西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

智能感知与图像理解

最优化理论
有约束最优化方法(1)

人工智能学院
智能感知与图像理解教育部重点实验室

有约束最优化方法

1 约束优化问题

2 外点罚函数法

3 内点罚函数法

4 混合罚函数法

有约束最优化方法

1 约束优化问题

2 外点罚函数法

3 内点罚函数法

4 混合罚函数法

约束优化问题

约束优化问题的一般形式

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &s.t.\ \ g_i(x)\geq 0,\ \ i=1,2,\ldots,m \\ &\qquad\ h_j(x)=0,\ j=1,2,\ldots,l \end{aligned} \qquad (1)$$

记 $g(x)=(g_1(x),g_2(x),\ldots,g_m(x))^T$,

$h(x)=(h_1(x),h_2(x),\ldots,h_l(x))^T$,

则约束优化问题可表示为

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &s.t.\ \ g(x)\geq 0 \\ &\qquad\ h(x)=0 \end{aligned} \qquad (2)$$

令 $D=\{x|\ g(x)\geq 0, h(x)=0\}$,是约束优化问题的可行域。



约束优化方法

约束优化问题的一般形式

$$
\begin{aligned}
&\min\ f(x) \\
&s.t.\ \ g_i(x) \ge 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, m \qquad\qquad (1) \\
&\qquad\ h_j(x) = 0,\ \ j = 1, 2, \ldots, l
\end{aligned}
$$

约束优化方法

- 直接法：坐标轮换法、复合形法

  算法简单，对目标函数和约束函数无特殊要求；
  计算量大，不适用维数较高的问题；
  适用只含不等式约束的优化问题.

- 间接法：惩罚函数法

  转换为一系列无约束优化问题;
  借助于函数的梯度信息直接求解;
  这些算法一般比较复杂.



约束优化问题

惩罚函数法----一种使用广泛、有效的间接法

基本思想：

借助罚函数将约束非线性规划转化为一系列无约束问题，求解这一系列无约束问题,可得到约束非线性规划的解。

通过转化为一系列无约束优化来求解约束优化的方法称为序列无约束极小化技术(*sequentail unconstrained minimization technique*,简称*SUMT*)。

根据约束特点（等式或不等式）构造某种罚函数$p(x)$，把它加到目标函数中去，将约束非线性规划转化为一系列无约束问题：

$$\min F(x,\sigma)=f(x)+\sigma p(x)$$

惩罚项

$p(x)$ 惩罚函数

σ 罚因子



约束优化问题

惩罚函数法

基本思想：

$$\min F(x,\sigma) = f(x) + \sigma p(x)$$ 惩罚项

$p(x)$ 惩罚函数

σ 罚因子

这种惩罚策略，对于在无约束的求解过程中企图违反约束的迭代点给予很大的目标函数值，迫使无约束问题的极小点或者无限地向可行域D靠近，或者一直保持在可行域D内移动，直到收敛到原来约束优化的极小点。

按照惩罚函数的构成方式，惩罚函数法分为3种：外点法、内点法和混合法。

有约束最优化方法

1. 约束优化问题
2. 外点罚函数法
3. 内点罚函数法
4. 混合罚函数法



外点罚函数法

外点罚函数法

基本思想:

