西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

IPIU
智能感知与图像理解

最优化理论
第三章：线性规划

人工智能学院
智能感知与图像理解实验室

西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

第六节 单纯形法和对偶问题

1 单纯形法一般原理

2 表格单纯形法

智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION



Y.Gu 17/02/2020

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

第六节 单纯形法和对偶问题

1 单纯形法一般原理

2 表格单纯形法

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

神奇的单纯形法

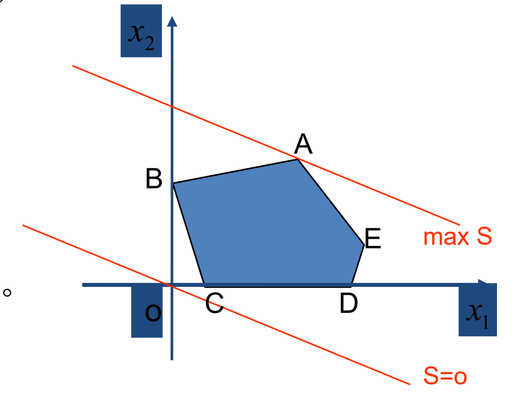
旦茨基教授在一次演说中，形象而风趣地说明了单纯形解法的奇效：设给70个人分配70项任务，每人一项。如果每人完成各项任务所需要付出的代价（时间、工资）都知道，要寻求代价最小的方案。所有的可行方案共有70！种。70！比 10^{100} 还要大。

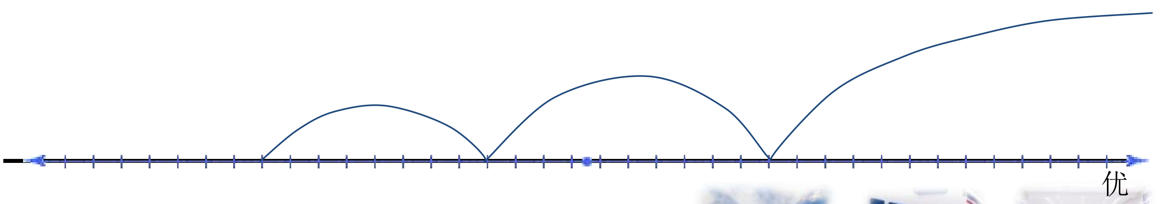
不仅如此，还能预测当方案中某因素发生变化，对决策目标的影响。

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

线性规划问题的可行解有无穷多个，与某一凸集上的无穷多个点一一对应。要从无穷多个可行解中寻找最优解，几乎不可能。可以证明，最优解必定能取在凸集的顶点（极点、基本可行解）上，而极点的个数是有限的。当然，这个“有限”，数字往往相当可观，如前面的70！，要逐个比较的话，也不现实。而单纯形解法，用跨跃的方式，高速地优化基本可行解，迅速达到最优。





