最优化理论
第四章：一维搜索法

人工智能学院
智能感知与图像理解教育部重点实验室

第九节 一维搜索法II

1. Newton切线法
2. 黄金分割法
3. 抛物线插值法

第九节 一维搜索法II

1 Newton切线法

2 黄金分割法

3 抛物线插值法



Newton切线法

牛顿法是一种函数逼近法，基本思想是：在极小点附近用函数的二阶泰勒多项式近似代替目标函数，从而求得目标函数的极小点的近似值。

对 $f(x)$ 在 x_k 点二阶泰勒展开：

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{1}{2}f''(x_k)(x-x_k)^2+o((x-x_k)^2)$$

略去高阶项得

$$f(x)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{1}{2}f''(x_k)(x-x_k)^2$$

两边对x求导， $f'(x)\approx f'(x_k)+f''(x_k)(x-x_k)$

令 $f'(x)=0$ ，得到

$$x\approx x_k-\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

当f是二次函数时，一次迭代就可得到极小点。

Newton切线法

取

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

作为新的迭代点，继续迭代，直到达到精度，这样就得到了函数 f 的一个驻点 x^*。以上过程即**Newton法**。

在一定条件下（例如 $f''(x^*)>0$ ），这个驻点是极小点。

Newton切线法

步骤1：给定初始点 $x_1 \in R, \varepsilon > 0$,令 $k=1$。

步骤2：计算$f'(x_k), f''(x_k)$。

步骤3：若 $\left|f'(x_k)\right| < \varepsilon$ 停止，$x^* \approx x_k$，否则转步骤4。

步骤4：计算

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

令 $k=k+1$ 转步骤2。

特点：收敛速度快，局部二阶收敛。

缺点：须计算二阶导数，工作量大；对初始点要求高，要求初始点离极小点不太远，否则有可能使极小化发散或收敛到非极小点；局部收敛。

Newton切线法

例： 试用Newton法求函数 $f(x)=x^4-4x^3-6x^2-16x+4$ 的最优解。$\left(x_0=6,\varepsilon=10^{-2}\right)$

解： $f'(x)=4x^3-12x^2-12x-16,\ \ f''(x)=12x^2-24x-12,$

$$x_1=x_0-\frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}=6-\frac{f'(6)}{f''(6)}=6-\frac{89}{69}=4.75$$

$f'(x_1)=f'(4.75)=84.94>10^{-2}$, 继续迭代；

$$x_2=x_1-\frac{f'(x_1)}{f''(x_1)}$$

$$=4.75-\frac{f'(4.75)}{f''(4.75)}=4.75-\frac{84.94}{144.75}=4.163$$

$f'(x_2)=f'(4.163)=14.666>10^{-2}$, 继续迭代；

Newton切线法

$$x_3 = x_2 - \frac{f'(x_2)}{f''(x_2)} \qquad x_2 = 4.163$$

$$= 4.163 - \frac{f'(4.163)}{f''(4.163)} = 4.163 - \frac{14.666}{96.055} = 4.010$$

$f'(x_3) = f'(4.010) = 0.8436 > 10^{-2}$，继续迭代；

$$x_4 = x_3 - \frac{f'(x_3)}{f''(x_3)}$$

$$= 4.010 - \frac{f'(4.010)}{f''(4.010)} = 4.010 - \frac{0.8436}{84.7212} = 4.00004$$

$f'(x_4) = f'(4.00004) = 0.0034 < 10^{-2}$，

得到近似解 $x^* \approx 4.00004$.