对违反约束的点(即不可行点)在目标函数中加入相应的惩罚，可行点不予惩罚。

这种方法的迭代点一般在约束优化的可行域D外部移动。

M 罚因子 $p(x)$ 惩罚函数

$$\min F(x,M) = f(x) + Mp(x)$$

外点罚函数法

外点罚函数法

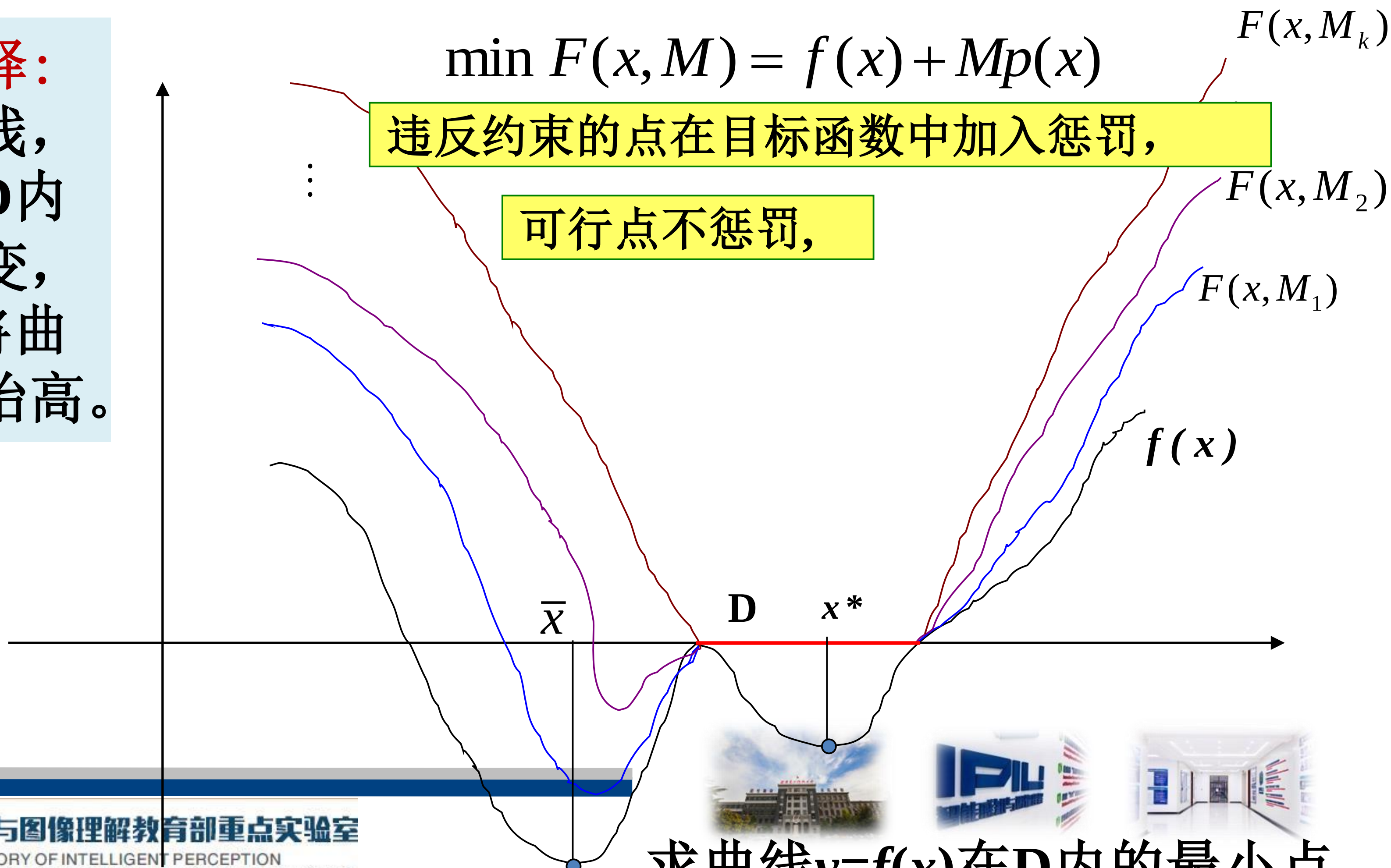
抬高到一定程度后，此曲线的无约束极小点就是原来函数在D内的最小点.

