

55 è dispari, quindi

$$\equiv 1 \pmod{2}$$

$$1x \equiv 1 \pmod{2}$$

$$[x_3] \equiv [1] \pmod{2}$$

• metto l' x particolare $x = x_0 + \frac{b}{\text{MCD}(a, b)} k$ nella formula

$$x = -1 + \frac{11}{1} k$$

k deve essere $0 \leq k \leq d-1$ (MCD)

• quindi $k \in \{0\} \rightarrow x = -1 + 0 = -1$

ma qui cerchiamo $= 2^*$

quindi moltiplico per 2

$$2 = -4 \cdot 22 + 18 \cdot 5$$

$$x = -4 + \frac{5}{1} k$$

Siamo in
mod 11

quindi $[x_1] \equiv [-1] \equiv [10]$

$$k \in \{0\} \quad [x_2] \equiv [4] \equiv [1]$$

④ metto tutto nella formula finale $(\bar{x} = R_1 \bar{x}_1 + R_2 \bar{x}_2 + R_3 \bar{x}_3 + Rk)$

$$177 - 110$$

$$[x] = 10 \cdot 10 + 22 \cdot 1 + 55 \cdot 1 + 110k = 177 + 110k = 67 + 110k$$

Esercizio 8 (foglio 3)

Esercizio 8. Trovare tutti gli interi $x \in \mathbb{Z}$ che soddisfino

- (i) $4x \equiv 7 \pmod{15}$
- (ii) $6x \equiv 8 \pmod{9}$
- (iii) $\begin{cases} 1025x \equiv 5312065 \pmod{8} \\ 36x \equiv 322 \pmod{5} \\ 4x \equiv 7 \pmod{3} \end{cases}$
- (iv) $4x \equiv 3 \pmod{385}$.

METODO PELLARIN CRT (3)

$$\textcircled{1} \quad 4x \equiv 7 \pmod{15}$$

① calcolo l'MCD tra 4 e 15

$$\text{MCD}(4, 15) = 1 \iff [4] \text{ invertibile mod. 15}$$

$$\exists n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } 4 \cdot n \equiv_1 1 \quad (\text{es. } n=4)$$

lo faccio perché voglio che quel $4x$ diventa un (1)x

② trasformo $4x$ in $x \rightarrow$ moltiplico entrambi i lati per 4

$$4 \cdot 4x \equiv_{15} 28$$

$$x \equiv_{15} 13$$

(moltiplichi con resto 13)

$$\text{quindi, le sol. sono } \mathcal{E} = 15\mathbb{Z} + 13$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} 1025x \equiv 5312065 \pmod{8} \\ 36x \equiv 322 \pmod{5} \\ 4x \equiv 7 \pmod{3} \end{cases}$$

① notiamo che r_1, r_2, r_3 sono primi tra loro ✓

② semplifichiamo le congruenze

$$\textcircled{4} \pmod{8} \quad 1025 = 1024 + 1 = 2^{10} + 1 = (2^3)^2 \cdot 2 + 1 \equiv 1 \pmod{8}$$

$\equiv_8 0$ perciò
 $2^3 \equiv_8 0$

$$\cdot 5312065$$

$$\textcircled{5} \quad 8 \mid 40 \quad \text{quindi } 8 \mid 40 \cdot 10\mathbb{Z}$$

$$\text{notiamo che } 5312065 = 4000000 + 1312065$$

$$\text{visto che } 8 \mid 4 \cdot 10^6 \quad 5312065 \equiv_8 1312065$$

$$8 \mid 1200000 \equiv_8 112065 \quad 8 \mid 120000 \equiv_8 -7935$$

$$8 \mid 8000 \equiv_8 65 \equiv_8 1$$

il sistema diventa quindi

$$\begin{cases} x \equiv_8 1 \\ x \equiv_5 2 \\ x \equiv_3 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \quad \text{calcoliamo le altre cose: } R = 3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$$

$$R_1 = r_2 r_3 = 15$$

$$R_2 = r_1 r_3 = 24$$

$$R_3 = r_1 r_2 = 40$$

$$\textcircled{2} \quad 6x \equiv 8 \pmod{9}$$

notiamo che 6 e 9 non sono coprimi.

$$6x \equiv_9 8 \iff 6x - 8 = 9 \cdot k$$

$$\iff 8 = \underbrace{6x - 9k}_{\text{ma questo è impossibile}}$$

notiamo che questi sono divisibili per 3 (MCD 3, 9)

mentre 8 non lo è

$$\mathcal{E} = \emptyset$$

$$\textcircled{2} \cdot 36 \equiv_5 1$$

$$\cdot 322 \quad 5 \mid 320 \quad \equiv_5 2$$

$$\textcircled{3} \cdot 4 \equiv_3 1$$

$$\cdot 7 \equiv_3 1$$

④ troviamo gli inversi S_i :

$$R_1 = 15 \text{ è invertibile modulo } r_1 = 8 \quad 7 \cdot 15 \stackrel{-1}{\equiv} 1 \text{ di inverso } S_1 = 7$$

$$R_2 = 24 \quad 24 \cdot 4 \stackrel{-1}{\equiv} 1 \quad S_2 = 4$$

$$R_3 = 40 \quad 40 \cdot 1 \stackrel{-1}{\equiv} 1 \quad S_3 = 1$$

⑤ calcoliamo $y_i = S_i c_i$ e li inseriamo nella formula finale

i	S_i	c_i	y_i
1	7	1	7
2	4	2	$8 \stackrel{-1}{\equiv} 3$
3	1	1	1

$$X_0 = \sum_{i=1}^3 y_i R_i = 7 \cdot 15 + 3 \cdot 24 + 1 \cdot 40 = 217 \quad \text{soltuzione particolare}$$

$$\text{Soltuzione generale: } E = 217 + 120Z$$

POLINOMI in una indeterminata \Rightarrow coeff in un campo

K campo = $\mathbb{F}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Un polinomio in X a coefficienti in K è definito come

$$P = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^i \quad \text{con } \alpha_i \in K \text{ coefficienti, } n \in \mathbb{Z} \text{ (dipende dal polinomio)}$$

$\alpha_i = 0 \quad \forall i > 0$ (abbastanza grande)

esempio

$$K = \mathbb{R}, \quad 0, \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i \quad K = \mathbb{F}_2 \quad [1]x^5 + [0]x^4 + [2]x^3 + [6]x^2 + [1]x + [1] = x^5 + x + [1]$$

Insieme dei polinomi

(OSSERVAZIONE: è quindi possibile che un insieme finito es. $K = \mathbb{F}_p$ ne "generi" uno infinito - $K[X]$)

$A = K[X]$ è l'insieme dei polinomi (ogni $P \in A$)

L'insieme di polinomi ha una struttura ad anello (comm. un.) $(A, -, +, \cdot, 0, 1)$

Definiamo infatti le operazioni di somma e prodotto:

$$\text{con } P = \sum_{i \geq 0} \alpha_i X^i \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i > 0 \quad Q = \sum_{i \geq 0} b_i X^i \quad b_i = 0 \quad \forall i > 0$$

- $P + Q := \sum_{i \geq 0} (\alpha_i + b_i) X^i$

prodotto di Cauchy

- $P \cdot Q := \sum_{k \geq 0} c_k X^k \quad \text{con } c_k = \sum_{i+j=k} \alpha_i b_j \quad \begin{array}{l} \text{(qui si nota che } c_k = 0 \quad \forall k > 0 \\ \text{- per numeri abbastanza grandi,} \\ \alpha_i e b_j saranno 0 \end{array}$

→ grado di un polinomio

$$P \in A[X] \quad P = \sum_{i \geq 0} \alpha_i X^i \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i > 0 \quad \text{con } P \neq 0 \quad (\text{ovvero } \{i \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \alpha_i \neq 0\} \text{ finito non vuoto})$$

$$\deg(P) = \max \{i \in \mathbb{N}, \alpha_i \neq 0\} \quad \text{grado massimo} \quad \bullet \text{ Si pone } \deg(0) := -\infty$$

Quindi, l'insieme dei gradi è $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ $\deg: K[X] \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$

- elementi di grado zero $\{P \in K[X] : \deg(P) = 0\} = K^\times$ ↗ sono gli invertibili del campo, ovvero (per def campo) tutti gli el del campo tranne 0 (quindi sono le "costanti")

Lemmas

$$\textcircled{1} \quad \deg(\alpha) = -\infty \iff \alpha = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \deg(\alpha b) = \deg(\alpha) + \deg(b)$$

$$\textcircled{3} \quad \deg(\alpha + b) \leq \max(\deg(\alpha), \deg(b))$$

$$\text{e } \deg(\alpha + b) = \max(\deg(\alpha), \deg(b)) \text{ se } \deg(\alpha) \neq \deg(b)$$

se i gradi sono uguali gli el. di grado maggiore si potrebbero annullare e il grado sarebbe < (es. $(x^3+x) + (-x^3+2)$)

$$\text{es. } \alpha = x^2 + x + 1 \quad \deg = 2 \quad b = x + 1 \quad \deg = 1 \quad \alpha + b = x^2 + 2x + 2 \quad \deg = 2$$

ANALOGIE TRA I POLINOMI E \mathbb{Z}

$$\mathbb{Z} \quad A = K[X]$$

anello di polinomi
Compone

operazioni:

$$\cdot \mathbb{Z} \xrightarrow{1:1} \mathbb{N} \quad \text{val assoluto}$$

$$a \longrightarrow \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a \leq 0 \end{cases}$$

proprietà

- ① $|a|_c = 0 \iff a = 0$
- ② $|ab|_c = |a|_c \cdot |b|_c$
- ③ $|a+b|_c \leq |a|_c + |b|_c$ diseg. triangolare

$$\cdot A \xrightarrow{\deg} \mathbb{N} \sqcup \{-\infty\} \quad \text{grado polinomio}$$

$$\textcircled{1} \deg(a) = -\infty \iff a = 0$$

$$\textcircled{2} \deg(ab) = \deg(a) + \deg(b)$$

$$\textcircled{3} \deg(a+b) \leq \max(\deg(a), \deg(b))$$

ci sono delle corrispondenze, ma serve qualcosa di più vicino

def c-valore assoluto di un polinomio

Dato un polinomio $P \in A \setminus \{0\}$

Scegliamo $c > 1$

$$|P|_c := c^{\deg(P)} \quad (\text{dipende da } c)$$

Allora proprietà

$$\textcircled{1} |a|_c = 0 \iff a = 0$$

$$\textcircled{2} |ab|_c = |a|_c \cdot |b|_c$$

$$\textcircled{3} |a+b|_c \leq \max(|a|_c, |b|_c) \leq |a|_c + |b|_c$$

invece, se $P = 0$

$$|0|_c := 0 = c^{-\infty}$$

$$\text{Per } \textcircled{2} \quad |ab|_c = c^{\deg(ab)} = c^{\deg(a) + \deg(b)} = |a|_c \cdot |b|_c$$

$$\text{Per } \textcircled{3} \quad |a+b|_c = c^{\deg(a+b)} \leq c^{\max(\deg(a), \deg(b))} \leq c^{\deg(a) + \deg(b)}$$

ALGORITMO DELLA DIVISIONE EUCLIDEA SUI POLINOMI

Teorema $a, b \in A = K[X] \quad (a, b) \neq (0, 0)$

Esiste unica $(q, r) \in A \times A$ t.c. $a = qb + r$ dove $\deg(r) < \deg(b)$ ovvero $|r|_c < |b|_c$

divisione in colonna

$$\begin{array}{l} a = x^4 + x + 1 \\ b = x^3 - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^4 + \\ x^3 - 2 \\ \hline x^4 - 2x \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 - 2 \\ \hline x \end{array} \quad \begin{array}{r} x^4/x^3 \\ \hline x \end{array}$$

③ scrivo qui
 ↓
 x^4
 ④ sottraggo
 ①

② moltiplico per $(x^3 - 2)$
 ③

grado <
 quindi fine

$q = x, \quad r = 3x + 1$

CARATTERISTICHE DI $A = K[X]$
in analogia con \mathbb{Z}

\mathbb{Z}

$A = K[X]$

\mathbb{N}^* ("positivi")

POLINOMI MONICI (insieme A^+)
polinomi nella forma $P = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$
con $\alpha_n = 1$ (coefficiente di grado massimo = 1)

INVERTIBILI

$A^\times = K^\times$ gli invertibili sono gli invertibili del campo associato

$$\mathbb{Z}^\times = \{+1, -1\}$$

Sia $a \in A^\times$. $\exists b^\times$ con $ab = 1$

$$\deg(ab) = \deg(a) + \deg(b) = \deg(1)$$

$$\Rightarrow \deg(a) + \deg(b) = 0 \quad \text{non può dare 0 in una somma}$$

$$\deg(a) = \deg(b) = 0$$

$$\Rightarrow a, b \in K^\times$$

\ "costanti" diverse da 0

divisibilità:

$$a|b \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } b = ak$$

$$\bullet a|b \iff b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$$

è una relazione:

- riflessiva
- transitiva
- "quasi antisimmetrica"

divisibilità per i polinomi

$$P|Q \iff \exists h \in A \text{ t.c. } Q = hP$$

$$\bullet P|Q \iff Q = hP \subset P$$

è una relazione:

- riflessiva
- transitiva

• "quasi antisimmetrica":

$$\text{dati } P, Q \in A \text{ t.c. } P|Q \wedge Q|P$$

$$\iff Q = hP \quad \exists h \in A, \quad P = kQ \quad \exists k \in A$$

$$\iff Q = h(kQ) \iff \deg(Q) = \deg(h) + \deg(k) + \deg(Q)$$

$$\deg(Q) = \deg(h) + \deg(k) + \deg(Q)$$

$$0 = \deg(h) + \deg(k)$$

$$\iff \deg(h) = \deg(k) = 0$$

$$\iff h \in K^\times, k \in K^\times$$

$A = K[X]$ è un dominio d'integrità.

\mathbb{Z} è un dominio di integrità

dim: sia $P \in A$ divisore di zero.

Allora $\exists Q \in A \setminus \{0\}$ t.c. $PQ = 0$

ovvero $\deg(PQ) = \deg(0)$

$\Leftrightarrow \deg(P) + \deg(Q) = -\infty$

entrambi $\in \mathbb{N}$, la loro somma non può essere $-\infty$

quindi $\deg(P) = -\infty$ e $P = 0$ ■

congruenza:

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n | a - b$$

anche i polinomi hanno la relazione di congruenza

$$P, Q \in A, H \in A \setminus \{0\}$$

$P \equiv Q \pmod{H}$ è una relazione di equivalenza

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è un anello commutativo unitario

$$\text{dato } a \in \mathbb{Z}, [a] = a + n\mathbb{Z}$$

$A/\langle H \rangle$ è un anello commutativo unitario

$$\text{dato } P \in K[X], [P] = P + HK[X] \quad (\deg(P) < \deg(H))$$

Massimo Comun Divisore per i polinomi:

$$\text{dati } P, Q \in A, \text{ poniamo } PA + QA = \left\{ M \in A \text{ t.c. } \exists U, V \in A \text{ con } M = AU + BV \right\}$$

• se $(P, Q) \neq (0, 0)$, allora $PA + QA = DK[X] \quad \exists! D \in A^+$ quindi monico se con l'algoritmo di

MCD:

• $D \mid P \wedge D \mid Q$

• se $\exists D' \in A$ t.c. $D' \mid P \wedge D' \mid Q$, allora $D' \mid D$

Euclide si ottiene un polinomio non monico, basta renderlo monico (moltiplicando per l'inverso del termine con grado maggiore)

polinomi irriducibili

$$P \in A \setminus A^\times \text{ con } \deg(P) > 0 \text{ t.c. se } P = QR \text{ allora } Q \in A^\times \text{ oppure } R \in A^\times$$

polinomi primi

$$P \in A \setminus A^\times \text{ t.c. } P \mid QR \Rightarrow P \mid Q \vee P \mid R$$

Anche in questo caso, P irriducibile $\Leftrightarrow P$ primo

osservazione

$X - x$ è irriducibile $\forall x \in K$.

$$\text{poniamo } X - x = U \cdot V$$

$$\text{abbiamo } \underbrace{\deg(X - x)}_1 = \deg(U) + \deg(V)$$

$$\Rightarrow \{\deg(U), \deg(V)\} = \{0, 1\}$$

Teorema della fattorizzazione unica

Ogni $H \in A \setminus \{0\}$ si decomponе in modo unico come prodotto:

$$H = \lambda \cdot \prod_{\substack{P \in A \\ P \text{ irriducibile}}} P^{v_p(H)}$$

con $v_p(H) \in \mathbb{N}$ e $\{P : v_p(H) \neq 0\}$ finito.

FATTORIZZARE POLINOMI

in $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ la fattorizzazione è "facile" (è facile caratterizzare i polinomi irriducibili), invece in $K = \mathbb{F}_p, \mathbb{Q}$ la fattorizzazione è difficile

teoremi

- in $\mathbb{C}[x]$ i monici irriducibili sono tutti i polinomi nella forma $X - \alpha : \alpha \in \mathbb{C}$ (polinomi di primo grado)
- in $\mathbb{R}[x]$, se P monico irriducibile, allora o: ① $\deg(P) = 1$ ($X - \alpha : \alpha \in \mathbb{R}$)
② se $\deg(P) = 2$
 $(P = x^2 + ax + b)$ allora $\Delta = a^2 - 4b < 0$

def VALUTAZIONE

dato $k \in K$, $F \in K[x] = F_0 + F_1x + \dots + F_n x^n$

la valutazione di F in x

è $ev_x(F) = F_0 + F_1x + \dots + F_n x^n$ (è la "sostituzione" di X)

$ev: K[X] \longrightarrow K$

OSSERViamo:

$$\textcircled{1} \quad ev_x(F+G) = ev_x(F) + ev_x(G)$$

$$\textcircled{2} \quad ev_x(F \cdot G) = ev_x(F) \cdot ev_x(G)$$

$$\textcircled{3} \quad \lambda \in k, \quad ev_x(\lambda) = \lambda \quad (\text{costanti}) \text{ e non invertibili perché vale per } \circ$$

esempio: $F = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$, $x=1$, $ev_x(F) = x^2 + 1 = 2$

Lemma Sia $x \in K$

allora $ev_x^{-1}(\{0\}) = (X-x)A$ $\hookrightarrow K[X]$ $(x \in K \text{ tali che sostituite danno } 0)$
polinomi che si annullano in X

dim:

• dimostra $ev_x^{-1}(\{0\}) \supset (X-x)A$

Sia $Q = (X-x)H$. Allora $ev_x(Q) = ev_x(X-x) \cdot ev_x(H) = 0$
 $\implies Q \in ev_x^{-1}(\{0\})$

• dimostra $ev_x^{-1}(\{0\}) \subset (X-x)A$

Sia $P \in A$ t.c. $ev_x(P) = 0$.

per l'algoritmo di divisione euclidea per $X-x$ $\exists! (q, r) \in A \times A$ t.c. $P = q(X-x) + r$ $\deg(r) < \deg(X-x)$ $\deg(r) \in \{-\infty, 0\} \iff r \in K$
 $r = 0, r \text{ const} \neq 0$

$$ev_x(P) = ev_x(q(X-x) + r) = ev_x(q) ev_x(X-x) + ev_x(r)$$

0 per ipotesi

P ha una radice in x

$$\implies ev_x(r) = 0 \quad e, \text{ per } \textcircled{3} \quad r = ev_x(r) = 0 \quad \text{quindi} \quad X-x | P \iff P \in (X-x)A \blacksquare$$

$$(0 = 0 + ev_x(r))$$

$$(P \text{ ha una radice in } x \iff X-x | P, ev_x(P) = 0)$$

es. 1 scheda

Fattorizzare (non c'è una tecnica universale)

- $X^2 + X + 6$ in $\mathbb{R}[X]$ un polinomio di grado 1 in $K[X]$ è sempre irriducibile.

In $\mathbb{R}[X]$ anche i polinomi di grado 2 (SOLO) con $\Delta < 0$ sono irriducibili

nessuna radice reale

$$\textcircled{4} \quad \Delta(bx^2 + bx + c) = b^2 - 4ac = 1 - 24 = -23 < 0 \quad \text{è irriducibile} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \exists v_x (x^2 + x + 6) \neq 0$$

essendo irriducibile, la sua fattorizzazione è uguale a se stesso: " $X^2 + X + 6$ "

- $X^3 - 6x^2 + 11x - 6$ in $\mathbb{R}[X]$

per i polinomi grado 3 si può andare a tentativi

· $\exists v_0$ no ($c'è -6$)

$$\exists v_1 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 12 - 6 - 6 = 0$$

1 è radice, quindi il pol. irriducibile $x-1$ divide il polinomio $\iff x-1 \mid x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

calcolo il quoziente:

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x-1 \\ \hline X^3 - X^2 & X^2 - 5x^2 + 6 \\ -5x^2 + 11x - 6 & \\ \hline -5x^2 + 5x & \\ 6x - 6 & \\ \hline 6x - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

poi uso la formula quadratica:

$$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$$

quindi: $x_i = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \quad (\text{entrambi dividono } x-1 \text{ e sono coprimi, quindi il loro prodotto divide } (x-1)^2)$$

$$\text{quindi: } P = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

Avrei anche potuto provare $\exists v_1, \exists v_2, \exists v_3$ e vedere che avrebbe funzionato

- $X^2 - 2X + 2$ in $\mathbb{C}[X]$ $C = \{x+iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \text{ ovvero } i^2 = -1\}$

pensiamo prima in $\mathbb{R}[X]$ un'eventuale fattorizzazione rimarrebbe in $\mathbb{C}[X]$ (al massimo da affinare)

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \quad \text{è irriducibile in } \mathbb{R}[X]$$

ma si fattorizza in $\mathbb{C}[X]$ perché ommette le radici

$$x_1 = \frac{2+2i}{2} = i+1 \quad x_2 = \frac{2-2i}{2} = i-1$$

$$F = (x - (i+1))(x - (i-1))$$

■ $F = x^3 - 1$ si ha $\text{ev}_1(F) = 0$ per qualunque campo

$F = (x-1) G$ div.
escludes
FALCA $= (x-1)(x^2+x+1)$ ha $\Delta < \emptyset$, irriducibile
(anche in \mathbb{Q} - se lo è in \mathbb{R})

La fattorizzazione in $\mathbb{R}[x]$ è $(x-1)(x^2+x+1)$ (idem in $\mathbb{Q}[\mathbb{R}]$)

in \mathbb{C} : radici $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$

la fatt. in $\mathbb{C}[x]$ è $F = (x-1)(x-x_1)(x-x_2)$

\mathbb{C}

NUMERI COMPLESSI

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$i := \sqrt{-1}$ caratterizzato dalla condizione $i^2 = -1$

possiamo anche scrivere $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$

realizzazione cartesiana di \mathbb{C}

Operazioni: posti $z = x + iy$ $z' = x' + iy'$

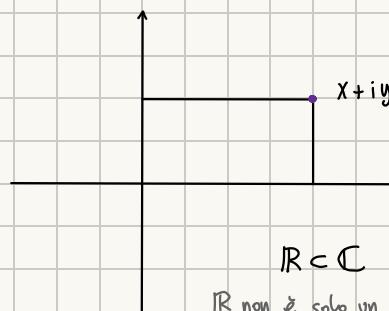
$$\bullet -z := -x + i(-y) \in \mathbb{C} \quad \text{opposto}$$

$$z + z' := (x + x') + i(y + y') \in \mathbb{C} \quad \text{somma}$$

$$\bullet zz' := (x + iy)(x' + iy') = xx' + ix'y + ix'y' + i^2yy' = \\ = xx' - yy' + i(x'y + xy') \in \mathbb{C} \quad \text{prodotto}$$

• NUOVA operazione: CONIUGAZIONE COMPLESSA sopra

• $(\mathbb{C}, -, +, \cdot, 0, 1)$ è unello commutativo unitario



la parte reale $\operatorname{Re}(z) = x$
la parte immaginaria $\operatorname{Im}(z) = y$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

\mathbb{R} non è solo un sottoinsieme,
ma un SOTTOCAMPO (sottoinsieme campo di un campo)

→ esponenziale di Euler

$$e^{iy} := \cos(y) + i \sin(y) \in \mathbb{C} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad y \mapsto e^{iy}$$

Euler ha notato che, se $\theta, \eta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\eta} \xrightarrow{\text{prop. potenze}} e^{i(\theta+\eta)}$$

$$\begin{aligned} & [\cos(\theta) + i \sin(\theta)] \cdot [\cos(\eta) + i \sin(\eta)] \\ & \quad || \\ & \cos(\theta)\cos(\eta) + \cos(\theta)i\sin(\eta) + i\sin(\theta)\cos(\eta) + i^2\sin(\theta)\sin(\eta) \\ & \quad (i^2 = -1) - \sin(\theta)\sin(\eta) \end{aligned}$$

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad \text{con } \theta = \theta + \eta$$

raggruppo parte reale e immaginaria

$$\begin{aligned} & \cos(\theta)\cos(\eta) - \sin(\theta)\sin(\eta) \xrightarrow{\quad} \cos(\theta + \eta) + i \sin(\theta + \eta) \\ & + i (\cos(\theta)\sin(\eta) + \cos(\eta)\sin(\theta)) \quad \cdot \cos(\theta)\cos(\eta) - \sin(\theta)\sin(\eta) = \cos(\theta + \eta) \\ & \quad \cdot \cos(\theta)\sin(\eta) + \cos(\eta)\sin(\theta) = \sin(\theta + \eta) \end{aligned}$$

• in modo simile si trova $(e^{iy})^n = e^{iny} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

non l'ha fatto ma l'ha trovata su internet
(+ formula di de Moivre: $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$)

Esempi numeri complessi (Eulero, De Moivre)

$$e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1 + i0 = 1$$

$$e^{i\cdot 0} = \cos(0) + i \sin(0) = 1 + i0 = 1$$

$$1 = e^{i2\pi} = e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot 3} = \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^3 \quad \text{poniamo } x = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$x^3 = 1$ quindi x è radice di $x^3 - 1$ $\operatorname{ev}_x(x^3 - 1) = 0$

• Osserviamo $1 = 1^2 = \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{3 \cdot 2} = \left(e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot 2}\right)^3 = \left(e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)^3$ quindi anche x^2 è radice di $x^3 - 1$

$$\cdot x^0 = e^{\frac{0\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{0\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0\pi}{3}\right) = 1$$

$$\cdot x^1 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\cdot x^2 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

L'insieme $\{x^0, x^1, x^2\} = R$ ha 3 elementi distinti e

$$\forall y \in R, \operatorname{ev}_y(x^3 - 1) = 0 \implies x^3 - 1 = (x - x^0)(x - x^1)(x - x^2)$$

$$\text{in (4)} \quad e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad e^{\frac{4\pi i}{3}} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

