

高等数学（上）试题（A）

2017 年 1 月

一、单项选择题（每题 4 分，共 20 分）

1. 函数 $f(x) = x \sin x$ ()

- (A) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界; (B) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界;
(C) 当 $x \rightarrow \infty$ 时极限存在; (D) 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大量.

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = x \sin^3 2x$ 是 x^n 的同阶无穷小, 则 $n =$ ()

- (A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

3. 设函数 $f(x) = \frac{|x|}{x^2 - x}$, 则 ()

- (A) $f(x)$ 有 3 个间断点; (B) $x = 1$ 为 $f(x)$ 的可去型间断点;
(C) $x = 0$ 为 $f(x)$ 的跳跃型间断点; (D) $x = 0$ 为 $f(x)$ 的无穷型间断点.

4. 设函数 $f(x) (x > 0)$ 连续, 且 $\int x^{-2} f(x) dx = e^{x^2} + C$, 则 $f(x) =$ ()

- (A) $2x^2 e^{x^2}$; (B) $2x^3 e^{x^2}$; (C) $x^3 e^{x^2}$; (D) $x^4 e^{x^2}$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处 ()

- (A) 取得极小值; (B) 取得极大值;
(C) $f'(0)$ 不存在; (D) $f'(0)$ 存在且不为零.

二、填空题（每题 4 分，共 20 分）

6. 设 $f(t) = \lim_{x \rightarrow 0} t(1+x)^{\frac{2t}{x}}$, 则 $f'(t) =$ _____.

7. 函数 $y = 2x^3 - 3x^2$, $x \in [-1, 1]$ 的最小值为_____.

8. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$, 则 $\int f(x) dx =$ _____.

9. 定积分 $\int_{-1}^1 (x \sin^2 x + x^2) dx$ 的值为_____.

10. 以 $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$ 为通解的二阶微分方程是_____.

三、计算题（每题 8 分，共 40 分）

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

12. 设 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

13. 计算定积分 $\int_0^{n\pi} \sqrt{1+\cos 2x} dx$ (n 为正整数).

14. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x}$ 满足条件 $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ 的特解.

15. 计算曲线 $y = e^x$ 与 x 轴之间位于第二象限的平面图形的面积 S , 以及此平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积 V .

四、(8 分) 证明不等式: $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$ ($x > 0$).

五、(8 分) 设对任意的 $x > 0$, 曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处切线在 y 轴上的截距等于

$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$, 求 $f(x)$ 的一般表示式.

六、(4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 求证:

(1) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$;

(2) 存在 $\eta \in (a, b)$, 使得 $-2f(\eta) + f'(\eta) = 0$.