



西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY



IPIL
智能感知与图像理解

最优化理论

第四章：一维搜索法

人工智能学院
智能感知与图像理解教育部重点实验室



第八节 一维搜索法

1

一维搜索法概念

2

搜索区间及其确定方法

3

对分法

4

对分法举例





第八节 一维搜索法

1

一维搜索法概念

2

搜索区间及其确定方法

3

对分法

4

对分法举例





一维无约束优化问题：

$$\min F(\alpha)$$

求解一维目标函数 $f(\alpha)$ 的极小点和极小值的数值迭代方法即为一维搜索方法。

☀ 一维优化方法是优化方法中最基本的方法。该类方法不仅用来解决一维目标函数的求优问题，而且更常用于多维优化问题中在既定方向上寻求最优步长的一维搜索。





一维搜索法概念

n 元函数 $f : D \subseteq R^n \rightarrow R$

求解无约束优化问题 $\min_{x \in R^n} f(x)$

求无约束的某可微函数的最优解，

根据一阶必要条件，

可令函数的梯度等于零，由此求得驻点；

然后用充分条件进行判别，求出所要的解

定理(必要条件) 设 $f : D \subseteq R^n \rightarrow R$

(1) x^* 为 D 的一个内点；

(2) $f(x)$ 在 x^* 可微；

(3) x^* 为 $f(x)$ 的极值点；

则 $\nabla f(x^*) = 0$ 。

定理(充分条件)

设 $f : D \subseteq R^n \rightarrow R$

(1) x^* 为 D 的一个内点；

(2) $f(x)$ 在 x^* 二次连续可微；

(3) $\nabla f(x^*) = 0$ ；

(4) $\nabla^2 f(x^*)$ 正定；

则 x^* 为 $f(x)$ 的严格局部极小点。





搜索算法概述

- 对某些较简单的函数，这样做有时是可行的；
- 但对一般 n 次函数 $f(x)$ 来说，由条件 $\nabla f(x) = 0$ 得到的是一个非线性方程组，解它相当困难。
- 对于不可微函数，当然谈不上使用这样的方法。
- 为此，常直接使用迭代法。





一维搜索法基本步骤

☀ 一维优化一般可分为两大步骤：

➤ 确定初始搜索区间 $[a, b]$ ；

该区间应为包含一维优化目标函数的极小点在内的单峰区间。

➤ 在搜索区间 $[a, b]$ 内寻找极小点。

优化算法的基本迭代公式：

$$X^{k+1} = X^k + \alpha^k S^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

当迭代初始点 X^k 及搜索方向 S^k 确定后，迭代所得的新点 X^{k+1} 取决于步长 α^k ，不同的 α^k 会得到不同的目标函数值 $f(X^{k+1})$ 。





一维搜索迭代法的基本思想

迭代法的基本思想

为了求函数 $f(x)$ 的最优解, 首先给定一个初始估计 x^0

然后按某种规划(即算法)找出比 x^0 更好的解 x^1 , $f(x^1) < f(x^0)$

再按此种规则找出比 x^1 更好的解 x^2 ,

如此即可得到一个解的序列 $\{x^k\}$,

若这个解序列有极限 x^* , $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\| = 0$, 则称它收敛于 x^* 。

若算法是有效的, 则它产生的解序列收敛于该问题的最优解。

计算机只能进行有限次迭代, 一般很难得到准确解, 而只能得到近似解。当达到满足的精度要求后, 即可停止迭代。





迭代法的终止条件

实用的终止条件是**根据相继两次迭代的结果**

(1) 根据相继两次迭代的绝对误差

$$|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon, \quad \|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon,$$

(2) 根据相继两次迭代的相对误差

$$\frac{|f(x^{k+1}) - f(x^k)|}{|f(x^k)|} < \varepsilon, \quad \frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^k\|} < \varepsilon,$$

