

空域法：对像素值处理

频域法：在某种变换域内进行操作

灰度直方图

[图像中各灰度级出现频数分布的统计图表]

$P(s_k) = \frac{n_k}{n}$ 总像素数 n ，第 k 级灰度值 s_k ， s_k 的像素数 n_k

直方度的映射变换(点处理)

* $S = T(r)$ 对每个像素的灰度作变换

直方图均衡化

对于归一化后的 r, s ，
 $S = T(r) = \int_0^r p(r) dr$ 连续
 $s_k = T(r_k) = \sum_{i=0}^k p_r(r_i) = \sum_{i=0}^k \frac{n_i}{N}$

原始图像灰度级 s_k	0	1	2	3	4	5	6	7
原始图像各灰度级的像素 n_k	790	1023	850	656	329	245	122	81
计算原始直方图 $p(s_k)=n_k/n$	0.19	0.25	0.21	0.16	0.08	0.06	0.03	0.02
计算原始累计直方图 t_k	0.19	0.44	0.65	0.81	0.89	0.95	0.98	1.00
取整 $t_k=\text{int}[(L-1)t_k+0.5]$	1	3	5	6	6	7	7	7
确定映射对应关系($s_k \rightarrow t_k$)	0→1	1→3	2→5	3, 4→6	5, 6, 7→7			
统计新直方图各灰度级像素		790		1023		850	985	448
变换后直方图		0.19		0.25		0.21	0.24	0.11

$t_k \cdot (L-1)$ 后四舍五入为映射的灰度级

直方图规定化

- 1. 对原始图像直方图均衡化
- 2. 对规定 - - - - -
- 3. SML 规则

原始图像灰度级	0	1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7	7/7
原始图像各灰度级的像素	790	1023	850	656	329	245	122	81
计算原始直方图	0.19	0.25	0.21	0.16	0.08	0.06	0.03	0.02
算原始累计直方图	0.19	0.44	0.65	0.81	0.89	0.95	0.98	1.00
规定直方图	0	0	0	0.15	0.20	0.30	0.20	0.15
算规定累计直方图	0	0	0	0.15	0.35	0.65	0.85	1.00
SML映射	3	4	5	6	6	7	7	7
确定映射对应关系	0→3	1→4	2→5	3, 4→6	5, 6, 7→7			
变换后直方图	0	0	0	0.19	0.25	0.21	0.24	0.11

对每一原始图像灰度级的累计频率。
找规定直方图的累计频率中与之差距最小的灰度级，即为映射。
以灰度级0为例，0.19与0.15差距最小，故0→3。

图像平滑

目的：去除或衰减图像中噪声和假轮廓

方法如下。

1-1 空域平滑法

11) 4-邻域平均 $M = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

12) 8-邻域 $M = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

13) 加权平均法模板 $M = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $M = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $M = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

以上都算模板法，将模板从第2行第2列开始滑动。(忽略边界)
平滑模板：系数和=1。对常数图像处理无变化。平均亮度不变。

14) 多幅图像平均法：对同一景物重复采集M次相加取平均

$\sigma^2 \rightarrow \sigma^2/M$ $\sigma \rightarrow \sigma/M$

1-2 频域平滑法

图像 → 低频 噪声边缘 → 高频

巴特沃斯低通滤波器 $H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$

(三) 中值滤波

实质是用局部中值代替局部平均值

举例

已知原图像块 $f(x, y)$ (包含点噪声)

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

1. 加权平均法: 用模板 M_1 处理, 结果为 $g_1(x, y)$:

$$M_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 中值滤波法: 用模板 M_2 处理, 结果为 $g_2(x, y)$:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

适合消除脉冲及点噪声

图像锐化

目的: 加重目标物轮廓, 模糊 → 清晰

可通过空域微分, 高通滤波

(一) 空域锐化法

$$g(x) = f(x) - \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad (-1 \text{ 维})$$

1) Laplacian 锐化

$$\textcircled{1} \text{ 连续图像} \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad g(x, y) = f(x, y) - \alpha \nabla^2 f$$