西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

- 基本思路：
- 首先将线性规划问题化成标准形式
- 求出初始基本可行解
- 判断其是否为最优解
- 如果不是最优，则迭代到其相邻的基本可行解，并再次检验

单纯形法

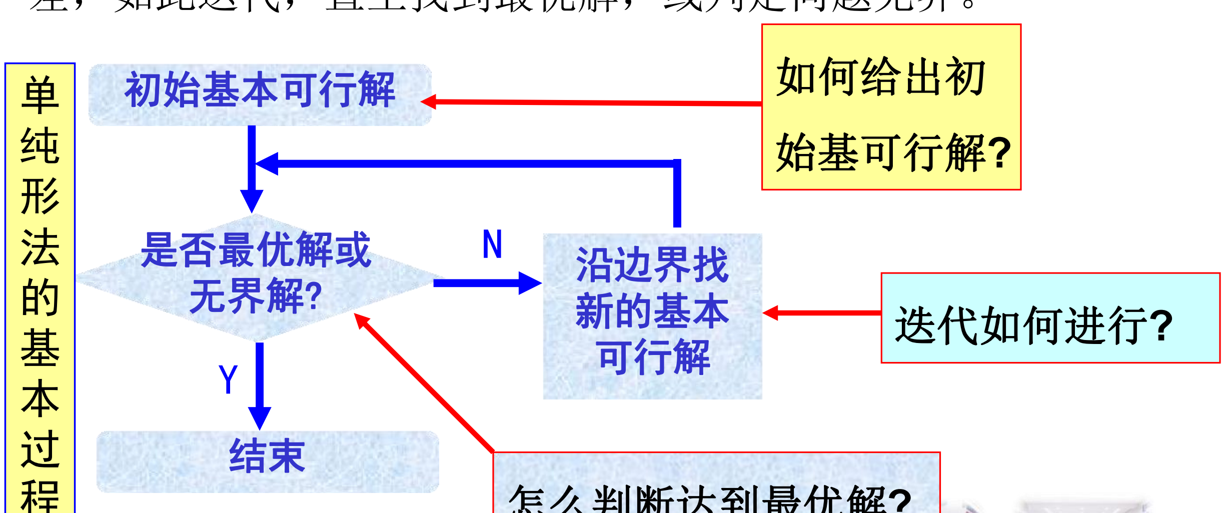
单纯形法把寻优的目标集中在所有基本可行解（即可行域顶点）中。

基本思路:是从一个初始的基本可行解出发，寻找一条达到最优基本可行解的最佳途径。

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

单纯形法 是有选择地取（而不是枚举所有的）基本可行解，即是从可行域的一个顶点出发，沿着可行域的边界移到另一个相邻的顶点，要求新顶点的目标函数值不比原目标函数值差，如此迭代，直至找到最优解，或判定问题无界。



智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

整体回顾

(1) 线性规划模型一般形式

目标函数

$$Min \qquad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (=,\ge) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (=,\ge) b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (=,\ge) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

约束条件


智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

整体回顾

(2) 线性规划模型标准形式

价值系数

$$Min \qquad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

技术系数

决策变量

$$s.t \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0 \\ (b_1, b_2, \cdots, b_m \ge 0) \end{cases}$$

右端常数


智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

整体回顾

(3) 线性规划模型矩阵形式

$$Min \quad Z = CX$$

$$s.t \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

价值向量

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

决策向量

系数矩阵

右端向量

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

整体回顾

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & a_{1m+1} & a_{1m+2} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & a_{2m+1} & a_{2m+2} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & a_{mm+1} & a_{mm+2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

基阵

非基阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} a_{1m+1} & a_{1m+2} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2m+1} & a_{2m+2} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{mm+1} & a_{mm+2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

基向量

非基向量

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{pmatrix}^T \quad X_N = \begin{pmatrix} x_{m+1} & x_{m+2} & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$$

基变量

非基变量

智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION
AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

1 确定初始的基本可行解

确定初始的基本可行解等价于确定初始的可行基，一旦初始的可行基确定了，那么对应的初始基本可行解也就唯一确定.

为了讨论方便，不妨假设在标准型线性规划中，系数矩阵 A 中前m个系数列向量恰好构成一个可行基，即 $A=(B|N)$,

其中

$B=(P_1,P_2,\cdots,P_m)$ 为基变量x_1，x_2，…,x_m的系数列向量构成的可行基，

$N=(P_{m+1},P_{m+2},\cdots,P_n)$为非基变量$x_{m+1}$，$x_{m+2}$，…,$x_n$的系数列向量构成的矩阵。

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

线性规划问题基变换的矩阵表示

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z=CX \\
s.t. \quad & AX=b \\
& X\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z=[C_B,C_N]\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} \\
s.t. \quad & [B,N]\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}=b \\
& X_B,X_N\geq 0
\end{aligned}
$$