(3) 根据目标函数梯度的模足够小

$$\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon$$





一维搜索迭代法的分类

迭代法的分类

根据是否计算目标函数和约束函数的导数

直接法：不需要导数信息
仅利用函数值，简单易用
非直接法：需要导数信息

利用导数信息，收敛性结果更强

根据迭代点是否沿某个方向产生

线搜索方法：迭代点沿某方向产生
每次迭代沿某个方向搜索下个迭代点，
最常见研究最多的方法

信赖域方法：迭代点在某区域内搜索产生
每次迭代在某区域内搜索下个迭代点，
近30年来发展起来的一类方法





在多维优化问题中，一维优化的目的是：在既定的 X^k 和 S^k 下寻求最优步长 α^k ，使迭代产生的新点 X^{k+1} 的函数值为最小，即：

$$\min F(X^k + \alpha^k S^k)$$

◆常用的一维搜索方法

●试探法

- 黄金分割法
- **fibonacci**方法
- 平分法
- 格点法

●插值类方法

- 牛顿法
- 抛物线法（二次插值法）





第八节 一维搜索法

1

一维搜索法概念

2

搜索区间及其确定方法

3

对分法

4

对分法举例





常用的一维直接法有**消去法**和**近似法**两类。它们都是从某个初始搜索区间出发，利用**单谷(峰)函数的消去性质**，逐步缩小搜索区间，直到满足精度要求为止。

定义(单谷(峰)函数): 设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的函数，若

1) $\exists x^* \in [a, b]$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小点，

2) 若对任意 $x_1, x_2, a \leq x_1 < x_2 \leq b$ ，满足：

1° 若 $x^* \geq x_2$ ，则 $f(x_1) > f(x_2)$;

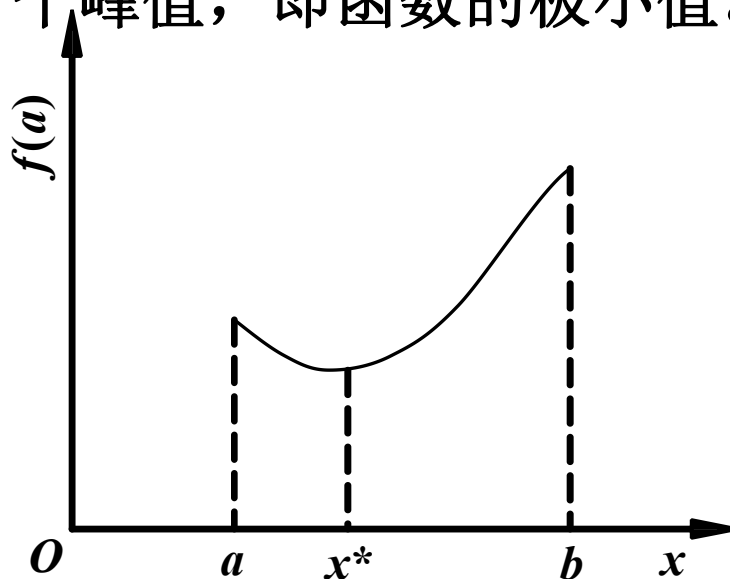
2° 若 $x^* \leq x_1$ ，则 $f(x_1) < f(x_2)$.

