最优化理论
第三章：线性规划

人工智能学院
智能感知与图像理解实验室

第六节 单纯形法和对偶问题

1. 大M法
2. 两阶段法
3. 对偶问题原理
4. 对偶问题求解

第六节 单纯形法和对偶问题

1 大M法

2 两阶段法

3 对偶问题原理

4 对偶问题求解

借助人工变量

- 由于所添加的剩余变量的技术系数为–1，不能作为初始可行基变量，为此引入一个人为的变量，以便取得初始基变量，故称为人工变量。
- 由于人工变量在原问题的解中是不能存在的，应尽快被迭代出去，因此人工变量在目标函数中对应的价值系数应具有惩罚性，称为罚系数。罚系数的取值视解法而定。
- 两种方法---大M法 & 二阶段法

大M法

大M法首先将线性规划问题化为标准型。如果约束方程组中包含有一个单位矩阵I，那么已经得到了一个初始可行基。否则在约束方程组的左边加上若干个非负的人工变量，使人工变量对应的系数列向量与其它变量的系数列向量共同构成一个单位矩阵。以单位矩阵为初始基，即可求得一个初始的基本可行解。

为了求得原问题的初始基本可行解，必须尽快通过迭代过程把人工变量从基变量中替换出来成为非基变量。为此可以在目标函数中赋予人工变量一个绝对值很大的正系数M。这样只要基变量中还存在人工变量，目标函数就不可能实现极小化。 以后的计算与单纯形表解法相同，M只需认定是一个很大的正数即可。



大M法

$$\min \quad Z = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3$$
$$s.t\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\min \quad Z = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3$$
$$s.t\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad - x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\min \quad Z = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6$$
$$s.t\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad + x_6 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad - x_5 \qquad = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$



大M法

C			10	8	7	0	0	M	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
M	x_6	6	2	1	0	-1	0	1	3
7	x_3	4	1	1	1	0	-1	0	4
Z		6M+28	3-2M	1-M	0	M	7	0	
10	x_1	3	1	1/2	0	-1/2	0	1/2	3/1/2
7	x_3	1	0	1/2	1	1/2	-1	-1/2	1/1/2
Z		37	0	-1/2	0	3/2	7	M-3/2	
10	x_1	2	1	0	-1	-1	1	1	
8	x_2	2	0	1	2	1	-2	-1	
Z		36	0	0	1	2	6	M-2	

$$X^* = (2,2,0)^T \qquad Z^* = 36$$



大M法

注意：

求解结果出现所有的的检验数大于零，若基变量中含非零的人工变量，则无可行解，否则，有最优解。



大M法

用大M法求解下面的线性规划问题：

$$\max\ Z=-x_1+2x_2$$

$$\begin{cases} x_1+x_2\geq 2 \\ -x_1+x_2\geq 1 \\ \qquad x_2\leq 3 \\ x_1,x_2>=0 \end{cases}$$

解：首先将原问题化为标准型

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3 \qquad\qquad =2 \\ -x_1+x_2 \qquad -x_4 \qquad =1 \\ \qquad x_2 \qquad\qquad +x_5=3 \\ x_j>=0,j=1,2,3,4,5 \end{cases}$$



大M法

添加人工变量 x_6，x_7，并在目标函数中分别赋予M

$$\min Z = x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + \boxed{Mx_6 + Mx_7}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 1 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ x_j >= 0, j = 1,2,3,4,5,6,7 \end{cases}$$

大M法

C			1	—2	0	0	0	M	M	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
M	x_6	2	1	1	-1	0	0	1	0	2/1
M	x_7	1	-1	1	0	-1	0	0	1	1/1
0	x_5	3	0	1	0	0	1	0	0	3/1
Z		3M	1	-2-2M	M	M	0	0	0	
M	x_6	1	2	0	-1	1	0	1	-1	1/2
—2	x_2	1	-1	1	0	-1	0	0	1	-
0	x_5	2	1	0	0	1	1	0	-1	2/1
Z		-2+M	-1-2M	0	M	-2-M	0	0	2+2M	
1	x_1	1/2	1	0	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2	
—2	x_2	3/2	0	1	-1/2	-1/2	0	1/2	1/2	
0	x_5	3/2	0	0	1/2	1/2	1	-1/2	-1/2	
Z		- 5/2	0	0	-1/2	- 3/2	0	1/2+M	3/2+M	