Newton法收敛速度快

第九节 一维搜索法II

1. Newton切线法
2. 黄金分割法
3. 抛物线插值法



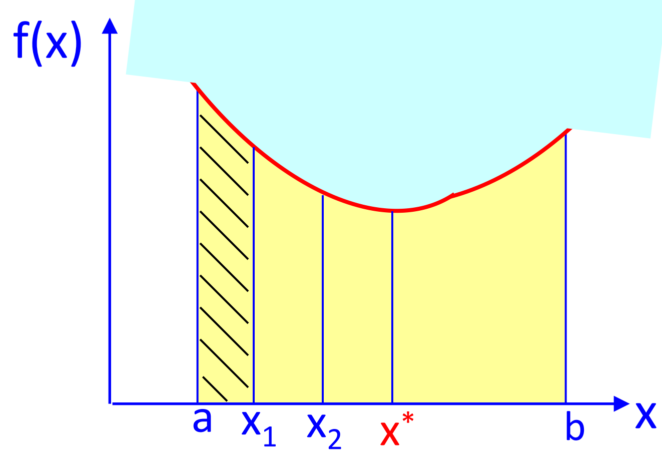
黄金分割法

定理： 设 f：$R\to R$ 在 $[a, b]$ 上是单谷(峰)函数，$a\le x_1 < x_2 \le b$。那么

1° 若 $f(x_1)\ge f(x_2)$，则 $x^* \in [x_1, b]$，如左下图

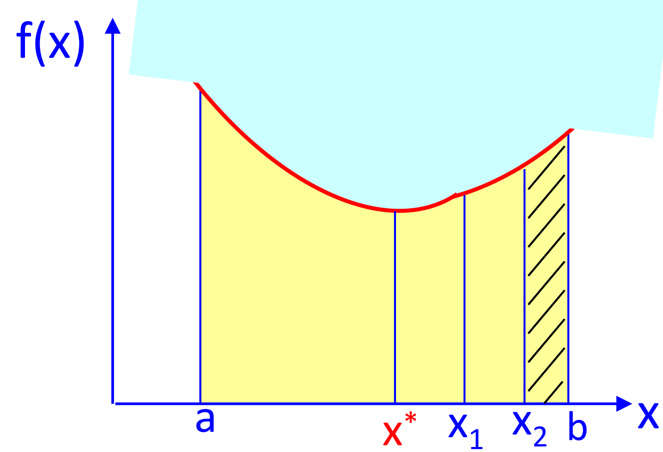
2° 若 $f(x_1)< f(x_2)$，则 $x^* \in [a, x_2]$，如右下图

（I） 若$f(x_1)\ge f(x_2)$，$x^*\in[x_1,b]$



(I) 消去$[a, x_1]$

（II） 若$f(x_1) < f(x_2)$，$x^*\in[a,x_2]$



(II) 消去$[x_2, b]$

黄金分割法

通过上述定理，选二点 $x_1 < x_2$，比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$，可去掉 $[a, x_1]$ 或者 $[x_2, b]$. 考虑条件：

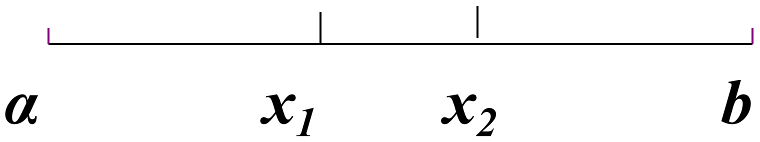
1° 对称原则： $x_1 - a = b - x_2$ ……(1)