CONIUGAZIONE COMPLESSA nuova operazione di \mathbb{C}

Per $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\bar{z} = x - iy \quad \text{cambio segno alla parte immaginaria}$$

poniamo anche $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h(z) = \bar{z}$

proprietà

$$\textcircled{1} \quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad (h(z+z') = h(z) + h(z'))$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'} \quad (h(zz') = h(z)h(z'))$$

$$\textcircled{3} \quad \overline{-z} = -\bar{z} \quad (h(-z) = -h(z))$$

$$\textcircled{4} \quad h \text{ è una biiezione} \quad h^{-1} = h$$

es. mostrare \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4}: $z = x + iy$ $z' = x' + iy'$

$$\textcircled{1} \quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

$$\overline{z+z'} = \overline{(x+x') + i(y+y')} = \overline{x+x' - i(y+y')} = \bar{z} + \bar{z'} = x - iy + x' - iy' = (\text{raccogliendo}) x + x' + i(y + y')$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{xx' - yy' + i(xy' + xy)} = xx' - yy' - i(xy' + xy) \quad \bar{z} \cdot \bar{z'} = x - iy \cdot (x' - iy') = xx' - ix'y' - ix'y + i^2yy' = xx' - yy' - i(xy' + xy)$$

$$\textcircled{3} \quad \overline{-z} = -\bar{z}$$

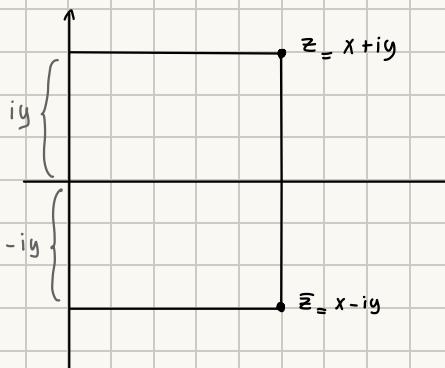
$$-\bar{z} = -x + i(-y) = -x - i(-y) \quad -\bar{z} = -(x - iy) = -x - i(-y)$$

reali e \bar{z}

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$$

nei reali, $z = \bar{z}$
(i numeri reali non hanno parte immaginaria)

$$z = x + i0 \iff z = x - i0$$



graficamente, $(-)$ corrisponde alla riflessione rispetto all'asse \mathbb{R}

$$h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \bar{z}$$

come isomorfismo
gruppi, ma con anelli vedi p.57

h è un
isomorfismo
di anelli

omomorfismo: dati (G, \cdot) , (H, \odot)
strutture algebriche dello stesso tipo
un omomorfismo è $f: G \rightarrow H$
tale che $f(g \cdot h) = f(g) \odot f(h) \quad \forall g, h \in G$

isomorfismo: omomorfismo biiettivo

Formule fondamentali

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2$$

$= 0 \iff x = y = 0$
 $> 0 \iff z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

valore assoluto complesso

• \mathbb{C} è un campo

(uso l'inverso di $z\bar{z}$ per trovare quello di z)

dim: dato $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, prendo $z\bar{z} = x^2 + y^2$ e lo moltiplico per il suo inverso: $(x^2 + y^2)^{-1}$

$$\underbrace{z\bar{z} (x^2 + y^2)^{-1}}_{\text{inverso di } z} = 1 \quad \text{quindi ogni elemento non nullo di } \mathbb{C} \text{ è invertibile} \blacksquare$$

"Sui libri si trova:"

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{(x^2 + y^2)} = 1$$

esempi:

$$\cdot z = 2 = 2+i0 \in \mathbb{R} \quad \bar{z} = 2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

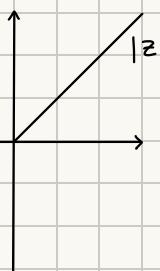
$$\cdot z = i = 0+1 \cdot i \quad \bar{z} = -i \quad x^2 + y^2 = 1 \quad z^{-1} = \frac{-i}{1} = -i$$

$$\cdot z = 1+i \quad \bar{z} = 1-i \quad z\bar{z} = 2 \quad z^{-1} = \frac{1-i}{2} \quad (1+i) \frac{1-i}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Valore assoluto complesso

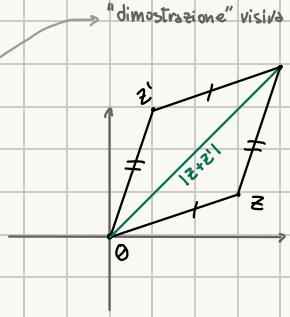
proprietà

$$\textcircled{1} |z| = 0 \iff z = 0$$



$$\textcircled{2} |zz'| = |z| \cdot |z'|$$

$$\textcircled{3} |z+z'| \leq |z| + |z'|$$



per le proprietà dei triangoli:
lunghezza lato < somma l. altri lati

Proprietà / esercizio

$$\forall g \in \mathbb{R} \quad \textcircled{1} |e^{ig}| = 1 \quad \textcircled{2} (e^{ig})^{-1} = \overline{e^{ig}} = e^{-ig}$$

dim:

$$\textcircled{1} e^{ig} = \cos(g) + i \sin(g) \quad \left| e^{ig} \right| = \sqrt{\underbrace{\cos(g)^2 + \sin(g)^2}_{=1 \text{ (prop sin, cos)}}} = \sqrt{1} = 1$$

• $e^{ig} \neq 0$, quindi è invertibile

$$e^{ig} \cdot e^{-ig} = e^{ig} e^{-ig} \quad \text{con } \eta = -g = e^{i(g-\eta)} = e^{i0} = 1 \quad \text{quindi } e^{-ig} = (e^{ig})^{-1} \text{ (inverso)}$$

$$\overline{e^{ig}} = \overline{\cos(g) + i \sin(g)} = \frac{\overline{e^{ig}}}{\cos(g)^2 + \sin(g)^2} = \frac{\overline{e^{ig}}}{1} \quad \text{ma anche } \frac{\overline{e^{ig}}}{|\overline{e^{ig}}|^2} \quad \text{quindi } \frac{1}{\overline{e^{ig}}} \quad \text{quindi } \overline{e^{ig}} = (e^{ig})^{-1}$$

RAPPRESENTAZIONE POLARE

i numeri complessi possono essere rappresentati in due modi: • rappresentazione complesso ($z = x+iy$) - utile per la somma

• rappresentazione polare (trigonometrica) - utile per il prodotto

dati $z \in \mathbb{C}^*$ $z = x+iy$, $\rho = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{R}_{>0}$
 $z \neq 0$ è un unicum ($z=0 \rightarrow \rho=0$; $\exists g'$)

distanza euclidea

(dall'origine)

Lemma

- $\exists g \in \mathbb{R}$ t.c. $z = \rho e^{ig}$
- inoltre, $g + 2\pi\mathbb{Z}$ è unicamente determinato

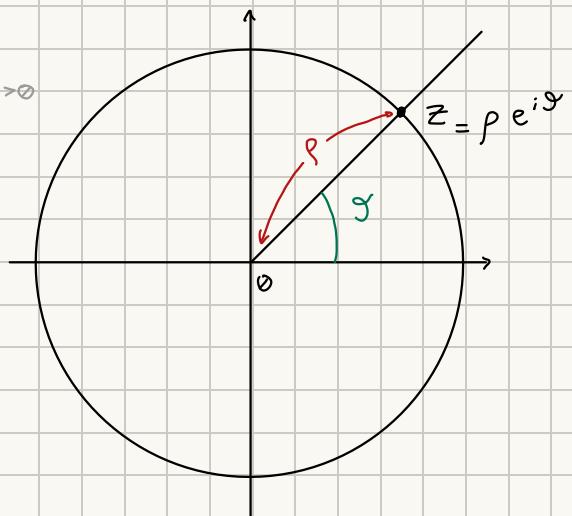
dim (di g...)

$$\rho = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}, \quad z' := \rho^{-1} \cdot z \quad \text{"componente angolare"} \quad z' = \rho^{-1} z = e^{ig}$$

$$\cdot z' = x' + iy' \quad \exists g \text{ t.c. } x' = \cos(g) \quad y' = \sin(g) \quad \textcircled{1}$$



$$\Rightarrow (\text{sostituendo in } z' = x' + iy') \quad z' = \cos(g) + i \sin(g) = e^{ig} \quad \text{quindi (per } z' = \rho^{-1} z) \quad z = \rho e^{ig} \quad \text{quindi esiste } g.$$



Le soluzioni di $\textcircled{1}$ sono esattamente gli elementi di $g + 2\pi\mathbb{Z}$ per un certo $g \in [0, 2\pi)$

• Su \mathbb{R} c'è la relazione di congruenza mod. 2π

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha \equiv \beta \pmod{2\pi} \iff \alpha - \beta \in 2\pi\mathbb{Z} \quad (\text{che è una rel. di equivalenza})$$

da cui $g + 2\pi\mathbb{Z}$ è una classe di equivalenza e si identifica con un elemento di $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (anche se non è un quelllo)

OSS: $z \in \mathbb{C}$ è della forma $e^{ig} \iff |z| = 1$. Viceversa, se $|z| = 1$, la sua distanza dall'origine è 1
 quindi giace sul cerchio delle unità. ($\rho = 1$)

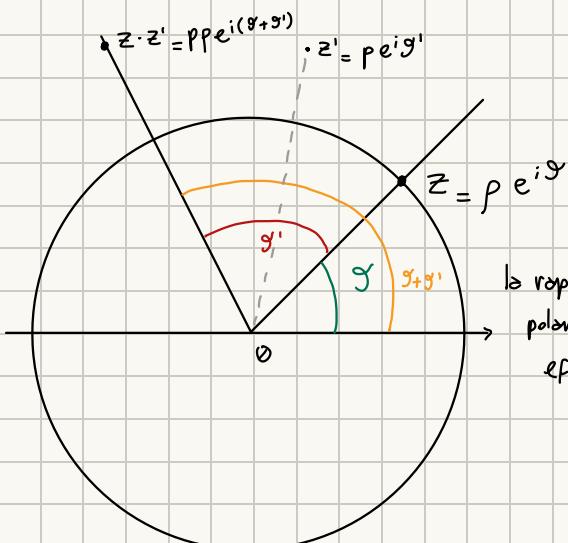
OSS: il coniugato di z è il suo inverso se $\rho = 1$ ($z \in$ cerchio unità)

dim (fatto al QnA)

$$\bar{z} = \overline{\rho e^{ig}} = \overline{\rho} \overline{e^{ig}} = \rho (\cos(g) - i \sin(g)) = \rho (\cos(-g) + i \sin(-g)) = \rho e^{-ig}$$

$$z^{-1} = (\rho e^{ig})^{-1} = \rho^{-1} e^{-ig}$$

$$\text{Quindi, } z^{-1} = \bar{z} \iff \rho e^{-ig} = \rho^{-1} e^{-ig} \iff \rho = 1$$



la rappresentazione
polare è utile per
effettuare moltiplicazioni
di numeri complessi

in cui,
visto che: $z' \bar{z}' = \rho^{-1} z \bar{\rho^{-1} z} = \rho^{-2} z \bar{z} = \rho^{-2} \cdot \rho^2 = 1$

$$z \bar{z} = 1, \quad \text{quindi } \sqrt{z \bar{z}} = 1$$

OSS (al QnA): si ha che

$$\bar{z} = -z \iff z \in i\mathbb{R} \quad (y=0)$$

$$\bar{z} = -z \iff x - iy = -x - iy \iff x = 0$$

def ALGEBRICAMENTE CHIUSO

K campo è detto algebricamente chiuso se: $\forall F \in K[X] \setminus K$ non el.
del campo ("costanti")

$$\exists x \in K \text{ t.c. } x \text{ è radice di } F \iff \exists x \in K : X-x \mid F$$

(se ha almeno una radice in K)

Lemma

K è algebricamente chiuso se e solo se i soli polinomi irriducibili e monici sono i polinomi $X-x$, $x \in K$ (grado 1)

dimostrazione

• (\Rightarrow lemma) Sia $P \in K[X]$ irriducibile e monico.

Siccome K è chiuso algebricamente (per ipotesi) $\exists x \in K$ t.c. $X-x \mid P$

$$P = (X-x)Q \text{ con } Q \in K[X] \setminus \{\emptyset\}$$

$\deg(P) = 1 + \deg(Q)$ · se P è di grado 1, ho già dimostrato.

· se $\deg(P) \geq 2$ allora $\deg(Q) \geq 1$. Quindi, $Q \notin K[X]^* = K^*$ ($= K \setminus \{\emptyset\}$)

ma anche $(X-x) \notin K[X]^*$. Questo contraddice P irriducibile $\implies \deg(P) = 1$
 $\implies P = X-x$

• (\Leftarrow lemma) Supponiamo $\{P \in K[X] \text{ monico irriducibile}\} = \{X-x : x \in K\}$

Sia P monico $\deg \geq 1$. Allora $P = \prod_{\substack{Q \text{ irr.} \\ \in K \\ \text{monico}}} Q^{v_Q(P)}$ i soli irr. e monici hanno $\deg = 1$

$\prod_{x \in K} (X-x)$

Sia $x \in K$ t.c. $v_{X-x}(P) \neq 0$. Allora $X-x \mid P \iff v_{X-x}(P) = 0$
 $\iff x \text{ è radice di } P \blacksquare$

Corollario: MOLTEPLICITÀ

K algebricamente chiuso $\implies \forall F \in K[X] \setminus \{\emptyset\}$ si scrive in modo unico come

$$F = \lambda \prod_{x \in K} (X-x)^{v_x(F)}$$

$v_x(F)$ è la MOLTEPLICITÀ di F in x

$$\text{Si ha che } \{x : v_x(F) \neq 0\} = \{x : v_x(F) = 0\} = \{x \text{ radice di } F\} = R$$

chiaramente un pol.
Si decomponga solo con
le sue radici

Questo insieme ha cardinalità $\leq \deg(F) := n$

$$\deg(F) = \sum_{x \in K} v_x(F) = \sum_{x \in R} v_x(F) \geq \sum_{x \in R} 1 = \text{cardinalità di } R \quad (\text{ovvero, perché un pol. di grado } n \text{ ha } \leq n \text{ soluzioni})$$

esp. dei polinomi
in cui si scomponete

Teorema (fondamentale dell'algebra)

\mathbb{C} è algebricamente chiuso

(dim. omessa perché usa elementi dell'analisi)

Teorema

$\forall K$ campo esiste sempre un altro campo algebricamente chiuso che lo contiene

esempio \mathbb{R} non è algebricamente chiuso ma $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$(x^2 + 1 \Delta < 0 \text{ è irr. e non ha grado 1})$

31/10

FATTORIZZAZIONE DI VARI POLINOMI

- $X^n - 1 \quad (n \leq 5)$

il polinomio $X^n - 1$ ha sempre radice 1 (e $X-1 \mid X^n - 1$)

$$X^n - 1 = (X-1)Q \quad \begin{matrix} \deg(Q) = n-1 \\ \text{unicamente determinata} \end{matrix}$$

più precisamente $Q = X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1$

↓

$$\text{infatti } (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1) = X^n + X^{n-1} + \dots + X^2 + X - (X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1) = X^n - 1$$

- $n=3 \quad X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1) \quad \text{fattorizzazione in } \mathbb{R}[X]$

$$\text{in } \mathbb{C}[X] \quad X^2 + X + 1 = \left(X + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(X + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

(io che ragiona...)

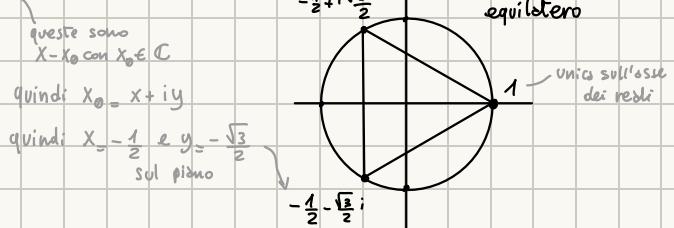
per la rapp. polare, $\exists \vartheta$ t.c. $z = \rho e^{i\vartheta}$

nel cerchio delle unità, $\rho = 1$, $z = e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)$

quindi $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono $\cos \vartheta$ e $\sin \vartheta$ di un ϑ - quale?

$$\cos(\vartheta) = -\frac{1}{2} \quad \text{se } \vartheta = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \sin(\vartheta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{se } \vartheta = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{7\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\vartheta = \frac{2\pi}{3} \quad \text{quindi } z = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad (\text{per } -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ è } \frac{4\pi}{3})$$



$$-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = x = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad \text{①} \quad -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = x^2 = (e^{\frac{2\pi i}{3}})^2 = (e^{\frac{2\pi i}{3}})^{-1} \cdot (e^{\frac{2\pi i}{3}})^{-1} \quad \text{②}$$

$$\text{① } -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4\pi i}{3}} = e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot 2} = (e^{\frac{2\pi i}{3}})^2$$

② abbiamo già dimostrato P.49 che $(e^{i\vartheta})^{-1} = \overline{(e^{i\vartheta})} = e^{-i\vartheta}$

quindi basta che $e^{\frac{4\pi i}{3}} = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$ → questo è vero per periodicità:

$$\frac{4\pi i}{3} = -\frac{2\pi i}{3} + 2\pi i$$

OSSERVAZIONE: n pari ha anche la radice -1 (perché $(-1)^n = 1$)

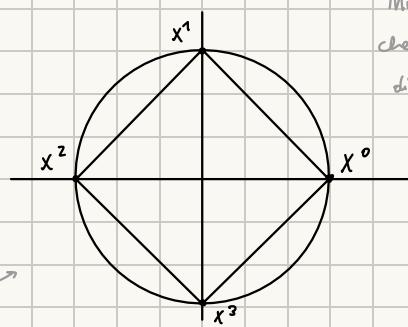
- $n=4 \quad X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2 + 1) \quad \text{in } \mathbb{R}[X]$

$(X-1)(X+1)(X-i)(X+i) \quad \text{in } \mathbb{C}[X]$

$$X^4 = (X - x^0)(X - x^1)(X - x^2)(X - x^3)$$

$$\text{con } x = e^{\frac{2\pi i}{4}} = e^{\frac{\pi i}{2}} = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_0 + i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_1 = i$$

$$= (X - i^0)(X - i^1)(X - i^2)(X - i^3) = (X-1)(X-i)(X+1)(X+i)$$



Iniziamo ad osservare

che se α è radice

di $X^4 - 1$, allora

$\alpha \in \mathbb{R}$

o anche $\bar{\alpha}$ è radice

$$\blacksquare \quad n=5 \quad X^5 - 1 = (X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) \quad \text{in } \mathbb{R}[X]$$

prodotto di due quadratici irriducibili monici

i due quadrati irriducibili (in \mathbb{R}) monici:

$$P_1 = (X-x)(X-\bar{x}) \in \mathbb{R}[X]$$

$$P_2 = (X-x^2)(X-\bar{x}^2) \in \mathbb{R}[X]$$

(e non quattro di primo grado perché c'è un fattore di grado 1 \iff c'è una radice reale)

e in $X^5 - 1$ c'è solo 1)

$$\text{infatti, } P_1 = (X-x)(X-\bar{x}) = X^2 - (x+\bar{x})X + x\bar{x}$$

$$P_2 = (X-x^2)(X-\bar{x}^2) = X^2 - (x^2+\bar{x}^2) + |x^2|^2$$

con:

$$\bullet \quad x = \alpha + i\beta \quad \therefore \bar{x} = \alpha - i\beta \quad \therefore x + \bar{x} = 2\alpha \in \mathbb{R} = 2 \operatorname{Re}(x^2) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

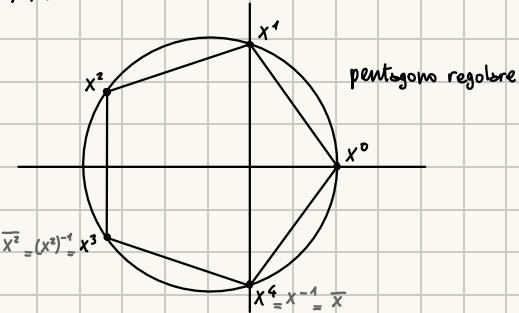
$$\bullet \quad x\bar{x} = x^2 + \beta^2 \geq 0 = 1 \quad (\text{ricorda } z\bar{z} = 1) \quad \therefore x^2 + \bar{x}^2 = 2 \operatorname{Re}(x^2) = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \quad \therefore |x^2|^2 = 1$$

$$P_1 = X^2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1 \quad , \quad P_2 = X^2 - 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X + 1 \quad \text{fatt. in } \mathbb{R}[X] = (X-x^0)P_1P_2$$

• in $\mathbb{C}[X]$, $X^5 - 1$ ha le radici distinte $\left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)^k$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\left(\left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)^k\right)^5 = \left(e^{\frac{2\pi i}{5} \cdot 5}\right)^k = \left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)^k = 1$$

$$\text{sono distinte perché } \left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)^k = \cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right) \quad \text{x De Moivre}$$



$$\text{quindi } X^5 - 1 = \prod_{i=0}^4 (X-x^i) = (X-x^0) \left[(X-x) \left(\frac{X-x^4}{X-x^2} \right) \right] \left[(X-x^2) \left(\frac{X-x^4}{X-x^3} \right) \right]$$

$$\text{osservazione: con } n \geq 1, \quad X^n - 1 = \prod_{i=0}^{n-1} (X-x^i) \quad \text{con } x = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$



def POLINOMIO CONIUGATO

Dato $F = f_0 + f_1 X + \dots + f_n X^n \in \mathbb{C}[X]$, poniamo $\bar{F} = \bar{f}_0 + \bar{f}_1 X + \dots + \bar{f}_n X^n$

OSSERVAZIONE: $F \in \mathbb{R} \iff F = \bar{F}$ in \mathbb{R} , $x = \bar{x}$

Inoltre, se $F \in \mathbb{R}[X]$ e $\text{ev}_z(F) = 0$, allora $\text{ev}_{\bar{z}}(\bar{F}) = 0$

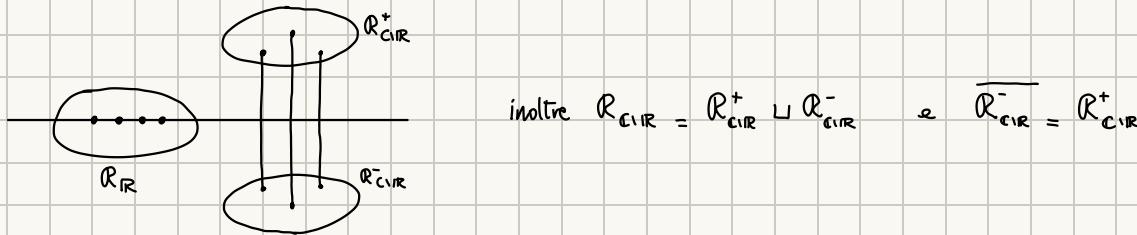
dim: $\text{ev}_z(F) = \text{ev}_{\bar{z}}(\bar{F})$ e, siccome la somma complessa è compatibile con $+$, $-$.

$$= \overline{\text{ev}_z(F)} = \bar{0} = 0$$

Lemma Dato $F \in \mathbb{R}[X]$

detto R l'insieme delle sue radici, allora $R = R_{\mathbb{R}} \cup R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^+ \cup R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^-$ dove $R_{\mathbb{R}} = R \cap \mathbb{R}$

$R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^+ = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ t.c. } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \operatorname{Im}(z) > 0 \text{ e scrivendo } z = \sum_{i \in \mathbb{R}} x_i + iy, y > 0\}$, $R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^- = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ t.c. } \operatorname{Im}(z) < 0\}$



Lemma già dimostrato utilizzato

$X^2 + \beta X + \gamma \in \mathbb{R}[X]$ è irriducibile $\iff \Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$

dim

Supponiamo P irriducibile.

$R_{\mathbb{R}} = \emptyset$, quindi $R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} = \{z, \bar{z}\}$, $R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^+ = \{z\}$, $R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^- = \{\bar{z}\}$

$$P = (X-z)(X-\bar{z}) = X^2 - (z+\bar{z})X + z\bar{z} \\ \stackrel{z \in \mathbb{R}}{=} z^2 - 2zX + |z|^2$$

$$\Delta = (z+\bar{z})^2 - 4z\bar{z} = z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 - 4z\bar{z} = (z-\bar{z})^2$$

$$\text{scrivo } z = x+iy \quad z-\bar{z} = 2iy, \quad \text{quindi } (z-\bar{z})^2 = (2iy)^2 = 4i^2y^2 = 4y^2 \cdot -1 = -4y^2 < 0$$

Lemma

Ogni $F \in \mathbb{R}[X]$ si spezza in $\mathbb{R}[X]$ in prodotto $F = \lambda \prod_{x \in R_{\mathbb{R}}} (X-x)^{v_x(F)} \prod_{z \in R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}} \underbrace{[(X-z)(X-\bar{z})]}_{v_z(F)}$

dim: siccome C è algebricamente chiuso,

$$F = \lambda \prod_{z \in \mathbb{C}} (X-z)^{v_z(F)} = \lambda \prod_{z \in R_{\mathbb{R}}} (X-z)^{v_z(F)} \prod_{z \in R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}} (X-z)^{v_z(F)}$$

se $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ si ha $\bar{z} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Quindi, possiamo scegliere, senza perdita di generalità, $z = x+iy$ con $y > 0$ o \bar{z} appartenente a \mathbb{R}

Sì conclude osservando che $R = R_{\mathbb{R}} \cup R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^+ \cup R_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}^-$

Lemma (in teoria esercizio ma mi sembra più un lemma)

Sia $P \in \mathbb{R}[x]$ di grado dispari. Allora P ammette almeno una radice reale.

$$\text{questo implica } \deg(P) = \# \underset{\substack{\text{card.} \\ P}}{R_{\mathbb{R}}} + \# \underset{\substack{\text{i coniugati} \\ S}}{R_{C \setminus \mathbb{R}}} = \# \underset{\substack{\text{pari} \\ P}}{R_{\mathbb{R}}} + 2 \# \underset{\substack{\text{dispari} \\ S}}{R_{C \setminus \mathbb{R}}}$$

Si come P è di grado dispari, $\deg(P) = 2n+1 = \# R_{\mathbb{R}} + 2S$ Ma allora $2n+1 = r + 2s \iff r = 2n - 2s + 1 \iff r \equiv 1 \pmod{2} \implies r \neq 0$

c'è servito il teorema dei valori intermedi (dell'Analisi)

se $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua t.c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$

allora $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $h(x_0) = 0$

$$P = X^{2n+1} + \alpha_{2n} X^{2n} + \dots + \alpha_0 \in \mathbb{R}[x] \text{ dispari}$$

sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = ev_x(P)$: è continua e soddisfa $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
da cui $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) = 0 \iff x_0$ radice di f

esercizio 1

$$P = X^4 - 10X^2 + 1 \quad \text{in } (\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$$

• in \mathbb{C}

$$\text{tentiamo le radici. pongo } Y = X^2 \quad P = Y^2 - 10Y + 1$$

$$\Delta > 0, \text{ radici } y_1 = 5 - 2\sqrt{6} > 0, \quad y_2 = 5 + 2\sqrt{6} > 0$$

$$5 > 2\sqrt{6} \iff 25 > 4 \cdot 6$$

$$y^2 - 10y + 1 = (x^2 - 5 + 2\sqrt{6})(x^2 - 5 - 2\sqrt{6}) = \underset{\substack{\text{in } \mathbb{Q}}}{(x + \sqrt{5+2\sqrt{6}})} \underset{\alpha_1}{(x + \sqrt{5-2\sqrt{6}})} \underset{\alpha_2}{(x - \sqrt{5-2\sqrt{6}})} \underset{\alpha_3}{(x - \sqrt{5+2\sqrt{6}})} \underset{\alpha_4}{\text{è la fatt. in } \mathbb{R}[x] \text{ e anche in } \mathbb{C}[x]}$$

POSSIBILI FATTORIZZAZIONI IN IRR. DI POLINOMI IN $\mathbb{Q}[x]$

$Q \in \mathbb{Q}[x]$ (uguale per un campo qualsiasi)

• $\deg(Q) = 1$ è irriducibile

• $\deg(Q) = 3$ ② \mathbb{Q} irriducibile

• $\deg(Q) = 4$ ③ \mathbb{Q} irriducibile

② $Q = P_1 P_2$ $\deg(P_1) = 1, \deg(P_2) = 3$ irriducibili c'è radice

• $\deg(Q) = 2$ ④ \mathbb{Q} irriducibile

② $Q = P_1 P_2$ dove $\deg(P_1) = 1, \deg(P_2) = 2$ irriducibile

③ $Q = P_1 P_2$ $\deg(P_1) = \deg(P_2) = 2$ irriducibili non c'è radice

② $Q = P_1 P_2$ con P_1, P_2 irriducibili di grado 1

④ $Q = P_1 P_2 P_3$ $\deg(P_1) = \deg(P_2) = 2, \deg(P_3) = 1$ c'è radice

TEORIA DEI GRUPPI

GRUPPI

Dato G insieme $\neq \emptyset$ con $*$ operazione binaria su G , ovvero: $G \times G \rightarrow G$
 $(a, b) \rightarrow a * b$, seleziono un elemento distinto e .
 el. neutro

La terna $G = (G, *, e)$ è un gruppo se:

- non per forza distinti

① $\forall a, b, c \in G \quad (a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c$ associazività

② $\forall a \in G \quad a * e = e * a = a$ elemento neutro per l'operazione binaria

③ $\forall a \in G \quad \exists a' \in G$ t.c. $a * a' = a' * a = e$ inverso per l'op. binaria

add-on: INVERSIONE NEI GRUPPI

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in G \quad & (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \\ & (abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1} \text{ ecc} \\ & (\text{inversi dei singoli, in ordine inverso}) \end{aligned}$$

Inoltre, se

④ $\forall a, b \in G, \quad a * b = b * a$, allora G è un gruppo abeliano (o commutativo)

Quindi - come avevamo visto - le prime 4 condizioni di un anello descrivono un gruppo abeliano.

gruppi in notazione additiva

$(G, +, 0)$ si scrive $+$ per l'operazione
e 0_G per l'el. neutro
si dice in notazione additiva

OSS: di solito i gruppi in notazione additiva sono commutativi

In notazione additiva, l'inverso di $a \in G$
si chiama opposto e si scrive $-a$

gruppi in notazione moltiplicativa

$(G, \cdot, 1)$ si scrive \cdot per l'operazione
e 1_G per l'el. neutro
si dice in notazione moltiplicativa

OSS: Per questi gruppi, non è garantita la commutatività.