大M法

C			1	—2	0	0	0	M	M	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_1	1/2	1	0	-1/2	1/2	0			1/2/1/2
- 2	x_2	3/2	0	1	-1/2	-1/2	0			-
0	x_5	3/2	0	0	1/2	1/2	1			3/2 /1/2
Z		- 5/2	0	0	- 1/2	-3/2	0			
0	x_4	1	2	0	-1	1	0			
- 2	x_2	2	1	1	-1	0	0			
0	x_5	1	-1	0	1	0	1			+
Z		- 4	3	0	- 2	0	0			
0	x_4	2	1	0	0	1	1			
- 2	x_2	3	0	1	0	0	1			
0	x_3	1	-1	0	1	0	1			
Z		- 6	1	0	0	0	2			

最优解 $X^*=(0,3,1,2,0)^T$, 最优值 $Z^*=-6$



西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

第六节 单纯形法和对偶问题

1 大M法

2 两阶段法

3 对偶问题原理

4 对偶问题求解

两阶段法

- 第一阶段的任务是将人工变量尽快迭代出去，从而找到一个没有人工变量的基础可行解。
- 第二阶段以第一阶段得到的基础可行解为初始解，采用原单纯型法求解。
- 若第一阶段结束时，人工变量仍在基变量中，则原问题无解。
- 为了简化计算，在第一阶段重新定义价值系数如下：

$$
\text{目标函数为 min 时}\begin{cases} c_j = 1 & \text{当} x_j \text{为人工变量时} \\ c_j = 0 & \text{当} x_j \text{不是人工变量时} \end{cases}
$$

$$
\text{目标函数为 max 时}\begin{cases} c_j = -1 & \text{当} x_j \text{为人工变量时} \\ c_j = 0 & \text{当} x_j \text{不是人工变量时} \end{cases}
$$

两阶段法

例5、用两阶段法求解线性规划问题。

$$\max Z = -x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ \quad\quad x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 >= 0 \end{cases}$$

解：首先将问题化为标准型

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \quad\quad = 2 \\ -x_1 + x_2 \quad - x_4 \quad = 1 \\ \quad\quad x_2 \quad\quad + x_5 = 3 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

两阶段法

$$\min Z = x_6 + x_7$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_6 \qquad = 2 \\ -x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad\qquad + x_7 = 1 \\ \qquad x_2 \qquad\quad + x_5 \qquad\qquad\quad = 3 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4,5,6,7 \end{cases}$$

由于辅助线性规划的目标函数是极小化，因此最优解的判别准则应为：

$$\sigma_N = C_N - C_B N \geq 0$$

两阶段法

第一阶段

C			0	0	0	0	0	1	1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_6	2	1	1	-1	0	0	1	0	2/1
1	x_7	1	-1	1	0	-1	0	0	1	1/1
0	x_5	3	0	1	0	0	1	0	0	3/1
w		3	0	-2	1	1	0	0	0	
1	x_6	1	2	0	-1	1	0	1		1/2
0	x_2	1	-1	1	0	-1	0	0		-
0	x_5	2	1	0	0	1	1	0		2/1
w		1	-2	0	1	-1	0	0		
0	x_1	1/2	1	0	-1/2	1/2	0			
0	x_2	3/2	0	1	-1/2	-1/2	0			
0	x_5	3/2	0	0	1/2	1/2	1			
w		0	0	0	0	0	0			

辅助规划
所有检验数：

$$\sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N$$

$\min\ w=0$

原问题已得
一个初始基本
可行解，

$$X=(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0,0,\frac{3}{2})$$



两阶段法

由上表可知，通过若干次旋转变换，原问题的约束方程组已变换成包含一个单位矩阵的约束方程组

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\
-x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
x_2 + x_5 = 3 \\
x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
x_1 - \dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{1}{2}x_4 = \dfrac{1}{2} \\
x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4 = \dfrac{3}{2} \\
\dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{1}{2}x_4 + x_5 = \dfrac{3}{2} \\
x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5
\end{cases}
$$