（使"坏"的情况去掉，区间长度不小于"好"的情况）

2° 保持缩减比原则 t =(保留的区间长度 / 原区间长度) 不变。

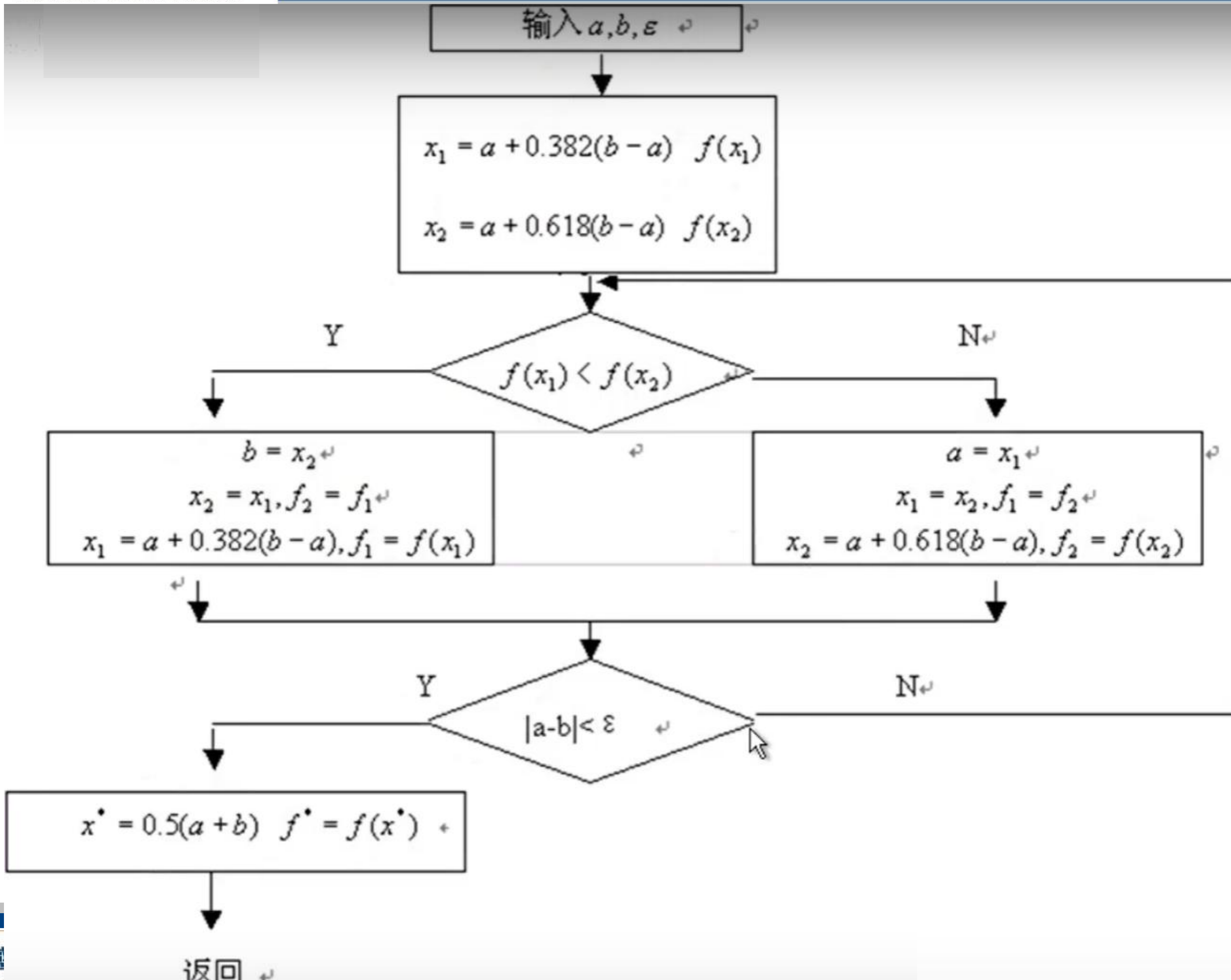
（使每次保留下来的节点，x_1 或 x_2，在下一次的比较中成为一个相应比例位置的节点）。

