



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY



IPIL  
智能感知与图像理解

# 最优化理论

## 第三章：线性规划

人工智能学院  
智能感知与图像理解实验室



# 第五节 线性规划 (Linear programming)

1

线性规划概念

2

线性规划数学模型

3

线性规划标准形式

4

线性规划解的基本性质





# 第五节 线性规划 (Linear programming)

1

线性规划概念

2

线性规划数学模型

3

线性规划标准形式

4

线性规划解的基本性质





## 回忆例题：

我每天要求一定量的两种维生素，Vc和Vb。假设这些维生素可以分别从牛奶和鸡蛋中得到。

维生素	奶中含量	蛋中含量	每日需求
V <sub>c</sub> (mg)	2	4	40
V <sub>b</sub> (mg)	3	2	50
单价(US\$)	3	2.5	

需要确定每天喝奶和吃蛋的量，

**目标** 以便以最低可能的花费购买这些食物，  
而**满足** 最低限度的维生素需求量。





令 $x$ 表示要买的奶的量， $y$ 为要买的蛋的量。食谱问题可以写成如下的数学形式：

$$\text{Min } 3x + 2.5y$$

$$\text{s.t. } 2x + 4y \geq 40$$

$$3x + 2y \geq 50$$

$$x, y \geq 0.$$

极小化目标函数

可行区域

可行解





## ➤ 线性规划 (Linear programming, 简称LP)

是最优化中研究较早、发展较快、应用广泛、方法较成熟的一个重要分支，它是辅助人们进行科学管理的一种数学方法。研究线性约束条件下线性目标函数的极值问题的数学理论和方法。





目标函数和约束函数都是线性的,称之为线性规划问题,而有的模型中含有非线性函数,称之为非线性规划.

在线性与非线性规划中,满足约束条件的点称为可行点,全体可行点组成的集合称为可行集或可行域.如果一个问题的可行域是整个空间,则称此问题为无约束问题.







# 线性规划—有关概念

可行解:

我们将满足线性规划问题的所有约束条件的变量 $x_1$ 和 $x_2$ 的一组取值称为线性规划问题的一个可行解。通常用 $X$ 表示。

可行域:

我们将可行解的集合称为可行域。

最优解:

因此我们求解线性规划问题，就是要求使得目标函数取最优值的可行解，这样的可行解就称为线性规划问题的最优解。通常用 $X^*$ 表示。

最优值:

即最优的目标函数值, 通常用 $z^*$ 表示







线性规划的三个要素：

- 决策变量
- 目标函数
- 约束条件

其次线性规划模型必须满足如下两个要求：

- ① 目标函数必须是**决策变量的线性函数**；
- ② 约束条件必须是**含决策变量的线性等式或不等式**。

建模步骤：

识别问题  $\longrightarrow$  定义决策变量  $\longrightarrow$  建立约束条件  
 $\longrightarrow$  建立目标函数





# 第五节 线性规划 (Linear programming)

1

线性规划概念

2

线性规划数学模型

3

线性规划标准形式

4

线性规划解的基本性质





# 线性规划一般数学模型

为了讨论一般的线性规划问题的求解。我们先给出线性规划模型的一般形式如下：

$$\begin{aligned} \min f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ s.t. \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$





## (1) 线性规划模型一般形式

## 目标函数

$$\text{Min} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

 $s.t$ 

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq (=, \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq (=, \geq) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq (=, \geq) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{array} \right.$$

## 约束条件





## (2) 线性规划模型标准形式

Min

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

价值系数

技术系数

决策变量

s.t

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

$$(b_1, b_2, \cdots, b_m \geq 0)$$

右端常数





- 这里一共包含有 $n$ 个决策变量， $m$ 个约束条件；
- 对目标函数既可以求最大的也可以求最小；
- 约束条件有 $\leq, \geq, =$ 型；
- 决策变量通常非负，但也可以有其它情况；
- $c_j$ : 称为价值系数；  $b_i$ : 资源系数
- $a_{ij}$ 称为约束系数、技术系数





# 线性规划数学模型

在今后的讨论中，为方便起见，还将用到线性规划模型一般形式的各种简写的形式。

利用和号“ $\sum$ ”，线性规划模型的一般形式可写为：

$$\begin{aligned} \min f(X) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$







## (3) 线性规划模型矩阵形式

$$\text{Min } Z = CX$$

$$C = (c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n)$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

价值向量

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

决策向量

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

系数矩阵

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

右端向量





西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY

# 第五节 线性规划 (Linear programming)

1

线性规划概念

2

线性规划数学模型

3

线性规划标准形式转换

4

线性规划解的基本性质



智能感知与图像理解教育部重点实验室  
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION  
AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION





$$\begin{aligned} \min f(X) &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ s.t. \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

它具有如下四个特征：

- ① 目标函数求**min**；
- ② 约束条件两端用“**=**”连结；
- ③  $b_i$ **非负**；
- ④ 所有决策变量 $x_j$ **非负**。