In notazione moltiplicativa, l'inverso di $a \in G$ si scrive a^{-1}

ESEMPI $(A, -, +, 0_A, 1_A)$ Anello

Allora $(A, +, 0_A)$ gruppo abeliano in nat. additivo

$\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, 0) \quad \mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, 0), \quad \mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, 0)$

o anche $K = (K, +, 0)$ con K qualunque campo

ESEMPI $(A, -, +, 0_A, 1_A)$ Anello

Allora $A^{\times} = (A^{\times}, \cdot, 1_A)$ gruppo in nat. moltiplicativa
infatti abbiamo visto

① il prodotto di el. invertibili è invertibile

② il prodotto è associativo

③ se $a, b \in A^{\times}$ allora $ab \in A^{\times}$ e $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

inoltre, A^{\times} è abeliano (se A è commutativo?)

def SOTTOGRUPPO

Dato un gruppo G e un sottoinsieme $H \subset G$ non vuoto

Si dice che H è un sottogruppo di G se:

not.
multiplicativa $\forall a, b \in H, \quad$ si ha $a \cdot b^{-1} \in H$ so che $\in G$, ma se $\in H$, è sottogruppo

$\forall a, b \in H, \quad$ si ha $a \cdot b \in H$ not. additivo

Si scrive $H < G$

OSSERVAZIONE H è stabilizzato (rispetto al prodotto)

$a \cdot b^{-1} \text{ con } b = a$

• Se $a \in H, \quad a \cdot a^{-1} = 1_G \in H$

$a \cdot a^{-1} \text{ con } a = 1_G$

• Ma allora, $\forall b \in H \quad 1_G \cdot b^{-1} \in H$ quindi $b^{-1} \in H$ e $1_G = 1_H$

• Infine, se $a, b \in H, \quad b^{-1} \in H, \quad a \cdot (b^{-1})^{-1} = a \cdot b \in H$

(quindi un sottogruppo H contiene anche gli inversi e i prodotti dei suoi el.)
e anche l'el. neutro del gruppo di cui è sottogruppo

def OMOMORFISMI DI GRUPPI

Dati G_1, G_2 gruppi (in notazione moltiplicativa)

Sia $f: G_1 \rightarrow G_2$ un'applicazione:

f è un omomorfismo di gruppi se

$$\textcircled{1} f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$$

$$\textcircled{2} \forall a \in G_1, f(a^{-1}) = f(a)^{-1} \quad \begin{matrix} \text{inversione} \\ \text{in } G_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{inversione} \\ \text{in } G_2 \end{matrix} \quad (\text{ma basta solo la } \textcircled{3} - \text{che implica le altre})$$

$$\textcircled{3} \forall a, b \in G_1, f(a \cdot b) = f(a) f(b) \quad \begin{matrix} \text{operazione} \\ \text{di } G_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{operazione} \\ \text{di } G_2 \end{matrix} \quad (\text{in modo più chiaro: } \circ \text{ op. } G_1, \circ \text{ op. } G_2)$$

(l'ordine conta! non si sa se è abeliano)

esercizio: mostrare che $f: G_1 \rightarrow G_2$ è un omomorfismo $\iff \forall a, b \in G_1, f(a \cdot b^{-1}) = f(a) f(b)^{-1}$

\Rightarrow supponiamo f omomorfismo.

$$\text{Allora } f(ab) = f(a)f(b) \quad (\textcircled{3}) \quad \text{quindi } f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1}.$$

$$\text{Ma (per } \textcircled{2} \text{)} f(b^{-1}) = f(b)^{-1}$$

$$\text{Quindi } f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1}$$

\Leftarrow supponiamo $f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1}$

$$\cdot f(1_{G_1}) = 1_{G_2} \quad \text{dim: pongo } a = b \quad f(b \cdot b^{-1}) = f(b)f(b)^{-1} = 1_{G_2}$$

$$\cdot f(a^{-1}) = f(a)^{-1} \quad \text{dim: pongo } a = 1_{G_1} \quad f(1_{G_1} \cdot b^{-1}) = f(1_{G_1})f(b)^{-1} = 1_{G_2} f(b)^{-1} = f(b)^{-1} \quad \text{per } \textcircled{1}$$

$$\cdot f(a \cdot b) = f(a)f(b) \quad \text{dim: pongo } b = b^{-1} \quad f(a(b^{-1})^{-1}) = f(a)f(b^{-1})^{-1} = f(a)f((b)^{-1})^{-1} = f(a)f(b) \quad \text{per } \textcircled{2}$$

def ISOMORFISMO

Sia $f: G_1 \rightarrow G_2$ omomorfismo di gruppi

Se f è biiettiva, allora si dice che f è un isomorfismo

esercizio

$f: G_1 \rightarrow G_2$ isomorfismo. Supponiamo che f biiettiva $\iff \exists f^{-1}: G_2 \rightarrow G_1$ biiettiva t.c. $f \circ f^{-1} = \text{Id}_{G_2}, f^{-1} \circ f = \text{Id}_{G_1}$

DIMOSTRARE CHE f^{-1} È UN ISOMORFISMO

Inoltre, $G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3$ con f, g omom. di gr.

Allora anche $g \circ f: G_1 \rightarrow G_3$ omom. di gr.

e in più f, g sono isomorfismi e anche $g \circ f$, di inverso $f^{-1} \circ g^{-1}$

ESEMPI

$$m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} : \forall a, b \in m\mathbb{Z}, a-b \in m\mathbb{Z}$$

$$\exists x, \beta \text{ t.c. } a = xm, b = \beta m$$

$$\text{quindi } a-b = (\alpha-\beta)m \in m\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \quad \text{notazione additiva}$$

con $f(n) := mn$ applicazione

è un isomorfismo di gruppi

Infatti ① $f(n-n') = m(n-n') = mn - mn' = f(n) - f(n')$ è omomorfismo di gruppi.

② iniettivo $f(p) = f(q) \iff pm = qm \iff m(p-q) = 0 \iff p = q$

③ suriettivo $y \in m\mathbb{Z}$. $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.c. $y = mk$. Ponendo $x = k$ si ha $f(x) = mk = y$

(Esempio che mischia le notazioni +, ·)

$G_1 = \mathbb{R}$ con +, $G_2 = \mathbb{R}_{>0}$ con · notare che $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{R}^{\times}$: $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ $a > 0, b > 0, b^{-1} > 0$ $ab^{-1} > 0$ quindi $ab^{-1} \in \mathbb{R}^{\times}$

poniamo:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \quad f(x) := e^x$$

$$f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) := \underset{\ln}{\log}(x) \quad e^{\log(\cdot)} = \text{Id}_{\mathbb{R}} \quad \log(e^{\cdot}) = \text{Id}_{\mathbb{R}}$$

Sono due isomorfismi di gruppi, uno l'inverso dell'altro $f^{-1} = g, g^{-1} = f$

$$f(0) = e^0 = 1 = 1_{G_2} \in G_2$$

$$g(1) = 0$$

$$f(-x) = e^{-x} = (e^x)^{-1} \text{ inverso}$$

$$g(y^{-1}) = \log(y^{-1}) = -g(y)$$

$$\begin{aligned} f(x-x') &= e^{x-x'} = e^x e^{-x} \\ &= f(x) f(x')^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(y'y^{-1}) &= g(y') - g(y) \\ &= \log\left(\frac{y'}{y}\right) \end{aligned}$$

es. 2 foglio sett. 4

(iii) $P = X^3 + X^2 - 6x + 1 \quad Q = X^4 - 2x^3 - 2x - 1$ MCD e Bézout
con $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ campo (\mathbb{F}_2)

$\mathbb{F}_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dove questi simboli rappresentano le classi corrispondenti in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
posso anche usare altri interi per rappresentare elementi di \mathbb{F}_2 , estraiendoli dalle classi (cls. 8=1)

abbiamo visto che \mathbb{F}_2^\times è un gruppo (abeliano) in notazione.

Tavola di moltiplicazione in \mathbb{F}_2^\times

•	1	2	3	4	5	6	(lo usiamo per trovare facilmente gli inversi)
1	1	2	3	4	5	6	
2	2	4	6	1	3	5	
3	3	6	2	5	1	4	ogni volta che c'è un 1, i due numeri sono inversi
4	4	1	5	2	6	3	
5	5	3	1	6	4	2	• Ogni riga contiene uno e un solo 1 → ogni el. del gruppo è invertibile di inverso unic. det.
6	6	5	4	3	2	1	

quindi $P = X^3 + X^2 - 6x + 1 \quad Q = X^4 - 2x^3 - 2x - 1$

ALGO EUCLIDE

$$\begin{array}{r|rrr}
X^4 - 2x^3 & -2x & -1 & X^3 + X^2 + X + 1 \\
X^4 + X^3 + X^2 + X & & & X + 4 \\
\hline
-3x^3 - X^2 + 4x - 1 & & & \\
4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 & & & \\
\hline
2x^2 & + 2 & &
\end{array} \quad \begin{aligned} X^4 - 2x^3 - 2x - 1 &= \underbrace{(X+4)}_{Q} \underbrace{(X^3 + X^2 + X + 1)}_{\text{quoziente}} + \underbrace{2(X^2 + 1)}_{\text{resto}} \\ \deg(2(X^2 + 1)) &= 2 < \deg(P) = 3 \\ \text{mentre } \deg(2(X^2 + 1)) &> \deg(\text{quoziente}) \quad (\text{non sono interi}) \end{aligned}$$

continuiamo: divisione di P per il resto

$$\begin{array}{r|rr}
X^3 + X^2 + X + 1 & 2x^2 + 2 \\
X^3 + X & 4x + 4 \\
\hline
X^2 + 1 & \\
X^2 + 1 & \\
\hline
0 &
\end{array} \quad \begin{aligned} &\text{devo dividere } X^2 + 1 \text{ per } 2x^2 + 2 \\ &\text{ho quindi: } X^2 \text{ e } 2x^2 \rightarrow \text{basta mult.} \\ &\text{per } 2^{-1} = 4 \quad (\text{calcolato nella tavola}) \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{l'ultimo resto non nullo è quindi: } 2x^2 + 2 \\ &\text{ma l'MCD deve essere monico} \rightarrow \text{moltiplico per un invertibile: } 4 \\ &4 \text{ inverso di } 2, \text{ quindi: } X^2 + 1 \text{ è MCD} \end{aligned}$$

• IDENTITÀ DI BÉZOUT

abbiamo $X^4 - 2x^3 - 2x - 1 = \underbrace{(X+4)}_Q \underbrace{(X^3 + X^2 + X + 1)}_P + \underbrace{2(X^2 + 1)}_{\text{resto}}$

trovare α, β in \mathbb{F}_2 t.c. $\alpha P + \beta Q = \delta = X^2 + 1$

$$2(X^2 + 1) = Q - (X+4)P \quad \text{l'identità che abbiamo è buona, ma serve eliminare il 2 prima dell'MCD (2 è inv. moltiplichiamo per l'inverso)}$$

$$4 \cdot 2(X^2 + 1) = 4Q - 4(X+4)P$$

$$X^2 + 1 = 4Q + (3x + 5)P$$

COSTRUZIONI CANONICHE DI UN SOTTOGRUPPO

Note: un gruppo qualsiasi ha due sottogruppi evidenti:

$$\cdot \{1_G\} \quad \cdot \text{se stesso}$$

\otimes not. additivo

Lemme costruzione del kernel / nucleo

Sia $f: G_1 \rightarrow G_2$ omomorfismo di gruppi

$$H = \left\{ g \in G_1 : f(g) = 1_{G_2} \right\} = f^{-1}(\{1_{G_2}\}) \subset G_1$$

elementi di G_1 che puntano all'el neutro di G_2

è un sottogruppo: $H < G_1$ si chiama NUCLEO di f e si scrive $H = \text{Ker}(f)$

dim: $a, b \in H$ con $f(a) = f(b) = 1_{G_2}$

$$f(ab^{-1}) = f(a)f(b^{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} f(a)f(b)^{-1} = 1_{G_2} 1_{G_2}^{-1} = 1_{G_2} \text{ quindi } ab^{-1} \in H$$

(in H ci sono gli el. che puntano a 1_{G_2})

Lemme

Sia $f: G_1 \rightarrow G_2$ omomorfismo di gruppi

"kernel banale" è banale perché, per def. omomorfismo di gruppi, $f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$

si ha che $\text{Ker}(f) = \{1_{G_1}\} \iff f$ è iniettiva

è il più piccolo sottogruppo di G_1

dim

\implies Supponiamo $\text{Ker}(f) = 1_G$ ($= \{x \in G_1 : f(x) = 1_{G_2}\}$)

$$\text{siano } x, x' \in G_1 \text{ t.c. } f(x) = f(x') \iff \underbrace{f(x)f(x)^{-1}}_{\text{diviso}} = 1_{G_2} \\ = f(x)x^{-1} \text{ (x omomorfismo)}$$

$$\iff x(x')^{-1} \in \text{Ker}(f) = \{1_{G_1}\} \text{ quindi } \iff x(x')^{-1} = 1_{G_1}$$

$$\text{ma per } x' \quad \underbrace{x(x')^{-1}x'}_1 = 1_{G_1} x' \iff x' = x \quad f \text{ iniettiva}$$

\iff Supponiamo f iniettiva

Sia $x \in \text{Ker}(f)$. Allora $f(x) = 1_{G_2}$

Ma f è un omomorfismo di gruppi, da cui deduco $f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$

Siccome $f(x) = f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$ e f iniettiva, si deve avere $x = 1_{G_1} \implies \text{Ker}(f) = \{1_{G_1}\}$

• costruzione del SOTTOGRUPPO IMMAGINE

$f: G_1 \rightarrow G_2$ e f omomorfismo, $f(G_1) \subset G_2$

$f(G_1) < G_2 = \{y \in G_2 : \exists x \in G_1 \text{ con } f(x) = y\}$ è il sottogruppo immagine.

dim (sottogruppo)

devo dimostrare che se $y, y' \in f(G_1)$, allora $y(y')^{-1} \in f(G_1)$

$\exists x, x' \in G_1$ t.c. $f(x) = y, f(x') = y'$

$$y(y')^{-1} = f(x)f(x')^{-1} \underset{\text{OMOMORFISMO}}{=} f(xx'^{-1}) = f(z)$$

$$\exists z \in G_1 \text{ t.c. } f(z) = y(y')^{-1} \iff y(y')^{-1} \in f(G_1)$$

• costruzione dei SOTTOGRUPPI CONIUGATI

G gruppo. Scegliamo $H < G$ e $g \in G$

$$\text{definisco } H^g := \{g' \in G \text{ t.c. } \exists h \in H \text{ t.c. } g' = g^{-1}hg\} = g^{-1}Hg \quad \begin{array}{l} \text{notazione} \\ \text{semplificata} \end{array}$$

OSSERVAZIONE. se G abeliano, $H^g = H \forall g$ ($g^1 = g^{-1}hg \iff g' = \underbrace{g^{-1}g}_{1}h \iff g' = h$)

Lemma: $H^g < G$

In generale $gH, Hg, Hg^{-1}, g^{-1}H \notin G$

dim dati $a, b \in H^g$

$$a = g^{-1}a'g \quad \exists a' \in H, \quad b = g^{-1}b'g \quad \exists b' \in H$$

$$\cdot b^{-1} = (g^{-1}b'g)^{-1} = g^{-1}b'^{-1}g \quad \begin{array}{l} \text{inversione in } G: (abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1} \\ \text{perciò } H^g \end{array}$$

$$ab^{-1} = g^{-1}a'g \cdot g^{-1}(b')^{-1}g = g^{-1}\underbrace{a'(b')^{-1}}_{\in H}g \Rightarrow ab^{-1} \in H^g \quad \forall a, b \in H^g \Rightarrow H^g < G$$

dim alternativa

Definiamo, dato $g \in G$, un'applicazione $G \xrightarrow{f_g} G$

osserviamo che Hg, f_g è un omom di gruppi: (si parla di endomorfismo)

per verificarlo devo mostrare che $\forall a, b \in G, f(ab^{-1}) = f_g(a) f_g(b^{-1})$

$$f_g(a) f_g(b^{-1}) = g^{-1}a g (g^{-1}b g)^{-1} = g^{-1}a g \cdot g^{-1}b^{-1}(g^{-1})^{-1} = g^{-1}a b^{-1}g = f_g(ab^{-1})$$

Questo dimostra perciò: $H < G_1$ e se $G_1 \xrightarrow{f} G_2$ omomorfismo, allora $f(H) < G_2$

Se $G_1 = G_2 = G$ e $f = f_g$ otteniamo $\forall H < G, f_g(H) < G \quad \begin{array}{l} \text{se} \\ g^{-1}Hg = H^g \end{array} \Rightarrow H^g < G$ •

PERMUTAZIONI

GRUPPI DI PERMUTAZIONI

elementi chiamati permutazioni

dato E insieme finito, sia $S(E) = \{ f: E \rightarrow E : f \text{ biiettiva} \}$

• Su $S(E)$ esiste l'operazione di composizione di applicazioni: $E \xrightarrow[f]{\circ} E$, e se $f, g \in S(E)$, allora $g \circ f \in S(E)$

Inoltre, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \implies (S(E), \circ, \text{Id}_E)$ è un gruppo.

perché ① $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ \circ è associativo

② $f \circ \text{Id} = \text{Id} \circ f = f \quad \forall f \in S(E)$ è neutro

③ $\forall f \in S(E)$ invertibile e $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f \in S(E)$ inverso per \circ

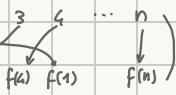
• Sia $E = \{1, \dots, n\} =: I_n \quad n \geq 1$ allora si scrive $S_n = S(I_n) = S(E)$

• ogni elemento di S_n , $f \in S_n$ può essere

identificato con un diagramma:



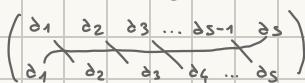
che si può anche rappresentare non "in ordine" con frecce:



def n-ciclo

Una permutazione del tipo $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{s-1} \alpha_s \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_s \alpha_1 \dots \alpha_s)$ con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in I_n (s \leq n)$ distinti,

il ciclo si vede meglio così immo



che fissa (mette a sé stessi) tutti gli elementi che non appartengono a $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$

(e mette quelli di $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ in maniera ciclica)

es: $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \alpha_2 \rightarrow \alpha_3, \alpha_3 \rightarrow \alpha_1$)

Si chiama **s-ciclo** e si scrive $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s)$

Term: dato un ciclo

$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s)$, la sua orbita

N.B rispetta alla notazione: è $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_s)$ e rispetta l'ordine del ciclo

è $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$

(insieme di el. permutati tra loro)

si può shiftare: $(\alpha_s \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{s-1})$ ma non rimescolare: $\neq (\alpha_1 \alpha_3 \alpha_2 \dots \alpha_s)$

Esempi: in S_2 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (12)$ è un 2-ciclo in S_3 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123)$ 3-ciclo in S_5 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (135)$ 3-ciclo

TERMINOLOGIA: tutti i 2-cicli si chiamano **trasposizioni**.

OSS: l'identità è uno 0-ciclo

• tutti i cicli sono permutazioni,

ma esistono permutazioni che non sono cicli

es. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ non è un ciclo

vedo $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 1$ sono "cicliche", ma

le altre non sono fissate: $3 \rightarrow 6, 6 \rightarrow 3 \dots$

(anche guardando $3 \rightarrow 6, 6 \rightarrow 3$ stesso discorso: $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 1$ non fissati)

INVERSIONE

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccccc} 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \diagup & \diagup & \diagup & \diagup & \diagup & \diagup & \diagup \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right)$$

OSS: nella notazione semplificata di un ciclo $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s)$, l'inverso si ottiene leggendo da destra a sinistra:
 $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s)^{-1} = (\alpha_s \dots \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1)$

COMPOSIZIONE (possiamo chiamarla anche "prodotto")

$$\sigma = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{array} \right) = (1342) \in S_5, \quad \tau = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) = (15324) \in S_5$$

$$\sigma \circ \tau = \sigma \cdot \tau = \sigma \tau \quad \text{composizione \(\rightarrow\) legge prima } \tau$$

$$\sigma \circ \tau = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \tau | & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ \sigma | & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right) = (543) \neq \Rightarrow S_5 \text{ non è commutativo!}$$

$$\tau \circ \sigma = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) = (1253)$$

OSS: il prodotto di cicli non è necessariamente un ciclo

Descrizione di S_3 $\# S_3 = 6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ (fattoriale)

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \right\} =$$

$$= \{ \text{Id}, (23), (12), (123), (132), (13) \} \quad \text{in } S_3, \text{ ogni permutazione è un s-ciclo con } s = 0, 2, 3$$

- Quel è il più piccolo n t.c. in S_n esiste una permutazione che non è un ciclo?

$$n=4. \quad \text{infatti, } (12)(34) = \text{elemento per elemento} \quad \begin{aligned} ((12)(34))(1) &= (12)((34)(1)) = (12)(1) = 2 \\ ((12)(34))(2) &= (12)(2) = 1 \\ ((12)(34))(3) &= (12)(4) = 4 \\ ((12)(34))(4) &= (12)(3) = 3 \end{aligned}$$

quindi $(12)(34) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right)$ non è un ciclo

$$\text{es mostrare che } (123)^{-1} = (132) (= 321\dots) \longrightarrow (123) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \quad (123)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right) = (132)$$

def CICLI A SUPPORTI DISGIUNTI

Dati due cicli $(\alpha_1 \dots \alpha_s)$ e $(\beta_1 \dots \beta_t)$ di S_n ,

si dice che sono a supporti disgiunti se $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} \cap \{\beta_1, \dots, \beta_t\} = \emptyset$

Più generalmente, dati r cicli, C_1, \dots, C_r di S_n sono a supporti disgiunti

es. $(12), (34)$ sono a supp. disgi. in S_4

TEOREMA (decomposizione di permutazioni)

Ogni $\sigma \in S_n$ può essere decomposto in prodotto di cicli a supporti disgiunti.

Inoltre, tali cicli sono unicamente determinati e commutano fra di loro.

C'è analogia con il TFA.

esempio

x "estremo" Cicli:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 3 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

parto da un 8

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 1$

(1247)

Non ha senso
prendere un el.
da qui - si parte
da un altro

prendo il 3

$3 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 3$

(3685)

i due cicli sono disgiunti

$$\sigma = (1247)(3685) =$$

$$= (3685)(1247)$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$R_1 = \{(1,1), (2,2), (1,2)\}$$

$$R_2 = \{(3,3), (1,2)\}$$

$$R_1 \cup R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2)\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(1,2)\}$$

$$R_1 = \{(1,1), (2,2)\}$$

$$R_2 = \{(3,3)\}$$

$$R_1 \cup R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \emptyset$$

Sia G gruppo (in not. moltiplicativa) e $H \subset G$.

Introduciamo una relazione \sim su G :

$$\text{dati } X, X' \in G \quad X \sim X' \iff X(X')^{-1} \in H$$

Lemma: \sim è di equivalenza

dim: ① RIFLESSIVITÀ:

$$x \sim x \quad \forall x \in G$$

$$H \subset G \implies 1_G \in H. \text{ Ma } 1_G = xx^{-1} \quad \forall x \in G, \text{ quindi } x \sim x \quad \forall x \in G$$

($1_H = 1_G$)

② SIMMETRIA:

$$x \sim x' \implies x'(x')^{-1} \in H$$

$$\text{Ma } \forall h \in H, h^{-1} \in H \quad \begin{array}{l} (\text{prop.}) \\ (\text{sottogr.}) \end{array} \text{ Quindi } (x(x')^{-1})^{-1} = x'x^{-1} \in H$$

③ TRANSITIVITÀ:

$$x \sim x', x' \sim x'' \implies x \sim x'' \quad \forall x, x', x'' \in G$$

Supponiamo $x \sim x'$ e $x' \sim x''$. Allora $x(x')^{-1}, x'(x'')^{-1} \in H$

$$\text{Se } a, b \in \text{sottogruppo: } x(x')^{-1}x'(x'')^{-1} = x(x'')^{-1} \in H$$

anche il loro prodotto

quoziente su \sim dove: due el. x e x' sono nella stessa classe se $x(x')^{-1} \in H$

Domanda: È possibile costruire su G/\sim un'operazione binaria in modo tale che G/\sim acquisisca una struttura di gruppo?