推导缩减比 t： 如图设第一次保留 $[a, x_2]$（去掉 $[x_2, b]$），第二次保留的长度为 $[a, x_1]$，则



$$t = \frac{x_2 - a}{b - a} = \frac{x_1 - a}{x_2 - a} \cdots\cdots(2)$$

黄金分割法


输入a,b,ε
$x_1 = a + 0.382(b-a)$ $f(x_1)$
$x_2 = a + 0.618(b-a)$ $f(x_2)$
$f(x_1) < f(x_2)$
Y
N
$b = x_2$
$x_2 = x_1, f_2 = f_1$
$x_1 = a + 0.382(b-a), f_1 = f(x_1)$
$a = x_1$
$x_1 = x_2, f_1 = f_2$
$x_2 = a + 0.618(b-a), f_2 = f(x_2)$
$|a-b| < \varepsilon$
Y
N
$x^* = 0.5(a+b)$ $f^* = f(x^*)$
返回

黄金分割法

黄金分割法（0.618 法）的优缺点

优点：不要求函数可微，且每次迭代只需计算一个函数值，计算量小，程序简单

缺点：收敛速度慢。

黄金分割法

例： 试用0.618法求目标函数 $f(x)=x^3-2x+1$ 的最优解。给定初始区间[0,2]，收敛精度 $\varepsilon=0.002$.

解：第一次区间缩短计算过程： $a=0,b=2$

计算两点及对应函数值：

$$x_1=a+0.382(b-a)=0.764,\quad f(x_1)=-0.0821,$$

$$x_2=a+0.618(b-a)=1.236,\quad f(x_2)=0.4162,$$

作数值比较，可见 $f(x_1)<f(x_2)$,再做置换：

$$b:=x_2=1.236,\ x_2=0.764,\ f(x_2)=-0.0821,$$

$$[a,b]=[0,1.236],\quad |b-a|=1.236>0.002=\varepsilon$$

$$\boxed{[a,b]=[0,1.236],x_2=0.764,f(x_2)=-0.0821,}$$



黄金分割法

第二次区间缩短计算过程：

$$x_1 = a + 0.382(b-a) = 0.472, \quad f(x_1) = 0.1612,$$

作数值比较，$f(x_1) > f(x_2)$ ，再做置换：

$$a := x_1 = 0.472, \quad \boxed{x_1 = 0.764,\ f(x_1) = -0.0821,}$$

$$\boxed{[a,b] = [0.472, 1.236],} \quad |b-a| = 0.788 > 0.002 = \varepsilon;$$

第三次区间缩短计算过程：

$$x_2 = a + 0.618(b-a) = 0.944, \quad f(x_2) = -0.0468,$$

作数值比较，$f(x_1) < f(x_2)$ ，再做置换：

$$b := x_2 = 0.944, \ x_2 = 0.764, \ f(x_2) = -0.0821,$$

$$[a,b] = [0.472, 0.944], \quad |b-a| = 0.472 > 0.002 = \varepsilon$$

黄金分割法

各次的迭代结果如下：

迭代次数	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$[a,b]$	$\|b-a\|$
第1次	0.764	1.236	-0.0821	0.4126	[0,1.236]	1.236
第2次	0.472	0.764	0.1612	-0.0821	[0.472,1.236]	0.788
第3次	0.764	0.944	-0.0821	-0.0468	[0.472,0.944]	0.472
第4次	0.652	0.764	-0.0268	-0.0821	[0.652,0.944]	0.292
第5次	0.764	0.832	-0.0821	-0.0881	[0.764,0.944]	0.230
第6次	0.832	0.906	-0.0881	-0.0683	[0.764,0.906]	0.124

缺点：收敛速度慢

优点：不要求函数可微，且每次迭代只需计算一个函数值，计算量小

第九节 一维搜索法II

1 Newton切线法

2 黄金分割法

3 抛物线插值法



抛物线插值法

给定一个初始的最优区间，找到两个试探点，通过比较这两个点函数值的大小，缩短最优区间，当区间的长度充分小时，可将区间中点取做极小点的近似点。 区间收缩法

可用进退法寻找初始的最优区间，$x_1 < x_2 < x_3$， x_2 可作为一个试探点，只需找到另外一个试探点即缩短最优区间。

另外一个试探点利用插值法寻找

用 $f(x)$ 在2 个或3 个点的函数值或导数值，构造2 次或3 次多项式作为$f(x)$的近似值，以这多项式的极小点作为一个试探点。

3点2次，2点2次，4点3次，3点3次，2点3次等插值法.