智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

单纯形法

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = C_B X_B + C_N X_N \\
s.t. \quad & B X_B + N X_N = b \\
& X_B, X_N \geq 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\min \quad & z = C_B X_B + C_N X_N \\
s.t. \quad & X_B = B^{-1} b - B^{-1} N X_N \\
& X_B, X_N \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = C_B B^{-1} b - (C_B B^{-1} N - C_N) X_N \\
s.t. \quad & X_B = B^{-1} b - B^{-1} N X_N \\
& X_B, X_N \geq 0
\end{aligned}
$$



西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

所以约束方程 $AX=b$ 就可以表示为:

$$
AX = (B \ N) \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = B X_B + N X_N = b
$$

得:

$$
\boxed{X_B = B^{-1} b - B^{-1} N X_N}
$$

$$
\boxed{X_B = B^{-1} b}
$$

由此可得初始的基本可行解 $X = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$

智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION
AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION



单纯形法

2. 判断现行的基本可行解是否最优

假如已求得一个基本可行解 $X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

$$z = CX = (C_B \; C_N)\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = C_B B^{-1} b$$

其中 $C_B = (c_1, c_2, \cdots, c_m)$, $C_N = (c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots, c_n)$ 分别表示基变量和非基变量所对应的目标函数系数子向量。

怎样判定 $z = C_B B^{-1} b$ 是否已经达到最小值?

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

最优解判别定理

对于线性规划问题 $\min\ z = CX$, $D = \{X \in R^n \mid AX = b,\ X \geq 0\}$

若某个基本可行解所对应的检验向量 $\sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N \geq 0$ ，

则这个基本可行解就是最优解。检验向量的各个分量称为检验数.

智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION
AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

单纯形法

特殊情况：

情况2：无穷多最优解判别定理

若 $X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 是一个基本可行解，所对应的检验向量

$\sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N \geq 0$ ，其中存在一个检验数 $\sigma_{m+k}=0$，则线性规划问题有无穷多最优解。

情况3：无有界最优解判别定理

若$X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 是一个基本可行解，所对应的检验向量

$\sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N$, 其中存在一个检验数 $\sigma_{m+k}<0$，且该检验数所对应的非基变量的系数列向量的全部系数都为负或零，则线性规划问题无有界最优解。

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

将 $X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$ 代入目标函数

$$Z = C_B X_B + C_N X_N$$

得

$$\min z = C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) X_N$$

$$\text{s.t.}\quad X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$

$$X_B, X_N \geq 0$$

$$\sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N \geq 0$$

智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION
AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

单纯形法

3. 基本可行解的改进 ——基变换

如果现行的基本可行解 X 不是最优解，即在检验向量$\sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N$ 中存在负的检验数，则需在原基本可行解 X 的基础上寻找一个新的基本可行解，并使目标函数值有所改善。

具体做法是：

- ➢先从检验数为负的非基变量中确定一个换入变量，使它从非基变量变成基变量，
- ➢再从原来的基变量中确定一个换出变量，使它从基变量变成非基变量。

由此可得一个新的基本可行解，由 $z = C_B B^{-1} b + (\sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \cdots, \sigma_n)\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 可知，这样的变换一定能使目标函数值有所减少。

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

换入变量和换出变量的确定：

●换入变量的确定— 最大减小原则

假设检验向量 $\sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N = (\sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \cdots, \sigma_n)$

若其中有两个以上的检验数为负，那么为了使目标函数值下降得快些，通常要用“最大减小原则”，即选取最小负检验数所对应的非基变量为换入变量，即若

$$\min\left\{\sigma_j \middle| \sigma_j < 0, m+1 \le j \le n\right\} = \sigma_{m+k}$$

则选取对应的x_{m+k}为换入变量，

由于$\sigma_{m+k}<0$ 且为最小， 因此当x_{m+k}由零增至正值，

可使目标函数值最大限度的减小。

智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

单纯形法

- 换出变量的确定— 最小比值原则

如果确定X_{m+k} 为换入变量，方程

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \Rightarrow X_B = B^{-1}b - B^{-1}P_{m+k}x_{m+k}$$