则称 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的单谷(峰)函数。





根据函数的变化情况，可将区间分为单谷（峰）区间和多谷（峰）区间。所谓单谷（峰）区间，就是在该区间内的函数变化只有一个峰值，即函数的极小值。

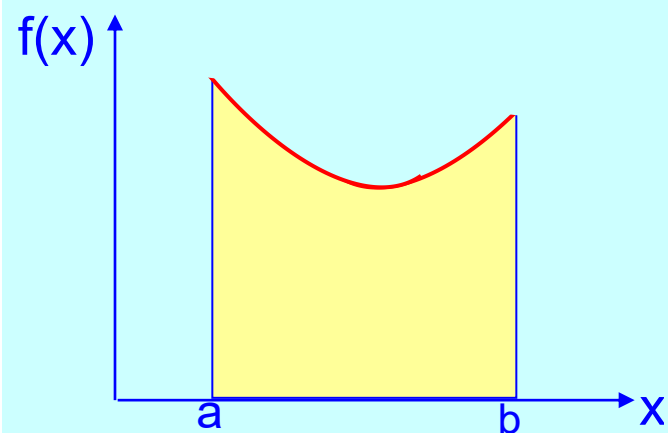


即在单谷（峰）区间内的极小值点 x^* 的左侧：函数呈下降趋势，而在单谷（峰）区间内的极小值点 x^* 的右侧：函数呈上升趋势。
也就是说，单峰区间的函数值呈“高-低-高”的变化特征。

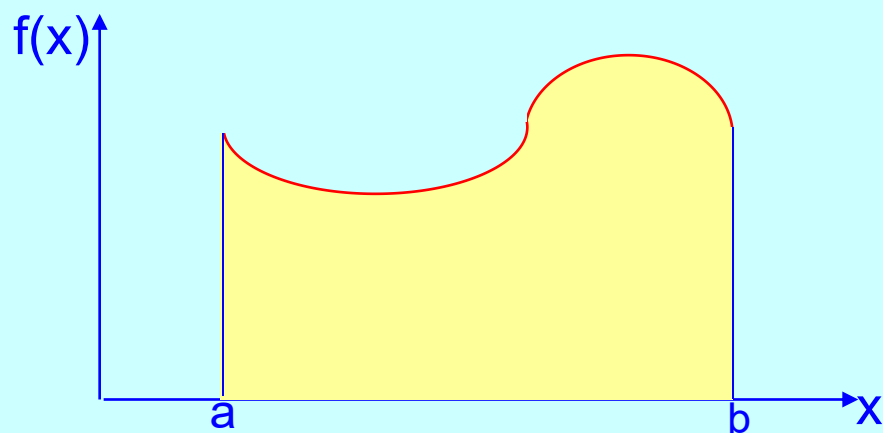




单谷函数



连续单谷(峰) 函数



非单单谷(峰)函数

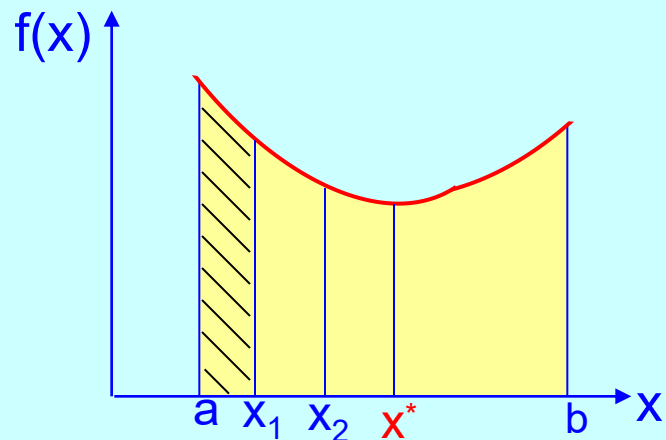




单谷函数

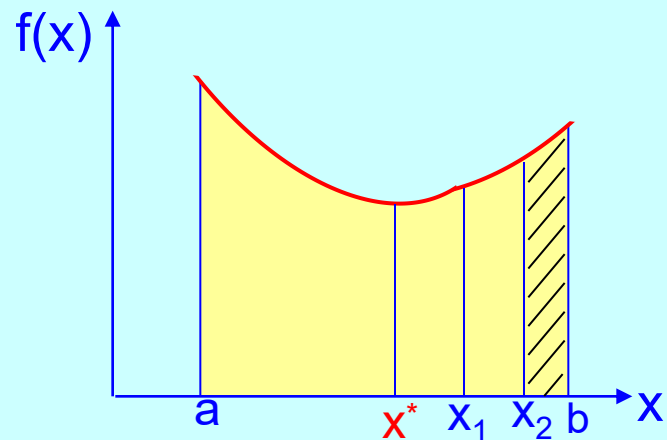
定理： 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的一个单谷(峰)函数， $x^* \in [a,b]$ 是其极小点， x_1 和 x_2 是 $[a, b]$ 上的任意两点，且 $a < x_1 < x_2 < b$ ，那么比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的值后，可得出如下结论：