下面以3点2次插值法（二次插值法）为例：



抛物线插值法

下面以3点2次插值法（二次插值法）为例：

利用 $y=f(x)$ 在区间$x_1<x_2<x_3$ 的函数值$f(x_1)>f(x_2)<f(x_3)$

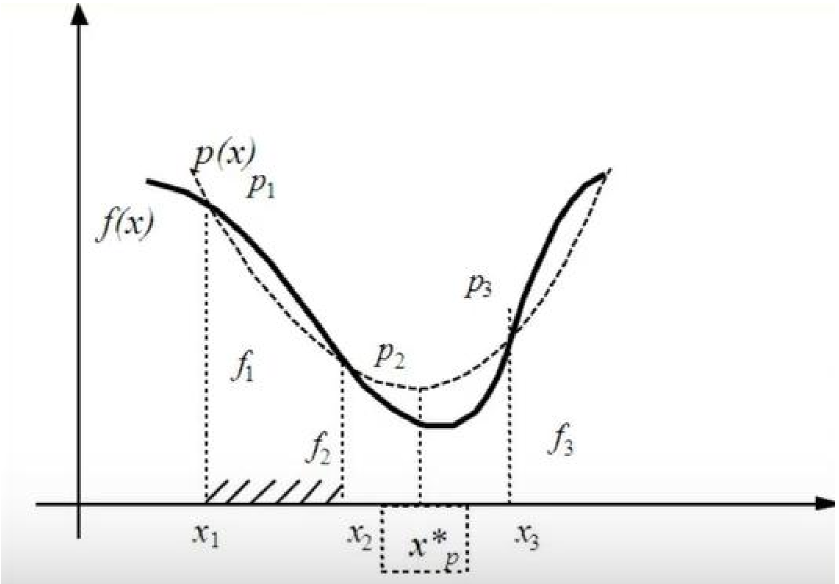
作出如下的二次插值多项式 $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

它应满足条件

$$P(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2=f_1=f(x_1) \quad (1)$$

$$P(x_2)=a_0+a_1x_2+a_2x_2^2=f_2=f(x_2) \quad (2)$$

$$P(x_3)=a_0+a_1x_3+a_2x_3^2=f_3=f(x_3) \quad (3)$$



抛物线插值法

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

从极值的必要条件 $P'(\bar{x})=a_1+2a_2\bar{x}=0$ 求得

$$\bar{x}=-a_1/2a_2$$

求出系数 a_1 和 a_2 ，就可得到极小点的表达式。

联立方程组（1）、（2）、（3）

$$P(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1{}^2=f_1=f(x_1) \qquad (1)$$

$$P(x_2)=a_0+a_1x_2+a_2x_2{}^2=f_2=f(x_2) \qquad (2)$$

$$P(x_3)=a_0+a_1x_3+a_2x_3{}^2=f_3=f(x_3) \qquad (3)$$

$$a_1(x_1-x_2)+a_2(x_1^2-x_2^2)=f_1-f_2,$$

$$a_1(x_2-x_3)+a_2(x_2^2-x_3^2)=f_2-f_3$$



抛物线插值法

$$a_1\left(x_1-x_2\right)+a_2\left(x_1^2-x_2^2\right)=f_1-f_2,\quad a_1\left(x_2-x_3\right)+a_2\left(x_2^2-x_3^2\right)=f_2-f_3$$

$$a_1=\frac{\left(x_2^2-x_3^2\right)f_1+\left(x_3^2-x_1^2\right)f_2+\left(x_1^2-x_2^2\right)f_3}{\left(x_1-x_2\right)\left(x_2-x_3\right)\left(x_3-x_1\right)}$$

$$a_2=-\frac{\left(x_2-x_3\right)f_1+\left(x_3-x_1\right)f_2+\left(x_1-x_2\right)f_3}{\left(x_1-x_2\right)\left(x_2-x_3\right)\left(x_3-x_1\right)}$$