其中 P_{m+k} 为 A 中与 X_{m+k} 对应的系数列向量。

现在需在$X_B=(x_1,x_2,\ldots,x_m)^T$ 中确定一个基变量为换出变量。 当 x_{m+k} 由零慢慢增加到某个值时，X_B 的非负性可能被打破。为保持解的可行性，可以按最小比值原则确定换出变量：

$$\theta = \min\left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_{m+k})_i} \middle| \boxed{(B^{-1}P_{m+k})_i > 0}, 1 \le i \le m \right\} = \frac{(B^{-1}b)_l}{(B^{-1}P_{m+k})_l}$$

则选取对应的基变量 x_l 为换出变量。

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

优化过程 (单纯形法Routine)

4. 用初等变换求改进了的基本可行解——旋转运算

假设 B 是线性规划 $\min\ z = CX,\ AX = b,\ X \ge 0$ 的可行基，则

$$AX = b \Rightarrow (B\ \ N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = b \Rightarrow (I, B^{-1}N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = B^{-1}b$$

令非基变量 $X_N=0$ ，则基变量 $X_B = B^{-1}b$

可得基本可行解 $X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

- 用逆阵 B^{-1} 左乘约束方程组的两端，等价于对方程组施以一系列的初等“行变换”。变换的结果是将系数矩阵 A 中的可行基 B 变换成单位矩阵 I，把非基变量系数列向量构成的矩阵N变换成$B^{-1}N$，把向量b 变换成 $B^{-1}b$

智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

由于行初等变换后的方程组 $(I, B^{-1}N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = B^{-1}b$

与原约束方程组 $AX = b$ 或 $(B\ \ N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = b$ 同解

且改进了的基本可行解 X' 只是在 X 的基变量的基础上用一个换入变量替代其中一个换出变量，其它的基变量仍然保持不变。这些基变量的系数列向量是单位矩阵I中的单位向量。为了求得改进的基本可行解 X'，只需对增广矩阵

$$(I, B^{-1}N, B^{-1}b)$$

施行初等行变换，将换入变量的系数列向量变换成换出变量所对应的单位向量即可。

智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

例1

$$\min z = -5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad + x_5 = 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

解：（1）确定初始的基本可行解

$C = (-5, -2, -3, 1, -1)$ $\qquad$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

单纯形法

$$B=(P_4P_5)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$，基变量 x_4,x_5 ，非基变量 x_1,x_2,x_3

$$X_B=\begin{pmatrix}x_4\\x_5\end{pmatrix},X_N=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},N=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&4&1\end{pmatrix},\begin{matrix}C_B=(1,-1)\\C_N=(-5,-2,-3)\end{matrix},b=\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}$$

$$X_N=0\rightarrow X_B=B^{-1}b=\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}\Rightarrow X=(0,0,0,8,7)^T$$

$$z=C_BB^{-1}b=(1,-1)\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}=1$$

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

$$X_B=\begin{pmatrix}x_4\\x_5\end{pmatrix},X_N=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},N=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&4&1\end{pmatrix},\begin{matrix}C_B=(1,-1)\\C_N=(-5,-2,-3)\end{matrix},b=\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}$$

(2) 检验 $X=(0,0,0,8,7)^T$ 是否最优。

检验向量

$$\sigma_N=C_N-C_BB^{-1}N=(-5,-2,-3)-(1,-1)\begin{pmatrix}1&2&2\\3&4&1\end{pmatrix}$$

$$=(-5,-2,-3)-(-2,-2,1)=(\underset{\sigma_1}{\underset{\uparrow}{-3}},\ \underset{\sigma_2}{\underset{\uparrow}{0}},\ \underset{\sigma_3}{\underset{\uparrow}{-4}})$$

因为 $\sigma_1=-3$， $\sigma_3=-4$ 均小于零，

所以 $X=(0,0,0,8,7)^T$ 不是最优解

智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION
AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

单纯形法

$$\sigma_N=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(-3,0,-4)$$

（3）基本可行解 $X=(0,0,0,8,7)^T$ 的改进

① 选取换入变量

因为**min{－3，－4}=－4**，取x_3为换入变量。

② 选取换出变量

$$B^{-1}b=\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix},B^{-1}P_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}>0 \quad 且 \min\left\{\frac{8}{2},\frac{7}{1}\right\}=\frac{8}{2}$$

选取x_4为换出变量.