## 1、目标函数求最小值的情形

取原目标函数的相反数为新的目标函数，对原目标函数求最小值的问题就等价于对这一新的目标函数求最大值的问题。

例如：  $\min z = 2x_1 - 3x_2 + x_3$

等价于  $\max z' = -2x_1 + 3x_2 - x_3$





## 2、约束条件为不等式

(a)  $-2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2$

转化为

$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_s = 2$$

$x_s$ 表示决策中尚未使用的那部分资源，因此称这一变量为**松弛变量**。

(b)  $3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 3$

转化为：

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_s = 3$$

它表示决策结果超过了实际需要的部分，因此常称它为**剩余变量**。

无论是松弛变量还是剩余变量在决策中都不产生实际价值，因此它们在目标函数中的系数都应该为零。在后面的讨论中，有时也将松弛变量和剩余变量统称为松弛变量。





## 3、约束条件右端常数为负数

只需将这一约束条件两端同乘“-1”就可化为一个等价的约束条件，其右端常数满足标准形式的要求。

## 4、决策变量不满足非负约束

$$(a) \quad x_1 \leq 0 \quad \longrightarrow \quad x'_1 = -x_1 \quad \text{则} x'_1 \geq 0$$

$$(b) \quad \text{如 } x_3 \text{ 无约束, 则令} \quad x_3 = x'_3 - x''_3$$





例1. 请将下面的线性规划模型化为标准形式:

$$\begin{aligned} \max f(x) &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$







# 优化过程 (Optimization Routine)

解:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= -3x_1 - 2x_2 \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_5 &= 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中  $x_3, x_4, x_5$  就是分别对第一、第二、第三个约束条件中添加的松弛变量。





例2 化如下的线性规划问题模型

$$\begin{aligned} \min z &= -3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq -2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ x_1 \leq 0, x_2 \text{ 无约束}, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

变形为求最大值的标准形式。





# 类比 (Analogically)

解:

(1) 变量  $x_1$  是非正的, 所以要将模型中的所有  $x_1$  都用  $-x'_1$  代替, 其中  $x'_1 = -x_1 \geq 0$

(2) 变量  $x_2$  无约束, 因此取两个变量  $x'_2 \geq 0, x''_2 \geq 0$  使得  $x_2 = x'_2 - x''_2$ 。在模型中, 所有的  $x_2$  都用  $x'_2 - x''_2$  代替。

(3) 目标函数是求最小值的, 因此令  $z' = -z$ , 即

$$\begin{aligned} z' &= -(-3x_1 + 2x_2 - x_3) \\ &= 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ &= -3x'_1 - 2x'_2 + 2x''_2 + x_3 \end{aligned}$$





# 基本概念 (Basic Conception)

(4)约束条件1是 “  $\geq$  ”型的，并且右端的常数小于零。

因此先将其左边减取一个剩余变量  $x_4$  化为等式，即

然后在两端乘以-1得  $-x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -2$  也就是

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2$$

$$-x'_1 - 2x'_2 + 2x''_2 + 3x_3 + x_4 = 2$$

(5)约束条件2是 “  $\leq$  ”型的，因此需要在左边加上一个松弛变量  $x_5$

使它化为等式：  $-2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 2$  也就是

$$2x'_1 + 3x'_2 - 3x''_2 + 2x_3 + x_5 = 2$$





# 基本概念 (Basic Conception)

从而得到求最大值模型的标准形式为

$$\begin{aligned} \max z' &= -3x'_1 - 2x'_2 + 2x''_2 + x_3 \\ \begin{cases} -x'_1 - 2x''_2 + 2x''_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 2x'_1 + 3x'_2 - 3x''_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ x'_1, x'_2, x''_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$





# 第五节 线性规划 (Linear programming)

1

线性规划概念

2

线性规划数学模型

3

线性规划标准形式转换

4

线性规划解的基本性质





# 线性规划解的基本性质

对于线性规划问题来说，可行解实际上是由约束条件构成的线性方程组（常称为约束方程组）

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad s.t. \begin{cases} \mathbf{AX} = \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq 0 \end{cases}$$

的解，并且还满足非负约束条件，即各个决策变量都取非负值：

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$







# 线性规划解的基本性质

我们将约束方程组的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为线性规划问题的系数矩阵，并且总假定其秩等于其行数：

$\text{rank}(A) = m$ 。这意味着系数矩阵  $A$  的各行是线性无关的，这也表明约束方程中的各个方程是相互独立的。





# 线性规划解的基本性质

由于矩阵 $A$ 的秩为 $m$ , 故至少存在一个  $m \times m$  的子矩阵 $B$ , 其行列式不为零。

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

我们将 $A$ 的任一个具有这样的特征子矩阵 $B$ 称为线性规划问题的一个**基**。

也就是说线性规划问题的基就是矩阵 $A$ 的一个  $m \times m$  且行列式不为零的子矩阵。





# 线性规划解的基本性质

$$B = [\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{P}_m]$$

称  $\mathbf{P}_j (j=1,2,\dots,m)$  为基向量,

与基向量对应的变量  $x_j (j=1,2,\dots,m)$  称为基变量。

记为  $X_B = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$

其余变量称为非基变量,

记为  $X_N = [x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n]^T$

可以得到一个解  $X = [X_B^T, X_N^T]^T = [x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0]^T$