抛物线插值法

所以

$$\bar{x}=-a_1/2a_2=\frac{1}{2}\frac{\left(x_2^2-x_3^2\right)f_1+\left(x_3^2-x_1^2\right)f_2+\left(x_1^2-x_2^2\right)f_3}{\left(x_2-x_3\right)f_1+\left(x_3-x_1\right)f_2+\left(x_1-x_2\right)f_3} \qquad (4)$$

(4)可以进一步简化

当x_1 ,x_2 , x_3 等距时，即x_2-x_1 = x_3-x_2 =h时，上面的式子可化简

$$\bar{x}=\frac{1}{2}\frac{-h(2x_2+h)f_1+2h\left(x_2+h+x_2-h\right)f_2-h\left(2x_2-h\right)f_3}{-hf_1+2hf_2-hf_3}$$

$$=x_2+\frac{1}{2}\frac{h(f_1\text{-}f_3)}{f_1-2f_2+f_3} \qquad (5)$$

简化极小点的公式（4）

联立方程组（1）、（2）、（3），可得

$$a_1\left(x_1-x_3\right)+a_2\left(x_1^2-x_3^2\right)=f_1-f_3,\ a_1\left(x_1-x_2\right)+a_2\left(x_1^2-x_2^2\right)=f_1-f_2$$

从而 $a_1+a_2\left(x_1+x_3\right)=\dfrac{f_1-f_3}{x_1-x_3}:=c_1,\quad a_1+a_2\left(x_1+x_2\right)=\dfrac{f_1-f_2}{x_1-x_2}:=c_3$

所以

$$a_1=c_1-a_2\left(x_1+x_3\right),\qquad a_2=\frac{c_1-c_3}{x_3-x_2}=\frac{c_1-\dfrac{f_1-f_2}{x_1-x_2}}{x_3-x_2}=\frac{\dfrac{f_1-f_2}{x_1-x_2}-c_1}{x_2-x_3}:=c_2$$

因此

$$\begin{cases}\bar{x}=-a_1/2a_2=\dfrac{1}{2}\left(x_1+x_3-\dfrac{c_1}{c_2}\right)\\[2ex] c_1=\dfrac{f_1-f_3}{x_1-x_3},\quad c_2=\dfrac{\dfrac{f_1-f_2}{x_1-x_2}-c_1}{x_2-x_3}.\end{cases}\qquad(6)$$



抛物线插值法

简化极小点的公式（4）到（6）

$$\bar{x} = -a_1 / 2a_2 = \frac{1}{2}\frac{\left(x_2^2 - x_3^2\right) f_1 + \left(x_3^2 - x_1^2\right) f_2 + \left(x_1^2 - x_2^2\right) f_3}{\left(x_2 - x_3\right) f_1 + \left(x_3 - x_1\right) f_2 + \left(x_1 - x_2\right) f_3} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \bar{x} = -a_1 / 2a_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + x_3 - \dfrac{c_1}{c_2}\right) \\[2ex] c_1 = \dfrac{f_1 - f_3}{x_1 - x_3}, \quad c_2 = \dfrac{\dfrac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2} - c_1}{x_2 - x_3}. \end{cases} \tag{6}$$

