

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 设 $y = f(x)$, 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 + 2x)}{6x} = 3$, 则 $dy|_{x=x_0} = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 所确定, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. 设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, $a \neq 0$, 则 $\int_{-a}^a x[f(x) + f(-x)]dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 函数 $F(x) = \int_1^x (2 - \frac{1}{\sqrt{t}})dt$ ($x > 0$) 的单调减少区间为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. 与直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=t-1 \\ z=t+2 \end{cases}$ 及 $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$ 都平行, 且过原点的平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二. 单项选择题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 设 $f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|(x^2 - 1)}$, 则下列结论中错误的是 ()
(A) $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ 为 $f(x)$ 的间断点
(B) $x = -1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点
(C) $x = 0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点
(D) $x = 1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点
2. 设 $\alpha(x) = \int_0^{\sin x} \sin 2t dt$, $\beta(x) = \int_0^{2x} \ln(1+t) dt$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 相比较是 ()
(A) 等价无穷小 (B) 同阶但非等价无穷小 (C) 高阶无穷小 (D) 低阶无穷小
3. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(1) = 0$, 则在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 ()
(A) $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$ (B) $f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi}$ (C) $f(\xi) = -\frac{f'(\xi)}{\xi}$ (D) $f(\xi) = \frac{f'(\xi)}{\xi}$
4. 若 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(0) = 1$, $\varphi(x) = \int_0^x tf(x-t)dt$, 则 ()
(A) $x = 0$ 是 $\varphi(x)$ 的极大值点 (B) $x = 0$ 是 $\varphi(x)$ 的极小值点
(C) $\varphi(x)$ 没有极值点 (D) 以上结论都不对

5. $\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n} > 0$ 是数列 $\{a_n\}$ 严格单调增加 ($a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$) 的 ()

(A) 充分条件 (B) 必要条件 (C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

三. 解答下列各题 (每小题 6 分, 共 24 分)

1. 证明方程 $x^5 + ax - 1 = 0$ (常数 $a > 0$) 在开区间 $(0, 1)$ 内有且仅有一个实根.

2. 求由参数方程 $\begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2} \\ y = \arctan t \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

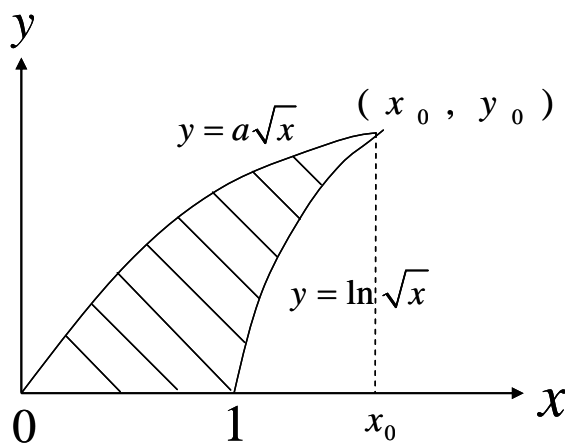
3. 已知 $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \arccos x + C$, 求 $\int \frac{x}{f(x)} dx$.

4. 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$, 求 $\int_1^3 f(x-2) dx$.

四. (9 分) 已知点 $A(1, 0, 0)$ 及点 $B(0, 2, 1)$, 试在 Z 轴上求一点 C , 使 $\triangle ABC$ 的面积为最小.

五. (9 分) 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$.

六. (12 分) 已知曲线 $y = a\sqrt{x}$ ($a > 0$) 与曲线 $y = \ln \sqrt{x}$ 在点 (x_0, y_0) 处有公共切线 (如下图所示), 求:



(1) 常数 a 及切点 (x_0, y_0) ;

(2) 两曲线与 x 轴所围平面图形的面积 A ;

(3) 两曲线与 x 轴所围平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

七. (6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) \leq M$ (M 为常数),

$f(a) = 0$, 证明: $\int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{2} M (b-a)^2$