一．填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $-9dx$ 2. $2x+y-1=0$ 3. 0 4. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$（答$\left(0,\frac{1}{4}\right]$也对） 5. $x-y+z=0$

二．单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. C 2. B 3. A 4. B 5. B

三．解答题（每小题 6 分，共 24 分）

1. 解：证明存在性 设 $f(x)=x^5+ax-1$，则 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，且 $f(0)=-1<0$， $f(1)=a>0$，由闭区间上连续函数的零点定理知，方程 $x^5+ax-1=0$ 至少有一个实根，介于 0 与 1 之间. (3 分)

唯一性（反证法） 设方程在$(0,1)$内有两个不同的实根 x_1 和 x_1，即 $f(x_1)=f(x_2)=0$.由罗尔定理知，必存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)$，使 $f'(\xi)=5\xi^4+a=0$，显然矛盾，故方程在$(0,1)$内只有一个实根.（6 分）

注：由 $f'(x)=5x^4+a>0$， $f(x)$ 单调增加，证明方程只有一个实根者，也给 3 分.

2. 解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{2}.\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{t}$ （3 分）

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{t^2}\Big/\frac{t}{1+t^2}=-\frac{1+t^2}{t^3}$$ （6 分）

3. 解：对 $\int f(x)dx=\frac{1}{2}\arccos x+C$ 求导得 $f(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ （2 分）

故有 $\int\dfrac{x}{f(x)}dx=\int-2x\sqrt{1-x^2}\,dx=\int(1-x^2)^{\frac{1}{2}}d(1-x^2)=\dfrac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$ （6 分）

4. 解：令 $u=x-2$，则 $dx=du$，当 $x=1$ 时，$u=-1$；当 $x=3$ 时，$u=1$. 从而有

$\int_1^3 f(x-2)dx=\int_{-1}^1 f(u)du$ （3 分）

$=\int_{-1}^0 f(u)du+\int_0^1 f(u)du=\int_{-1}^0(1+u^2)du+\int_0^1 e^{-u}du=\dfrac{7}{3}-e^{-1}$ （6 分）

四．（9 分）

设 $C(0,0,Z)$ 为 Z 轴上任一点，则 ΔABC 的面积

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}X\overrightarrow{AB}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -1 & 0 & Z \\ -1 & 2 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{5Z^2-2Z+5}$$ （5 分）

$\dfrac{dS}{dZ}=\dfrac{1}{2}\dfrac{10Z-2}{2\sqrt{5Z^2-2Z+5}}$，当 $\dfrac{dS}{dZ}=0$ 时，得 $Z=\dfrac{1}{5}$.当 Z 在 $\dfrac{1}{5}$ 附近变动时，S 都增大，故知当 C 的坐标为 $\left(0,0,\dfrac{1}{5}\right)$ 时，$S_{\triangle ABC}$ 取最小值且 $S_{\min}=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$. （9 分）

注：从 $S=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{(Z-\frac{1}{5})^2+\frac{24}{25}}$ 看出当 $Z=\frac{1}{5}$ 时 $S_{\triangle ABC}$ 取最小值者给满分.

五.（**9** 分）

解：$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx=-\int_1^{+\infty}\arctan x d\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}\arctan x\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx$ （5 分）

$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}\int_1^b(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2+\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$ （9 分）

六.（**12** 分）

（1）分别对 $y=a\sqrt{x}$ 和 $y=\ln\sqrt{x}$ 求导，得 $y'=\frac{a}{2\sqrt{x}}$ 和 $y'=\frac{1}{2x}$.

由于两曲线在点 (x_0,y_0) 有公共切线，故有 $\frac{a}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2x_0}$，得 $x_0=\frac{1}{a^2}$.

将 $x_0=\frac{1}{a^2}$ 分别代入两曲线方程，得 $y_0=a\sqrt{\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{a^2}$，

于是有 $a=\frac{1}{e}$，$x_0=\frac{1}{a^2}=e^2$，$y_0=a\sqrt{x_0}=\frac{1}{e}\sqrt{e^2}=1$，

从而所求切点为 $\left(e^2,1\right)$. （4 分）

（2）两曲线与 x 轴围成的平面图形的面积为

$$A=\int_0^1(e^{2y}-e^2y^2)dy=\frac{1}{6}e^2-\frac{1}{2}$$ （8 分）

（3）旋转体体积

$$V_x=\int_0^{e^2}\pi(\frac{1}{e}\sqrt{x})^2dx-\int_1^{e^2}\pi(\ln\sqrt{x})^2dx$$

$$=\frac{\pi e^2}{2}-\frac{\pi}{4}\left[x\ln^2 x\right]_1^{e^2}+\frac{\pi}{2}\int_1^{e^2}\ln x dx=\frac{\pi}{2}$$ （12 分）

七.（**6** 分）

证明：因 $f(a)=0$，$f'(x)\le M$，由拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)\qquad \xi\in(a,x)$$

$$\le M(x-a)$$ （3 分）

从而有 $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b M(x-a)dx=\frac{1}{2}M(b-a)^2$ （6 分）