\textcircled{2} 数字图像

$$\text{二阶微分} \quad f(m+1, n) + f(m-1, n) - 2f(m, n)$$

$$f(m, n+1) + f(m, n-1) - 2f(m, n)$$

$$g(m, n) = f(m, n) - \alpha [f(m+1, n) + f(m-1, n) + f(m, n+1) + f(m, n-1) - 4f(m, n)]$$

(2) 模板法

\textcircled{1} Laplacian 模板

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 1+4\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

4-邻域

$$M_2 = \begin{bmatrix} -\alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1+8\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & -\alpha \end{bmatrix}$$

8-邻域

②其他

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

模板(掩模矩阵)法

3. 处理方法：用模板对原图像从第2行第2列开始逐渐移法计算（图像四周边界一般不处理）。

4. 锐化模板特点

(1) 模板内系数有正有负，表示差分运算；

(2) 模板内系数之和1

① 对常数图像 $f(m, n) \equiv c$ ，处理前后不变；

② 对一般图像，处理前后平均亮度不变。

5. 锐化实质

锐化图像 $g(m, n) = \text{原图 } f(m, n) + \text{加重的边缘} (\alpha * \text{微分})$

与平滑对照

(二) 频域锐化法

理想高通滤波器

巴特沃斯 - - - $H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$

总结：先平滑、后锐化

仅用原图像处理。

同态滤波

入射光占据低频段、反射光占据高频段

为使图像清晰，可压缩 $i(x, y)$ 范围、增强 $r(x, y)$

图像复原 (Shift 中 Shift)