Talvolta sì, talvolta no. Servono delle condizioni:

• Vorremmo che questa identità fosse valida per la nuova operazione:

$$[x] * [x'] = [x \cdot x'] \quad \begin{array}{l} \text{nuova op.} \\ \text{indipendentemente dai rappresentanti} \\ \text{vecchio op. di } G \end{array}$$

Supponiamo $x \sim y$ e $x' \sim y'$.

$$x \sim y \iff [x] = [y] \iff x(y)^{-1} \in H$$

$$x' \sim y' \iff [x'] = [y'] \iff x'(y')^{-1} \in H$$

è necessario innanzitutto che $[x \cdot x'] = [y \cdot y']$ ovvero $xx'(yy)^{-1} \in H$

$$xx'(yy)^{-1} = x\underbrace{x'(y)}_{\text{per ipotesi, } \in H} y^{-1} \quad \begin{array}{l} \text{sappiamo quindi che un pezzo del prodotto } \in H, \\ \text{ci serve una condizione per cui tutto il prodotto } \in H \end{array}$$

def SOTTOGRUPPO NORMALE

H è un sottogruppo normale di G se, $\forall x \in G, xH = Hx$

• si scrive $H \triangleleft G$

$$\text{quindi, per la formula di prima: } xHy^{-1} = \underbrace{xy^{-1}H}_{\text{per ipotesi, } \in H} \quad \text{e } H \text{ per ipotesi, quindi tutto } \in H$$

(quindi $[x \cdot x'] = [y \cdot y']$)

Condizioni equivalenti (per H sottogr. normale)

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} H \triangleleft G & \textcircled{2} \forall g \in G \quad \forall h \in H, \exists h' \in H \text{ t.c. } gh = h'g \\ (\text{gh} = hg) & \textcircled{3} \forall g \in G, H^g = H \end{array}$$

ricordiamo: $g^{-1}Hg$

OSS: G abeliano e $H \subset G \implies H \triangleleft G$ (tutti i sottogruppi di un gruppo abeliano sono normali)

ESEMPI (notevoli):

- \mathbb{Z} gruppo abeliano in not. add. e $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\mathbb{Z}$ è un sottgr. di \mathbb{Z} , $n\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$ e posso costruire, sempre in not. add., $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (coincide con la costruzione già vista in aritmetica modulare)
- dato G qualsiasi, ho $G \triangleleft G$ ($\forall x \in G, xG = Gx$ e $G/G = \{G\}$)
- anche $\{1_G\} \triangleleft G$ ($\forall x \in G, x1_G = 1_Gx = x$ e $G/\{1_G\} = \{ \{gg\} : g \in G \}$ rel. di ugualanza)

dim condiz. equivalenti: basta mostrare che $(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ (ordine scelto per facilità di dimostrazione)

- $(3) \Rightarrow (1)$ ipotesi: $H^g = H$ se $H^g = H$, $g^{-1}Hg = H \Leftrightarrow \underbrace{gg^{-1}Hg}_{1G} = gH \Leftrightarrow Hg = gH$
devo dim: $gH = Hg$
- $(1) \Rightarrow (2)$ ipotesi: $gH = Hg$ se $\forall g$, $gH = \{x \in G : \exists h \in H \text{ con } x = gh\} = Hg = \{y \in G : \exists h' \in H \text{ con } y = h'g\}$
devo dim: $gh = h'g$. allora $\exists h, h' \in H$ t.c. $x = gh = h'g$
- $(2) \Rightarrow (3)$ ipotesi: $gh = h'g$ se $\forall g \in G, \forall h \in H$ si ha $gh = h'g \exists h' \in H$, allora $\underset{1G}{\Leftrightarrow} g^{-1}gh = g^{-1}h'g \Leftrightarrow h = g^{-1}h'g$ quindi, $\forall g, H^g = H$ ■
devo dim: $H^g = H$

Teorema

Dato $H \triangleleft G$, \sim di eq.

Allora l'operazione su G/\sim $[x][x'] = [xx']$ (ben posta)

definisce una struttura di gruppo su G/\sim .

$[g]$ contiene tutti gli el. x t.c. $gx^{-1} \in H$

quindi, $gx^{-1} = h \Leftrightarrow g = hx \Leftrightarrow h^{-1}g = x$

Ma H è chiuso rispetto all'inverso, quindi $h^{-1} \in H$.

Quindi tutti gli el. $x \in [g]$ si possono scrivere come gh , $h \in H$
(quindi gH)

se ogni el. h si può scrivere così (come def. coniugati), vuol dire che l'insieme dei coniugati è H stesso

• si scrive $G/\sim = G/H$ gruppo quoziante di G per H

• osserviamo inoltre $[g] = gH = Hg$ non è vero che $gh = hg$
ma $\forall h \exists h' \text{ t.c. } gh = h'g$ quindi $gH = Hg$

• l'elemento neutro è $1_{G/H} = H$

• gli elementi di G/H (sottoinsiemi di G) sono le classi laterali di H

quindi: $\{gh : h \in H\}$

Lemma:

L'applicazione $\begin{array}{rcl} G & \xrightarrow{\Pi_H} & G/H \\ g & \mapsto & [g] \end{array}$ è un omomorfismo di gruppi suriettivo

dim:

• la suriettività di Π_H è chiara, perché ogni classe contiene un rappresentante

• inoltre, $\Pi_H(xy) = [xy] = [x][y] = \Pi(x)\Pi(y)$ ■

Lemma

Dato $G_1 \xrightarrow{f} G_2$ omomorfismo di gruppi:

el. di G_1 che puntano a 1_{G_2}

$\mapsto [H]$ el. neutro di G/\sim ,

Allora, $\underbrace{\text{Ker}(f)}_{= "H"} \triangleleft G_1$. Inoltre, se $H \triangleleft G$, allora $H = \text{Ker}(\Pi_H)$ quindi $H = \text{Ker}(\Pi_H)$

dim:

• $\text{Ker}(f) \triangleleft G_1$ (so già che $\triangleleft G_1$) Mostriamo che $\text{Ker}(f)^g = \text{Ker}(f)$ (def. equivalente ③ di \triangleleft)

prendiamo $h \in G_1$ t.c. $f(h) = 1_{G_2}$ ($\Leftrightarrow h \in \text{Ker}(f)$)

$$\begin{aligned} \text{Allora si ha che } \forall x \in G_1, f(x^{-1}hx) &= f(x^{-1}) \overset{\text{OMOM.}}{\overbrace{f(h)}} \overset{= 1_{G_2}}{\overbrace{f(x)}} \\ &= f(x)^{-1}f(x) = 1_{G_2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^{-1}hx \in \text{Ker}(f) \quad \forall h \in \text{Ker}(f), \forall x \in G \Leftrightarrow \text{Ker}(f)^x = \text{Ker}(f)$$

• se $H \triangleleft G_1$, allora $H = \text{Ker}(\Pi_H)$

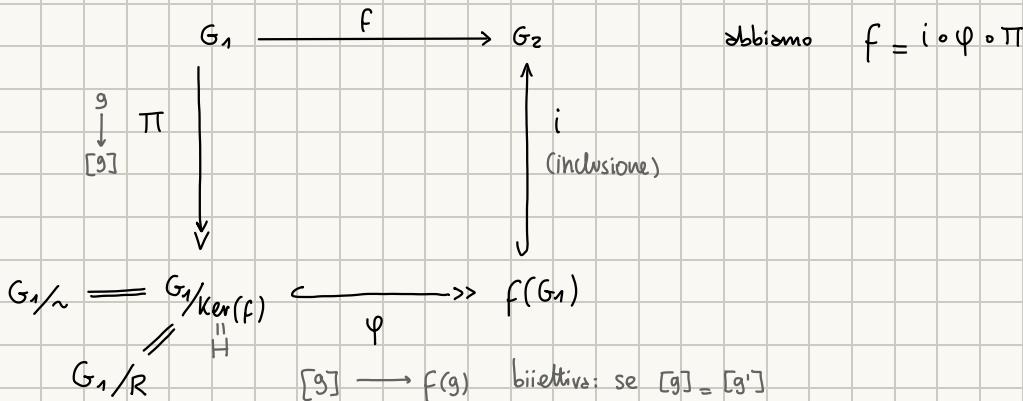
Abbiamo $H \triangleleft G_1$ e poniamo $f = \Pi_H$. Mostriamo che $H = \text{Ker}(\Pi_H)$. Ma se $g \in G_1$ soddisfa $\Pi_H(g) = 1_{G_2} = H \Leftrightarrow gH = H \Leftrightarrow g \in H$ ■

(Spiegazione mia):

• $g \in H \Rightarrow g \in \text{Ker}(\Pi_H)$ se $g \in H$, $gH = H$. Quindi, $\Pi_H(g) = H$ ($[g] = gH$). Quindi (visto $H = 1_{G_2}$) $g \in \text{Ker}(\Pi_H)$

• $g \notin \text{Ker}(\Pi_H) \Rightarrow g \notin H$ se $g \notin \text{Ker}(\Pi_H)$, $\Pi_H(g) = 1_{G_2} = H$. Quindi, $gH = H$. $gH = H \Leftrightarrow g \in H$

Consideriamo un omomorfismo di gruppi: $G_1 \rightarrow G_2$. Per il teorema di struttura delle applicazioni, (di kernel $H \triangleleft G_1$)



- Introduciamo la relazione R : dati $g, g' \in G$, $g R g' \iff f(g) = f(g')$

mostriamo che R e \sim sono la stessa relazione: dati $a, b \in G_1$, $f(a) = f(b) \iff f(a)f(b)^{-1} = 1_{G_2}$

poiché f è un omomorfismo, $f(a)f(b)^{-1} = f(ab^{-1}) = 1_{G_2}$

il che equivale a dire $\partial b^{-1} \in \text{Ker}(f) = H$, ovvero $a \sim b$.

- Si ha quindi $G_1/R = G_1/H$ (che abbiamo visto essere un gruppo), e TT omomorfismo di gruppi. (Lemma p.61)

- mostriamo che anche $\varphi: G_1/R \rightarrow f(G_1)$ t.c. $\varphi(gH) = f(g)$ è un omomorfismo di gruppi

Voglio mostrare che $\forall a, b \in G_1$, si ha $\psi(aH)\psi(bH)^{-1} = \psi(ab^{-1}H)$
 si ha $\psi(aH)\psi(bH)^{-1} = f(a)f(b)^{-1} = f(ab^{-1}) = \psi(ab^{-1}H)$

abbiamo così dimostrato il primo TEOREMA DI ISOMORFISMO PER I GRUPPI:

dato $f: G_1 \rightarrow G_2$ omomorfismo di gruppi, esso si decompone

in composizione $f = \underbrace{i \circ \varphi \circ \pi}$
 tutti omomorfismi
 di gruppi

Altre proprietà dei gruppi:

Lemmo l'intersezione di sottogruppi è un sottogruppo dati $H_1, \dots, H_n < G$, $\bigcap_{i=0}^n H_i < G$

dim: Siano $x, y \in \bigcap_{i=0}^n H_i$. (ovvero $x, y \in H_i \forall i$)

Allora, $\forall i$, $x y^{-1} \in H_i$, perché $H_i < G$ $\forall i$

Ma allora $Xy^{-1} \in \bigcap_{i=0}^n H_i$, ovvero $\bigcap_{i=0}^n H_i \subset G$

Lemmo l'unione di sottogruppi non è un sottogruppo (\rightarrow lo è se uno dei due sottogruppi è contenuto nell'altro)

esempio $H_1 = \{1_G, (12)\}$, $H_2 = \{1_G, (13)\} < G = S_3$

$$H_1 \cup H_2 = \{1G, (12), (13)\} \subset G, \text{ ma non } < G.$$

Infatti $(12), (13) \in G$ e $\in H$ ma $(12)(13) = (1, 3, 2) \notin H_1 \cup H_2$ (non è chiuso rispetto alla sua operazione, o) quindi non è un collegiuppo

SOTTOGRUPPO GENERATO

Consideriamo $I \subset G$. Il sottogruppo di G generato da I è:

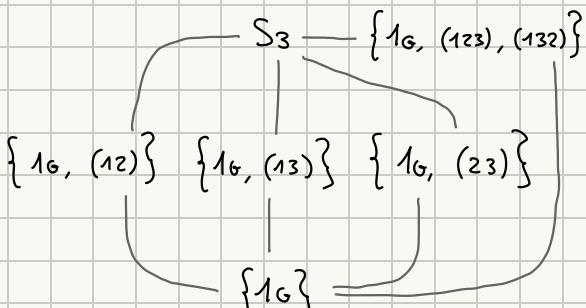
$\langle I \rangle := \bigcap_{\substack{H \leq G \\ I \subseteq H}} H$ (quindi si prendono tutti i sottogruppi di G che contengono I e si intersecano) è "il più piccolo sottogruppo di G che contiene I "

Si ha I
per un singolo elemento:

- dato G gruppo (not. moltiplicativo) e $g \in G$, $\langle g \rangle = \bigcap_{H \subset G, g \in H} H$

esempio

i sottogruppi di S_3 sono:



$$\text{Quindi: } \langle(1\ 2)\rangle = \{1_6, (12)\} - H_3$$

$$\langle(13)\rangle = \{10, (13)\} = H_2$$

$$\langle (23) \rangle = \{1_G, (23)\} = H_1$$

$$\langle(123)\rangle = \{1_G, (123), (132)\}$$

$$\langle H_1 \cup H_2 \rangle = S_3$$

$$T = \{10, (13), (23), (132), (123), (12) \} = S_3$$

(questo è un diagramma di Hasse - mostra i sottogruppi di un determinato gruppo)

SOTTOGRUPPO $g\mathbb{Z} / g\mathbb{Z}$

- Consideriamo l'insieme $\{1, g, g^2, \dots, g^{-1}, g^0, \dots\} = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\} = g\mathbb{Z} \subset G$ con G gruppo moltiplicativo

Allora si ha che $g\mathbb{Z} < G$. Infatti, $\forall x, x' \in g\mathbb{Z}$, $\exists n, n' \in \mathbb{Z}$ t.c. $x = g^n$, $x' = g^{n'}$ e $x(x')^{-1} = g^{n-n'} \in g\mathbb{Z}$

Si ha che $\langle g \rangle \subset g\mathbb{Z}$. ($\langle g \rangle$ è un sottogruppo: è chiuso rispetto a inverso e prodotto - visto che contiene g , contiene g^{-1} e tutte le potenze generate come prodotto)

Dato che $\langle g \rangle < G$, e $g \in \langle g \rangle$, $1 = g^0 \in \langle g \rangle$, $g^{-1} \in \langle g \rangle$ e gli altri sono generati dal prodotto di questi ... si ha anche $g\mathbb{Z} \subset \langle g \rangle$

Lemme $\langle g \rangle = g\mathbb{Z}$. (per un gruppo additivo, $\langle g \rangle = g\mathbb{Z}$)

es., dato $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\langle [2] \rangle = \{[0], [2], [4]\}$

Lemme SOTTOGRUPPI DI \mathbb{Z}

Sia G un sottogruppo di \mathbb{Z} (in not. additivo),
se $G \neq \{0\}$, allora $\exists n \in \mathbb{N}^*$ t.c. $G = n\mathbb{Z}$

(tutti i sottogruppi di \mathbb{Z} sono o $\{0\}$ o $n\mathbb{Z}$)

FATTO: L'elemento neutro di un gruppo $\{e\}$ è sempre un suo sottogruppo
(il più piccolo sottogruppo)

dim:

(per i negativi, G è stabile per l'inverso $x \mapsto -x$)

Supponiamo $G \neq \{0\}$. Allora esiste un più piccolo $n \in G \cap \mathbb{N}^*$ (principio del minimo)
tale che, preso $d \in G$ (per div. euclideo) $d = qn + r$ con $0 \leq r < n$.

(impossibile perché n è il minimo su $G \cap \mathbb{N}^*$, ma allo stesso tempo $r < n$ e $r \neq 0$)

Quindi $r = d - qn$. Se $r \neq 0$, si avrebbe $r < n$ e $r \in G \cap \mathbb{N}^*$
contraddizione con la minimalità di n .

Quindi $r = 0$, e $d \in n\mathbb{Z}$.

Quindi, $G \subset n\mathbb{Z}$. Ma $G > n\mathbb{Z}$, perciò $G = n\mathbb{Z}$

perché
 G è chiuso
rispetto alle somme,
quindi contiene tutti gli $n\mathbb{Z}$ (?)

Lemme

Se G è un gruppo finito (moltiplicativo)

allora $\forall g \in G$, $\exists n > 0$ t.c. $\langle g \rangle = g\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. n è chiamato ordine di g .

dim

$f: \mathbb{Z} \rightarrow G$ (non iniettiva perché \mathbb{Z} infinito e G finito)

$n \rightarrow g^n \in g\mathbb{Z} = \langle g \rangle$

f è un omomorfismo perché $f(n - n') = g^{n-n'} = g^n g^{-n'} = f(n) f(n')^{-1}$

per il primo teorema di isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & G \\ \downarrow \pi & & \downarrow i \\ \mathbb{Z}/\text{Ker}(f) & \xrightarrow{\psi} & f(\mathbb{Z}) = g\mathbb{Z} = \langle g \rangle \end{array}$$

$\text{Ker}(f) < \mathbb{Z}$ quindi, per il Lemma sopra, o è $\{0\}$ o è $n\mathbb{Z}$
Ma se fosse $\{0\}$, allora $\mathbb{Z}/0 \stackrel{1:1}{\cong} \mathbb{Z}$ e f sarebbe iniettiva (e $g\mathbb{Z}$ infinito)
(perché ψ è iso e andrebbe da $\mathbb{Z}/0$ infinito a $g\mathbb{Z}$)

Quindi $\exists n \in \mathbb{N}^*$ t.c. $\text{Ker}(f) = n\mathbb{Z}$

def ORDINE DI UN ELEMENTO

Sia G gruppo finito e $g \in G$.

Allora $\{ d \in \mathbb{N}^* \text{ t.c. } g^d = 1_G \} \neq \emptyset$

(infatti si ha l'omomorfismo $f: \mathbb{Z} \rightarrow G$ visto sopra, non iniettivo)

Si pone $\text{ord}(g) = \min \{ d \in \mathbb{N}^* \text{ t.c. } g^d = 1_G \}$ minimo numero di volte per cui bisogna moltiplicare g per se stesso per ottenere 1_G

in notazione additiva:

$\text{ord}(g) = \min \{ d \in \mathbb{N}^* \text{ t.c. } g\mathbb{Z} = 1_G \}$

es. $g = (123) \in S_3$

$n | (123)^n$

0 1_{S_3}

$\mathbb{Z} \rightarrow S_3$

1 (123)

$n \rightarrow (123)^n$

2 (132)

3 1_{S_3}

4 (123)

quindi $\text{ord}((123)) = 3$

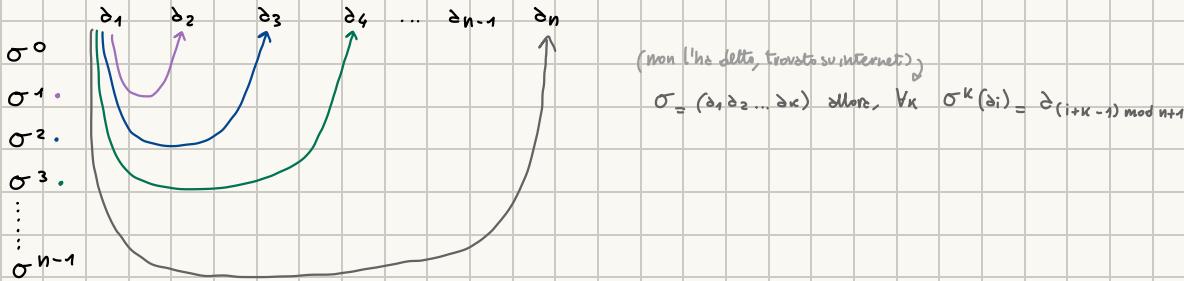
$\langle (123) \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$\{ (123), (132), 1_{S_3} \}$

ORDINE DI UN CICLO

Più generalmente, dato un n -ciclo di S_r $\sigma := (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$

$$\text{ord}(\sigma) = n \quad e \quad \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$



quindi $\sigma^i \neq 1_{S_r} \quad \forall i = 1, \dots, n-1$

Inoltre $\sigma^n(\alpha_1) = \alpha_1$. Ma noi possiamo scrivere σ "scalandolo", e trasformare α_2 in α_1 : $(\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \alpha_1)$

Quindi, $\sigma^n(\alpha_2) = \alpha_2$. Più generalmente, $\sigma^n(\alpha_i) = \alpha_i \quad \forall i = 1 \dots n$

Siccome σ è un ciclo, esso fissa tutti gli el. $b \in \{1, \dots, r\} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Quindi, $\sigma^n = 1_{S_r}$, da cui $n = \text{ord}(\sigma)$.

Abbiamo dimostrato

Lemme ORDINE DI UN CICLO

Se σ è un n -ciclo, allora

$$\text{ord}(\sigma) = n \quad e \quad \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

CALCOLARE $\text{ord}(\sigma)$

Come si calcola $n = \text{ord}(\sigma)$? Lo sappiamo se σ è un m -ciclo: $\text{ord}(\sigma) = m$

Ricordiamo: Ogni $\sigma \in S_n$ si decomponga in modo unico in un prodotto di cicli disgiunti c_1, \dots, c_s che commutano fra loro.

Quindi: sia $\sigma \in S_n$ - lo decomponiamo in prodotto di cicli disgiunti: $\sigma = c_1 \dots c_s$

Lemme: $\text{ord}(\sigma) = \text{mcm}(\text{ord}(c_1), \dots, \text{ord}(c_s))$

esempio

calcolare $\text{ord}(\sigma)$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_n \quad n \geq 7 \quad (\text{se } \in S_n > 7, \text{ gli altri el. sono fissati})$$

① Decomponiamo σ in prodotto di cicli disgiunti

$$= \underbrace{(17)}_{\text{ord } 2} \underbrace{(24)}_{\text{ord } 2} \underbrace{(56)}_{\text{ord } 2} \quad ((3) \text{ si può omettere})$$

$$② \text{ord}(\sigma) = \text{mcm}(2, 2, 2) = 2$$

Metodo alternativo: sfrutta il fatto che $\text{ord}(\sigma) = \min$ esponente ≥ 1 cui elevare σ per avere l'identità

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 1_{S_n} \quad (n \geq 7)$$

(3 omesso perché fissato)

$$\text{Si può vedere anche così: } \sigma^2 = (17)(24)(56)(17)(24)(56) = (17)(24)(56)(56)(24)(17) = 1_{S_n} \quad (n \geq 7)$$

(uno alla volta "collaudo" nell'identità: $(56)(56) = 1_5$
 $(17)(24)(24)(17)$ ecc.)

l'inverso di una trasposizione è essa stessa

Sia perché $\text{ord} = 2$ (quindi $\sigma^2 = 1$)
e sia per il "trucco" di leggerlo
al contrario: $(17) = (71)$

esercizi:

- trovare α, β t.c. $(147)(132) \times \beta = 1_G$

$$\alpha = (132)^2 = (132)(132) = (123) \quad \text{oppure } \alpha = \overleftarrow{(132)} = (231) = (123)$$

$$\beta = (147)^2 = (174)$$

- trovare α, β in S_8 t.c. $(1234)(137) \times \beta = 1_{S_8}$ $\alpha = (137)^2, \beta = (1234)^3$

- $\text{ord}((12)(345)) = 6$ $\cdot \text{ord}((12)(245)) = ?$ Non sono à supporto disgiunto

Rendendomi à supp. disgi. = $\text{ord}((1245)) = 4$

- $\text{ord}((12)(13)(14)) = \text{ord}((1432)) = 4$

Teorema (decomp. di permutazione in trasposizioni)

Ogni permutazione si decompone in prodotto di trasposizioni

non necessariamente a supporto disgiunto.

• in generale, una tale fattorizzazione non è unica

FORMULA per un n-ciclo

$$\sigma = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = (\alpha_n \alpha_{n-1}) (\alpha_n \alpha_{n-2}) \dots (\alpha_n \alpha_1) \quad (\text{ovvero } n-1 \text{ fattori})$$

in realtà $2\mathbb{Z} + n-1$,
perché posso aggiungere
qualsiasi identità voglio

$$\text{esempio: } (12345) = (54)(53)(52)(51)$$

visto che $(\alpha_1 \alpha_2)(\alpha_1 \alpha_2) = 1_s$, aggiungere una coppia di
trasposizioni uguali dà lo stesso risultato

Teorema "rinforzato" - SEGNATURA/SEGO DI UNA PERMUTAZIONE

Sia s il numero di trasposizioni in una fattorizzazione di $\sigma \in S_r$ in prodotto di trasposizioni.