乘除的运算次数 从14降为5



抛物线插值法

插值法---算法思路：

1. 寻找满足如下条件的点（进退法寻找），成为两头大中间小的点： $x_1<x_2<x_3$， $f(x_1)>f(x_2), f(x_2)<f(x_3)$

2. 两头大中间小，可得$a_2>0$， 则 $\bar{x}$ 为$P(x)$的极小值点，且

$$\bar{x}\in\left[x_1, x_3\right]$$

3.若$\left|x_2-\bar{x}\right|<\varepsilon$，则迭代结束，取$x^*=\bar{x}$ ，否则在点 $x_1, x_2, x_3, \bar{x}$ 中，选取使$f(x)$ 最小的点作为新的x_2, 并使新的x_1， x_3各是新的x_2近旁的左右两点，继续进行迭代，直到满足终止准则。



例　用二次插值法求函数$f(x)=3x^3-4x+2$的极小点，

给定 $x_0=0,\ h=1,\ \varepsilon=0.2$。

解：1）确定初始搜索区间

初始区间[a,b]=[0,2]，另有一中间点$x_2=1$。

2）用二次插值法逼近极小点

(1) 相邻三点及其函数值: $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2;$

$f_1=2,\ f_2=1,\ f_3=18.$

根据公式计算插值多项式的极小点

$$\bar{x}=-a_1/2a_2=\frac{1}{2}\left(x_1+x_3-\frac{c_1}{c_2}\right),$$

$$c_1=\frac{f_1-f_3}{x_1-x_3},\quad c_2=\frac{\dfrac{f_1-f_2}{x_1-x_2}-c_1}{x_2-x_3}$$

$$\bar{x}=0.555,\ f(\bar{x})=0.292,$$



抛物线插值法

$x_1=0, x_2=1, x_3=2$; $f_1=2, f_2=1, f_3=18$ $\quad \bar{x}=0.555,\ f(\bar{x})=0.292,$

由于 $f(\bar{x})=0.292<f_2=1, \bar{x}=0.555<x_2=1,$

故新区间$[a,b]=[a,x_2]=[0,1]$，

$$|x_2-\bar{x}|=1-0.555=0.445>\varepsilon=0.2,$$ 应继续迭代。

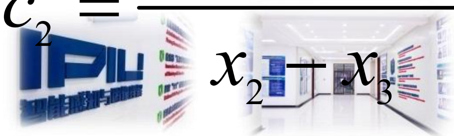
(2) 在新区间，相邻三点及其函数值: $x_1=0, x_2=0.555, x_3=1$;

$f_1=2, f_2=0.292, f_3=1.$

根据公式计算插值多项式的极小点

$$\bar{x}=-a_1/2a_2=\frac{1}{2}(x_1+x_3-\frac{c_1}{c_2}),$$

$$\bar{x}=0.607,\ f(\bar{x})=0.243, \quad c_1=\frac{f_1-f_3}{x_1-x_3}, \quad c_2=\frac{\dfrac{f_1-f_2}{x_1-x_2}-c_1}{x_2-x_3}$$



抛物线插值法

$x_1=0,\ x_2=0.555,\ x_3=1;\ \ f_1=2,\ f_2=0.292,\ f_3=1$

$$\bar{x}=0.607,\ f(\bar{x})=0.243,$$

由于 $f(\bar{x})=0.243<f_2=0.292,\bar{x}=0.607>x_2=0.555,$

故新区间[a,b]=[x_2,b]=[0.555,1]，

$|x_2-\bar{x}|=0.607-0.555=0.052<\varepsilon=0.2,$ 迭代终止。

故 $x^*\approx\bar{x}=0.607,\ f^*\approx f(\bar{x})=0.243.$

总结

方法综述

（1）如目标函数能求二阶导数：用Newton法　收敛快

（2）如目标函数能求一阶导数： 二分法、收敛速度慢，

但可靠；二次插值法也可选择.

（3）只需计算函数值的方法： 首先考虑用二次插值法，收敛快

黄金分割法收敛速度较慢，但可靠

作业

作业:

习题四（page 84）
1，2，3，4，5题



西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

智能感知与图像理解

Key Laboratory of Intelligent Perception and Image Understanding of Ministry of Education

THE END

Thanks for your participation!