技术分类：{ 给定模型 —— 无约束、有约束
根据域 —— 频域、空域

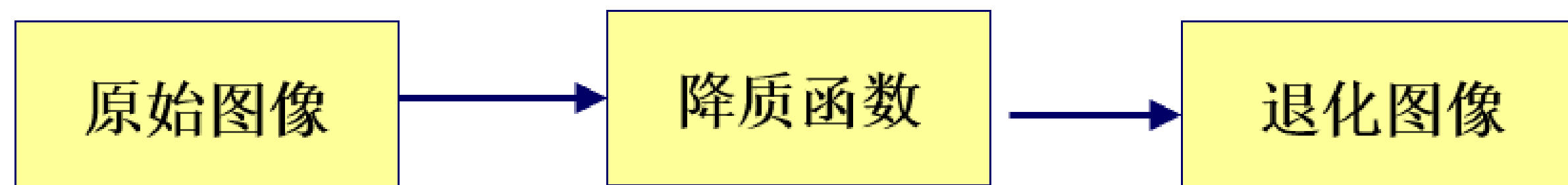
1. 几种退化模型

A 不考虑噪声的图像退化模型

$f(x, y)$

$h(x, y)$

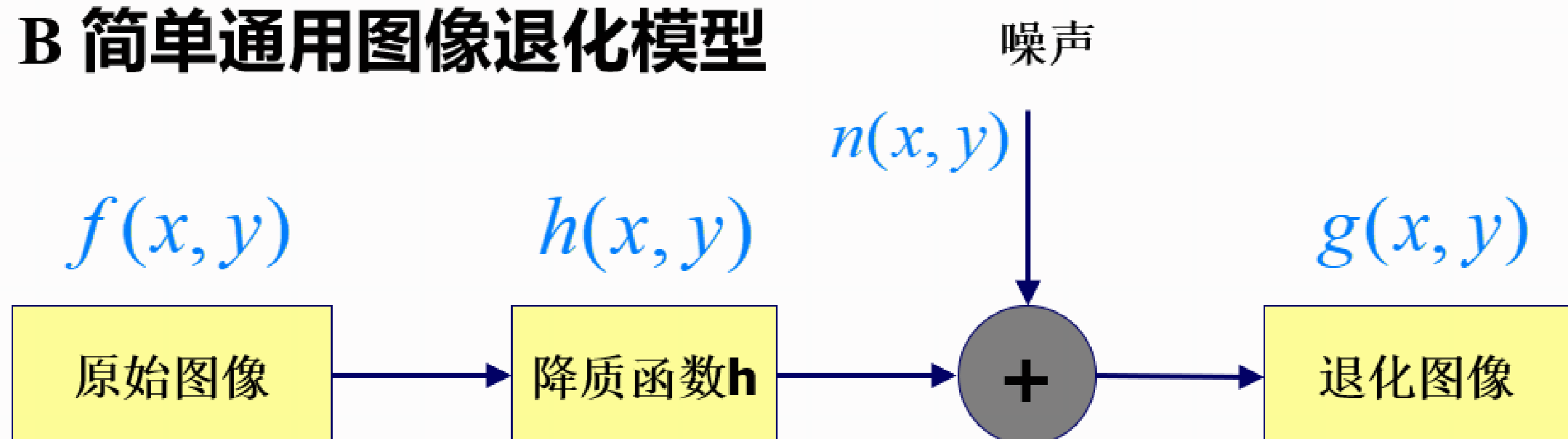
$g(x, y)$



$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) = \sum_{i=0}^{A-1} \sum_{j=0}^{B-1} f(i, j) h(m-i, n-j)$$