(I) 若 $f(x_1) \geq f(x_2)$ ， $x^* \in [x_1, b]$



(I) 消去 $[a, x_1]$

(II) 若 $f(x_1) < f(x_2)$ ， $x^* \in [a, x_2]$



(II) 消去 $[x_2, b]$

在单谷(峰)函数的区间内，计算两个点的函数值，比较大小后，就能把搜索区间缩小。在已缩小的区间内，仍含有一个函数值，若再计算另一点的函数值，比较后就可进一步缩小搜索区间。



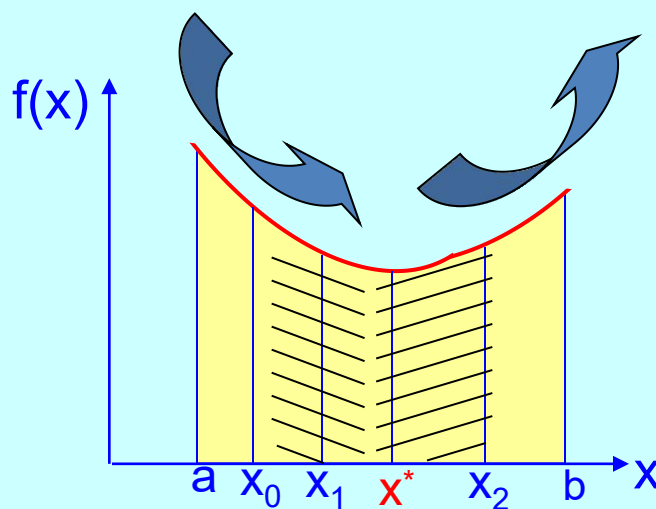
进退算法 (或称成功-失败法)

(一) 基本思想:

由单谷(峰)函数的性质可知, 函数值在极小点左边严格下降, 在右边严格上升。

从某个初始点出发, 沿函数值下降的方向前进, 直至发现函数值上升为止。

由两边高, 中间低的三点, 可确定极小点所在的初始区间。





(二) 算法

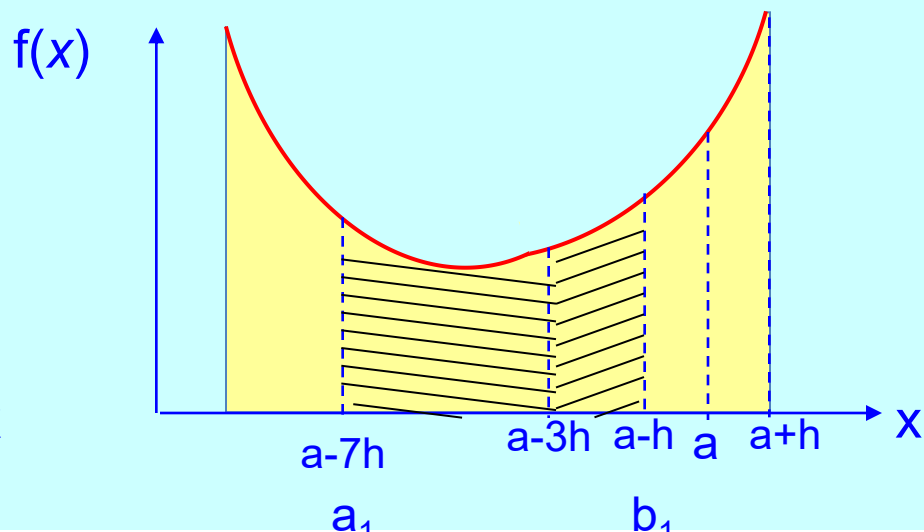
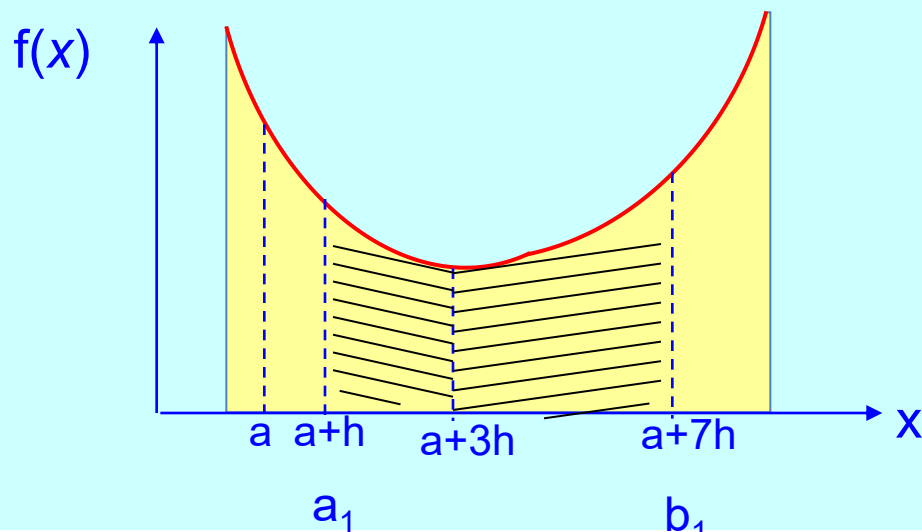
1、选定初始点 a 和步长 h ;