该约束方程组可作为第二阶段初始约束方程组，将目标函数则还原成原问题的目标函数，可继续利用单纯形表求解。



两阶段法

第二阶段

C			-1	2	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	x_1	1/2	1	0	-1/2	1/2	0	(1/2)/(1/2)
2	x_2	3/2	0	1	-1/2	-1/2	0	-
0	x_5	3/2	0	0	1/2	1/2	1	(3/2)/(1/2)
Z		5/2	0	0	1/2	3/2	0	
0	x_4	1	2	0	-1	1	0	
2	x_2	2	1	1	-1	0	0	
0	x_5	1	-1	0	1	0	1	
Z		4	-3	0	2	0	0	
0	x_4	2	1	0	0	1	1	
2	x_2	3	0	1	0	0	1	
0	x_3	1	-1	0	1	0	1	
Z		6	-1	0	0	0	-2	

由于原线性规划的目标函数是极大化，因此最优解的判别准则应为:

$$\sigma_N = C_N - C_B N \le 0$$

得最优解 $X^*=(0,3,1,2,0)^T$，目标函数值maxZ=6，与用大M法的结果相同。

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

第六节 单纯形法和对偶问题

1 大M法

2 两阶段法

3 对偶问题原理

4 对偶问题求解



对偶问题

重新考虑食谱问题。以出售奶和蛋给需要维生素的人的食品杂货商的利益出发，他知道奶和蛋按其维生素Vc和Vb的含量而有一定的价值。他的问题是确定出售维生素Vc的价格x和维生素Vb的价格 y：他不能将价格订得高于奶和蛋的市场流行价，否则将失去他的顾客；他希望商店的总收入为最大。

维生素	奶中含量	蛋中含量	每日需求
Vc(mg)	2	4	40
Vb(mg)	3	2	50
单价(US$)	3	2.5	

对偶问题原理

$\text{Max} \;\; 40x + 50y$	极大化目标函数
$\text{s.t.} \;\; 2x + 3y \le 3$	
$4x + 2y \le 2.5$	可行区域（单纯形）
$x, y \ge 0.$	可行解

$\text{Min} \;\; 3x + 2.5y$	极小化目标函数
$\text{s.t.} \;\; 2x + 4y \ge 40$	
$3x + 2y \ge 50$	可行区域（单纯形）
$x, y \ge 0.$	可行解

对偶问题原理

对比一下从消费者和供应商各自的利益导出的两个问题，我们不难发现两个问题可以通过下述简单的变换，而相互转化：

极小化费用 Min	⟷	极大化利润Max
大于等于约束 ≥	⟷	小于等于约束 ≤
食品费用	⟷	价格约束

当你把食谱问题的对偶问题解出以后（**练习**），你会发现一个（重要的）事实：这两个问题的最优值是相等的！

思考题：在数学上，是不是还有一些对偶的问题和概念？

对偶问题原理

定义 设原线性规划问题为

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&s.t \begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\
x_j \ge 0 \left(j = 1,2,\cdots,n \right)
\end{cases}
\end{aligned}
$$

则称下列线性规划问题

$$
\begin{aligned}
&Min \quad W = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\
&s.t \begin{cases}
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\
a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\
\cdots \\
a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \ge c_n \\
y_i \ge 0 \left(i = 1,2,\cdots,m \right)
\end{cases}
\end{aligned}
$$