图像的退化由系统特性引起

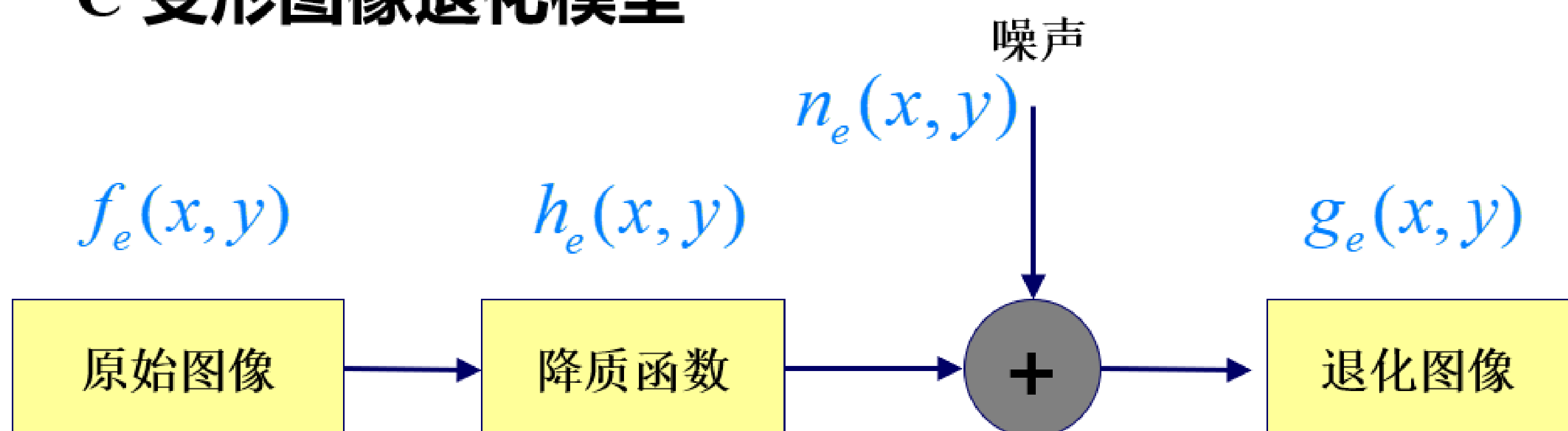
B 简单通用图像退化模型



$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) + n(x, y)$$

图像的退化由系统特性和噪声两部分引起

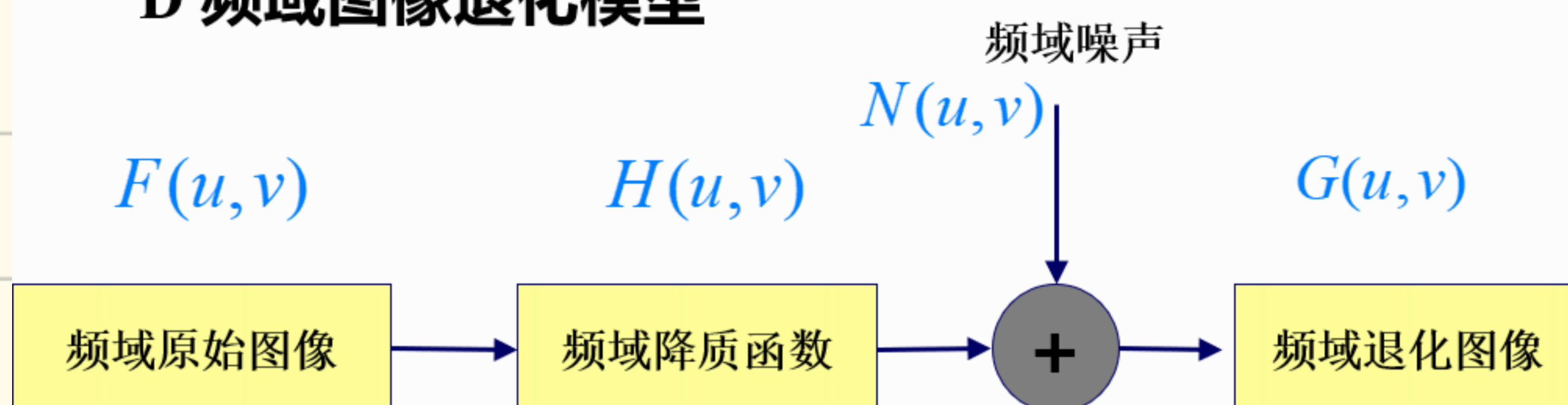
C 变形图像退化模型



$$g_e(x, y) = f_e(x, y) * h_e(x, y) + n_e(x, y)$$

图像的退化由系统特性和噪声两部分引起

D 频域图像退化模型



$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v) + N(u, v)$$

图像的退化由系统特性和噪声两部分引起

2. 无约束恢复

(1) 无约束

已知 $[g] = [h][f] + [n]$

目的: $\min \|g - h\hat{f}\|^2 \rightarrow \min J[\hat{f}]$

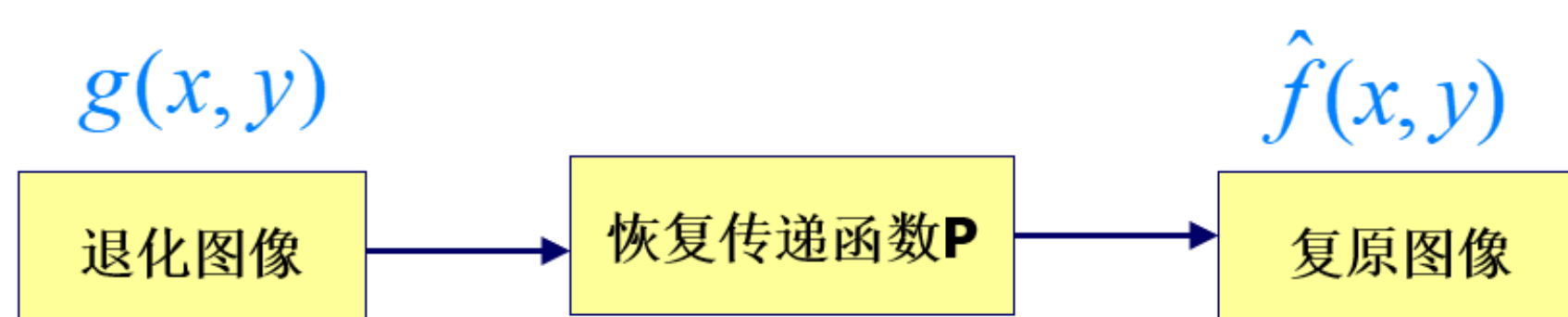
$$\frac{\partial J[\hat{f}]}{\partial [\hat{f}]} = -2[h]^T([g] - [h][\hat{f}]) = 0$$

$$[\hat{f}] = [h]^{-1}[g]$$

(2) 逆滤波法

2. 逆滤波法

A. 图像复原的逆滤波法



复原通过设计复原滤波器（逆滤波）来实现。

B. 逆滤波法的特点

将频域退化模型 $G(u,v) = F(u,v)H(u,v) + N(u,v)$

代入逆滤波器, 则 $\hat{F}(u,v) = F(u,v) + \frac{N(u,v)}{H(u,v)}$

(1) 存在问题

上式包含了我们希望得到的 $F(u,v)$, 但同时又加上一项由噪声带来的项 $N(u,v)/H(u,v)$, 但 $H(u,v)$ 较小或 $\rightarrow 0$ 处具有噪声放大作用, 这些 $H(u,v)$ 较小的点上噪声起主要作用;