西安電子科技大學 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

（4）求改进了的基本可行解X′——旋转运算

对约束方程组的增广矩阵施以初等行变换，使换入变量x_3所对应的系数列向量 $P_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$变换成换出变量$x_4$ 所对应的单位向量 $P_4=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

注意保持基变量x_5的系数列向量$P_5=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 为单位向量不变。

$$\begin{pmatrix}1&2&2&1&0&8\\3&4&1&0&1&7\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第一行除以 2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&1&\frac{1}{2}&0&4\\3&4&1&0&1&7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二行减去第一行}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&1&\frac{1}{2}&0&4\\\frac{5}{2}&3&0&\frac{-1}{2}&1&3\end{pmatrix}$$

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

可得改进的基本可行解。

$B=(P_3P_5)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，基变量 x_3,x_5，非基变量 x_1,x_2,x_4。

$$X_B=\begin{pmatrix}x_3\\x_5\end{pmatrix},X_N=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},N=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}&3&\frac{-1}{2}\end{pmatrix},\begin{matrix}C_B=(-3,-1)\\C_N=(-5,-2,1)\end{matrix},b=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

$$X_N=0\to X_B=B^{-1}b=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\Rightarrow\text{基本可行解}\quad X=(0,0,4,0,3)^T$$

目标函数值 $z=C_BB^{-1}b=(-3,-1)\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=-15$

易见目标函数值比原来的Z=1减小了， 再转向步骤(2)

智能感知与图像理解教育部重点实验室

KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

$$X_B=\begin{pmatrix}x_3\\x_5\end{pmatrix},X_N=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},N=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}&3&\frac{-1}{2}\end{pmatrix},\begin{matrix}C_B=(-3,-1)\\C_N=(-5,-2,1)\end{matrix},b=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

（2）检验 $X=(0,0,4,0,3)^T$ 是否最优。

检验向量 $\sigma_N=C_N-C_BB^{-1}N=(-5,-2,1)-(-3,-1)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}&3&\frac{-1}{2}\end{pmatrix}$

$$=(-5,-2,1)-(-4,-6,-1)=(\underset{\substack{\uparrow\\\sigma_1}}{-1},\ \underset{\substack{\uparrow\\\sigma_2}}{4},\ \underset{\substack{\uparrow\\\sigma_4}}{2})$$

$$\because\sigma_1=-1<0$$

所以 $X=(0,0,4,0,3)^T$ 仍不是最优解

智能感知与图像理解教育部重点实验室

KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

(3) 基本可行解 $X=(0,0,4,0,3)^T$ 的改进

① 选取换入变量

因为 $\sigma_1=-1<0$，取 x_1 为换入变量。

② 选取换出变量

$$B^{-1}b=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},\ B^{-1}P_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}>0 \quad \text{且}\ \min\left\{\frac{4}{1/2},\frac{3}{5/2}\right\}=\frac{3}{5/2}$$

选取 x_5 为换出变量.

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_5\end{pmatrix}=B^{-1}b-B^{-1}P_1x_1=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1/2\\5/2\end{pmatrix}x_1$$


智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

(4) 求改进了的基本可行解X"——旋转运算

对约束方程组的增广矩阵施以初等行变换，使换入变量 x_1 所对应的系数列向量 $P_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$ 变换成换出变量 x_5 所对应的单位向量 $P_5=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\3\end{matrix} & \begin{matrix}1\\0\end{matrix} & \begin{matrix}\frac{1}{2}\\\frac{-1}{2}\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}4\\3\end{matrix}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第二行乘以 }2/5}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 4\\1 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{6}{5}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第一行减以第二行的 }1/2\text{ 倍}}\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{5} & 1 & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{17}{5}\\1 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{6}{5}\end{pmatrix}$$