上述对偶问题称为*对称型对偶问题*。

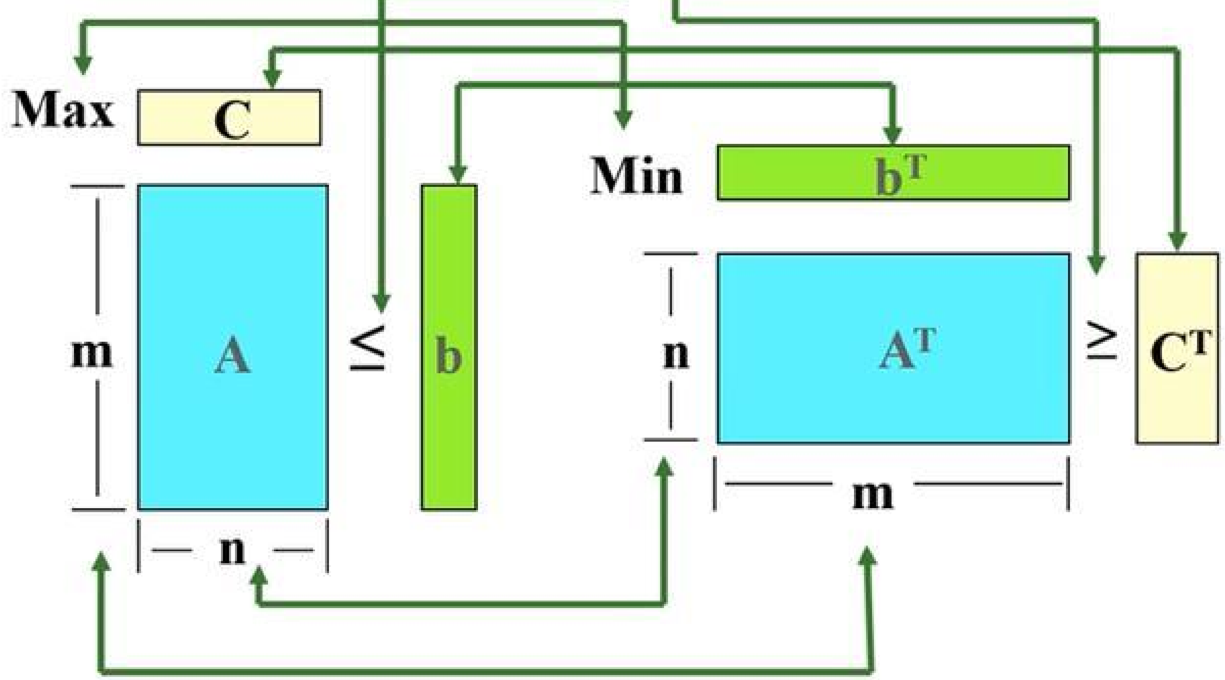
原问题简记为(P)，对偶问题简记为(D)



对偶问题原理

对偶关系对应表

原始问题	对偶问题
Max Z=CX	*Min W=Yb*
s.t. $\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$	s.t. $\begin{cases} YA^T \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$



对偶问题原理

对偶关系对应表

	原问题	对偶问题
目标函数类型	Max	Min
目标函数系数 与右边项的对应关系	目标函数系数 右边项系数	右边项系数 目标函数系数
变量数与约束数 的对应关系	变量数n 约束数m	约束数 n 变量数m
原问题变量类型与 对偶问题约束类型 的对应关系	变量 ≥ 0 变量 ≤ 0 变量 无限制	约束 $\geq$ 约束 $\leq$ 约束 $=$
原问题约束类型与 对偶问题变量类型 的对应关系	约束 $\geq$ 约束 $\leq$ 约束 $=$	变量 ≤ 0 变量 ≥ 0 变量 无限制



对偶问题原理

重点：

1）目标函数的目标互为相反。(max,min)

2）目标函数的系数是另一个约束条件的右端向量

3）约束系数矩阵是另一个的约束系数矩阵的转置

4）约束方程的个数与另一个的变量的个数相等

原问题		对偶问题
$\max Z = CX$		$\min \omega = b^T Y^T$
$s.t.\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$	对称式对偶	$s.t.\begin{cases} A^T Y^T \ge C^T \\ Y \ge 0 \end{cases}$
max	⟷	**min**
限定向量b	⟷	**价值向量**
价值向量c	⟷	**限定向量**
m个约束，n个变量	⟷	**n个约束，m个变量**
约束条件“≤”	⟷	**变量“≥”**
变量“≥”	⟷	**约束条件“≥”**