Allora $s \bmod 2$ è unicamente determinato (anche se s non è unico)

Poniamo $\epsilon_\sigma = (-1)^s \in \mathbb{Z}^\times$ è la segnatrice di una permutazione.
il segno

σ si dice
pari se $\epsilon = +1$
dispari se $\epsilon = -1$

Se ne deduce:

PROPRIETÀ: $S_n \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}^\times$ è un omomorfismo di gruppi

(funzione che manda una permutazione al suo segno - ovvero uno dei due invertibili di $\mathbb{Z} : 1, -1$)

c'è quindi un diagramma: $S \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}^\times$

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{Z}^\times \\ \pi \downarrow & \swarrow \cong & \text{perché } \epsilon(S_r) = \mathbb{Z}^\times \\ S_r & & \\ \ker(\epsilon) & & \\ \hookrightarrow \text{Ker}(\epsilon) & & \\ \text{contiene} & & \\ \text{tutte le permutazioni} & & \\ \text{che hanno segno pari} & & \\ \text{elementi di } S_r \text{ che puntano a 1} & & \text{per la funzione } \epsilon \\ \text{due hanno segno pari} & & \\ \text{Quindi, questo quoziente divide} & & \\ \text{le permutazioni in due classi: pari e dispari} & & \end{array}$$

COME CALCOLARE $\epsilon(\sigma)$

metodo meno divertente

④ si calcola la fattorizzazione di σ in prod. di cicli disgiunti

$$\sigma = c_1 \dots c_m$$

$$② \epsilon(\sigma) = \epsilon(c_1) \cdot \dots \cdot \epsilon(c_m)$$

③ si usa la formula per cui se φ r-ciclo, allora $\epsilon(\varphi) = (-1)^{r-1}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 5 & 8 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{15} = -1$$

Si dispongono i numeri in
ordine e si tracciano le
frecce che li uniscono
(non ci devono essere incroci a 3)
Si contano le intersezioni



metodo "adatto ad un venerdì sera" (ero giovedì)

senza decomporre in prodotto di cicli disgiunti,

calcoliamo la segnatrice di σ con un procedimento grafico

nota: quando conta le intersezioni, in base a come le disegna, arrò risultati diversi.

ma la classe mod 2 (parità) sarà sempre la stessa, quindi $\epsilon(\sigma)$ non sarà inficiato.

$$\text{es. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \epsilon(\sigma) = (-1)^{15} = (-1)^{15} = -1$$

questo stesso esempio, ma con l'altra tecnica:

$$\sigma = (137)(2458)$$

$$\epsilon(\sigma) = \epsilon(137) \cdot \epsilon(2458) = (-1)^2 \cdot (-1)^3 = -1$$

o PRODOTTO DIRETTO

PRODOTTO CARTESIANO DI GRUPPI

dati G_1, G_2 in not. additiva.

$$G_1 \times G_2 = \{ (g_1, g_2) : g_1 \in G_1, g_2 \in G_2 \}$$

Definiamo su $G_1 \times G_2$ una struttura di gruppo come segue:

$$(g_1, g_2), (g'_1, g'_2) \in G_1 \times G_2 \quad \text{operazione} +: (g_1, g_2) + (g'_1, g'_2) := (g_1 + g'_1, g_2 + g'_2)$$

• associatività: $((g_1, g_2) + (g'_1, g'_2)) + (g''_1, g''_2) = (g_1 + g'_1, g_2 + g'_2) + (g''_1, g''_2) = (g_1 + g'_1 + g''_1, g_2 + g'_2 + g''_2) = (g_1, g_2) + ((g'_1, g'_2) + (g''_1, g''_2))$

• el. neutro: $O_{G_1 \times G_2} = (O_{G_1}, O_{G_2})$

• $G_1 \times G_2$ è abeliano se G_1 e G_2 lo sono.

Questa operazione si estende a n gruppi G_1, \dots, G_n

Si può costruire $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n = \{(g_1, g_2, \dots, g_n)\}$ dotato di struttura di gruppo prodotto cartesiano di G_1, \dots, G_n (e se G_1, \dots, G_n abeliano allora $G_1 \times \dots \times G_n$ abeliano)

esempio $(\mathbb{R}, +)$

• posso costruire il gruppo $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$ i cui elementi sono (x_1, x_2, \dots, x_n) con $x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$
l'elemento neutro è $O = (0, \dots, 0)$

"esercizio 19"

Teorema di Lagrange

Sia G gruppo finito.

Sia $H < G$ ($\#H < \#G$ perché $< \Rightarrow \subset$)

Allora:

$$\#H \mid \#G$$

dim.

Abbiamo, su G , una relazione di equivalenza

associata ad H :

$$x \sim y \iff xy^{-1} \in H$$



se partiziono qualcosa
di finito, ho un numero finito di
partizioni finite a loro volta

Possiamo considerare l'insieme quoziente G/\sim con $\#G/\sim < \infty$

Poniamo $[G:H] = \#G/\sim (= G/H)$

indice di H in G

Siccome G/\sim è una partizione di G , $G = \bigsqcup_{c \in G/\sim} c \rightarrow$ quindi, $\#G = \sum_{c \in G/\sim} \#c$

Claim ①: $\#c = \#H$

[Se il claim è vero, abbiamo il teorema di Lagrange:

$$\text{infatti, } \#G = \sum_{c \in G/\sim} \#c = \sum_{c \in G/\sim} \#H = \#H \sum_{c \in G/\sim} 1 = \#H \cdot [G:H] \text{ quindi } \#H \mid \#G]$$

quindi $\#G = \#H \cdot \text{un intero}$
cardinalità di G/\sim

Quindi, dobbiamo dimostrare che $\forall c \in G/\sim, \#c = \#H$

Claim ②

$\forall g \in G$, poniamo $\psi_g: G \rightarrow G, \psi_g(x) = x \cdot g$ (ben definito perché G chiuso rispetto al prodotto)

Allora, ψ_g è una biiezione

N.B. $\psi_g(1g) = g \quad \forall g \neq 1g$ quindi ψ_g non è un endomorfismo

• Sappiamo che ψ_g è invertibile di inverso $\psi_{g^{-1}}$

Infatti, se $x \in G, \psi_{g^{-1}}(\psi_g(x)) = \psi_{g^{-1}}(xg^{-1}) = xg^{-1}g = x$ quindi $\psi_g \circ \psi_{g^{-1}} = \text{Id}_G$

Analogamente, $\psi_{g^{-1}}(\psi_g(x)) = \psi_{g^{-1}}(xg) = xgg^{-1} = x$ quindi $\psi_{g^{-1}} \circ \psi_g = \text{Id}_G$

notiamo che, generalmente

In particolare, se $I \subset G$, allora $\#\psi_g(I) = \#I$

(perché ψ_g è una biiezione)

$\psi_g \circ \psi_{g^{-1}} = \text{Id}_G$ ma questo non ci serve per Lagrange

(stiamo riservando il gr. G in modo diverso)

e $\psi_{1_G} = \text{Id}_G$

Quindi, se riusciamo a mostrare che una classe è l'immagine di H per un g ben scelto, abbiamo finito.

$(\psi_g(H)) = c \Rightarrow \#H = \#c$, che è quello che cerchiamo)

Descriviamo una classe c :

Sia $x \in c$. Allora, $c = \{y : xy^{-1} \in H\}$

visto che $H < G$, H è chiuso
per l'inverso, quindi $h^{-1} = h \exists h \in H$
quindi $y = hx$

Se $y \in c, xy^{-1} \in H$.

$\exists h \in H \quad \exists h \in H \quad \text{ogni el "y" di } c \text{ si può scrivere}$

$xy^{-1} \in H \iff x = hy \iff y = h^{-1}x \iff y \in Hx \iff c = \psi_x(H)$ come $y = hx \exists h \in H$, quindi $\psi_x(H)$

Abbiamo quindi trovato il g per cui $\psi_g(H) = c$. Quindi, $\#H = \#c$, e quindi $\#G = \sum_c \#c = \#H \cdot [G:H]$ ovvero $\#H \mid \#G$.

QUINDI IL TAKEAWAY È: TUTTI I SOTTOGRUPPI DI G DEVONO AVERE CARDINALITÀ CHE DIVIDE $\#G$.

Quindi, per esempio

prendiamo S_{12} . $\# S_{12} = 12!$

Grazie al teorema di Lagrange, so che non esiste $H < S_{12}$ con $\# H = 13$, perché $13 \nmid 12!$

quindi, se p primo e $p \mid \# S_{12}$, allora esiste $H < S_{12}$ t.c. $\# H = p$

in particolare, $p = 2, 3, 5, 7, 11$

Basta prendere un p -ciclo: se σ è un p -ciclo, $\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \Rightarrow \#\langle \sigma \rangle = p$

Più generalmente, $\forall n \leq 12, \exists H < G : \# H = n$ (si prende σ_n -ciclo)

(ma)

• Sia $H < S_{12}$. È vero che $\# H \leq 12$? No! (esistono altri divisori di 12!)

prendiamo $S \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}^\times$, e $H = \text{Ker}(\epsilon)$

per il 1^o teorema iso:

$$S_{12}/H \cong \mathbb{Z}^\times \Rightarrow \# S_{12}/H = 2 \iff [S_{12} : H] = 2$$

$$12! = \# S_{12} = \# H \cdot 2 \Rightarrow \# H = \frac{12!}{2} \in \mathbb{N}^*$$

(anche logicamente, metà delle perm. saranno dispari e metà pari, quindi $\# \text{Ker}(\epsilon) = \frac{1}{2} \# S_{12}$)

• altro esempio

Se $m \leq n$, c'è (almeno) un omomorfismo iniettivo $S_m \xrightarrow{f} S_n$

• $f(S_m) \subset S_n$ (perché $m \leq n$)

$$\# f(S_m) = \# S_m = m! \quad (\text{perché è iniettivo})$$

Infatti f iniettiva $\Rightarrow S_m \cong f(S_m)$

Dal 1^o teorema iso:

$$\begin{array}{ccc} S_m & \xrightarrow{f} & S_n \\ \downarrow & & \uparrow \\ S_m / \{1_{S_m}\} & \xrightarrow{\cong} & f(S_m) \\ \cong S_m \end{array}$$

$\text{Ker}(f) = 1_{S_m}$ (l'unico el. di S_m che punto all'el. neutro di $S_n \ni 1_{S_m}$)

Sia $\tilde{G}_m = \left\{ \sigma \in S_n \text{ t.c. } \begin{array}{l} \sigma(m+1) = m+1 \\ \sigma(m+2) = m+2 \\ \vdots \\ \sigma(n) = n \end{array} \right\} = \left\{ \text{perm. in } S_n \text{ che fissano gli elementi da } m+1 \text{ a } n \text{ (ce ne sono } n-m \text{)} \right\}$

con $m \leq n$, $f: S_m \hookrightarrow S_n$

$$\sigma \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} 1 \dots m & m+1 \dots n \\ \downarrow \sigma & \downarrow \text{id.} \\ 1 \dots m & m+1 \dots n \end{array} \right)$$

Manda gli el. $1 \dots m$ seguendo σ , e fissa gli altri.

è un omomorfismo di gruppi che soddisfa quanto richiesto e $f(S_m) = \tilde{G}_m$

def GRUPPI CICLICI

Sia G un gruppo, e $g \in G$ di ordine $n \geq 1$

Allora, $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_{n\mathbb{Z}}$ (in not. additiva)

$$\text{H} \triangleleft G$$

sottogruppo
del sottogruppo

prop:

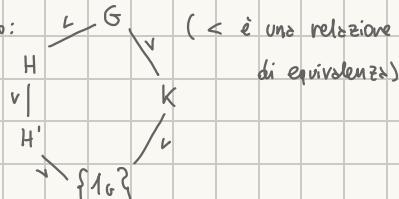
- $\forall d \mid n, \exists \text{ sottogruppo } H_d \triangleleft H \text{ t.c. } \#H_d = d$

quindi possiamo trovare i sottogruppi

attraverso $\mathbb{Z}_{n\mathbb{Z}}$

Quindi, il diagramma di Hasse di un gruppo G è del tipo:

per \triangleleft



(\triangleleft è una relazione
di equivalenza)

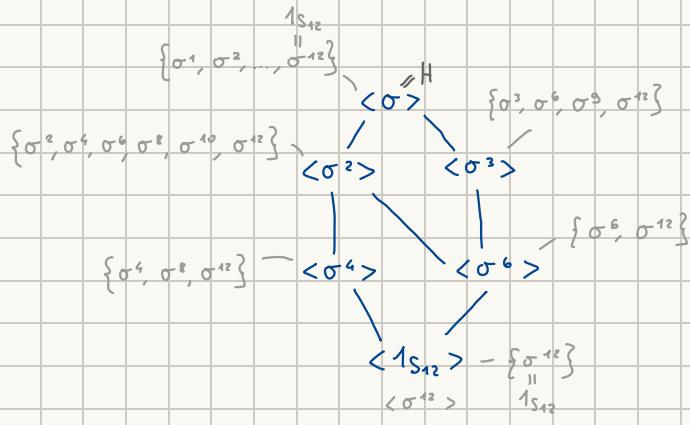
esempio

$$G = S_{12}, \sigma = (1 \ 2 \ 3 \dots 12)$$

$$\text{ord}(\sigma) = 12, \text{ quindi } \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_{12\mathbb{Z}} \text{ di isomorfismo } \sigma^k \mapsto [k]$$

e \forall divisore di 12 c'è un unico $H_d \triangleleft H$ con $\#H_d = d$ quindi: 1, 2, 3, 4, 6, 12

e il diagramma di Hasse è:



$$\mathbb{Z}_{12\mathbb{Z}} = \langle \bar{1} \rangle$$

$$\frac{2\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} = \{[2] \ [4] \ [6] \ [8] \ [10] \ [12]\}$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \frac{2\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_6\mathbb{Z}$$

$$\frac{3\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} = \{[1] \ [2] \ [3] \ [4] \ [5] \ [6]\}$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \frac{3\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_4\mathbb{Z}$$

$$\langle \bar{4} \rangle = \frac{4\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_3\mathbb{Z}$$

$$\langle \bar{6} \rangle = \frac{6\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_2\mathbb{Z}$$

perché? Abbiamo σ , una perm. di ordine 12 (quindi $\sigma^{12} = 1_{S_{12}}$)

Sappiamo che $\langle g \rangle$ è ciclico isomorfo a $\mathbb{Z}_{n\mathbb{Z}}$ (in not. additiva)

Quindi, esiste un sottogruppo $H_d \triangleleft \langle g \rangle$ con cardinalità d per ogni divisore di 12.

Per trovarli, possiamo "sviluppare" con $\mathbb{Z}_{12\mathbb{Z}}$. Visto che $\mathbb{Z}_{12\mathbb{Z}}$ è a sua volta ciclico di 12,

sappiamo che i sottogruppi di $\mathbb{Z}_{12\mathbb{Z}}$ sono generati dalle classi dei divisori di 12, ovvero:

$$[1], [2], [3], [4], [6], [12].$$

$$\langle [1] \rangle = \{0, \dots, 11\} \text{ corrisponde a } \langle \sigma \rangle \text{ (sottogr. di ordine 12)}$$

$$\langle [2] \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \text{ corrisponde a } \langle \sigma^2 \rangle \text{ (ordine 6)}$$

$$\langle [3] \rangle = \{0, 3, 6, 9\} \text{ corr. a } \langle \sigma^3 \rangle \text{ (ordine 4)}$$

$$\langle [4] \rangle = \{0, 4, 8\} \text{ corr. a } \langle \sigma^4 \rangle \text{ (ord. 3)}$$

$$\langle [6] \rangle = \{0, 6\} \text{ corr. a } \langle \sigma^6 \rangle \text{ (ord. 2)}$$

$$\langle [12] \rangle = \{0\} \text{ corr. a } \langle \sigma^{12} \rangle = 1_{S_{12}} \text{ (ord. 1)}$$

SPAZI VETTORIALI

Data K campo,sia V un insieme $\neq \emptyset$ munito di:

$$\text{operazione binaria: } V \times V \longrightarrow V$$

$$(a, b) \longmapsto (a+b)$$

su K (si può scrivere)
/K

scalari vettori:

$$\text{un'operazione } K \times V \longrightarrow V$$

$$(\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v$$

V ha
(somma e prodotto scalare)

è commutativa

Si dice che V è uno spazio vettoriale se:① $(V, +)$ è un gruppo abeliano (di el. neutro 0_V , $\circ \circ$)

$$\text{② } \alpha \cdot (v+w) = \alpha v + \alpha w \quad \forall \alpha \in K, \forall v, w \in V \quad \begin{matrix} \text{distr. di scalare} \\ \text{su somma di vettori} \end{matrix}$$

$$\text{③ } (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha v + \beta v \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall v \in V \quad \begin{matrix} \text{distr. di vettore} \\ \text{su somma di scalari} \end{matrix}$$

$$\text{④ } (\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v) \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall v \in V \quad \text{Non-proprio-associatività}$$

$$\text{⑤ } 1_K \cdot v = v \quad \forall v \in V \quad \text{elemento neutro molt.}$$

Ma in V non esiste un el. neutro per la molt., quindi quello di K funge da neutro per questa operazione

OSS:

la molt. di $v \in V$ per $-1 \in K$, opposto dell'el. neutro per l'add. in K .

$$(-1) \cdot v = -v$$

è l'opposto per la struttura di gruppo

infatti, dato $v \in V$,

$$\begin{aligned} v + (-1)v &= (1 + (-1))v \\ &= 0 \cdot v = 0 \end{aligned}$$

• per esempio, $V = K$ è uno spazio vettoriale su K (perché K campo quindi K anello quindi distr., assoc., el. neutro)spazio vett. K^n • Poniamo $V = K \times \dots \times K = K^n$ con l'operazione $+$ di prodotto cartesiano di gruppi(con \emptyset el. neutro di K , $0_{K^n} = (0, \dots, 0)$ el. neutro di K^n)Definiamo $K \times V \rightarrow V$:

$$\begin{array}{ccc} n \text{ volte} & & n \text{ volte} \\ K \times \underbrace{K \times \dots \times K}_{n \text{ volte}} & \longrightarrow & \underbrace{K \times \dots \times K}_{n \text{ volte}} \\ (\lambda, (v_1, \dots, v_n)) & \longmapsto & (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) \\ & & \lambda(v_1, \dots, v_n) \end{array}$$

questa operazione soddisfa

tutti gli assiomi di spazio vettoriale

distr. a sx:

$$\begin{aligned} \text{② } \lambda \cdot ((v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n)) &= \lambda((v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)) = \\ &= (\lambda(v_1 + w_1), \dots, \lambda(v_n + w_n)) = (\lambda v_1 + \lambda w_1, \dots, \lambda v_n + \lambda w_n) = \\ &= (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) + (\lambda w_1, \dots, \lambda w_n) = \\ &= \lambda(v_1, \dots, v_n) + \lambda(w_1, \dots, w_n) = \lambda v + \lambda w \\ &= \lambda(v + w) \end{aligned}$$

 V , con queste operazioni, è uno spazio vettoriale.

Esempi di spazi vettoriali: (dato K campo)

$$\textcircled{1} \quad K^n, \quad \text{con } n=1, K^1 = K, \quad \text{con } n=0, K^0 = \{\emptyset\}$$

\textcircled{2} matrici con m linee e n colonne a coefficienti in K

$$M_{m,n}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in K \forall i,j \right\} = \left\{ (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} : a_{ij} \in K \forall i,j \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

con operazioni di addizione coefficiente per coefficiente

e moltiplicazione esterna per λ separatamente per ogni coefficiente

$$\lambda = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Note: essenzialmente, $M_{m,n}(K)$ è una riscrittura di $K^{m \times n}$ sotto forma di matrice. (come vettori assembly)

per esempio, $M_{2,3}(K) = K^{2 \times 3}$ è uguale (formalmente si dice) isomorfo a K^6

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2,3}(K) \xrightarrow{1:1} (a, b, c, d, e, f) \in K^6$$

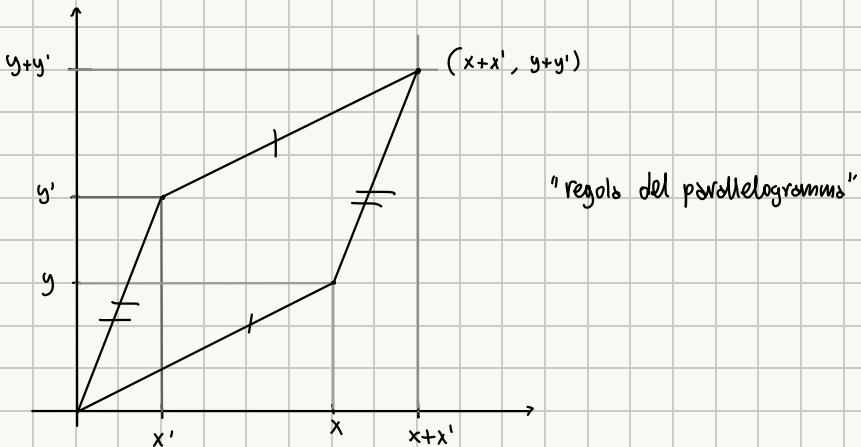
esempio operazioni:

$$A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ij}) \quad \in M_{m,n}(K) = K^{m \times n}$$

$$\cdot A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m,n}(K)$$

$$\cdot \lambda \in K : \lambda A = (\lambda a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$$

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLA SOMMA IN \mathbb{R}^2



\textcircled{3} Polinomi a coefficienti in K campo

$$V = K[x] \quad f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 \dots, \quad g = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 \dots, \quad \lambda \in K$$

$$f+g = f_0 + g_0 + (f_1 + g_1)x + \dots$$

Osservazione: K finito (es. $K = \mathbb{F}_p$)

$$\lambda \cdot f = \lambda f_0 + (\lambda f_1)x + (\lambda f_2)x^2 + \dots$$

ma $K[x]$ infinito

④ lo ha skipato per ora

⑤ \mathbb{C} è uno spazio vettoriale su \mathbb{C}

ma si ha anche che \mathbb{C} è uno spazio vettoriale su \mathbb{R}

$$\mathbb{C} = \{x+iy : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{la struttura di gruppo abelliano è nota}$$

$$\begin{aligned} \cdot \lambda \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \\ z = x+iy \end{aligned} \quad \begin{aligned} \lambda \cdot z &= \lambda(x+iy) = (\lambda x) + i(\lambda y) \\ &= \lambda z \end{aligned}$$

def APPLICAZIONE LINEARE (come omom. gruppi)

Dati due spazi vettoriali V, V' su K , un'applicazione $V \xrightarrow{f} V'$ è detta lineare se:

infatti notiamo che se $\lambda = 1$, è l'assioma dell'omomorfismo

$$\forall x, y \in V, \forall \lambda \in K, \quad f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

Se f è biiettiva, si dice isomorfismo.

Se $f: V \rightarrow V'$ isomorfismo esiste, allora si dice che V e V' sono isomorfi e si scrive $V \cong V'$.

def SOTTOSPAZIO VETTORIALE

(è un sottoinsieme di uno sp. vett. che è a sua volta sp. vett.)

dato V spazio vettoriale su K ,

$W \subset V$, $W \neq \emptyset$ è un sottospazio vettoriale se: (varie definizioni alternative)

1 - è uno spazio vettoriale per le operazioni indotte da V

ovvero se, come gruppi abelliani, si ha:

$$\cdot W \leq V$$

$$\cdot \forall w \in W, \forall \lambda \in K, \lambda \cdot w \in W$$

2 - $\cdot \forall w, w' \in W$, si ha $w + w' \in W$ (stabilità rispetto alla somma)

$$\cdot \forall w \in W, \forall \lambda \in K, \lambda \cdot w \in W$$

3 - Se è stabile per combinazioni lineari nel modo seguente:

$$\cdot \forall w, w' \in W, \forall \lambda, \lambda' \in K, \text{ si ha}$$

$$\lambda w + \lambda' w' \in W$$

4 - $\forall w_1, \dots, w_n \in V$ e $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n \in W$

5 - $\forall w, w' \in W$ e $\forall \lambda \in K$, $w + \lambda w' \in W$

def COMBINAZIONE LINEARE

Dati $v_1, \dots, v_n \in V$, e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ allora

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ è una combinazione lineare di v_1, \dots, v_n (a coeff. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$)

• Si dice "Span" o "Sottospazio Generato" da v_1, \dots, v_n
il sottospazio vettoriale ottenuto dall'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di un insieme di vettori.

• si scrive "Span_K({v₁, ..., v_n})"

o "Vett_K({v₁, ..., v_n})"

esempi:

① Mostrare che $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ non è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 .

prendiamo $w = (1, 0, 0)$, $w' = (0, 1, 0)$, $\lambda = 1$

$$w + \lambda w' = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0) \quad \text{e} \quad 1^2 + 1^2 + 0^2 = 1 + 1 + 0 = 2 \neq 1 \Rightarrow w + w' \notin S$$

metodo alternativo: ogni sottosp. vettoriale di \mathbb{R}^3 deve contenere $0 = (0, 0, 0)$. Qui $(0, 0, 0) \notin S$

el. neutro
somma (op. spaz. vettoriale)

def SPAN / SOTTOSPAZIO GENERATO

Prendiamo V sp. vett. su K . Sono $v_1, \dots, v_n \in V$.

Poniamo $W = \text{Span}_K(\{v_1, \dots, v_n\}) = \{\text{comb. lineari di } v_1, \dots, v_n\} = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\}$

o Vett_K

è un sottospazio vettoriale.

Per vederlo, consideriamo $w, w' \in W$, $\lambda \in K$, e calcoliamo $w + \lambda w'$

$$\text{Mo} w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, w' = \sum_{i=1}^n \lambda'_i v_i, \text{ quindi } w + \lambda w' = \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i v_i}_{w} + \lambda \sum_{i=1}^n \lambda'_i v_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \lambda \lambda'_i) v_i \Rightarrow w + \lambda w' \in W$$

1° dist. 2° quindi si può scrivere quindi Span_K è un sottosp. vett. per ⑤
come λv

OSSERVIAMO che $\text{Span}(\{v_1, \dots, v_n\}) = \bigcap_{\substack{W \subset V \\ \text{sottosp. vett.} \\ W \supset \{v_1, \dots, v_n\}}} W$ intersez. dei sott. vett.
che contengono $\{v_1, \dots, v_n\}$

analogo a sottogruppi generati

quindi è il più piccolo sottospazio vett. di W che contiene $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Si chiama anche il sottospazio vettoriale generato da $\{v_1, \dots, v_n\}$. Talvolta si scrive $\langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$

Ma non spesso
per non confondersi
con i sottogruppi

Oss: L'intersezione tra sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale

dim:

dati W_1, W_2 sott. vett., $W_1 \cap W_2 \subset V$ (perché $W_1, W_2 \subset V$ per def. sottosp.vett., e l'intersezione è un sottosp.vett.)

Sia $v \in W_1 \cap W_2$, e $\lambda \in K$.

Allora, $\lambda v \in W_i$ perché W_i è sottosp.vett. di V (con $i=1, 2$)

Quindi, $\lambda v \in W_1 \cap W_2$

Oss: Se W è sottosp.vett. di V , allora $\emptyset \in W$.

def VETTORI LINEARMENTE INDEPENDENTI

o l.i. o lin. ind.

Dato V sp.vett./K, v_1, \dots, v_n sono linearmente indipendenti se,

dati $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ t.c. $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \emptyset$

Allora $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_K$

$$\sum_i \lambda_i v_i \quad (\sum_i \lambda_i v_i \text{ con } \lambda_i = 0 \text{ per } v_i)$$

Ovvero, se l'unica combinazione lineare di v_1, \dots, v_n che è nulla è quella banale (ovvero quella con tutti $\lambda_i = 0$)

Al contrario, si dicono linearmente dipendenti se esiste almeno una combinazione lineare nulla non banale.

Come vederlo? esempio.

• in \mathbb{R}^2 , $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono l.i.

quindi, due vett. sono l.d. se uno si può scrivere in funzione dell'altro (come multiplo scalare)

$$\text{es } v_1 = 2v_2$$

$$\Leftrightarrow v_1 - 2v_2 = \emptyset$$

Consideriamo una comb. lin. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \emptyset$

$$\text{ovvero } \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \emptyset \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \emptyset \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \emptyset$$

molt. scalare

somma
(vett.)

costruiamo il sistema lineare che ha $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ come soluzioni (si può direttamente mettere i vettori a sistema)

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2(\lambda_1 + 2\lambda_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \iff \lambda_1 = -2\lambda_2 \quad \text{quindi: } \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

si
sottrae termine
a termine

Oss: se ho m vettori $v_1, \dots, v_m \in K^n$ e se $m > n$,
allora v_1, \dots, v_m sono sempre l. d.

es. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono $3 > 2$ vettori in \mathbb{R}^2 , e sono quindi l. d.

