

## 试 题

### 一、单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设函数  $f(x)$  在点  $x = x_0$  的某邻域内具有二阶连续导数, 且  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) > 0$ , 则点  $x = x_0$  一定是函数  $f(x)$  的[\_\_\_\_\_].  
A. 最小值点; B. 最大值点; C. 极小值点; D. 极大值点.
2. 设  $a_n \leq x_n \leq b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ , 则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  为[\_\_\_\_\_].  
A. 不存在; B. 等于 0; C. 存在但不等于 0; D. 不一定存在.
3. 设  $f(x)$  为  $[0, +\infty)$  上严格单调减少的连续函数, 对任意的正常数  $a \in (0, 1)$ , 记  $I_1 = \int_1^{1+a} f(x) dx$ ,  $I_2 = \int_0^a f(x) dx$ , 则[\_\_\_\_\_].  
A.  $I_1 < I_2$ ; B.  $I_1 > I_2$ ; C.  $I_1 = I_2$ ; D. 无法确定.
4. 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$  及  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + \frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}} = e^{2016}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{f(x)}{x^2}) =$  [\_\_\_\_\_].  
A. 2016; B.  $e$ ; C.  $e^{2016}$ ; D. 无法确定.
5. 若  $f(x)$  的导函数是  $y = \sin x$ , 则  $f(x)$  的一个原函数为[\_\_\_\_\_].  
A.  $y = 1 + \sin x$ ; B.  $y = 1 + \cos x$ ; C.  $y = 1 - \sin x$ ; D.  $y = 1 - \cos x$ .

### 二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

6. 函数  $y = 4x^4 - \ln x$  在定义域内的单调递减开区间为\_\_\_\_\_.
7. 摆线  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$  在  $t = \frac{\pi}{3}$  对应点处的切线斜率为\_\_\_\_\_.
8. 设  $f(x) = x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$ \_\_\_\_\_.
9. 设点  $(1, 3)$  为曲线  $y = ax^3 + bx^2$  的拐点, 则  $a - b =$ \_\_\_\_\_.
10. 半径为  $r = 0.5$  的圆上任意点处的曲率为\_\_\_\_\_.

### 三、计算题（每小题 7 分，共 21 分）

11. 求不定积分  $\int \frac{2}{x^2 + 8x + 15} dx$ .
12. 求定积分  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\cos x - \cos^3 x} + xe^{|x|}) dx$ .
13. 设函数  $y = y(x)$  由方程  $\cos(xy) + \ln y - x = 1$  所确定, 求  $dy|_{x=0}$ .

### 四、(10 分) 求过点 $(1, 2, 1)$ 且与平面 $x + 3y = 0$ 和 $2y - z = 1$ 都垂直的平面方程.

### 五、(12 分) 设曲线 $y = \sqrt{x} \cdot a^{-\frac{x}{2a}} (x \geq 0)$ 与 $x$ 轴之间的无界图形为 $D$ , 其中 $a > 1$ . (1) 求 $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的体积 $V(a)$ ; (2) 求 $a$ 为何值时 $V(a)$ 最小? 并求此最小值.

### 六、(8 分) 设向量 $\vec{a} = (2, -1, 1)$ , $\vec{b} = (3, -4, 2)$ 以及 $\vec{c} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ , 其中 $\lambda$ 为实数, 证明当 $\vec{c}$ 的模最小时, $\vec{c} \perp \vec{b}$ .

### 七、(5 分) 设 $f(x)$ 是实数域上的连续函数, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x) = \int_0^{x^2+3x} f(t) dt$ 是 $x^2$ 的等价无穷小, 求 $f(0)$ 的值.

### 八、(4 分) 设 $\lambda$ 为非零实数, $\alpha$ 与 $\beta$ 均是可导函数 $f(x)$ 的零点且 $\alpha < \beta$ . 证明 $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$ , 使得 $f(\xi) = \lambda f'(\xi)$ .