对偶问题原理

Max $Z=CX$
s.t. $AX \le b$
$X \ge 0$

对偶的本质

Min $W=Yb$
s.t. $YA \ge C$
$Y \ge 0$

Max $W'=-Yb$
s.t. $-YA \le -C$
$Y \ge 0$

对偶的本质

Min $Z'=-CX$
s.t. $-AX \ge -b$
$X \ge 0$



对偶问题原理

- **对偶问题（B）的对偶规划为线性规划（A）**
  - 它表明原规划问题（A）和对偶规划问题（B）是互为对偶的。也就是说，如果（B）是（A）的对偶，那么（A）也是（B）的对偶。这就为以后的讨论带来方便。不难理解，如果当A具有某种性质时可以推出B的某些性质，于是可以无需另加证明地得到：当B具有某种性质时，问题A也具有那些性质。



对偶问题求解

例1：写出下列问题的对偶问题

$$\min Z = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$$

$$s.t.$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 3 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 \ge -5 \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_1 \ge 0, x_{2,} x_3 \text{为自由变量}, x_4 \le 0, \end{cases}$$



对偶问题求解

$$\min Z = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$$

$s.t.$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 3 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 \ge -5 \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_1 \ge 0, x_2, x_3\text{为自由变量}, x_4 \le 0, \end{cases}$$

$$\longrightarrow$$

$$\max W = 3y_1 - 5y_2 + 2y_3$$

$s.t.$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_3 \le 3 \\ -2y_1 + y_2 - 3y_3 = 2 \\ 3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3 \\ 4y_1 + 4y_2 - 4y_3 \ge 4 \\ y_1 \le 0, y_2 \ge 0, y_3\text{为自由变量} \end{cases}$$



对偶问题求解

例2：写出下列问题的对偶问题

$$\max Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$s.t.$$

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 2$$

$$3x_1 - x_2 + 6x_3 \ge 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3$为自由变量



对偶问题求解

$$\max Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$s.t.$$

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 2$$

$$3x_1 - x_2 + 6x_3 \ge 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3\text{为自由变量}$$

$$\longrightarrow$$

$$\min W = 2y_1 + y_2 + 4y_3$$

$$s.t.$$

$$2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 1$$

$$3y_1 - y_2 + y_3 \le 4$$

$$-5y_1 + 6y_2 + y_3 = 3$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \le 0, y_3\text{为自由变量}$$

对偶问题原理

定理3.3（弱对偶定理）

- 当原问题A是求最大值max，而对偶问题是求最小值时，如果X_0是原问题的任意可行解，Y_0是对偶问题的任意可行解，则有以下关系式成立：

$$CX_0 \le Y_0 B$$


对偶问题原理

定理3.3（弱对偶定理）

$\hat{X}$，$\hat{y}$ 分别为(P), (D)的可行解，则有 $C\hat{X} \le \hat{y}b$

证明：由 $A\hat{X} \le b$, $\hat{y} \ge 0$ 有 $\hat{y}A\hat{X} \le \hat{y}b$

由 $\hat{y}A \ge C$, $\hat{X} \ge 0$ 有 $\hat{y}A\hat{X} \ge C\hat{X}$

所以 $C\hat{X} \le \hat{y}A\hat{X} \le \hat{y}b$



对偶问题原理

定理3.4(对偶定理) 若线性规划A存在最优解，则对偶规划B也存在最优解，并且它们的最优值相等；相反地，若规划B存在最优解，则规划A也存在最优解，并且它们的最优值相等。