Oss: Dato $f: V \xrightarrow{\cong} V'$, v_1, \dots, v_n sono l.i. se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono l.i.
per esempio, $M_{m,n}(K) \cong K^{m \times n}$ può essere utile

esercizi

① notare che $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

② Consideriamo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
uno multiplo dell'altro

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ l.i.}$$

$$\text{si vede che } 2v_1 - v_2 + 0v_3 = \emptyset$$

def MATRICE TRIANGOLARE = M_n - un pedice solo indica righe = # colonne

una matrice $M \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

è detta triangolare superiore se si può scrivere come

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \dots & M_{1n-1} & M_{1n} \\ 0 & M_{22} & M_{23} & \dots & M_{2n-1} & M_{2n} \\ 0 & 0 & M_{33} & \dots & M_{3n-1} & M_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{4n-1} & M_{4n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{n-1,n-1} & M_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & M_{nn} \end{pmatrix}$$

(invece, una triangolare inferiore sarebbe così: $\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ m & m & 0 & 0 \\ m & m & m & 0 \\ m & m & m & m \end{pmatrix}$)

(con gli zeri in alto)

diagonale della

matrice (m_{ij}) con $i=j$

esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- le colonne e le righe di M , viste come vettori di \mathbb{R}^n , sono l.i. $\iff m_{11}, m_{22}, \dots, m_{nn}$ (coeff. diag) sono tutti non nulli

esempio:

le colonne della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono l.d. $\iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono l.d.

(gli zeri non influenzano)

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ l.d. perché

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 \end{cases} \iff \lambda_2 = -2\lambda_3 \quad \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \end{cases} \quad \text{se pongo } \lambda_3 = 1 \text{ allora} \\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, -2, 1) \neq (0, 0, 0)$$

e si ottiene la comb. nulla, ma non banale

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esercizi (x casi)

$$\textcircled{1} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

in \mathbb{R}^3 , $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dimostrare che e_1, \dots, e_n sono l.i. e che, considerando inoltre $e_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, allora e_1, \dots, e_n, e_{n+1} sono l.d.
e caratterizzare tutte le comb. lin. nulle

\textcircled{2} \textcircled{3} $V = M_n(\mathbb{K})$, mostrare che le matrici

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad 1 \leq i, j \leq n \quad \text{tutti zeroi} \quad \text{Matr. } n \times n$$

sono l.i.

$$\textcircled{4} \quad \text{Mostrare che } (e_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \text{ e } f: \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ sono l.d.} \quad \text{tutti uno}$$

DIVERSI MODI DI RAPPRESENTARE UNA MATRICE

$A \in M_{m,n}(K)$

$$\cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\cdot A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \text{ con } A_i: i\text{-esima riga di } A$$

$$\cdot A = (A^1 \dots A^n) \text{ con } A^j: j\text{-esima colonna di } A$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \quad A_1 = (\text{dot}) \quad A_2 = (\text{def}), \quad A^1 = \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

PRODOTTO TRA MATRICI

prodotto scalare di una matrice linea e una matrice colonna

$$U = (v_1, \dots, v_n) \in M_{1,n}(K), \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$$

$$\langle U, V \rangle = \sum_{i=1}^n U_i V_i = U_1 V_1 + \dots + U_n V_n$$

con questo prodotto scalare definiamo un'operazione: $M_{m,K}(K) \times \underbrace{M_{K,n}(K)}_{= \rightarrow} \rightarrow M_{m,n}(K)$

$$\text{dove } (A, B) \longmapsto A \cdot B = \langle A_i, B^j \rangle_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\overbrace{M_{1,K}(K)}^{A_1} \overbrace{\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}}^B \underbrace{(B^1 \dots B^n)}_{M_{K,1}(K)} \quad \text{è un'operazione associativa e distributiva}$$

esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2,3}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3,2}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \text{linea 1 A, colonna 1 B} & \text{linea 1 A, colonna 2 B} \\ \text{linea 2 A, col. 1 B} & \text{linea 2 A, col. 2 B} \end{pmatrix}$$

$$\text{ovvero } B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 & 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

esercizio

• calcolare $B \cdot A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 & 2 \cdot 3 + 5 \cdot 6 \\ 3 \cdot 1 + 6 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 & 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 23 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{pmatrix}$$

MATRICE IDENTITÀ $1_n, \text{Id}_n \in M_n(K)$ in $M_n(K)$, la matrice

$$1_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

tutti zeri e
diagonale di uno

svolge il ruolo di elemento neutro per il prodotto righe-colonne tra matrici

es. in M_2 , $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

o in M_3 , $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

def MATRICI INVERTIBILIUna matrice $A \in M_n(K)$ è invertibile se $\exists A' \in M_n$ t.c. $A \cdot A' = A' \cdot A = 1_n$

$$GL_n(K) := \{A \in M_n(K) : A \text{ invertibile}\}$$

GRUPPO LINEARE GENERALE

da Wikipedia: è un gruppo moltiplicativo
(prodotto matriciale)**MATRICI 2×2** Notiamo che $M_2(K)$, dotato delle operazioni di $+$, \cdot , con el. neutri: $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

è un anello unitario (non commutativo)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

def determinante di una matrice 2×2

data $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$, $\det(A) := ad - bc \in K$

matrici 2×2 invertibili (Lemma)

si scrive anche:

 $A \in M_2(K)$ è invertibile per la moltiplicazione linee per colonne

$$\iff \det(A) \neq 0 \quad (\iff \det(A) \in K^\times)$$

$$A \in GL_2(K), \quad A \in (M_2(K))^\times$$

di inverso *

$$(A \text{ invertibile} \iff \exists A' \in M_2 \text{ t.c. } A \cdot A' = A' \cdot A = 1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

dim:

$$\textcircled{1} \quad \det(A) \neq 0 \implies A \in GL_2(K)$$

Poniamo $A' = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in M_2$
 $\neq 0$ per ip.

$$\text{Calcoliamo } AA' = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Id}_2$$

$$\text{e } A'A = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Id}_2$$

prod.
scolare colonna.

Sappiamo quindi che $A' = A^{-1}$

Lemmo: dati $A, B \in M_2(K)$ non lo dimostriamo
allora $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

② $A \in GL_2(K) \implies \det(A) \neq 0$

$$A \in M_2(K)^{\times} \iff \exists A' \in M_2(K)^{\times} \text{ t.c. } AA' = A'A = I_2$$

Calcoliamo i determinanti: $\det(AA') = \det(A'A) = 1 \neq 0$
 $\det(A) \det(A')$ || lemma || $\det(A') \det(A)$
 $\implies \det(A), \det(A') \neq 0$ (K non ha divisori di 0) ■

notiamo che $\det(A') = \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
in particolare, $\det: M_2(K)^{\times} \longrightarrow K^{\times}$ è un omomorfismo di gruppi

note: $GL_2(\mathbb{R})$ non è abeliano: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ e $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

SISTEMI LINEARI

Dato un campo K , un sistema lineare di m equazioni e n indeterminati a coeff. in K

è un sistema di equazioni del tipo:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = b_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

Coeffienti $\in K$

Termini noti / costanti $\in K$

Risolvere un sistema significa descrivere l'insieme di tutti i vettori

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \text{ tali che tutte le equazioni sono soddisfatte simultaneamente}$$

• Un sistema lineare $(*)$ si dice compatibile se il sottoinsieme $\text{Sol}(*)$ di K^n delle sue soluzioni è non vuoto.

Altrimenti, si dice incompatibile.

es. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$ è incompatibile $\begin{cases} x_1 = 0 \end{cases}$ è compatibile, con $\text{Sol} = \{(0)\} \subset K^1$
 $(1 \neq 0 \text{ in ogni campo})$

Per quanto riguarda i sistemi lineari, i seguenti problemi sono importanti:

- ① Decidere se un sistema è compatibile
- ② Descrivere tutte le soluzioni nel caso compatibile
- ③ Nel caso compatibile, descrivere l'insieme delle soluzioni attraverso un insieme di "parametri minimi"

ESPRESSIONE MATRICIALE DI UN SISTEMA LINEARE SU K

Il sistema $(*)$ si può riscrivere alternativamente nel modo seguente

matrice dei coeff.
 $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K) , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K) , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} \langle A_1, X \rangle \\ \langle A_2, X \rangle \\ \vdots \\ \langle A_m, X \rangle \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K)$$

prodotto matriciale linea · colonna
 da ogni linea di A (coeff. $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}$)
 per l'unica colonna di X

quindi il sistema lineare $(*)$ può essere
 riformulato in modo compatto attraverso
 l'equazione in matrici:

$$A \cdot X = b$$

esempio

dati $A \in GL_m(K)$, $b \in M_{m,1}(K)$,

il sistema $(*) A\mathbf{x} = b$ è sempre compatibile e ammette un'unica soluzione \mathbf{x} .

Infatti, sia A^{-1} l'inverso di A . Allora, $\mathbf{x} \in M_{m,1}(K)$ è soluzione di $(*) \iff A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}b \iff \mathbf{x} = b$

Quindi, $\text{Sol}(\star) = \{(b)\}$.

MATRICE COMPLETA ASSOCIATA A UN SISTEMA LINEARE

Consideriamo un sistema lineare:

$$(*) = A\mathbf{x} = b$$

giustapposizione di b ad A

tutti i suoi dati sono contenuti nella matrice: $(A|b) \in M_{m,n+1}(K)$

matrice completa del sistema

• se $b = \emptyset$ il sistema è omogeneo

altrimenti, è non omogeneo

OSS: $A\mathbf{x} = b \iff x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n = b$

esemp.

$\iff b$ è combinazione lineare di A^1, \dots, A^n

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad (K = \mathbb{R})$$

$\iff b \in \text{Span}_K(A^1, \dots, A^n)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{quindi } x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

dire che $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ è soluzione di $(*)$ significa

che $x_1 A^1 + x_2 A^2 + x_3 A^3 + x_4 A^4 = b$

ovvero $(*)$ è compatibile $\iff b \in \text{Span}_{\mathbb{R}}(A^1, A^2, A^3, A^4)$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 5 \end{cases} \iff x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

questo sistema è compatibile $\iff \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$\text{il che è vero, infatti } \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 5 \end{cases} \iff x_1 = 5 - x_3$$

$$\begin{cases} 10 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 = 5 - x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 9 - x_3 \\ x_1 = 5 - x_3 \end{cases}$$

ammette soluzioni, e.s. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

STRUTTURA DELL'INSIEME DI SOLUZIONI DI UN SISTEMA LINEARE

Consideriamo il sistema $Ax = b$ (*) con $A \in M_{m,n}(K)$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$, $b \in M_{m,1}(K)$

NOTAZIONE

Se (*) è incompatibile, poniamo $\text{Sol}(A|b) = \emptyset$

Se (*) è compatibile, poniamo $\text{Sol}(A|b) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \text{ t.c. } x \text{ è sol. di } (*) \right\}$

Proposizione

$\text{Sol}(A|b)$ è un sottospazio vettoriale di $K^n \iff b = 0$

(sappiamo che sott.vett. \implies sp.vett. \implies gruppo, e non può essere un gruppo se non ha l'elemento neutro $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$)

e non può avere l'el. neutro $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ se $b \neq 0$, perché $\alpha_1 0 + \alpha_2 0 + \dots + \alpha_n 0$ non può essere $\neq 0$

(se 0 è tra le sol, $b = 0$ per forza)

dim

- Se $b \neq 0$, visto che $\text{Sol}(A|b) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ t.c. } A^1 x_1 + A^2 x_2 + \dots + A^n x_n = b \right\} \not\ni \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, e $\text{Sol}(A|b)$ non è s.v. di K^n .
- Supponiamo quindi che $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

Mostriamo che $\text{Sol}(A|0)$ è un s.v. di K^n .

Prendiamo $X, X' \in \text{Sol}(A|0)$ e $\alpha, \alpha' \in K$. Devo mostrare che $\alpha X + \alpha' X' \in \text{Sol}(A|0)$

p.80
def ③ sottosp. vett.
stabilità per comb. lineari

$$X \in \text{Sol}(A|0) \iff AX = 0 \quad \& \quad X' \in \text{Sol}(A|0) \iff AX' = 0$$

$$A(\alpha X + \alpha' X') = \alpha A X + \alpha' A X' = \alpha \cdot 0 + \alpha' \cdot 0 = 0 \implies \alpha X + \alpha' X' \in \text{Sol}(A|0)$$

prodotto scalare
è commutativo

Teorema

Supponiamo di avere un sistema

$$(*) \quad AX = b, \quad A \in M_{m,n}(K), \quad b \in M_{m,1}(K), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$$

Supponiamo inoltre che $(*)$ sia compatibile ($\text{Sol}(A|b) \neq \emptyset$) $\hookrightarrow K^m$
 (cioè è equivalente a $b \in \text{Span}_K(A^1, \dots, A^n) \subset M_{m,1}(K)$)

Sia $x_0 \in \text{Sol}(A|b)$. Allora,

$$\text{Sol}(A|b) = x_0 + \text{Sol}(A|\emptyset)$$

dim

Sia $X \in \text{Sol}(A|b)$. Allora, $X = X - x_0 + x_0$ ovvero $X = \underbrace{x_0}_{\substack{\text{così ho} \\ x_0 + \text{Sol}(A|\emptyset)}} + \underbrace{X - x_0}_{\substack{\text{struttura simile al CRT}}}$

① Per mostrare che $\text{Sol}(A|b) \subset x_0 + \text{Sol}(A|\emptyset)$, basta verificare che $X - x_0 \in \text{Sol}(A|\emptyset)$, ovvero che $A(X - x_0) = \emptyset$

Noi sappiamo che $AX = b$ e che $AX_0 = b \Rightarrow \underbrace{AX - AX_0}_{\substack{b-b \\ A(X - x_0)}} = \emptyset \Rightarrow X - x_0 \in \text{Sol}(A|\emptyset)$ mostrato \subset

② Mostriamo adesso che $\forall y \in \text{Sol}(A|\emptyset)$, $x_0 + y \in \text{Sol}(A|b)$

Dico calcolare $A(x_0 + y) = \underbrace{Ax_0}_{\substack{\text{perché} \\ x_0 \in \text{Sol}(A|b)}} + \underbrace{Ay}_{\substack{\text{perché} \\ y \in \text{Sol}(A|\emptyset)}} = b + \emptyset = b \Rightarrow x_0 + \text{Sol}(A|\emptyset) \subset \text{Sol}(A|b)$ mostrato \subset

Quindi, $\text{Sol}(A|b) = x_0 + \text{Sol}(A|\emptyset)$ ■

esempio

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 4 \\ x_3 = 5 \end{array} \right. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{noto che } x_3 = 5 - \text{sostituisco "a cascata"} \\ x_3 = 5, \quad x_2 = 9, \quad x_1 = -32 \end{array}$$

$$\text{Sol}(*) = \left\{ \begin{pmatrix} -32 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

equivalentemente, grazie al teorema precedente, posso scrivere

$$\text{Sol}(A|b) = x_0 + \text{Sol}(A|\emptyset) = \begin{pmatrix} -32 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset M_{3,1}(\mathbb{R})$$

ALGORITMO DI GAUSS

Introduciamo una relazione sulle matrici complete di $M_{m,n+1}(K)$
 ↴
 n indet. e b giù l'opposto

$M, M' \in M_{m,n+1}(K) \quad M \sim M' \iff \text{Sol}(M) = \text{Sol}(M')$
 ↴
 abbastanza ovvio (l'ugualanza è di equiv)
 è una relazione di equivalenza

$$AX = b \rightsquigarrow M(A|b)$$

Ideas di Gauss: usare un insieme "semplice" di trasformazioni su $M_{m,n+1}(K)$ che lasciano invarianti le classi \sim di equivalenza
 (ogni classe ha un rapp. unico matrice "a gradini", le cui soluzioni si vedono subito)

operazioni elementari:

- ① PERMUTARE LE RIGHE ↴ non nullo
- ② MOLTIPLICARE UN'EQ DEL SISTEMA PER UNO SCALARE $\lambda \in K^*$ ↴ una riga qualsiasi
- ③ SOSTITUIRE UNA RIGA CON SE STESSA + UN MULTIPLO SCALARE DI UN'ALTRA RIGA ↴ somma vett.
 ↴ es. 3a riga $\leftarrow 2 \cdot 2a$ riga)

Gauss ha mostrato che, operando con un numero finito

di operazioni del tipo ①, ②, ③, se ne ottiene un'altra, M' , con $M \sim M'$

più sinteticamente

Date due matrici $M, M' \in M_{m,n+1}(K)$, scriviamo

↪ simbolo scelto da Perron (↪asymp su LateX)

$M \asymp M' \iff M' \text{ si può ottenere da } M \text{ attraverso un numero finito di operazioni } ①, ②, ③$
 ↴ è una rel. di equiv.

Teorema

$M \asymp M' \implies M \sim M'$ (non vale il contrario - è possibile che due matrici unrelated abbiano le stesse soluzioni)

esempio:

I sistemi lineari associati alle seguenti matrici ammettono lo stesso insieme di soluzioni:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_3 \xrightarrow{2} \frac{1}{2}R_3 \\ R_2 \xrightarrow{3} R_2 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_3 \xrightarrow{3} R_3 - R_1 \\ -1 \cdot R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{questa riga è una tautologia } (0=0) \\ \text{ma non la tolgo} \\ \text{perché siamo in } M_{3,4}(\mathbb{R})}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\substack{R_1 \xrightarrow{3} R_1 - R_2}} \end{array}$$

↪ gradini ridotto (definito dopo)

e per il teorema, $\text{Sol}\left(\begin{array}{l} x+2z=1 \\ y-z=1 \end{array}\right) = \text{Sol}(M) = \mathcal{E}$ ↴ soluzione sistema om. associata a $\text{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
 (sottosp. vett. generato dalle sol. dell'omogeneo associato)

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ t.c. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

↪ riscritto il sistema

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ y-z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-2z \\ y=1+z \end{cases}$$

↪ qui (al posto di $z = \dots$) c'è $z = 0$, quindi la sostituiamo con un'altra tautologia ($z=z$) $\left(\begin{array}{c} \vdots \\ z \\ \vdots \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{array} \right) + z \left(\begin{array}{c} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{array} \right)$

def MATRICE A GRADINI

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & * & * \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

pivot

caso "estremi"

Non devono per forza esserci tutti zeri in fondo

triang. sup. con 1 sulle diag.

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & * \end{array} \right)$$

matrice di zeri:

$$\left(\begin{array}{c} \text{circle with diagonal line} \end{array} \right)$$

- tra una riga e l'altra, l'uno deve essere almeno sulla colonna successiva al precedente

(cioè, $\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$ No, $\begin{matrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ Sì, $\begin{matrix} 0 & 1 & ** \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ Sì)

Più formalmente, A è a gradini se:

- ① $A_{ij} = 0 \Rightarrow A_{jh} = 0 \quad \forall j > i$
- ② Se $A_{ii} \neq 0$, allora il primo coeff. non nullo (pivot) è un 1
- ③ Se il pivot della riga i appare nella colonna j , allora il pivot della riga $i+1$ appare nella colonna $h > j$

Teorema ALGORITMO DI GAUSS

$\forall M \in M_{m,n+1}(K), \exists \Gamma \in M_{m,n+1}(K)$ t.c. $M \xrightarrow{\sim} \Gamma$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow -R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{a gradini}}$$

def MATRICE A GRADINI RIDOTTA

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \dots & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & & & & & & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \end{array} \right)$$

è una matrice a gradini t.c.

- ④ dato un pivot di modo che

$$a_{ij} = 1, \text{ allora } \forall k \in \{1, \dots, i-1\}, a_{kj} = 0$$

(sopra ogni pivot ci sono solo zeri)

ALGORITMO "RINFORZATO"

$\forall M \in M_{m,n+1}(K), \exists ! \Gamma \in M_{m,n+1}(K)$ a gradini ridotta t.c. $M \xrightarrow{\sim} \Gamma$

continuiamo l'esempio di prima

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + 2R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{a gradini ridotta}}$$

$$\text{Sol}(M) = \text{Sol} \left(\begin{pmatrix} x & -z & 0 \\ y & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \\ t & -2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ t.c. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \text{Span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

domanda: $\text{Sol}(M) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \text{Span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$? Si, perché x_0 soluzione particolare non è unico
 è sol part.: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = X - x_0 \in \text{Sol}(A|b)$

esercizio

$$\in M_{3,5+1} \quad \cup \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \cup \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array} \right) \quad \cup \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array} \right) \quad \cup \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array} \right) \rightarrow \text{gradini ridotti}$$

$R_3 \mapsto \frac{1}{2}R_3$
Switch tra $R_2 \leftrightarrow R_3$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array} \right)$$

Vediamo da qui che quelle tre righe "rappresentano" x_3, x_4, x_5 quindi i valori

(in un sistema avremmo)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = \frac{1}{2} \\ x_4 = 0 \\ x_5 = \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Sol}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \text{Span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

perché? invece, $\text{Span}_{\mathbb{R}}$ viene dall'omogeneo associato, in cui x_3, x_4, x_5 sono invece "vincolati" a 0

- le uniche "libere" (tutte le cui combinazioni formano le soluzioni dell'omogeneo) sono x_1, x_2 per questo, $\text{Span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ qui sono "1"

4/12

esercizio

② dire se il seguente sistema è compatibile e trovare tutte le soluzioni ($K = \mathbb{R}$)

Soluzioni: matrice colonna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ t.c. le equazioni in (*) siano simultaneamente soddisfatte

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y - 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ x + y + z = -2 \end{array} \right.$$

① trascriviamo in matrici complete

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

② lo trasformiamo in forma a gradini (+ ridotta) con l'algoritmo di Gauss

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad \cup \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad \cup \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad \cup \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$R_1 \mapsto R_1 - 2R_3$ $R_1 \mapsto R_1 - R_2$ $R_1 \mapsto -\frac{1}{3}R_1$

posso anche fare una m. a gradini: "al contrario" e poi permutare le righe

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$R_1 \leftrightarrow R_3$

è a gradini, ora va ridotta.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \text{Sol}(\ast) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$R_2 \mapsto R_2 + R_3$$

$$R_1 \mapsto R_1 - R_3$$

Si possono fare due passaggi insieme, ma occhio a non operare sulle stesse righe

perché le sol. dell'omogeneo sono 0)

③ interpretiamo z come un parametro invece che un'indeterminata
(decido io il valore)

$$(\ast\ast) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y - 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ x + y + z = -2 \end{array} \right.$$

determinare l'insieme E dei valori del parametro $z \in \mathbb{R}$ t.c. $(\ast\ast)$ sia compatibile

• z è un parametro, quindi il sistema è da considerarsi a indeterminate x, y ovvero a soluzioni in \mathbb{R}^2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1+2z \\ 2+z \\ -2-z \end{pmatrix}$$

Gauss

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1+2z & \\ 0 & 1 & 2+z & \\ 1 & 1 & -2-z & \end{array} \right) \xrightarrow{\text{R}_1 \leftrightarrow R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5+4z & \\ 0 & 1 & 2+z & \\ 1 & 1 & -2-z & \end{array} \right) \xrightarrow{\text{R}_1 \leftrightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3+3z & \\ 0 & 1 & 2+z & \\ 1 & 1 & -2-z & \end{array} \right) \xrightarrow{\text{R}_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2-z & \\ 0 & 1 & 2+z & \\ 0 & 0 & 3+3z & \end{array} \right)$$

Il sistema associato è $\begin{cases} x+y = -2-z \\ y = 2+z \\ 0 = 3+3z \end{cases}$ che è compatibile $\iff z = -1$

notiamo che $z = -1$
era anche nella sol. precedente $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Quindi $\mathcal{E} = \{-1\}$. Il sistema diventa quindi: $\begin{cases} x+y = -1 \\ y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$

in forma triangolare superiore,
di soluzione $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ anche questo combacia

Note: praticamente ho portato di lì
una po' inutile

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

• dim. del sottospazio di K^m generato dalle colonne di A
 K^n generato dalle righe di A

def RANGO DI UNA MATRICE

Dato $A \in M_{m,n}(K)$, il rango è il numero di pivot di una sua forma a gradini (ridotta o non ridotta)

(ovvero il numero di righe non nulle.)

Notazione: $\text{rg}(A) \in \mathbb{N}$: $A \in M_{m,n}(K)$ • $\text{rg}(A) = 0 \iff A = (\emptyset)$
è impossibile che una matrice non nulla lo diventi con le operazioni date.

OSS: per definizione, se la matrice A' è ottenuta a partire dalla matrice A applicando operazioni elementari, allora $\text{rg}(A') = \text{rg}(A)$

ridurre non cambia il nr. di pivot

(non l'ha detto)

è il massimo numero di righe (o colonne) l.i. della matrice (infatti, se riduco la matrice, le righe l.d. diventeranno nulle.)

$$\text{es. } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ 2 & 4 & 6 & \\ 1 & 1 & 1 & \end{array} \right) \xrightarrow{\text{riduzione}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \end{array} \right) = \text{dim del sottospazio di } K^m \text{ generato dalle colonne}$$

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \quad \text{rg}(A) = \text{rg} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{array} \right) = \text{rg} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array} \right) = 3$$

3 pivot
(non mi serve trasformarli in 1 per vederlo)

OSSERVAZIONI

① Una matrice $A \in M_{m,n}(K)$ può avere al massimo rango $\text{rg}(A) = \min(m, n)$

e esempi "limite"

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & & & * \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \\ \hline 0 & & & \end{array} \right)$$

se c'è un pivot per colonna,
 $\text{rg}(A) = n$ (colonne), che $\leq m$ (righe)

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & & & * \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \\ \hline 0 & & & \end{array} \right)$$

se c'è un pivot per riga,
 $\text{rg}(A) = m$ e $m < n$

(se la matrice è quadrata con diagonale di pivot, $m = n$
quindi $\min(m, n) = m = n$
chiaramente)

② $\text{rg}(A) \leq \text{rg}(A|b)$ qualunque sia data una colonna $b \in M_{m,1}(K)$
("aumentando" la matrice, il range non può diminuire)

se ne deduce che $\text{rg}(A) \leq \text{rg}(A|b)$

OK.

- Rouché-Capelli theorem in English speaking countries, Italy and Brazil;
- Kronecker-Capelli theorem in Austria, Poland, Ukraine, Croatia, Romania, Serbia and Russia;
- Rouché-Foncqd theorem in France;
- Rouché-Frobenius theorem in Spain and many countries in Latin America;
- Frobenius theorem in the Czech Republic and in Slovakia.

