一、选择题

A　B　B　A

二、填空题

1　　$(1,-1)$　　$3\ln|x-2|+2\ln|x+1|+C$　　$\pi(\frac{e^2}{2}+\frac{11}{6})$　　$\frac{\pi}{3}$　　$\frac{3}{2}$

三、计算题(每小题 7 分，共 35 分)

1．解　把 $f(x)=e^x$ 代入得 $e^x-1=xe^{ux}$，得 $u=\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$，则

$$\lim_{x\to0^+}u=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(e^x-1)-\ln x}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{xe^x-e^x+1}{(e^x-1)x}=\lim_{x\to0^+}\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x+xe^x-e^x}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}.$$

2.解 由题意知

$$f(x)=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

故

$$\int xf'(x)\,dx=\int x\,df(x)=xf(x)-\int f(x)dx$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

3．解　由于

$$I=\int_0^{2\pi}x\cos^8 x\,dx=\int_{2\pi}^0(2\pi-t)\cos^8 t(-dt)\quad(x=2\pi-t)$$

$$=\int_0^{2\pi}(2\pi-t)\cos^8 t\,dt=2\pi\int_0^{2\pi}\cos^8 t\,dt-\int_0^{2\pi}t\cos^8 t\,dt=2\pi\int_0^{2\pi}\cos^8 t\,dt-I,$$

所以 $I=\int_0^{2\pi}x\cos^8 x\,dx=\pi\int_0^{2\pi}\cos^8 t\,dt=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 t\,dt=4\pi\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{35}{64}\pi^2$.

4.**解**　$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=-\int_0^{+\infty}\sin^2 x\,d(\frac{1}{x})=-[\frac{\sin^2 x}{x}]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}dx$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}d(2x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

5.**解**　所给微分方程 $y''-3y'-10y=0$ 的特征方程为 $r^2-3r-10=0$，其根为 $r_1=-2$，$r_2=5$，因此方程的通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{5x}$．由初值 $y(0)=2$ 条件得 $C_1+C_2=2$，又 $y'=-2C_1e^{-2x}+5C_2e^{5x}$，由初值 $y'(0)=10$ 条件 $-2C_1+5C_2=10$，解得 $C_1=0$，$C_2=2$，因此所求特解为 $y=2e^{5x}$.

四、(8 分)解　由 $\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)}{x}=2019$ 及函数 $\varphi(x)$ 连续得：$\varphi(0)=0,\varphi'(0)=2019$.

当 $x\neq0$ 时，令 $u=xt$，则 $f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\varphi(u)du$.

当 $x=0$ 时，$f(0)=\int_0^1\varphi(0)dt=\varphi(0)=0$．所以

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\int_0^x \varphi(u)\mathrm{d}u, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)=\dfrac{x\varphi(x)-\int_0^x \varphi(u)\mathrm{d}u}{x^2}$ ，

当 $x=0$ 时， $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \varphi(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{2x}=\dfrac{2019}{2}$ ，

故 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\varphi(x)-\int_0^x \varphi(u)\mathrm{d}u}{x^2}, x\neq 0,\\ \dfrac{2019}{2}, \qquad x=0.\end{cases}$

五、(9 分)解 方程化为

$$y'+\frac{y}{x}=\left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

令 $\dfrac{y}{x}=u$ ，则 $y=xu$ ， $y'=u+xu'$ 带入方程得 $u+xu'+u=u^2$ ，即

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(u-2)}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|=\ln|x|+\ln|C|，即 \frac{u-2}{u}=\pm C^2x^2,$$

记 $C_1=\pm C^2$，所以 $\dfrac{u-2}{u}=C_1x^2$．将 $u=\dfrac{y}{x}$ 回代，整理得

$$y=\frac{2x}{1-C_1x^2},$$

由 $y(1)=1$ 得 $C_1=-1$，所以所求得特解为 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$．

六、 (8 分)证明 (1)因为

$$F(x)=\int_0^x f(y)(x-y)\mathrm{d}y+\int_x^1 f(y)(y-x)\mathrm{d}y=x\int_0^x f(y)\mathrm{d}y-\int_0^x yf(y)\mathrm{d}y+\int_x^1 yf(y)\mathrm{d}y-x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y,$$

所以

$$F'(x)=\int_0^x f(y)\mathrm{d}y+xf(x)-xf(x)-xf(x)-\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y+xf(x)=\int_0^x f(y)\mathrm{d}y-\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y,$$

因此 $F''(x)=f(x)+f(x)=2f(x)$，即得 $f(x)=\dfrac{1}{2}F''(x)$．

(2)将函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{3}$ 处展为泰勒公式得，

$$f(x)=f(\frac{1}{3})+f'(\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{1}{3})^2\leq f(\frac{1}{3})+f'(\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})$$

则有 $f(x^2)\leq f(\dfrac{1}{3})+f'(\dfrac{1}{3})(x^2-\dfrac{1}{3})$，不等式两端关于 x 积分得，

$$\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x\leq\int_0^1[f(\frac{1}{3})+f'(\frac{1}{3})(x^2-\frac{1}{3})]\mathrm{d}x=f(\frac{1}{3}).$$