一、选择题（每小题 3 分，共 12 分） **1. A** **2.B** **3.A** **4.D**

二、填空题（每小题 4 分，共 28 分）

5. 1； **6.** $\frac{1}{2}(\ln x)^2$； **7.** $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-3}$； **8.** $\frac{1}{3+e^{-x}}$； **9.** $\sqrt{2}$； **10.** $\frac{1}{2}$； 11. $y=\ln x+1$

三、计算题（每小题 6 分，共 24 分）

12. 解 设 $y=\left[\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right]^{nx}$，则 $\ln y=\ln\left[\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right]^{nx}=nx[\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n]$ 3

于是 $\lim\limits_{x\to\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n[\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n]}{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}\cdot(a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1+a_2^{\frac{1}{x}}\ln a_2+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$=\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n=\ln(a_1a_2\cdots a_n)$，因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right]^{nx}=\lim\limits_{x\to\infty}y=a_1a_2\cdots a_n$ 6

13. 解 $\int\frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx=\int\frac{\cos^2 x-1}{2+\cos x}d(\cos x)=\int\frac{\cos^2 x-4+3}{2+\cos x}d\cos x$ 3

$=\int(\cos x-2+\frac{3}{2+\cos x})d(\cos x)=\int\cos x d\cos x-2\int d\cos x+3\int\frac{d(\cos x+2)}{\cos x+2}$

$=\frac{1}{2}\cos^2 x-2\cos x+3\ln(\cos x+2)+c$ 6

14. 解 $I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{2x}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{2x}dx-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{2x}\cos 2xdx=\frac{1}{4}(e^{2\pi}-1)-\frac{1}{2}I_1$ 2

而 $I_1=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^{2x}\sin 2xdx=\frac{1}{2}(e^{2\pi}-1)+\frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{2x}\cos 2xdx$

$=\frac{1}{2}(e^{2\pi}-1)-I_1$ 4

所以 $I_1=\frac{1}{4}(e^{2\pi}-1)$，$I=\frac{1}{8}(e^{2\pi}-1)$. 6

15.解 $y'=\frac{-2x}{1-x^2}$，$1+y'^2=\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}$，$ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{1+x^2}{1-x^2}dx$ **(** $0\le x\le\frac{1}{2}$ **)**, 3

$s=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2-(1-x^2)}{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{2}{1-x^2}-1)dx=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|_0^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}=\ln 3-\frac{1}{2}$ 6

四、解 因为 $\int_0^1 f(tx)dt=\int_0^x\frac{1}{x}f(u)du=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du=f(x)-x\sin x$， 3

所以 $\int_0^x f(u)du=xf(x)-x^2\sin x$. 由于 $\int_0^x f(u)du$ 可微，于是当 $x\ne 0$ 时 $f(x)$ 可微，上式两边对 x 求导得

$f(x)=f(x)+xf'(x)-2x\sin x-x^2\cos x$，即 $f'(x)=2\sin x+x\cos x$. 6

积分得 $f(x)=\int(2\sin x+x\cos x)dx=x\sin x-\cos x+c$，

由于 $f(x)$ 连续及 $f(0)=1$，可知 $c=2$，因此 $f(x)=x\sin x-\cos x+2$. 10

五、解 因为 $\frac{1}{3}=\int_0^1(ax^2+bx)dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$，即 $b=\frac{2}{3}(1-a)$ 3

而此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积

$V(a)=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2dx=\pi\int_0^1(ax^2+\frac{2}{3}(1-a)x)^2dx$ 6

$=\pi a^2\int_0^1 x^4dx+\pi\frac{4}{3}a(1-a)\int_0^1 x^3dx+\pi\frac{4}{9}(1-a)^2\int_0^1 x^2dx$

$=\frac{1}{5}\pi a^2+\pi\frac{1}{3}a(1-a)+\pi\frac{4}{27}(1-a)^2$ 8

即 $V(a)=\frac{1}{5}\pi a^2+\pi\frac{1}{3}a(1-a)+\pi\frac{4}{27}(1-a)^2$，令 $V'(a)=\frac{2}{5}\pi a+\pi\frac{1}{3}(1-2a)-\pi\frac{8}{27}(1-a)=0$，

得 $54a+45-90a-40+40a=0$，即 $4a+5=0$，因此 $a=-\frac{5}{4}$, $b=\frac{3}{2}$. 10

六、解 由于平面 π 垂直于平面 $z=0$，可设平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{a,b,0\}$. 2

设直线 AB 垂直直线 l 且 B 为交点，那么直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{m}=\{0,1,1\}$， 5

可设点 $B=(0,y,y+1)$.于是由 $\boldsymbol{AB}$ 向量垂直 $\boldsymbol{m}$，得 $\{-1,y+1,y\}\cdot\{0,1,1\}=2y+1=0$，

即 $B=(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. 8

由于平面 π 的法线向量 $\boldsymbol{n}=\{a,b,0\}$ 及点 $A=(1,-1,1)\in\pi$，可设 π 的方程为

$a(x-1)+b(y+1)=0$，将 $B=(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 代入 $a(x-1)+b(y+1)=0$ 得 $b=2a$，

因此平面 π 的方程为 $x+2y+1=0$. 10

七、证 因为 $f'(x)\ge m>0(a\le x\le b)$ **，所以** $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上严格单增，从而有反函数**.

设 $A=f(a)$，$B=f(b)$，φ 是 f 的反函数，则 2

$0<\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}\le\frac{1}{m}$，又 $|f(x)|\le\pi$，则 $-\pi\le A<B\le\pi$，所以

$\left|\int_a^b\sin f(x)dx\right|\overset{x=\varphi(y)}{=\!=\!=}\left|\int_A^B\varphi'(y)\sin ydy\right|\le\int_0^{\pi}\frac{1}{m}\sin ydy=\frac{2}{m}$. 6