Teorema ROUCHE - CAPELLI

vedi anche p.98

Si consideri il sistema $(*) AX = b$ con $A \in M_{m,n}(K)$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$

① Il sistema $(*)$ è compatibile $\iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$

colonne (= indeterminate)

② Se $(*)$ è compatibile, poniamo $s := n - \text{rg}(A) \geq 0$ "grado di libertà" del sistema

Esistono allora vettori $v_1, \dots, v_s \in \text{Sol}(A|0)$ linearmente indipendenti t.c. $\text{Sol}(A|0) = \text{Span}_K(v_1, \dots, v_s)$

Quindi, dato $v_0 \in \text{Sol}(A|b)$, si ha $\text{Sol}(A|b) = v_0 + \sum_{i=1}^s K v_i$

x parentesi mia
x copiare meglio:

esempio grado 1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & b \\ 0 & 0 & -1 & | & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & | & \cdot \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & b \\ 0 & 1 & 3 & 3 & | & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 5 & | & \cdot \end{pmatrix}$ (sono le colonne)

ho 3 incognite ma 1 è "libera"
(2 sono vincolate)

non pivot

ho 4 incognite ma 1 è "libera"

grado 3: $\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * & | & b \\ 0 & 1 & * & * & * & | & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & * & * & | & \cdot \end{pmatrix}$

infatti (esempi di prima)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad s = n - \text{rg}(A)$$

$$s = 3 - 3$$

"0"

(visivamente vedo
subito 0
colonne "libere")

quindi $\text{Sol}(A|0) = \text{Span}_K \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

la sol è unica:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Sol}(A|0) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

"0"

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2-z \\ 0 & 1 & 2+z \\ 0 & 0 & 3+3z \end{pmatrix}$$

se qui c'è 0 va bene perché non ci sono altri pivot

e $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$

(quindi se $z = -1$, è compatibile)

se invece $z \neq -1$,

$\text{rg}(A) = 2 < 3 = \text{rg}(A|b)$ e il sistema è incompatibile

esercizio

studiare le soluzioni del seguente sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 6 \\ x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 5 \\ x_2 + x_5 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1 \leftrightarrow R_3 \\ R_4 \leftrightarrow R_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_3 \\ R_3 \leftarrow R_4}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_4 \leftarrow R_4 - 2R_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

$R_2 = R_3$ di prima

$R_3 = R_4$ "

$R_4 = R_2$ "

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \leftarrow R_4}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

4 pivot

qui si vede che $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$

quindi, per Rouché-Capelli, il sistema d'origine è compatibile

dopo qualche calcolo →

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right) \text{ è gradino ridotto}$$

il sistema associato è quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 5x_5 = -1 \\ x_2 + x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_5 = -4 \\ x_4 + 2x_5 = -2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -5x_5 - 1 \\ x_2 = -x_5 \\ x_3 = -2x_5 - 4 \\ x_4 = -2x_5 - 2 \end{array} \right.$$

da cui

$$\text{Sol}(A|b) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Soluzioni dell'omogeneo associato

Vett p.80
 Abbiamo visto che $\text{Span}_K(V_1, \dots, V_k) = \{ \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_k V_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K \}$
 Più generalmente, se $\emptyset \neq S \subset V$ qualsiasi, si pone $\text{Span}_K(S) = \{ \text{"combinazioni lineari finite di vettori in } S\}$, ovvero $\text{Span}_K(S) = \bigcap_{\substack{W \text{ sottosp. di } V \\ S \subset W}} W$

- **FATTO:** $\text{Span}_K(S)$ è un sottospazio vettoriale di V .

es. $W \subset V$ sottospazio. Allora, $W = \text{Span}_K(W)$

def SISTEMA DI GENERATORI, SOTTOSPazio FINITAMENTE GENERATO

- Se $W = \text{Span}_K(S)$, allora S è un sistema di generatori per W .
- Se $\exists S$ finito con $W = \text{Span}_K(S)$, allora W è finitamente generato (f.g.)
 può essere generato ANCHE da un insieme infinito (non ci interessa)
 - quello che conta è che possa essere generato da uno finito

es. $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$, $S = \{v\}$

$$W = \text{Span}_{\mathbb{R}}(S) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(v) \quad W \text{ è f.g.}$$

def sistema di generatori LIBERO

$\emptyset \neq S \subset V$ è libero o linearmente indipendente se, comunque scelto un sottoinsieme finito $F = \{V_1, \dots, V_n\} \subset S$, allora V_1, \dots, V_n sono l.i. (ogni combinazione lineare finita di vettori di S nulla è banale)

def BASE

Dato W sottospazio vett., $S \subset W$ è una base di W se

- ① S è un sistema di generatori di W , ovvero $W = \text{Span}_K(S)$
- ② S è libero

"su K "

Proposizione 1: Per ogni spazio vettoriale V/K , esiste una base $B \subset V$.

Inoltre, date due basi (B, B') di V , allora esiste una funzione biiettiva $f: B \rightarrow B'$

quindi: in particolare, se esiste una base finita di cardinalità n , allora ogni base è finita, di cardinalità n .

def DIMENSIONE di uno sp.vett.

Dato uno spazio vettoriale V/K f.g., la dimensione $\dim_K(V)$ è l'intero $n \in \mathbb{N}$ tale che ogni base (B) di V ha cardinalità n .

N.B. $\dim_K(K) = 0 \iff V \text{ è banale} - V = \{0\}$

Proposizione 2: se W è un sottospazio vettoriale di V f.g. di dimensione n ,
allora anche W è f.g. e, data l la sua dimensione $l := \dim_K(W)$, si ha $l \leq n$

un sottospazio vett. ha sempre
dim <= dim spazio (che è logico,
perché \subseteq)

Applicazione alla notazione di rango di una matrice

Lemme Dato una matrice $A \in M_{m,n}(K)$, $\text{rg}(A) = \dim_K(\underbrace{\text{Span}_K(A_1, \dots, A_m)}_{\# \text{pivot}})$

sottosp. vett. di $M_{1,n}(K)$

(ogni riga è una matrice riga con n colonne)

$\text{Span}_K(A_1, \dots, A_m)$ è l'insieme delle comb. lin. delle righe di A ,

una base di $\text{Span}_K(\dots)$ è un insieme di vettori l.i. che generano $\text{Span}_K(\dots)$,

quindi la dim della span (cardinalità delle basi) è il numero massimo di righe l.i. \rightarrow ovvero il rango (se trasformo una matrice in forma a gradini ridotti, le righe l.i. diventeranno nulle)

dim

Sia A' la matrice a gradini ridotti tale che $A \leq A'$. Allora, ogni riga di A' è combinazione lineare delle righe di A .

Quindi,

$$\text{Span}_K(A'_1, \dots, A'_m) \subset \text{Span}_K(A_1, \dots, A_m)$$

ogni el. appartiene

per la prop. 2, $\dim_K(\text{Span}_K(A'_1, \dots, A'_m)) \leq \dim_K(\text{Span}_K(A_1, \dots, A_m))$

Ma ogni trasformazione elementare di Gauss è invertibile (\cup è una rel. di equivalenze)

Quindi, $\dim_K(\text{Span}_K(A'_1, \dots, A'_m)) = \dim_K(\text{Span}_K(A_1, \dots, A_m))$.

Si vede che $\dim_K(\text{Span}_K(A'_1, \dots, A'_m)) = \text{rg}(A')$ perché le righe contenenti i pivot sono l.i. (lo sp. vett. le ha come base) ■

Applicazioni alle soluzioni di un sistema lineare (ROUCHÉ-CAPPELLI)

Dato un sistema lineare (*) $AX = b$, $M := (A|b)$, $A \in M_{m,n}(K)$,

il teorema di Rouché-Capelli p.95 Si riformula.

① (*) è compatibile $\iff \dim_K(M^1, \dots, M^{n+1}) = \dim_K(A^1, \dots, A^n)$ ($\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$)

② $\dim_K(\underbrace{\text{Sol}(A|b)}_{\substack{\text{spazio vett.} \\ \text{delle sol. del} \\ \text{sistema omogeneo}}}) = \underbrace{n - \text{rg}(A)}_S$ (da teorema: esistono S vettori $v_1, \dots, v_S \in \text{Sol}(A|b)$ l.i.
t.c. $\text{Sol}(A|b) = \text{Span}_K(v_1, \dots, v_S)$)
quindi $S = \dim$ base \uparrow)

③ N.B. $\text{rg}(A) = \dim_K(\text{Span}_K(A_1, \dots, A_m)) = \dim_K(\text{Span}_K(A^1, \dots, A^n))$

Esercizi

*f sulle slide, ma preferisco x
f abbiamo visto che è uno sp. vett. (p.78)*

Sia $W = K_d[X]$ il sottoinsieme di polinomi di $V = K[X]$ di grado $\leq d$.

W è un sottosp. vett. di $K[X]$.

- ① ② Mostrire che $K_d[X]$ è f.g. e ③ calcolarne una base.

f.g.

② dato $P \in K_d[X] =: W$, $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \dots + \alpha_n X^n$ con $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in K$ e, se $\alpha_n \neq 0$ allora $n \leq d$

è una comb. lineare di

quindi, $P \in \text{Span}_K(1, X, X^2, \dots, X^d)$ - ovvero, $S = \{1, X, X^2, \dots, X^d\}$ è un sistema di generatori di $K_d[X]$

Siccome S è finito, $K_d[X]$ è f.g.

base

③ bisogna trovare un sistema di generatori l.i.

Un polinomio è nullo \iff i suoi coeff. sono tutti nulli.

Ma un polinomio $\in K_d[X]$ è una comb. lin. di $1, X, X^2, \dots, X^d$, quindi l'unico comb. lineare nullo di $1, X, X^2, \dots, X^d$ è quello banale.

$\Rightarrow \{1, X, X^2, \dots, X^d\}$ è una base $\Rightarrow \dim_K(K_d[X]) = d+1$

• Ma non è l'unica base:

dato $d=1$, $S = \{1, X\}$.

Se sostituisco X con $X+1$ e costruisco $S' = \{1, X+1\}$, S' è un sistema di generatori:

$$P = \alpha_0 + \alpha_1 X = \alpha_0 + \alpha_1 (X+1) - \alpha_1 = \underbrace{(\alpha_0 - \alpha_1)}_{\in \text{comb. di } 1} \cdot 1 + \alpha_1 (X+1) \quad \text{comb. lineare di } 1, X+1$$

$\Rightarrow \forall P \in K_1[X]$, si ha che $P \in \text{Span}_K(1, X+1) \Rightarrow K_1[X] \subset \text{Span}_K(1, X+1)$

Sia adesso $Q \in \text{Span}_K(1, X+1) \Rightarrow Q = b_0 + b_1 (X+1) = \underbrace{b_0 + b_1}_{\in \text{comb. di } (1, X)} + b_1 X \in K_1[X]$

comb. di $(1, X)$

$$\Rightarrow K_1[X] = \text{Span}_K(1, X+1) = \text{Span}_K(1, X)$$

le comb. di $(1, X+1)$ sono anche comb. di $(1, X)$

$1, X+1$ sono l.i., quindi anche $\{1, X+1\}$ è una base di $K_1[X]$

GENERALIZZANDO

Dato un qualsiasi $\{1, X, X^2, \dots, X^d\}$ base di $K_d[X]$,

se si sostituisce un elemento di questa base con un polinomio di $K_d[X]$ ottenuto:

- ① permutando ② moltiplicando per uno scalare ③ sostituendo con se stesso più una combinazione lineare degli altri
(operazioni di Gauss)

uscirà un'altra base.

[trovare in $K[x]$ un sistema di generatori che non è una base]

per esempio, $\{1, 1, x, x^2, x^3\}$ è un sistema di generatori ($\forall P = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3, P \in \text{Span}_K(\{1, x, x^2, x^3\}) \subset \text{Span}_K(\{1, 1, x, x^2, x^3\})$)
in generale, se $S \subseteq S'$, $\text{Span}_K(S) \subseteq \text{Span}_K(S')$

la comb. lin. $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot x + \lambda_4 \cdot x^2 + \lambda_5 \cdot x^3$

con $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ è non banale e nulla $\Rightarrow \{1, 1, x, x^2, x^3\}$ non è libero.

$$\downarrow 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

② Mostrare che $V = K[x]$ non è f.g. e calcolarne una base

Supponiamo per assurdo che V sia f.g.

vorrebbe dire che esiste una base finita di cardinalità n tale che

$V = \text{Span}_K(P_0, P_1, \dots, P_n)$, $P_i \in V = K[x]$. (quindi ogni polinomio è comb. lineare di P_0, \dots, P_n)

Sia $d = \max(\deg(P_i), i=0, \dots, n)$ (quindi esisterebbe un grado massimo)

Sia $P \in V$. Allora $P = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i$

il grado massimo che P può avere, visto che λ_i sono costanti (e non possono far aumentare di grado), è

$$\deg(P) \leq \max\{\deg(P_0), \dots, \deg(P_n)\} = d \quad (\text{definito sopra})$$

Introduciamo un elemento $Q \in V$ con grado $n+1$ (che chiaramente esiste in $K[x]$)

Sia $Q \in V$ di grado $n+1$

Se $Q \in V$, vuol dire che può essere scritto come comb. lin. dei generatori

$Q \in \text{Span}_K(P_0, \dots, P_n)$ \downarrow contraddizione

ma questo è impossibile, perché abbiamo visto sopra che quelle combinazioni hanno grado massimo n .

Quindi, $K[x]$ non è f.g. e ha base $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ infinita.

FATTI generalizzati dall'es.

- se $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ è base di V , allora un sottoinsieme $B' \subset V$ ottenuto attraverso ①, ②, ③ è un'altra base.

- Se $S \subseteq S'$, $\text{Span}_K(S) \subseteq \text{Span}_K(S')$

- $V = K[x]$ non è f.g.

ma fatto 1' 11/12 (matrice con rango non massimale) ($< \min(n, m)$)

Esercizio 1

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 5 & -6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{U} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 13 & -12 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{U} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -10 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & -3 & -4 \\ 0 & 7 & 13 & -12 & -4 \end{pmatrix}$$

$R_4 \rightarrow R_4 + 2R_1$

$R_2 \rightarrow R_2 - 3R_3$

$R_1 \leftrightarrow R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -57 & * & * \end{pmatrix} \quad \text{U} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -57 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 \rightarrow R_2 \rightarrow R_4 \rightarrow R_3$

quindi $\text{rango}(M) = 3$
 = dimensione di $W = \text{Span}_{\mathbb{R}}(\text{righe di } M)$
 e le righe dello matrice (l.i.) costituiscono
 una base di W

Come è stato generato l'esercizio?

scelti 3 vettori: l.i > caso

$$a = (1 \ 2 \ 4 \ -3 \ -1), \quad b = (3 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1), \quad c = (0 \ 2 \ 1 \ -3 \ 0) \in M_{1,5}(\mathbb{R})$$

la matrice $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R})$ ha rango 3 e

$$M = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ a-c \\ a+b+c \end{pmatrix} \quad a-b, b-c, a-c, a+b+c \in \text{Span}_{\mathbb{R}}(a, b, c) \in M_{1,5}(\mathbb{R})$$

Esercizio 2

① In funzione del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, determinare il rango della matrice

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 & \lambda & 4 \\ 0 & \lambda & 4 & 3 & -2\lambda & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,7}(\mathbb{R})$$

② Supponiamo che M_λ sia la matrice completa associata ad un sistema lineare $Ax \underset{(*)}{=} b$.

Determinare in funzione di λ se il sistema è compatibile, e la dimensione di $\text{Sol}(A|b)$

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 & \lambda & 4 \\ 0 & \lambda & 4 & 3 & -2\lambda & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cup} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & \lambda-2 & 4 \\ 0 & \lambda & 4 & 3 & -2\lambda & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cap} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 4 & 3 & -2\lambda & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & \lambda-2 & 4 \end{pmatrix}$$

$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_4$ $R_4 \leftrightarrow R_2$

dobbiamo capire come
trattarlo: è già \odot o deve diventarlo?

ci sono ora due casi: ① $\lambda \neq 0$ ② $\lambda = 0$

① $\lambda \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 4 & 3 & -2\lambda & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & \lambda-2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cup} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{\lambda} & \frac{3}{\lambda} & -2 & \frac{6}{\lambda} & \frac{4}{\lambda} \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & \lambda-2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - \lambda^{-1}R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{\lambda} & \frac{3}{\lambda} & -2 & \frac{6}{\lambda} & \frac{4}{\lambda} \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & \lambda-2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\uparrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\lambda} & \frac{3}{\lambda} & -2 & \frac{6}{\lambda} & \frac{4}{\lambda} \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & \lambda-2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - \frac{4}{\lambda}R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\lambda} & \frac{3}{\lambda} & -2 & \frac{6}{\lambda} & \frac{4}{\lambda} \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & \lambda-2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{se } \lambda=2, \text{ è } \odot, \text{ altrimenti no}}$$

dobbiamo ancora due casi:

① $\lambda \neq 2, 0$

② $\lambda = 2$

② $\lambda = 0$

$$M_0 \xrightarrow{\cup} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sostituiamo } \lambda=0} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow -\frac{1}{3}R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 4R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{1}{7}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{pmatrix}$$

rango 4

①b) $\lambda \neq 0, \lambda \neq 2$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\lambda}-2 & \frac{3}{\lambda}-1 & -2 & \frac{6}{\lambda}-1 & \frac{4}{\lambda} \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & \lambda-2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{U}} R_3 \rightarrow R_3 \cdot \frac{1}{\frac{4}{\lambda}-2}$$

①b) $\lambda = 2$

$$M_2 \xrightarrow{\text{U}} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -2 & * & * \\ 0 & 0 & -3 & * & * & * & * \end{array} \right) \xrightarrow{\text{U}} R_3 \rightarrow \frac{2}{5} R_3 \\ R_4 \rightarrow -\frac{1}{3} R_4 \\ R_3 \leftrightarrow R_4$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3+\lambda}{4-2\lambda} & \frac{-2\lambda}{4-2\lambda} & * & * \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & \lambda-2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{U}} R_4 \rightarrow R_4 + 3R_3$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3+\lambda}{4-2\lambda} & \frac{-2\lambda}{4-2\lambda} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \frac{21-3\lambda}{4-2\lambda} & \frac{-4-\lambda}{2-\lambda} & * & * \end{array} \right)$$

se questi due si annullano contemporaneamente (e anche gli *) allora il rango è 3 - scanno, è 4

$$\frac{21-3\lambda}{4-2\lambda} \text{ si annulla} \Leftrightarrow \lambda = 7, \text{ e } \frac{-4-\lambda}{2-\lambda} \text{ non si annulla per } \lambda = 7$$

quindi non possono essere cont. nulli $\Rightarrow \text{rango}(M_\lambda) = 4$

in ogni caso, $\text{rango}(M_\lambda) = 4$

② In ogni caso $\text{rg}(M) \geq 4$. Scriviamo

$$M_\lambda = \left(\begin{array}{c|c} A_\lambda & B_\lambda \end{array} \right) \left. \right\} 4 \quad \text{il sistema (*) è compatibile} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(M)$$

devo verificare per ogni caso che i gradini "finiscono" prima di B

①b) può essere o così:

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3+\lambda}{4-2\lambda} & \frac{-2\lambda}{4-2\lambda} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \frac{21-3\lambda}{4-2\lambda} & \frac{-4-\lambda}{2-\lambda} & * & * \end{array} \right) \text{ se } \lambda = 7$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{array} \right)$$

$$\text{o così: } \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3+\lambda}{4-2\lambda} & \frac{-2\lambda}{4-2\lambda} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \frac{21-3\lambda}{4-2\lambda} & \frac{-4-\lambda}{2-\lambda} & * & * \end{array} \right) \text{ se } \lambda = 7$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{array} \right)$$

$\text{rg}(A) = \text{rg}(M)$ si verifica in tutti i casi

• Per Rouché-Capelli, $\dim(\text{Sol}(A|0)) = \frac{\text{M}_\lambda}{\text{rg}(A)} = n - \text{rg}(A) = 6 - 4 = 2$
indeterminate

Si verifica che **prop 1, prop 2** \Rightarrow

per ogni $V/K \exists$ base $(B \subset V)$
(e se una base è finita di card. n ,
ogni base lo è.)

versione alternativa a p. 109

Proposizione 3: Dato V sp.vett. di dim. n su K , sia $S \subset V$.

Allora:

① S è libero $\Rightarrow \#S < \infty$ e $\#S \leq n$ se le basi hanno card. n , non può avere card. $k > n$

② S generatore \Rightarrow o S è infinito
oppure $\#S \geq n$

③ in particolare, S base $\Leftrightarrow S$ finito, $\#S = n$ e S libero $\Leftrightarrow \#S < \infty$, $\#S = n$ e S è generatore

Proposizione 4: Dato V spazio vettoriale f.g. su K ,

$\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di $V \Leftrightarrow$ ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare di v_1, \dots, v_n

dim

• \Rightarrow Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V , allora è anche insieme di generatori. $\forall v \in V, v \in \text{Span}_K(v_1, \dots, v_n)$

Quindi $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ t.c. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

Inoltre, v_1, \dots, v_n sono l.i.

Mostriamo che $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ è unicamente determinato

Supponiamo di avere $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in K^n$ t.c. $v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$

Si ha quindi: $v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$, $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

Sottraiamo: $0 = (\beta_1 - \alpha_1) v_1 + \dots + (\beta_n - \alpha_n) v_n$

L'unica comb. nula è quella banale

Ma v_1, \dots, v_n sono l.i. $\Leftrightarrow \beta_1 = \alpha_1, \dots, \beta_n = \alpha_n$ da cui l'unicità

• \Leftarrow Supponiamo che $\forall v \in V$, si possa scrivere in modo unico $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

Allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera V : $V = \text{Span}_K(v_1, \dots, v_n)$

Inoltre, per unicità $0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$$0 = \underset{\parallel}{\alpha_1} v_1 + \dots + \underset{\parallel}{\alpha_n} v_n \implies v_1, \dots, v_n \text{ l.i.} \blacksquare$$

def VETTORE DELLE COORDINATE

Dato V spazio vettoriale su K di dim. n , e dato una base $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico:

$$v = v_1 b_1 + \dots + v_n b_n \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^n$$

Tale vettore si chiama il vettore delle coordinate di v nella base B , e si scrive $[v]_B$

esempi di basi:

① $V = K = \mathbb{C}$ ogni singleton non nullo è una base - $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$

es. $\{1\}$ è una base

② $V = \mathbb{C}, K = \mathbb{R}$ Sappiamo che ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ si scrive

in modo unico come $z = x \cdot 1 + y \cdot i$

1. i vettori di \mathbb{C} , $x, y \in \mathbb{R}$ (quindi comb. lineare)

quindi $B = \{1, i\}$ è base - $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$

③ in modo simile,

$\dim_{\mathbb{C}}(M_2(\mathbb{C})) = 4$ con base $\{(10)(01)(00)(00)\}$ dim: . chiaro che A, B, C, D sono l.i.

$$\cdot \forall M \in M_2, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a(10) + b(01) + c(00) + d(00)$$

$\dim_{\mathbb{R}}(M_2(\mathbb{C})) = 8$ con base $\{(10)(01)(00)(00), (00)(00)(10)(01), (00)(00)(01)(00)\}$ dim: sempre chiaro l.i. $\delta_j = x_j \cdot 1 + y_j \cdot i$: quindi: $\cdot \forall M \in M_2, M = \begin{pmatrix} \delta_1 \delta_2 \\ \delta_3 \delta_4 \end{pmatrix} = x_1(10) + y_1(01) + \dots - \text{uguale per } \delta_2, \delta_3, \delta_4$

Esercizio 3 / base canonica

dato $V = K^n$, allora $B = (e_1, \dots, e_n)$ è una base di V

dove $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{i\text{-esima posizione}}, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

dim

Scriviamo la matrice M che ha per righe i coefficienti dei vettori e_1, \dots, e_n .

Si ha $M = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_n \in M_n(K)$ a gradini ridotto con n pivot. $\text{rg}(M) = n$ da cui B libera (range = cardinalità B) e, siccome $W = \text{Span}_K(B) \subset V$ ha dim. n , $W = V$ e B base di V • è $\dim(K^n) = n$

def BASE CANONICA

La base $B = (e_1, \dots, e_n)$ si chiama la base canonica di K^n

• $\{e_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ è la base canonica di $M_{m,n}(K)$

Esercizio 4

In $M_{m,n}(K)$, ponendo $e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ colonna j rispetto a $\epsilon M_{m,n}$ con $1 \leq i \leq m$
 $1 \leq j \leq n$

mostrare che $\{e_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ è la base canonica di $M_{m,n}(K)$ e che $\dim(M_{m,n}(K)) = m \cdot n$

[Esempio: $m=2, n=3$ e $e_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$]

Esercizio 5

dato $V = \mathbb{R}^2$, mostrare che $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di V .

ci sono 2 metodi: (sappiamo che $2 = \#B = \dim_{\mathbb{R}}(V)$)

① usando la prop. 3 (S base $\iff \#S = n$ e S libero $\iff \#S = n$ e S è generatore) usiamo questo

Mostriamo che $\forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in V$, si ha che $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ è combinazione dei vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ovvero che $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{Span}_{\mathbb{R}}(B)$)

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \iff \text{il sistema } \begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 - x_2 = b \end{cases} \text{ è compatibile.}$$

Per Rouché-Capelli, il sistema è compatibile $\iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \rightarrow L_2 - L_1]{\cup} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & b-a \end{pmatrix} \xrightarrow{\cup} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \rightarrow L_1 - L_2]{\cup} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a+b}{2} \\ 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \end{pmatrix}$$

(ridotto)

$$\Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) \Rightarrow \mathbb{R}^2 = \text{Span}_{\mathbb{R}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$$

$$\text{Inoltre, ho le soluzioni uniche del sistema } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{quindi, scrivendo } v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ si ha } [v]_B = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \end{pmatrix}$$

vett. coordinate

② usando la prop. 3 (S base $\iff \#S = n$ e S libero $\iff \#S = n$ e S è generatore) usiamo questo

Mostriamo che B è libero (metodo più facile)

$(1, 1) \cup (1, -1) \cup (0, 1)$, che ha rango 2. Le righe contenenti i pivot sono l.i., quindi B è libero.

Quindi sappiamo che è una base di V .

Trasposizione di matrici

Sia $A \in M_{m,n}(K)$, lo trasposto di A (${}^t A$) è la matrice di $M_{n,m}(K)$ ottenuta da A scambiando righe e colonne.