智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

单纯形法

可得改进的基本可行解。

$$B=(P_3P_1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$，基变量 x_3, x_1，非基变量 x_2, x_4, x_5

$$X_B=\begin{pmatrix}x_3\\ x_1\end{pmatrix}, X_N=\begin{pmatrix}x_2\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5}\\ \frac{6}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}, \begin{matrix}C_B=(-3,-5)\\ C_N=(-2,1,-1)\end{matrix}, b=\begin{pmatrix}\frac{17}{5}\\ \frac{6}{5}\end{pmatrix}$$

$$X_N=0 \rightarrow X_B=B^{-1}b=\begin{pmatrix}\frac{17}{5}\\ \frac{6}{5}\end{pmatrix} \Rightarrow$$ 基本可行解 $X=(\frac{6}{5},0,\frac{17}{5},0,0)^T$

目标函数值 $z=C_BB^{-1}b=(-3,-5)\begin{pmatrix}\frac{17}{5}\\ \frac{6}{5}\end{pmatrix}=-\frac{81}{5}$ 比 z =－15减小了，再转向步骤(2)

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

（2）检验 $X''=(\frac{6}{5},0,\frac{17}{5},0,0)^T$ 是否最优。

检验向量 $$\sigma_N=C_N-C_BB^{-1}N=(-2,1,-1)-(-3,-5)\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5}\\ \frac{6}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

$$=(-2,1,-1)-(-\frac{36}{5},-\frac{4}{5},-\frac{7}{5})=(\underset{\sigma_1}{\underset{\uparrow}{\frac{26}{5}}},\underset{\sigma_2}{\underset{\uparrow}{\frac{9}{5}}},\underset{\sigma_4}{\underset{\uparrow}{\frac{2}{5}}})$$

因为所有检验数均大于零，

所以 $X^*=X''=(\frac{6}{5},0,\frac{17}{5},0,0)^T$ 是最优解， $z^*=-\frac{81}{5}$

智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION
AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形表

$$A=\begin{pmatrix}B & N\end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix}X_B\\ X_N\end{pmatrix}$$

$$AX=b \Longrightarrow \begin{pmatrix}B & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_B\\ X_N\end{pmatrix}=b \Longrightarrow BX_B+NX_N=b$$

$$BX_B=b-NX_N \Longrightarrow X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N$$

$$X=\begin{pmatrix}X_B\\ X_N\end{pmatrix} \Longrightarrow X=\begin{pmatrix}B^{-1}b-B^{-1}NX_N\\ X_N\end{pmatrix}$$

令 $X_N=0$

则 $X=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\ 0\end{pmatrix}$

在约束方程组中，对于一个选定的基B，令所有的非基变量为零得到的解，称为相应于基B的基本解。

智能感知与图像理解教育部重点实验室 KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION



西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形表

$$Z=CX=(C_B,C_N)\begin{pmatrix}X_B\\ X_N\end{pmatrix}$$

$$=C_BX_B+C_NX_N$$

$$=C_B(B^{-1}b-B^{-1}NX_N)+C_NX_N$$

$$=C_BB^{-1}b+(C_N-C_BB^{-1}N)X_N$$

X_B 称为*最优解*

$$X_B=B^{-1}b\geq 0$$

$$\sigma_N=C_N-C_BB^{-1}N\geq 0$$

智能感知与图像理解教育部重点实验室 KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION



西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

在单纯形法的求解过程中，有下列重要指标：

- 每一个基本可行解的检验向量 $\boldsymbol{\sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N}$

根据检验向量可以确定所求得的基本可行解是否为最优解。如果不是最优又可以通过检验向量确定合适的换入变量。

- 每一个基本可行解所对应的目标函数值 $\boldsymbol{z = C_B B^{-1} b}$

通过目标函数值可以观察单纯形法的每次迭代是否能使目标函数值有效地减小，直至求得最优目标函数为止。

- 在单纯形法求解过程中，每一个基本可行解 X 都以某个经过初等行变换的约束方程组中的单位矩阵 I 为可行基。

当 $B=I$ 时，$B^{-1}=I$，易知： $\boldsymbol{\sigma_N = C_N - C_B N}$ $\boldsymbol{z = C_B b}$

