参考答案及评分标准

一． 填空题（每小题 4 分，共 32 分）

1. $\frac{1}{e}$ ； 2. $(-1)^{n-1}(n-1)!$； 3. $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})\cup(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$；

4. $\frac{1}{12}$； 5. $\frac{2}{3}\pi^3+\pi$； 6. $\ln(1+\sqrt{2})$ ； 7. 3； 8. $\frac{1}{2}$.

二． 单选题（每小题 4 分，共 12 分）

1. D; 2. C; 3. C.

三．（8 分）

解 可取所求平面的法向量 $\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)\times(2,\ 2,\ 1)=(-1,\ 1,\ 0)$ 4 分

所求平面方程为 $x-y=0$ 8 分

四．（8 分）解（1）当 $x<0$ 时， $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-xe^{nx}}{x+e^{nx}}=\frac{1}{x}$，

当 $x>0$ 时， $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{-nx}-x}{xe^{-nx}+1}=-x$， 当 $x=0$ 时， $f(x)=1$. 4 分

（2） $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\infty$， $x=0$ 是第二类间断点； 6 分

连续区间为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 8 分

五．（8 分）解 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1+4y^2}}$， $\frac{dy}{dx}=\sqrt{1+4y^2}$ 4 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2\sqrt{1+4y^2}}\cdot 8y\cdot\sqrt{1+4y^2}=4y$$ 8 分

六．（8 分）解 原式 $=\int\sqrt{\arctan x}\,d\arctan x+\frac{1}{2}\int x\sin 2x dx$

$$=\frac{2}{3}(\arctan x)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}\int x d\cos 2x$$ 4 分

$$=\frac{2}{3}(\arctan x)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+c$$ 8 分

七．（8 分）

解 $V=\pi\int_{-4}^{4}[(a+\sqrt{4^2-x^2})^2-(a-\sqrt{4^2-x^2})^2]dx$ 4 分

$=4\pi a\int_{-4}^{4}\sqrt{4^2-x^2}dx=32\pi^2 a$ 6 分

由题意知 $V=32\pi^2 a=160\pi^2$ 得 $a=5$ 8 分

八．（8 分）

解 设通过点 $M(a,b)$ 的直线方程为 $\frac{x}{A}+\frac{y}{B}=1$，$A,B$ 待定

则有 $\frac{a}{A}+\frac{b}{B}=1$ 因此 $B=\frac{bA}{A-a}$，从而三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}AB=\frac{b}{2}\cdot\frac{A^2}{A-a} \qquad (A>a)$$ 4 分

令 $\frac{dS}{dA}=\frac{b}{2}\cdot\frac{A(A-2a)}{(A-a)^2}=0$， 得唯一驻点 $A=2a$

当 $a<A<2a$ 时，$\frac{dS}{dA}<0$；当 $A>2a$ 时，$\frac{dS}{dA}>0$，

因此 $A=2a$ 为 $S=\frac{b}{2}\cdot\frac{A^2}{A-a}$ 的极小值点且唯一，从而是最小值点，

此时 $B=\left.\frac{bA}{A-a}\right|_{A=2a}=2b$，于是可得所求直线方程为

$$\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$$ 8 分

九．（8 分）证：

$\because f(x)\in C[0,2],\ \therefore f(x)$ 在 $[0,2]$ 上取得最小值 m 与最大值 M 2 分

由 $3m\le f(0)+f(1)+f(2)\le 3M$ 得 $m\le 1\le M$，

由介值定理 $\exists c\in[0,2]$ 使 $f(c)=1=f(3)$ 4 分

故由罗尔定理知， $\exists\xi\in(c,3)\subset(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$ 8 分