证明： (1) 当X*和Y*为原问题和对偶问题的一个可行解

有

$$AX^* \le b \qquad Y^* A \ge C$$

$$Y^* AX^* \le Y^* b \qquad Y^* AX^* \ge CX^*$$

原问题目标函数值

$$\boxed{CX^* \le Y^* AX^* \le Y^* b}$$

对偶问题目标函数值

所以原问题的目标函数值有上界，即可找到有限最优解；对偶问题有下界，也存在有限最优解。



对偶问题原理

(2) 当X^*为原问题的一个最优解，B为相应的最优基,通过引入松弛变量Xs,将问题(P)转化为标准型

$$Max \quad Z = CX + 0 \bullet X_s$$

$$s.t \quad \begin{cases} AX + IX_s = b \\ X, X_s \geq 0 \end{cases}$$

令 $\hat{X}^* = \begin{pmatrix} X^* \\ X_s^* \end{pmatrix}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} - C_B B^{-1} \begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C - C_B B^{-1} A & -C_B B^{-1} \end{pmatrix} \leq 0$$

$$-C_B B^{-1} \leq 0 \Rightarrow C_B B^{-1} \geq 0 \quad \text{令} \quad Y^* = C_B B^{-1} \geq 0$$

$$C - C_B B^{-1} A \leq 0 \Rightarrow C - Y^* A \leq 0 \Rightarrow Y^* A \geq C$$

所以Y^*是对偶问题的可行解，对偶问题的目标函数值为

$$W^* = Y^* b = C_B B^{-1} b$$

$$\boxed{Z^* = W^*}$$

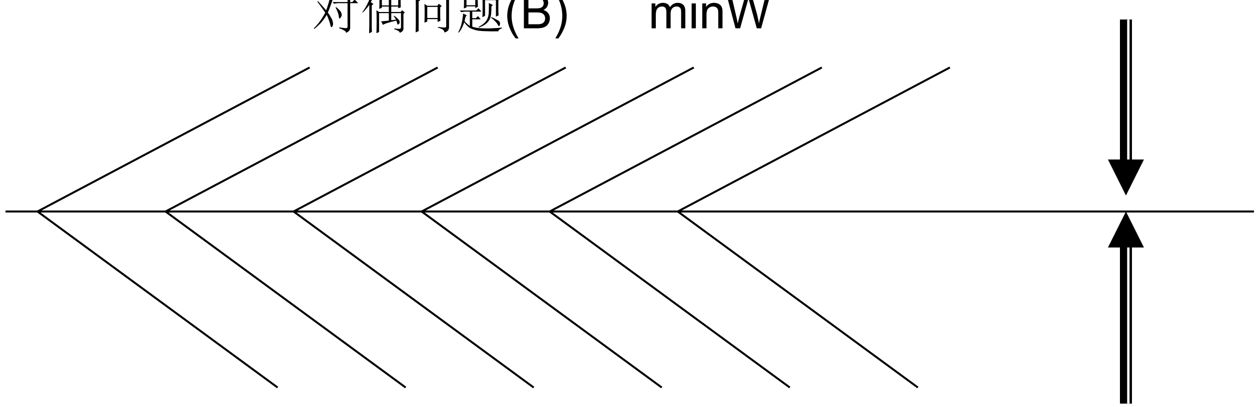
X^*是原问题的最优解，原问题的目标函数值为

$$Z^* = CX^* = C_B B^{-1} b$$

对偶问题原理

以上三个定理可以这样记忆

- 原问题A和对偶问题B如果有可行解，则它们的可行解区域只可能相接，不可能相交。两个区域的交界线即是它们的最优解。



$$c\bar{x} = \bar{y}b$$

对偶问题原理

定理3.5(互补松弛定理) 若 X，Y分别为(P)，(D)的可行解，Ys与Xs分别为的松弛变量。则X，Y为最优解的充要条件是

$$\begin{cases} Y(b-AX)=0 \\ (YA-C)X=0 \end{cases}$$

同时成立

证：（必要性）

原问题

$$Max \quad Z=CX$$
$$s.t \quad \begin{cases} AX+X_s=b \\ X,X_s\geq 0 \end{cases}$$

对偶问题

$$Min \quad W=Yb$$
$$s.t \quad \begin{cases} YA-Y_s=c \\ Y,Y_s\geq 0 \end{cases}$$

$$AX+X_s=b \quad (X_s=b-AX)$$

$$YA-Y_s=C \quad (Y_s=YA-C)$$

$$\boxed{YAX+YX_s=Yb}$$

$$\boxed{YAX-Y_sX=CX}$$

$$\boxed{YX_s+Y_sX=0}$$



对偶问题原理

定理3.5(互补松弛定理)

