一、选择题　　1.C　　2.D　　3.B　　4.C　　　　　　　　　　仅供西电高等数学教师参考

二、填空题　1. 3　2. $6y^2$　3. $5\mathrm{d}x+4\mathrm{d}y$　4. $\frac{8\pi}{15}$　5. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$　6. 6　7. $\frac{5}{2}$

三、解　设所求切点为(x_0,y_0,z_0)，则该点切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\frac{1}{2}x_0,2y_0,-1).$$

因为切平面与已知平面$x+2y+z=0$平行，所以$\boldsymbol{n}$与已知平面的法向量平行，由此可得

$$\frac{\frac{1}{2}x_0}{1}=\frac{2y_0}{2}=\frac{-1}{1},$$

故切点为$(-2,-1,1)$，切平面方程为$(x+2)+2(y+1)+(z-1)=0$，即

$$x+2y+z+3=0;$$

法线方程为

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

四、解　利用多元复合函数的求导法则，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y+F(u)+xF'(u)(-\frac{y}{x^2})=y+F(u)-\frac{y}{x}F'(u),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+xF'(u)\cdot\frac{1}{x}=x+F'(u),$$

故　$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x[y+F(u)-\frac{y}{x}F'(u)]+y[x+F'(u)]=xy+xF(u)+xy=z+xy$ 或 $2xy+xF(u)$.

五、解　在极坐标系下积分区域D可表示为

$$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le\rho\le R\cos\theta.$$

于是

$$\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{R^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin^3\theta|)\,\mathrm{d}\theta=\frac{2R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{9}(3\pi-4)R^3.$$

六、解　这里$P(x,y)=y^2+2x\sin y$，$Q(x,y)=x^2\cos y-x^3$，因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x\cos y-3x^2$，$\frac{\partial P}{\partial y}=2y+2x\cos y$，所以由格林公式得

$$\oint_L(y^2+2x\sin y)\,\mathrm{d}x+(x^2\cos y-x^3)\,\mathrm{d}y=\iint_D(-3x^2-2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-3\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-2\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中D表示点A、B、E和F围成的正方形区域，记D_1为三角形ΔABO，由对称性知$\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$，以及

$$3\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\iint_{D_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x^2\mathrm{d}y=12\int_0^1x^2(1-x)\,\mathrm{d}x=1.$$

因此

$$\oint_L(y^2+2x\sin y)\,\mathrm{d}x+(x^2\cos y-x^3)\,\mathrm{d}y=-1.$$

七、解　(1)令$u_n=(-1)^{n-1}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$，则$|u_n|=2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{3^n}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{\frac{\pi}{3^{n+1}}\sin\frac{\pi}{3^n}}=\frac{2}{3}<1,$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$收敛，可得级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$绝对收敛

(2)由于$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$，所以级数的收敛半径为$R=\frac{1}{\rho}=1$.

对于$x=-1$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$成为交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，由莱布尼兹判别法知该交错级数收敛.

对于$x=1$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$成为调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，此时级数发散.

故级数的收敛域为$[-1,1)$，于是令$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，则$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^n}{n})'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，因此

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\int_0^x s'(x)\mathrm{d}x+s(0)=-\ln(1-x).$$

八、解　记$\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\le 1,\\ z=-1,\end{cases}$取上侧，则$\iint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$. 由于

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\left(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma\right)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1}(-1)\mathrm{d}S=-\pi$$

再由第一类曲面积分与第二类曲面积分之间的关系及高斯公式，得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\left(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma\right)\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{-\frac{1}{\cos\varphi}}r^4\mathrm{d}r$$

$$=\frac{6\pi}{5}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin\varphi\cdot\frac{1}{\cos^5\varphi}\mathrm{d}\varphi=-\frac{6\pi}{5}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\cos^{-5}\varphi\mathrm{d}(\cos\varphi)=-\frac{9\pi}{10},$$

故$I=-\frac{9\pi}{10}-(-\pi)=\frac{\pi}{10}$.

九、证明　令$f(x,y,z)=x+2y-2z$，记$L=x+2y-2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$，则由

$$\begin{cases}L_x=1+2x\lambda=0,\\ L_y=2+2y\lambda=0,\\ L_z=-2+2z\lambda=0,\\ L_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0,\end{cases}$$

得驻点为$A(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$以及$B(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$. 于是$f(A)=3$，$f(B)=-3$，所以

$$\sqrt[3]{2}\le\sqrt[3]{x+2y-2z+5}\le 2,$$

由于
$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}\sqrt[3]{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\sqrt[3]{2}\cdot\frac{4\pi}{3}>\frac{3\pi}{2},\quad \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\cdot\frac{4\pi}{3}<3\pi,$$

因此
$$\frac{3\pi}{2}<\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}\sqrt[3]{x+2y-2z+5}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z<3\pi.$$