2、计算并比较 $f(a)$ 和 $f(a+h)$; 有前进(1)和后退(2)两种情况:

(1) 前进运算: 若 $f(a) \geq f(a+h)$, 则步长加倍, 计算 $f(a+3h)$ 。若 $f(a+h) \leq f(a+3h)$, 令 $a_1=a$, $a_2=a+3h$, 停止运算; 否则将步长加倍, 并重复上述运算。

(2) 后退运算: 若 $f(a) < f(a+h)$, 则将步长改为 $-h$, 计算 $f(a-h)$, 若 $f(a-h) \geq f(a)$, 令 $a_1=a-h$, $a_2=a+h$, 停止运算; 否则将步长加倍, 继续后退。

——仅仅找区间!





(三) 几点说明

缺点：效率低；

优点：可以求搜索区间；

注意： h 选择要适当，初始步长不能选得太小。





例：利用“进退算法”法求函数 $f(x) = x^3 - 2x + 1$ 的搜索区间，
取初始点 $x = -\frac{1}{2}$ ，步长 $h = \frac{1}{2}$ 。

解：取初始点 $x = -\frac{1}{2}$ ，步长 $h = \frac{1}{2}$ ，

$$f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}, \quad f(x+h) = f\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f(0) = 1,$$

因为 $f(x) > f(x+h)$ ，搜索成功，步长加倍；

$$\text{计算 } f(x+h+2h) = f(x+3h) = f\left(-\frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2}\right) = f(1) = 0,$$

因为 $f(x+h) > f(x+3h)$ ，搜索成功，步长加倍；

$$\text{计算 } f(x+3h+4h) = f(x+7h) = f\left(-\frac{1}{2} + 7 \times \frac{1}{2}\right) = f(3) = 22,$$

因为 $f(x+3h) < f(x+7h)$ ，搜索失败，停止迭代；

得到搜索区间为 $[x+h, x+7h] = [0, 3]$ 。





第八节 一维搜索法

1

一维搜索法概念

2

搜索区间及其确定方法

3

对分法

4

对分法举例





对分法(二分法)---基本思想

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 求函数 f 在 $[a, b]$ 的极小点, 就是求函数导数为零的点。

如果 $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$, 则在 (a, b) 内一定存在一点 x , 使得 $f'(x) = 0$ 。