1. 假如一个问题的某个变量取非零数，则相应问题的另外一个约束条件必取等式

2.或者一个问题中的约束条件不取等式，则相应于另一个问题中的变量为零。

对偶问题求解

例3：已知线性规划问题

$$\min Z = 2x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3\text{无约束} \end{cases}$$

要求：1）写出对偶问题；

2）已知原问题的最优解为$x_1 = -5$，$x_2 = 0$，$x_3 = -1$；

试根据对偶理论直接求出对偶问题最优解。


对偶问题求解

解：1）对偶问题

$$\max \ \omega = 4y_1 + 6y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_2 \leq -1 \\ y_1 - y_2 = 2 \\ y_1, y_2 \text{无约束} \end{cases}$$

2）由互补松弛定理，因原问题最优解中$x_1 = -5 \neq 0$，必使对偶问题第一个约束条件为等式，于是有，

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 = 2 \\ y_1 - y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = -2$$



对偶问题求解

例 4:已知下列线性规划问题的对偶问题的最优解为(6/5, 1/5),求该线性规划问题的最优解.

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 20 \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4) \end{cases}$$

其对偶问题为:

$$\min W = 20y_1 + 20y_2 \qquad \begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 1 \\ 2y_1 + y_2 \ge 2 \\ 2y_1 + 3y_2 \ge 3 \\ 3y_1 + 2y_2 \ge 4 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$



对偶问题求解

原问题的松弛变量为: X_5 , X_6 ,

对偶问题的剩余变量为: Y_3,Y_4, Y_5,Y_6,

将(6/5,1/5)代入1)和2)知: Y_3,Y_4, 均不为0,于是由松弛互补定理知:

$$X_1, X_2, =0$$

又由 $Y_1>0$,$Y_2>0$和松弛互补定理知:

$$X_5, X_6, =0$$

从而,原问题的约束变为:

$$\begin{cases} 2X_3 + 3X_4 = 20 \\ 3X_3 + 2X_4 = 20 \end{cases}$$

解此方程得: $X_3 = X_4 = 4$

于是原问题的最优解为:(0,0,4,4)



对偶问题求解

例5：已知线性规划问题

$$\min w=2x_1+3x_2+5x_3+2x_4+3x_5$$

$$x_1+x_2+2x_3+x_4+3x_5\geq 4$$

$$2x_1-x_2+3x_3+x_4+x_5\geq 3$$

$$x_j\geq 0，j=1，2，\ldots，5$$

已知其对偶问题的最优解为$y_1^*=4/5$，$y_2^*=3/5$；$z=5$。试用对偶理论找出原问题的最优解 。

对偶问题求解

- 解：先写出它的对偶问题

$$\max z=4y_1+3y_2$$

$$y_1+2y_2\le 2 \qquad ①$$

$$y_1-y_2\le 3 \qquad ②$$

$$2y_1+3y_2\le 5 \qquad ③$$

$$y_1+y_2\le 2 \qquad ④$$

$$3y_1+y_2\le 3 \qquad ⑤$$

$$y_1,\ y_2\ge 0$$

对偶问题求解

将$y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5$的值代入约束条件，

得②=1/5<3，③=17/5<5，④=7/5<2

它们为严格不等式；由互补松弛性得

$$x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0。$$

因y_1，$y_2 \geq 0$；原问题的两个约束条件应取等式，故有

$$x_1^* + 3x_5^* = 4，2x_1^* + x_5^* = 3$$

求解后得到$x_1^* = 1, x_5^* = 1$；故原问题的最优解为

$$X^* = (1，0，0，0，1)^T；w^* = 5$$

第六节 单纯形法和对偶问题

1 大M法

2 两阶段法

3 对偶问题原理

4 对偶问题求解


对偶单纯形法

- 对偶单纯形法的计算步骤如下：

(1) 根据线性规划问题，列出初始单纯形表。检查b列的数字，若都为非负，检验数都为非正，则已得到最优解。停止计算。若检查b列的数字时，至少还有一个负分量，检验数保持非正，那么进行以下计算。