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad {}^t A = (a_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}), \quad {}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), \quad {}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

↪ è una riflessione rispetto alla diagonale

(per le non-quadrati: 

oss (importante!) dato $A \in M_{m,n}(K)$ $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A)$

quindi, se cerco il rango tramite Gauss, posso accelerare applicando

l'algoritmo a righe e colonne simultaneamente

(ma se lo faccio, non posso trarre conclusioni sulle soluzioni del sistema associato - neanche se lo riduco -)

proprietà:

- ① ${}^t({}^t A) = A$
- ② ${}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha {}^t A + \beta {}^t B$ con $\alpha, \beta \in K$ e $A, B \in M_{m,n}(K)$
- ③ ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$ (un po' come l'inversione nei gruppi)

↪ ricordiamo le condizioni di compatibilità per il prodotto matriciale

$A \in M_{m,n}(K), B \in M_{n,s}(K)$ - è ben definito anche per ${}^t B \in M_{s,n}(K), {}^t A \in M_{n,m}(K)$

Inoltre, ${}^t(AB) \in M_{s,m}(K)$.

def MATRICE SIMMETRICA/ASIMMETRICA

$A \in M_n(K)$ (quindi quadrata) si dice simmetrica se $A = {}^t A$

antisimmetrica se $A = -{}^t A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3 \text{ è simmetrica}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \text{ è antisimmetrica}$$

- In $M_n(\mathbb{R})$, $A = -{}^t A \Rightarrow$ diagonale nulla

↪ falso in $M_n(\mathbb{F}_2)$

Lemmo / Esercizio 6 /

Sia $M_n^+(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici simmetriche di $M_n(\mathbb{R})$ e $M_n^-(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici antisimmetriche.

$M_n^+(\mathbb{R})$ e $M_n^-(\mathbb{R})$ sono sottospazi vettoriali di $M_n(\mathbb{R})$

dim

Poniamo $M = M_n^+(\mathbb{R})$ (e poi $M = M_n^-(\mathbb{R})$)

Dobbiamo dimostrare che $\forall A, B \in M$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha A + \beta B \in M$$

per M^+ A, B sono simmetriche : $A = {}^t A$, $B = {}^t B$

$$\text{quindi } {}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha {}^t A + \beta {}^t B = \alpha A + \beta B$$

per M^- $A = {}^t -A$, $B = {}^t -B$

$$\text{quindi } {}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha (-A) + \beta (-B) = -(\alpha A + \beta B)$$

Esercizio 7

Trovare basi per $M_2^+(\mathbb{R})$ e $M_2^-(\mathbb{R})$

① $M_2^+(\mathbb{R})$

Sia $A \in M_2^+(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2^+(\mathbb{R})$ generica

$$V := M_2^+(\mathbb{R}) = \text{Span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{11}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_{22}} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{21} + e_{12}}$$

② $M_2^-(\mathbb{R})$

$A = {}^t -A$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \in M_2^-(\mathbb{R})$ generica

$$V := M_2^-(\mathbb{R}) = \text{Span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Proposizione 3 versione alternativa - parte ③

Data V/K s.v. f.g. e $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ B è una base $\iff B$ è un insieme massimale di vettori: l.i. $\iff B$ è un insieme minimo di generatori:

Se aggiungo un altro vettore, non è più libero

dim ② \implies ①Prendiamo $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ libero massimaleSia $v \in V$. Allora $B' = \{v_1, \dots, v_n, v\}$ non è libero (perché B massimale)aggiungo v $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ non tutti nulli t.c. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ e quindi $\lambda v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ (sarebbero $-\lambda_1, \dots, -\lambda_n$, ma è come scegliere un λ')Claim: λ non nulloAltrimenti, $\lambda = 0$ e ci sarebbero $\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n$ non tutti nulli t.c. $0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ (contraddizione con B libero)Quindi (visto $\lambda \neq 0$) posso moltiplicare per λ^{-1}

$$\begin{aligned} v &= \frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} v_n = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n \implies v \in \text{Span}_K(B) \quad \forall v \in V \\ &\implies V \subseteq \text{Span}_K(B) \subset V \implies V = \text{Span}_K(B) \\ &\implies B \text{ è un sistema di generatori per } V \end{aligned}$$

Teorema (concetto già visto prima)

Data V/K f.g., due basi hanno lo stesso numero di elementi

dim

Prendiamo due basi $B = (b_1, \dots, b_r)$, $B' = (b'_1, \dots, b'_{r'})$ due basi.Posso supporre che $r' \geq r$.In particolare, $\text{Span}_K(B) = \text{Span}_K(B') = V$ quindi $\text{Span}_K(B) \supseteq \text{Span}_K(B')$ quindi posso scrivere, in modo unico, $\forall 1 \leq i \leq r \quad b'_i = \sum_{j=1}^r \underbrace{u_{ij}}_{\in K} b_j$ sto scrivendo ogni el. di B' nella base B

Costruisco quindi una matrice in questo modo:

nella parte sinistra, ogni riga i è formata dalle coord. di b'_i nella base B , $[b'_i]_B$ la parte destra contiene la matrice identità di $M_{r'}(K)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad r' \times r'$$

$$M \in M_{r \times r+r'}$$

$$M = \left(\begin{array}{c|cc} (u_{ij})_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r} & & \\ \hline & 1_{r'} & \\ & \vdots & \vdots \\ & r' & r' \end{array} \right)_{r \times r+r'}$$

Applichiamo ora le operazioni elementari di Gauss per rendere solo la parte sinistra a gradini ridotti

che può essere un rettangolo così $\boxed{}_{r'}^{r}$ (se $r < r'$) o al massimo un quadrato $(r = r')$ (non può essere così $\boxed{}_r^{r'} \rightarrow r' > r'$)

Riducendo M otteniamo una cosa del genere

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & * \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ 1 & & & 1 & \\ 1 & & & & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{array} \right)$$

Ad ogni tappa, le matrici intermedie hanno il blocco di sx costituito da coordinate nella base B di vettori di una base di V con r' elem.
(applicando le op. fondamentali su delle basi si ottengono sempre basi)

Ma, se ci fosse questo blocco di zeri, stremmo dicendo che un blocco di vettori che contiene zeri è una base \rightarrow CONTRADDIZIONE

Una base non contiene mai 0 (altrimenti non sarebbe libera)

$$\begin{aligned} &\hookrightarrow b'_x = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \dots = 0 \\ &(\forall x \in K) x \cdot 0 + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n \text{ non è nulla ma dovrebbe } 0 \\ &\text{(tutti zeri è un numero qualunque al vettore 0)} \end{aligned}$$

perché non ci siano righe nulle, la parte di sx deve essere quadrata

$$\text{quindi, } r = r' \blacksquare$$

(MATRICE INVERSA)

Analizziamo la situazione con $r = r'$

• matrice iniziale:

$$r \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} A & 1_r \\ \hline r & n \end{array} \right) \right. \begin{array}{l} \text{ogni riga dà le coordinate di } b_i \text{ nella base } B' \\ (\text{nella base } B', b_i \text{ ha coord } 1 \ 0 \ \dots \ 0, b'_1 = 1 \cdot b'_1 + 0 \cdot b'_2 + 0 \cdot b'_3 + \dots) \\ b'_2 = 0 \cdot b'_1 + 1 \cdot b'_2 + 0 \cdot b'_3 \dots \text{ ecc.} \\ (\text{sia } C \text{ una base di } V, C = \{v_1, \dots, v_n\}) \\ [v_i]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_i \text{ perché } v_i = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 1 \cdot v_i + \dots + 0 \cdot v_n \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{sempre coord vettori di } B' \text{ nella base } B \end{array} \right)$$

Alla fine dell'algoritmo (rendendo la parte di sx a gradini ridotti) si ottiene:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1_r & A' \\ \hline \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{il contrario di prima} \\ \text{dove le righe di } A' \text{ sono le coordinate dei vettori della base } B \text{ nella base } B' \\ \text{e si osserva che } A \text{ è invertibile di inversa } A'. \end{array}$$

(quindi, per trovare l'inversa di una matrice: • si giustappone la matrice identità

• si applica l'algoritmo di Gauss per ridurre la matrice originale (a gradini ridotti) • la matrice giustapposta è l'inversa)

esercizio

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ calcolare l'inverso (se esiste)}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & U & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) & U & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) & U & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \\ R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 & \cap & R_3 \rightarrow -\frac{1}{2}R_3 & \cap & R_2 \rightarrow R_2 + 4R_3 & \cap & R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 & & & & & & R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} U & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{array} \right) & U \\ \cap & R_1 \rightarrow R_1 - R_3 & \cap \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_3 & & R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 \end{array}$$

$\boxed{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{array} \right)}$ \curvearrowleft inverso di U

Dalla discussione appena conclusa, traspare:

Teorema:

Dato $A \in M_n(K)$, c'è equivalenza tra .

importante! × calcolare basi o invertibili

① $A \in GL_n(K)$ (A invertibile)

② $\text{range}(A) = n$

(se le righe sono l.i. e ce ne sono n, esse sono base di K^n - perché $\dim(K^n) = n$ e, per la prop. 3, S base $\Leftrightarrow \#S = n$, S libero)

③ le righe di A sono una base di K^n

④ le colonne di A sono una base di K^n da questo deduciamo:

OSS: dato una matrice M invertibile, anche la sua trasposta ${}^t M$ è invertibile (di inversa ${}^t(M^{-1})$)

OSS: esiste una nozione di determinante

$\det: M_n(K) \rightarrow K$ per ora descritta solo per $n=2$

· si dimostra ⑤ $A \in M_n(K)$ è invertibile $\Leftrightarrow \det(A) \in K^\times$

(c'è una formula universale - dato $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$)

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)})$$

def APPLICAZIONE LINEARE

Dati V, V' due sp. vett./K, un'applicazione $V \xrightarrow{f} V'$ è detta **lineare** se $\forall v, v' \in V$ e $\forall \alpha, \alpha' \in K$,

si ha $f(\alpha v + \alpha' v') = \alpha f(v) + \alpha' f(v')$ (come un **omomorfismo**)

prodotto scalare di v
addiz. in V

(un'applicazione lineare di spazi vettoriali è

prodotto scalare di v'
addiz. in V'

un'omomorfismo di gruppi)

· Se inoltre f è biiettiva, si dice **isomorfismo**

(e se f è un isomorfismo, anche f^{-1} è un isomorfismo)

gli spazi vettoriali sono gruppi

abeliani con op. di somma vettoriale

Proposizione

Dati V/K f.g., $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ base di V , V' s.v. qualsiasi /K, e $f: B \rightarrow V'$

Allora $\exists!$ applicazione lineare $\tilde{f}: V \rightarrow V'$ t.c. $\tilde{f}|_B = f$

restrizione
su B

dim

Siccome B è base, $\forall v \in V$, $\exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ t.c. $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$

vett. coordinate su B, $[v]_B$

Poniamo $\tilde{f}(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(b_i)$ - è un'applicazione (per unicità di \tilde{f} quindi il valore $f(v)$ dipende solo da v)
 $V \xrightarrow{\tilde{f}} V'$

① Mostriamo che \tilde{f} è lineare

dati $v, v' \in V$, $\beta, \beta' \in K$, calcolo $\tilde{f}(\beta v + \beta' v') = ?$

$$\cdot \text{Calcoliamo } [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad [v']_B = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$$

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \quad v' = \sum_{i=1}^n \alpha'_i b_i, \quad \beta v + \beta' v' = \sum_{i=1}^n (\beta \alpha_i + \beta' \alpha'_i) b_i$$

$$\cdot \tilde{f}(\beta v + \beta' v') = \sum_{i=1}^n (\beta \alpha_i + \beta' \alpha'_i) f(b_i) =$$

$$\cdot \beta \tilde{f}(v) + \beta' \tilde{f}(v') = \beta \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{f}(b_i) + \beta' \sum_{i=1}^n \alpha'_i \tilde{f}(b_i) = \sum_{i=1}^n (\beta \alpha_i + \beta' \alpha'_i) \tilde{f}(b_i) \quad \text{quindi } \tilde{f} \text{ lineare}$$

② Mostriamo l'unicità

Supponiamo che $\exists \hat{f}: V \rightarrow V'$ lineare t.c. $\hat{f}(b_i) = \tilde{f}(b_i) = f(b_i)$

e mostriamo che $\hat{f} = \tilde{f}$
ovvero che $\hat{f} - \tilde{f} = \emptyset$.

• Poniamo $g = \tilde{f} - \hat{f}$.

$$g(v) = g\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i b_i\right) = \sum_{i=0}^n \alpha_i g(b_i) = \sum_{i=0}^n \alpha_i (\underbrace{\tilde{f}(b_i) - \hat{f}(b_i)}_{=0}) = 0 \Rightarrow g \equiv 0 \Rightarrow \hat{f} = \tilde{f} \blacksquare$$

Esempio

dato V/\mathbb{R} di base $B = (b_1 \dots b_n)$, $V' = \mathbb{R}^n$, $\dim(V) = \dim(V') = n$

• dato $v \in V$, posso scrivere in modo unico $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$.

Poniamo $f(b_i) = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ pos.

$$\tilde{f}(v) = \sum_i \alpha_i f(b_i) = \sum_i \alpha_i e_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = [v]_B$$

OSS:

\tilde{f} è un isomorfismo di spazi vettoriali di inverso $\tilde{f}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} := \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \in V$

ABUSO DI NOTAZIONE: Se \tilde{f} prolunga $f: B \rightarrow V$, allora scriviamo $f = \tilde{f}$

Corollario

Se $\dim_K(V) = n$, allora $f: V \rightarrow K^n$ è un isomorfismo

Immagine e nucleo (def)

data $f: V \rightarrow V'$ applicazione lineare, poniamo

$$\cdot \text{Ker}(f) = \{v \in V \text{ t.c. } f(v) = \emptyset\} = f^{-1}(\{\emptyset\}) \quad \text{nucleo}$$

$$\cdot \text{Im}(f) = \{v' \in V' : \exists v \in V \text{ t.c. } f(v) = v'\} \quad \text{immagine}$$

Lemma

$\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$ sono sottospazi vettoriali di V e V' rispettivamente

dim:

È chiaro che si tratta di sottogruppi visto che f è anche omom. di gruppi.

V, V' sono gruppi abeliani
con op. addizione vettoriale

Rimane da mostrare che $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$ sono stabili per il prodotto scalare

$\text{Ker}(f)$:

• Siano $v \in V, \alpha \in K$: Sappiamo che $f(v) = \emptyset \Rightarrow \alpha f(v) = \alpha \emptyset = \emptyset$ (è stabile)

$v \in \text{Ker}(f) \Rightarrow \alpha v \in \text{Ker}(f) \Rightarrow \text{Ker}(f)$ è un sottosp. vett. (definizione 1 sottosp.vett.: $\text{Ker}(f) \subset V$ e $\lambda v \in \text{Ker}(f)$)

$\in K$

$\text{Im}(f)$:

• Siano $v \in V'$, $\alpha \in K$: $\exists v \in V \text{ t.c. } f(v) = v' \implies \alpha f(v) = \alpha v'$.

ma $\alpha f(v) = f(\alpha v) \implies$ il vettore $\alpha v \in V$ è tale che $f(\alpha v) = \alpha v' \implies \alpha v' \in \text{Im}(f) \implies \text{Im}(f)$ è un sottosp. vett. di V' .

OSS: Visto che un omomorfismo è iniettivo solo se il nucleo è banale, lemma p.60

$\text{Ker}(f) = \{\emptyset\} \iff f \text{ iniettiva}$

inoltre, $\text{Im}(f) = V' \iff f \text{ suriettiva}$

intersezione/unione di sottosp. vett.

• In modo simile, se V_1, V_2 sottosp. vett. di V , allora $V_1 \cap V_2$ sottosp. vett. di V

(Come per i sottogruppi)

• $V_1 \cup V_2$ non è un sottosp. vett.

def SOMMA DI SOTTOSP. VETT.

Dati V_1, V_2 sottospazi vettoriali di V .

Definiamo

$$V_1 + V_2 = \{v \in V : \exists v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \text{ t.c. } v = v_1 + v_2\}$$

Si ha che $V_1 + V_2$ è un sottospazio vettoriale.

dim: Siano $v, v' \in V_1 + V_2$ e $\alpha, \alpha' \in K$.

Voglio mostrare che $\alpha v + \alpha' v' \in V_1 + V_2$

• Visto che $v \in V_1 + V_2$, $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$

$v' \in V_1 + V_2$, $v' = v'_1 + v'_2$ con $v'_1 \in V_1, v'_2 \in V_2$

$$\alpha v + \alpha' v' = \alpha(v_1 + v_2) + \alpha'(v'_1 + v'_2) = (\underbrace{\alpha v_1 + \alpha' v'_1}_{\in V_1}) + (\underbrace{\alpha v_2 + \alpha' v'_2}_{\in V_2}) \in V_1 + V_2$$

Proprietà: $V_1 + V_2 = \bigcap_{\substack{W \text{ s.v. di } V \\ W \supseteq V_1 \cup V_2}} W$ più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene $V_1 \cup V_2$

non l'ho fatto a lezione ma può essere utile

Teorema Formula di Grassmann

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2)$$

teorema: dato un'app. lineare $V \xrightarrow{f} V'$ con $\dim(V) = n$,

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = n$$



fine del programma

Minimo solo scritto e male ora, yang

(seguono esercizi sugli spazi vettoriali svolti durante le ultime lezioni)

Esercizio 2. Dati i seguenti insiemi di vettori, si dica in ciascun caso, motivo la risposta, se essi sono :

- linearmente indipendenti

- generatori di V

- una base di V .

$$\begin{array}{c} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{array}$$

(a) $V = \mathbb{R}^4$, $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$;

(b) $V = \{ \text{matrici simmetriche reali } 2 \times 2 \}$, $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$;

(c) $V = \mathbb{R}_2[t]$ (i polinomi di grado al più 2 a coefficienti reali), $T = \{1+t, 1-t, t^2, 1-t^2\}$.

②

① è libero?

per verificarlo, calcoliamo il rango della matrice associata, e usiamo Rouché-Capelli per trarre conclusioni su $\dim(\text{Sol}(A|0))$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{dobbiamo vedere se l'unica comb. nulla è quella banale})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{U \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{U \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{U \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_4 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{U \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_3 \\ R_1 \rightarrow R_1 - R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A|0)$$

corr. lin. in. # indet.

$$\text{per Rouché-Capelli, } \text{Sol}(A|0) \xrightarrow{1:1} \mathbb{R}^{n-\text{rg}(A)} = \mathbb{R}^{3-3} = \mathbb{R}^0 \iff \text{Sol}(A|0) = \{(0)\} \text{ ovvero } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{noi avevamo detto } \dim_{\mathbb{R}}(\text{Sol}(A|0)) = n - \text{rg}(A) \quad (\text{equivalente}) \iff \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\iff v_1, v_2, v_3 \text{ sono l.i.}$$

[2,3] In realtà, ho finito. So che $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) = 4$, e che v_1, v_2, v_3 sono l.i.
(fatto)

③ So che la dimensione di uno sp. vett. è la cardinalità di tutte le sue basi e ho:

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) = 4, \# T = 3 \implies T \text{ non può essere base di } \mathbb{R}^4$$

④ So che S base \iff S generatore libero.

Ho che T è libero $\implies T$ non può essere generatore, altrimenti sarebbe base. (e non può esserlo)

però, dimostriamo comunque che v_1, v_2, v_3 non generano \mathbb{R}^4 , ovvero che $\text{Span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3) \subsetneq \mathbb{R}^4$

Vogliamo quindi mostrare che $\exists v \in \mathbb{R}^4$ che non è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3

quindi, che non può essere scritto come $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

Per farlo, costruiremo la matrice completa associata $(T|v)$ con $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, e vediamo se esiste almeno un valore di $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ per cui esso è INCOMPATIBILE (ovvero $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|b)$)

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{U \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 1 & c-a \\ 0 & 0 & 1 & d-a \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{U \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & c-a+b \\ 0 & 0 & 2 & d-a \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{U \\ R_4 \rightarrow R_4 - 2R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & d-a \\ 0 & 0 & 2 & c+a+b-2d \end{pmatrix}$$

esiste (più di) un valore di $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ per cui $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|b)$ \rightarrow per esempio, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($\text{rg}(A|b) = 4 \neq 3 = \text{rg}(A)$)

Sistema inc. $\iff \exists v \in \mathbb{R}^4$ t.c. $v \notin \text{Span}(v_1, v_2, v_3) \iff \text{Span}(v_1, v_2, v_3) \neq \mathbb{R}^4$

$$\textcircled{b} \quad V = \{ \text{matrici simmetriche reale } 2 \times 2 \} \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset M_2^+(\mathbb{R})$$

$\dim_{\mathbb{R}}(V) = 3 \rightarrow$ sono tutte nella forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ - servono 3 parametri a, b, c - che possono avere qualsiasi valore (non sono vincolati, sono liberi) per descriverle
 ↗ grado di libertà = 3

• per verificare la libertà

studiando il sistema: $x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \leftrightarrow R_3 - R_2 \\ R_3 \leftrightarrow R_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_3 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_4 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rg}(A) = \text{rg}(A|0) = 3$$

Inoltre $\text{Sol}(A|0) \xrightarrow{1:1} \mathbb{R}^{3-3} = \mathbb{R}^0 \Rightarrow$ le matrici di T sono l.i.

Per la prop. 3, visto che $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 3$ e $\#T = 3$ e T libero, T è base di $V = M_2^+(\mathbb{R})$
 (S base $\iff \#S = n$ e S libero)

$$\textcircled{c} \quad T = \{1+t, 1-t, t^2, 1-t^2\} \subset \mathbb{R}_2[t] \quad (\text{polinomi grado max 2 coeff. reali})$$

(Sappiamo che) $\mathbb{R}_2[t]$ è il sottosp.vett. di $\mathbb{R}[t]$ generato da $\{1, t, t^2\}$, che ne è una base.
 Quindi, $\dim(\mathbb{R}_2[t]) = 3$

• Osserviamo che $T \subset \mathbb{R}_2[t]$, quindi: $\text{Span}(T) \subset \mathbb{R}_2[t]$

$$\text{Span}(T) \subset \text{Span}[\mathbb{R}_2[t]] = \mathbb{R}_2[t] \text{ stesso}$$

ma, visto che $\#T = 4$, per la prop. 3, T non è libero - $\#T = 4 > \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[t]) = 3$
 (S è libero $\Rightarrow \#S \leq n$) ↗ quindi non è base.

• è generatore?

Osserviamo che $\mathbb{R}_2[t] = \text{Span}_{\mathbb{R}}(1, t, t^2)$

$$\textcircled{a} \quad t^2 \in T$$

$$\textcircled{b} \quad t = \frac{1}{2}(1+t-(1-t)) \in \text{Span}_{\mathbb{R}}(T)$$

$$\textcircled{c} \quad 1 = \frac{1}{2}(1+t+1-t) \in \text{Span}_{\mathbb{R}}(T)$$

$$\Rightarrow \text{Span}_{\mathbb{R}}(1, t, t^2) = \mathbb{R}_2[t] \subset \text{Span}_{\mathbb{R}}(T) \Rightarrow T \text{ è sistema di generatori}$$

(ogni elemento della base $\{1, t, t^2\}$ di $\mathbb{R}_2[t]$ può essere

scritto come comb. lineare di T , quindi ogni el di \mathbb{R}_2 con too)

Esercizio 3. (a) Si determini una base per il sottospazio S di \mathbb{R}^4 generato dai vettori $v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1, 1)$, $v_3 = (1, -1, 1, -1)$, $v_4 = (2, 2, 1, 4)$.

(b) Si dica se il vettore $v = (0, 3, -2, 2)$ appartiene al sottospazio S .

(c) Si dica (motivando la risposta) se i vettori $\{v_1, v_2, v_3, v\}$ formano una base di \mathbb{R}^4 .

(d) Dopo aver verificato che l'insieme $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

è una base di \mathbb{R}^4 , si determinino le coordinate del vettore v nella base \mathcal{B} .

③ Calcolare una base di $\text{Span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3, v_4) = S$

Se effettuiamo trasformazioni lineari (op. di Gauss) su v_1, v_2, v_3, v_4 , essi rimangono generatori di S - vogliamo vedere se sono anche l.i.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_4 \rightarrow R_4 + R_3 \\ R_3 \rightarrow -R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{quindi: } \text{rg}(A) = 3$$

$$\text{Abbiamo quindi } S = \text{Span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

In più, le righe con pivot di una matrice a gradini sono l.i. $\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ è generatore libero ed è quindi base di S . ($\dim_{\mathbb{R}}(S) = 3$)
(non di \mathbb{R}^4 però)

(quindi, anche i vettori originali, v_1, v_2, v_3 , sono una base)

④ Per vedere se $v \in S$, bisogna vedere se è una comb. lineare dei vettori della base

$$\text{bisogna quindi vedere se } \exists x, y, z \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x \begin{pmatrix} v_1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} v_3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ ovvero se il sistema è compatibile } (\text{rg}(A) = \text{rg}(A|v))$$

La matrice completa associata al sistema è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 + R_2 \\ R_4 \rightarrow \frac{1}{2}R_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_4 \rightarrow R_4 - R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|v) = 3 \Rightarrow v \in \text{Span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3)$$

⑤ No, $\{v_1, v_2, v_3, v\}$ non può essere una base. Infatti, $S = \text{Span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(v'_1, v'_2, v'_3)$, e:

nello ④ abbiamo visto che $v \in \text{Span}_{\mathbb{R}}(v'_1, v'_2, v'_3)$

quindi esistono $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \lambda_1 v'_1 + \lambda_2 v'_2 + \lambda_3 v'_3$

$$\text{e quindi } 0 = -v + \lambda_1 v'_1 + \lambda_2 v'_2 + \lambda_3 v'_3 = \lambda_0 v + \lambda_1 v'_1 + \lambda_2 v'_2 + \lambda_3 v'_3$$

$$\downarrow \lambda_0 = -1 \neq 0 \text{ quindi c'è almeno un coeff. non nullo} \\ \text{per cui la combinazione} = 0$$

quindi i vettori non sono l.i.

quindi $\{v'_1, v'_2, v'_3, v\}$ non è una base di \mathbb{R}^4 ($\text{Span}_{\mathbb{R}}(v'_1, v'_2, v'_3, v) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(v'_1, v'_2, v'_3) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3)$)

che ha $\dim 3 \neq \dim(\mathbb{R}^4) = 4$

$$\text{d) } B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

base di \mathbb{R}^4 ?

matrice vettori di B

B è base di $\mathbb{R}^4 \iff \text{rg}(M) = 4$

$$M = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{U \\ R_3 \rightarrow R_2 \\ R_4 \rightarrow R_3}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{U \\ R_1 \leftrightarrow R_3}} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{U \\ R_2 \rightarrow R_2 + R_1}} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Si vede $\text{rg}(M) = 4 \Rightarrow B$ base di \mathbb{R}^4

• troviamo $[v]_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

dobbiamo $v_1 b_1 + v_2 b_2 + v_3 b_3 = v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{U \\ R_3 \rightarrow R_2 \\ R_4 \rightarrow R_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{U \\ R_3 \rightarrow R_2 \\ R_4 \rightarrow R_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{U \\ R_1 \leftrightarrow R_3 \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 + R_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

applichiamo le trasformazioni viste sopra
anche sul vettore v

o cui corrisponde il sistema

$$\begin{cases} v_3 - v_4 = 2 \\ 2v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow v_1 = 3, v_2 = -3, v_3 = 0, v_4 = -2$$

quindi $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ è l'unica soluzione del sistema

(infatti B è una base di \mathbb{R}^4 , quindi ogni vettore si scrive in modo unico come comb. lineare dei suoi vettori)