为求极小点, 可取 $x_0 = \frac{a+b}{2}$,

若 $f'(x_0) = 0$, x 为最小点, $x_0 = x^*$;

$f'(x_0) > 0$, x_0 在上升段, $x^* < x_0$, 去掉 $[x_0, b]$;

$f'(x_0) < 0$, x_0 在下降段, $x^* > x_0$, 去掉 $[a, x_0]$ 。





对分法---基本思想

用 $[a, x_0]$ 或者 $[x_0, b]$ 作新的区间 $[a, b]$ ，继续这个过程，逐步将区间 $[a, b]$ 缩小，当区间 $[a, b]$ 的长度充分小时，可将 $[a, b]$ 的中点取做极小点的近似点。





对分法---计算步骤

步骤1: 计算 $x_0 = \frac{a+b}{2}$

步骤2: 若 $f'(x_0) < 0$, 令 $a = x_0$, 转步骤3;

若 $f'(x_0) > 0$, 令 $b = x_0$, 转步骤3;

若 $f'(x_0) = 0$, 停止, $x^* = x_0$ 。

步骤3: 若 $|b - a| < \varepsilon$, 则 $x^* = \frac{a+b}{2}$, 停止, 否则, 转步骤1.

优点: 计算量较少, 而且总能收敛到一个局部极小点。

缺点: 收敛速度较慢





第八节 一维搜索法

1

一维搜索法概念

2

搜索区间及其确定方法

3

对分法

4

对分法举例





例：试用二分法求目标函数 $f(x) = x^3 - 2x + 1$ 的最优解。

给定初始区间 $[0,2]$ ，收敛精度 $\varepsilon=0.004$ 。

解： $f'(x) = 3x^2 - 2$ ，因为 $f'(0) = -2$ ， $f'(2) = 10$ ，所以函数 $f(x) = x^3 - 2x + 1$ 在 $[0,2]$ 内有极小点。

第一次区间缩短计算过程：

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = 1, \quad f'(x_0) = f'(1) = 1 > 0, \quad \text{故 } b := x_0 = 1,$$

$$[a, b] = [0, 1], \quad |b - a| = 1 > 0.004 = \varepsilon;$$

$$[a, b] = [0, 1], \quad f'(x) = 3x^2 - 2,$$





第二次区间缩短计算过程：

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}, f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4} < 0, \quad \text{故 } a := x_0 = \frac{1}{2},$$

$$[a, b] = \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad |b - a| = \frac{1}{2} > 0.004 = \varepsilon;$$

第三次区间缩短计算过程：

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{3}{4}, f'(x_0) = f'\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{5}{16} < 0, \quad \text{故 } a := x_0 = \frac{3}{4},$$

$$[a, b] = \left[\frac{3}{4}, 1\right], \quad |b - a| = \frac{1}{4} > 0.004 = \varepsilon;$$





对分法举例

迭代次数	$x_0=(a+b)/2$	$f'(x_0)$	$[a,b]$	$ b-a $
第1次	$x_0=1$	1	$[0,1]$	1
第2次	$x_0=1/2$	-5/4	$[1/2,1]$	1/2
第3次	$x_0=3/4$	-5/16	$[3/4,1]$	1/4
第4次	$x_0=7/8$	19/64	$[3/4,7/8]$	1/8
第5次	$x_0=13/16$	-0.0195	$[13/16,7/8]$	1/16
第6次	$x_0=27/32$	0.0136	$[13/16,27/32]$	1/32
第7次	$x_0=53/64$	0.0574	$[13/16,53/64]$	1/64
第8次	$x_0=105/128$	0.0184	$[13/16,105/128]$	1/128
第9次	$x_0=209/256$	-0.0004	$[209/256,105/128]$	1/256

迭代9次后, $|b-a|=0.00391<0.004$, 故 $x^* \approx 0.81836$.





西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY



IPIL
智能感知与图像理解

**Key Laboratory of Intelligent Perception and
Image Understanding of Ministry of Education**

THE END

Thanks for your participation!