(2) 确定*换出变量*。按$min\ \{(B^{-1}b)_i\ /\ (B^{-1}b)_i<0=(B^{-1}b)_l$对应的基变量$x_l$为换出变量

(3) 确定*换入变量*。在单纯形表中检查x_l所在行的各系数$\alpha_{lj}(j=1,2,\ldots,n)$。若所有$\alpha_{lj}\geq0$，则无可行解，停止 计算。若存在$\alpha_{lj}<0$ $(j=1,2,\ldots,n)$, 计算



对偶单纯形法

- 对偶单纯形法的计算步骤如下：

按θ规则所对应的列的非基变量x_k为换入变量，这样才能保持得到的对偶问题解仍为可行解。

(4) 以α_{1k}为主元素，按原单纯形法在表中进行迭代运算，得到新的计算表。

重复步骤(1)～(4)。

对偶单纯形法

原问题

$$\max \quad Z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 5x_2 \le 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

例：

$$\min \omega = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$$

$$\begin{cases} 6y_2 + y_3 \ge 2 \\ 5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 1 \\ y_i \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

小结：在单纯形表格中

1.得到原问题的基本可行解的同时，其检验数的相反数就构成了对偶问题的一个基本解。

2. 原 对

松弛变量 $\longleftrightarrow$ 决策变量

决策变量 $\longleftrightarrow$ 松弛变量

基变量 $\longleftrightarrow$ 非基变量

非基变量 $\longleftrightarrow$ 基变量

对偶单纯形法

Min 问题

C_j			-15	-24	-5	0	0
C_B^T	基	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	y_4	$\boxed{-2}$	0	[-6]	-1	1	0
0	y_5	-1	-5	-2	-1	0	1
σ_j			-15	-24	-5	0	0
-24	y_2	1/3	0	1	1/6	-1/6	0
0	y_5	$\boxed{-1/3}$	-5	0	[-2/3]	-1/3	1
σ_j			-15	0	-1	-4	0
-24	y_2	1/4	-5/4	1	0	-1/4	1/4
-5	y_3	1/2	15/2	0	1	1/2	-3/2
σ_j			-15/2	0	0	-7/2	-3/2
			x_3	x_4	x_5	x_1	x_2

对偶单纯形法

		C_j	2	1	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	x_4	24	[6]	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
	σ_j		2	1	0	0	0
0	x_3	15	0	5	1	0	0
2	x_1	4	1	1/3	0	1/6	0
0	x_5	1	0	[2/3]	0	-1/6	1
	σ_j		0	1/3	0	-1/3	0
0	x_3	15/2	0	0	1	5/4	-15/2
2	x_1	7/2	1	0	0	1/4	-1/2
1	x_2	3/2	0	1	0	-1/4	3/2
	σ_j		0	0	0	-1/4	-1/2
			y_4	y_5	y_1	y_2	y_3

Max
问题

对偶问题求解

单纯形法

（1）保持原问题的可行性，即 $b_i \geq 0$

（2）最优性：$\sigma \leq 0$

对偶单纯形法

（1）保持对偶问题的可行性，即 $\sigma \leq 0$

（2）最优性：$b_i \geq 0$

即使原问题达到可行；

（3）同时得到原问题与对偶问题最优解

对偶问题求解

从以上求解过程可以看到对偶单纯形法有以下优点：

- （1）初始解可以是非可行解，当检验数都为负数时就可以进行基的变换，这时不需要加入人工变量，因此可以简化计算。
- （2）当变量多于约束条件，对这样的线性规划问题用对偶单纯形法计算可以减少计算工作量，因此对变量较少，而约束条件很多的线性规划问题，可先将它变换成对偶问题，然后用对偶单纯形法求解。



作业：

习题三（page 68）
5，6题

西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

IPIU
智能感知与图像理解

Key Laboratory of Intelligent Perception and Image Understanding of Ministry of Education

THE END

Thanks for your participation!