参考解答及评分标准

一．填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. $\dfrac{1}{1-\cos 2x}$； 2. $(0, +\infty)$； 3. $\dfrac{1}{3}$； 4. $e^{\cos^2 x}\cos x dx$； 5. $\dfrac{1}{2}$； 6. $\dfrac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$.

二．单选题（每小题 4 分，共 16 分）

1. B; 2. A ; 3. C ; 4. A;

三．解答题（每小题 7 分，共 35 分）

1. 解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{d}{dx}f(e^{\cos\sqrt{x}}) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(e^{\cos\sqrt{x}})e^{\cos\sqrt{x}}(-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}})$ 4 分

$$= f'(e)\cdot e\cdot(-\frac{1}{2})$$

$$= 2e^{-1}\cdot e\cdot(-\frac{1}{2}) = -1$$ 7 分

2. 解 定义域为 $[0, +\infty)$ 2 分；

（0, 1）为单调减少区间，（1，+∞ ）为单调增加区间. 5 分

$x=1$ 为函数的极小值点. 7 分

3. 解 因为 $F'(x) = f(x)$, 故有 $F'(x)F(x) = \sin^2 2x$ 2 分

于是，$\int F'(x)F(x)dx = \int \sin^2 2x dx$

即 $\int F(x)dF(x) = \int \dfrac{1-\cos 4x}{2}dx$

即 $\dfrac{1}{2}F^2(x) = \dfrac{1}{2}(x-\dfrac{1}{4}\sin 4x)+c$

$\because F(0)=1,\ F(x)\ge 0$，$\therefore F(x) = \sqrt{x-\dfrac{1}{4}\sin 4x+1}$ 5 分

$$f(x) = F'(x) = \frac{\sin^2 2x}{\sqrt{x-\frac{1}{4}\sin 4x+1}}$$ 7 分

4. 解 令 $x-1=t$，则 $dx=dt$，当 $x=0$ 时，$t=-1$；当 $x=2$ 时，$t=1$ 2 分

于是得 $\int_0^2 f(x-1)dx = \int_{-1}^1 f(t)dt = \int_{-1}^0 \dfrac{1}{1+e^t}dt + \int_0^1 \ln(1+t)dt$

$$= \ln 2(1+e) - 1$$ 7 分

5. 解 $f(x)=1+\int_1^x \frac{1}{x} f(t)dt = 1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$ 2 分

两端求导，得 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)dt+\frac{1}{x}f(x)=-\frac{1}{x}(f(x)-1)+\frac{1}{x}f(x)=\frac{1}{x}$ 5 分

积分得 $f(x)=\ln x+c$， 由 $f(1)=1$ 得 $c=1$，于是有 $f(x)=\ln x+1$ 7 分

四.（8 分）解（1）$\vec{c}\cdot\vec{d}=(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(k\vec{a}+\vec{b})=2k\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+k\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$$=2k+0+0+4=0,\qquad k=-2$$ 4 分

（2）$\vec{c}\times\vec{d}=(2\vec{a}+\vec{b})\times(k\vec{a}\times\vec{b})=(2-k)\vec{a}\times\vec{b}$

$$\left|\vec{c}\times\vec{d}\right|=|2-k|\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=2|k-2|=6\Rightarrow k=-1,\ \text{或}5.$$ 8 分

五.（10 分）解 设切点坐标为 (x_0,y_0)，则切线方程为 $y=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x_0}x$.

$$\begin{cases} y_0=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x_0}x_0 \\ y_0=e^{\frac{1}{2}x_0} \end{cases}\Rightarrow x_0=2,\quad y_0=e$$ 3 分

$$A=\int_0^2 e^{\frac{1}{2}x}dx-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot e=e-2$$ 6 分

$$V=\int_0^2\pi(e^{\frac{1}{2}x})^2dx-\int_0^2\pi(\frac{e}{2}x)^2dx=\pi(e^x-\frac{e^2}{12}x^3)\Big|_0^2=(\frac{e^2}{3}-1)\pi$$ 10 分

六.（7 分）证 令 $F(x)=f(x)f(1-x)$，

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，$F(0)=f(0)f(1)=F(1)$，

由罗尔定理 $\exists\xi\in(0,1)$ 使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)=0,$$ 6 分

因为 $f(x)\neq 0$，故有 $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$ 7 分