B. 逆滤波法的特点

(2) 使用逆滤波器时的注意事项

① 忽略 $H(u,v)=0$ 的点（奇异点）。

比如可令此处的 $\hat{F}(u,v) = G(u,v)$

的邻域均值, 对复原结果不会产生太大影响;

② 当 $H(u,v)$ 非常小时, $N(u,v)/H(u,v)$ 对复原结果起主导作用, 而多数实际应用系统中, $H(u,v)$ 离开原点衰减很快, 故复原应局限于离远点不太远的有限区域进行。

B. 逆滤波法的特点

(3) 一种改进方法时取恢复滤波器 $P(u,v)$ 为

$$P(u,v) = \begin{cases} k & ; \text{如 } |H(u,v)| \leq d \\ \frac{1}{H(u,v)} & ; \text{else} \end{cases}$$

其中 k 和 d 均小于 1 的常数, 且 d 选得较小为好。

5. 有约束恢复

1. 基本原理

A. 问题提出：令 $[Q]$ 为 $[f]$ 的线性算子，寻找一个最优估计

$$\text{使 } J[\hat{f}] = \|[Q][\hat{f}]\|^2$$

在约束条件 $\|[g] - [h][\hat{f}]\|^2 = \|n\|^2$ 的条件下为最小。

1. 基本原理

B. 求解：

这类最小化问题，可用Lagrange算子来处理，准则函数为

$$J([\hat{f}]) = \|[Q][\hat{f}]\|^2 + \alpha \left\{ \|[g] - [h][\hat{f}]\|^2 - \|n\|^2 \right\}$$

同理，令 $\frac{\partial J}{\partial [\hat{f}]} = 2[Q]^T [Q][\hat{f}] - 2\alpha [h]^T \{[g] - [h][\hat{f}]\} = 0$

可得： $[\hat{f}] = \{[h]^T [h] + r[Q]^T [Q]\}^{-1} [h]^T [g]$

上式中， $r = 1/\alpha$

适当选择这一常数，使约束条件满足，便能求得最佳估计

5.3 有约束恢复

2. 维纳滤波法

A. 设 R_f 和 R_n 分别为原始图像 f 和噪声 n 的相关矩阵，即，

$$R_f = E\{ff^T\} \quad R_n = E\{nn^T\}$$

这里由概率论知识可知， R_f 和 R_n 中各元素分别是 $[f]$ 和 $[n]$ 这两个多维随机向量中各分量间的自相关函数，其FT是随机向量的功率谱密度。

2. 维纳滤波法

B. 选择 Q 满足如下关系

$$Q^T Q = R_f^{-1} R_n \quad \text{其FT为信噪（功率谱）比。}$$

该式代入 $[\hat{f}] = \{[h]^T [h] + r[Q]^T [Q]\}^{-1} [h]^T [g]$

可得 $\hat{f} = [h^T h + rR_f^{-1} R_n]^{-1} h^T g$

将上式中各矩阵的元素进行FT，即 $\hat{f}_e \leftrightarrow \hat{F}$, $h_e \leftrightarrow H$,

$$h_e^T \leftrightarrow H^*, \quad g_e \leftrightarrow G, \quad R_f^{-1} \leftrightarrow 1/S_f, \quad R_n \leftrightarrow S_n$$

这里 S_f 和 S_n 分别是 f_e 和 n_e 的谱函数,则上式变为:

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{H^*(u, v)}{\underbrace{|H(u, v)|^2}_{\text{噪声功率谱}} + r \underbrace{\left[\frac{S_n(u, v)}{S_f(u, v)} \right]}_{\text{原始图像功率谱}}} \right] G(u, v) = \left[\frac{1}{H} \frac{H^2}{H^2 + r(S_n/S_f)} \right] G$$

上式中， $M=N$ ， $u, v=0, 1, 2, \dots, N-1$;

$r=1/\alpha$ (α 为Lagrange乘子);

$$|H(u, v)|^2 = H^*(u, v)H(u, v)$$