称  $X$  为该约束方程的基解, 其中  $X_B = B^{-1}b$

对于满足非负约束条件的  $X \geq 0$  (基解的非零分量都大于等于零)  
的基解称为**可行解**, 对应基可行解的基称为**可行基**

基可行解的非零分量个数小于  $m$  时, 称为**退化解**





# 线性规划数学模型

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & a_{1m+1} & a_{1m+2} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & a_{2m+1} & a_{2m+2} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & a_{mm+1} & a_{mm+2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

基阵

非基阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

基向量

$$N = \begin{pmatrix} a_{1m+1} & a_{1m+2} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2m+1} & a_{2m+2} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{mm+1} & a_{mm+2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

非基向量

$$X_B = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m)^T$$

$$X_N = (x_{m+1} \quad x_{m+2} \quad \cdots \quad x_n)^T$$

基变量

非基变量





# 线性规划解的基本性质

例3. 对于下面求最大值的线性规划问题，试求基为？

$$\max z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 6x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

其系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

则下面两个矩阵都是该线性规划问题的基。

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

和

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$



还能找出其它基吗？





# 线性规划解的基本性质

例如，对上面的线性规划问题，若我们考虑基

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

则线性规划问题的**基变量**就是 $x_2$ 和 $x_4$ ，而 $x_1$ 和 $x_3$ 就是**非基变量**。但如果我们考虑的基是

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

则基变量是 $x_1$ 和 $x_2$ ，非基变量是 $x_3$ 和 $x_4$ 。

可见在线性规划问题中所谓基变量就是由 $m$ 个变量构成的一组变量，其系数构成的行列式不等于零；反之满足系数行列式不等于零的一组 $m$ 个变量，就是基变量。







# 线性规划解的基本性质

**基解：** 在约束方程组中，令非基变量等于0的解。

**基可行解：** 基解 + 可行解

例如，对于上面的线性规划问题，如果取 $x_1, x_2$ 为基变量，则令非基变量 $x_3, x_4$ 为零，约束方程组为

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$$

解之得 $x_1 = 15/7, x_2 = 12/7$ 。故我们得到基解

$$x_1 = 15/7, x_2 = 12/7, x_3 = 0, x_4 = 0$$

注意到这个基解还是一个可行解。

是否所有的基解都是基可行解？  
（选 $x_1, x_3$ 作为基变量）







例2, 求出约束为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1/2 \text{ 的所有基本可行解.} \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{解: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ 均可逆.}$$





# 线性规划解的基本性质

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$x^1 = B_1^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} > 0$$

$$B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = B_1^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} > 0$$





# 线性规划解的基本性质

$$B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^3 = B_1^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

可见,  $x^1, x^2$  是非退化的基本可行解, 而  $x^3$  不是非负的, 从而不是基本可行解.





**定理3.1:** 线性规划问题的基可行解是其可行域的顶点。

**定理3.2:** 若可行域有界，线性规划问题的目标函数则一定在其可行域的极点上达到最优。





## 证明3.2

设可行域的极点为 $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ , 极方向为 $d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(t)}$ 。

根据表示定理，任意可行点 $x$ 可表示为

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^{(i)} + \sum_{i=1}^t \mu_i d^{(i)} \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$\mu_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, t.$$





把 $x$ 的表达式代入(2.2),得等价的线性规划:

$$\min \sum_{i=1}^k (cx^{(i)})\lambda_i + \sum_{i=1}^t (cd^{(i)})\mu_i \quad (2.4)$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$\mu_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, t.$$





# 线性规划解的基本性质

2, 若对任意的 $j$ , 有 $cd^{(j)} \geq 0$ , 则对极小化目标函数,  
必有  $\mu_j = 0, j = 1, 2, \dots, t.$  (2.5)

于是, 问题简化成 
$$\min \sum_{i=1}^k (cx^{(i)}) \lambda_i \quad (2.6)$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

在(2.6)中令  $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k$

显然, 当  $cx^{(p)} = \min_{1 \leq i \leq k} cx^{(i)}$  (2.7)

$\lambda_p = 1, \lambda_j = 0, j \neq p$  (2.8) 时目标函数取极小值.







即(2.5)和(2.8)是(2.4)的最优解,此时

$$\begin{aligned} cx &= \sum_{i=1}^k (cx^{(i)})\lambda_i + \sum_{i=1}^t (cd^{(i)})\mu_i \\ &\geq \sum_{i=1}^k (cx^{(i)})\lambda_i \geq \sum_{i=1}^k (cx^{(p)})\lambda_i = cx^{(p)} \end{aligned}$$

因此极点 $x^{(p)}$ 是的最优解.





西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY



IPIL  
智能感知与图像理解

**Key Laboratory of Intelligent Perception and  
Image Understanding of Ministry of Education**

***THE END***

**Thanks for your participation!**