智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

第六节 单纯形法和对偶问题

1 单纯形法一般原理

2 表格单纯形法

智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形法

线性规划问题基变换的表格表示

$$\min \quad z = CX$$
$$s.t. \quad AX = b$$
$$X \geq 0$$

C	0
A	b

$$\min \quad z = C_B X_B + C_N X_N$$
$$s.t. \quad BX_B + NX_N = b$$
$$X_B, X_N \geq 0$$

C_B	C_N	0
B	N	b

$$\min \quad z = C_B X_B + C_N X_N$$
$$s.t. \quad X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$
$$X_B, X_N \geq 0$$

C_B	C_N	0
I	$B^{-1}N$	B^{-1}b

智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形表

可将这些重要结论的计算设计成如下一个简单的表格，即单纯形表来完成：

C			C_B	C_N	θ
C_B	X_B	b	$x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m$	$x_{m+1} \quad x_{m+2} \quad \cdots \quad x_n$	
c_1 c_2 . . c_m	x_1 x_2 . x_m	b_1 b_2 . . b_m	I	N	θ_1 θ_2 . . θ_m
Z		C_Bb	0	$C_N - C_B N$	

智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

单纯形表

例2、试利用单纯形表求例1中的最优解解：

$$\min\ Z=-5x_1-2x_2-3x_3+x_4-x_5$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4 \qquad =8 \\ 3x_1+4x_2+x_3 \qquad +x_5=7 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0 \end{cases}$$

解：

$$C=(-5,-2,-3,1,-1) \qquad (Ab)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

单纯形表

得初始的单纯形表：

C			−5	−2	−3	1	−1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_4	8	1	2	2	1	0	
−1	x_5	7	3	4	1	0	1	
Z		1	−3	0	−4	0	0	

$$\sigma_N=C_N-C_BN \qquad z=C_Bb$$

初始基本可行解 $X=(0,0,0,8,7)^T$，Z= 1，

智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

单纯形表

C			−5	−2	−3	1	−1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_4	8	1	2	2	1	0	8/2
−1	x_5	7	3	4	1	0	1	7/1
Z		1	−3	0	−4	0	0	

x_3换入变量，x_4换出变量， 2 为主元进行旋转变换

C			−5	−2	−3	1	−1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
−3	x_3	4	1/2	1	1	1/2	0	
−1	x_5	3	5/2	3	0	-1/2	1	
Z		−15	−1	4	0	2	0	

基本可行解 $X=(0,0,4,0,3)^T$， $z=-15$

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

单纯形表

C			−5	−2	−3	1	−1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	x_3	4	1/2	1	1	1/2	0	4/1/2
−1	x_5	3	5/2	3	0	-1/2	1	$3/_{5/2}$
Z		−15	−1	4	0	2	0	

x_1换入变量，x_5换出变量， 5 / 2 为主元进行旋转变换

C			−5	−2	−3	1	−1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
−3	x_3	17/5	0	2/5	1	3/5	-1/5	
−5	x_1	6/5	1	6/5	0	-1/5	2/5	
Z		−81/5	0	26/5	0	9/5	2/5	

$\sigma_N=C_N-C_BN>0$ $X^*=\left(\frac{6}{5},0,\frac{17}{5},0,0\right)^T$ $z^*=-\frac{81}{5}$

智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION
AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

作业

作业：

习题三（page 68）
第2题

智能感知与图像理解教育部重点实验室
KEY LABORATORY OF INTELLIGENT PERCEPTION
AND IMAGE UNDERSTANDING OF MINISTRY OF EDUCATION

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

IPIU 智能感知与图像理解

Key Laboratory of Intelligent Perception and Image Understanding of Ministry of Education

THE END

Thanks for your participation!