几何解释:
改造曲线，使其在D内保持不变，在D外将曲线逐步抬高。

$$\min F(x,M)=f(x)+Mp(x)$$

违反约束的点在目标函数中加入惩罚，

可行点不惩罚，



求曲线$y=f(x)$在D内的最小点

外点罚函数法

外点罚函数法

罚函数$p(x)$应满足的性质

$$\min F(x,M)=f(x)+Mp(x)$$

(1) $p(x)$连续　　**(2)** $p(x)=0, \forall x\in D$　　**(3)** $p(x)>0, \forall x\notin D$

此时，当 $x\in D$ 时，$F(x,M)=f(x)+Mp(x)=f(x)$不受惩罚；

当 $x\notin D$ 时，$F(x,M)=f(x)+Mp(x)$ 很大，受到惩罚。

性质：若$x^*(M)$是 $\min F(x,M)$ 的最优解，且$x^*(M)\in D$，则

$x^*(M)\in D$ 也是 $\min\limits_{x\in D} f(x)$ 的最优解。

外点罚函数法

性质：若 $x^*(M)$ 是 $\min F(x,M)$ 的最优解，且 $x^*(M)\in D$ ，则 $x^*(M)\in D$ 也是 $\min\limits_{x\in D} f(x)$ 的最优解。

一般来说，$x^*(M)\in D$ 仅在M充分大时才成立，但在实际计算中，过大的M会造成无约束问题 $\min F(x,M)$的求解困难，因此取一个递增且趋于 $+\infty$ 的罚因子序列 $\{M_k\}$ ，即

$$0<M_1<M_2<\ldots<M_k<M_{k+1}<\ldots,\ \text{且} M_k\to+\infty$$

然后求解一系列无约束问题 $\min F(x,M_k)$

$p(x)$ 怎么构造？

$p(x)$ 已知，约束优化可求解

外点罚函数法

罚函数$p(x)$应满足的性质

$$\min F(x,M_k)=f(x)+M_k\,p(x)$$

(1) $p(x)$连续　(2) $p(x)=0,\ \forall x\in D$　(3) $p(x)>0,\ \forall x\notin D$

罚函数p(x)的构造

$$\begin{aligned}&\min\ f(x)\\ &s.t.\ \ g_i(x)\ge 0,\ \ i=1,2,\dots,m \quad (1)\\ &\qquad\ h_j(x)=0,\ \ j=1,2,\dots,l\end{aligned}$$

$$D:=\left\{\begin{aligned}&g_i(x)\ge 0,\ i=1,2,\dots,m,\\ &h_j(x)=0,\ \ j=1,2,\dots,l\end{aligned}\right\}$$

$$g_i(x)\ge 0\Leftrightarrow\left(\min\{g_i(x),0\}\right)^2=0$$

$$h_j(x)=0\Leftrightarrow h_j^2(x)=0$$

给出了罚函数$p(x)$的一个形式

$$\boxed{p(x)=\sum_{i=1}^{m}(\min\{g_i(x),0\})^2+\sum_{j=1}^{l}h_j^2(x)}$$

$$p(x)\begin{cases}=0,\ \forall x\in D\\ >0,\ \forall x\notin D\end{cases}$$

$$\min\{g_i(x),0\}=\frac{g_i(x)-|g_i(x)|}{2}$$

$g_i\ h_j$ 连续，$p(x)$也连续



外点罚函数法

步骤1：给定初始点 x^0，初始罚因子$M_1>0$(可取$M_1=1$), 精度

$\varepsilon>0, k:=1.$

步骤2：以 x^{k-1} 初始点，求解无约束优化问题

$$\min F(x,M_k)=f(x)+M_k p(x)$$

得到极小点 $x^*(M_k)$，记为 x^k，其中

$$p(x)=\sum_{i=1}^{m}(\min\{g_i(x),0\})^2+\sum_{j=1}^{l}h_j^2(x)$$

用解析法求驻点 或者用无约束优化方法求解

步骤3：若$M_k p(x^k)<\varepsilon$，则停止计算，得到近似极小点 x^k；

否则，令$M_{k+1}=cM_k$，置$k:=k+1$，转步骤2。

$p(x^k)\to 0$

$x^k\in D$

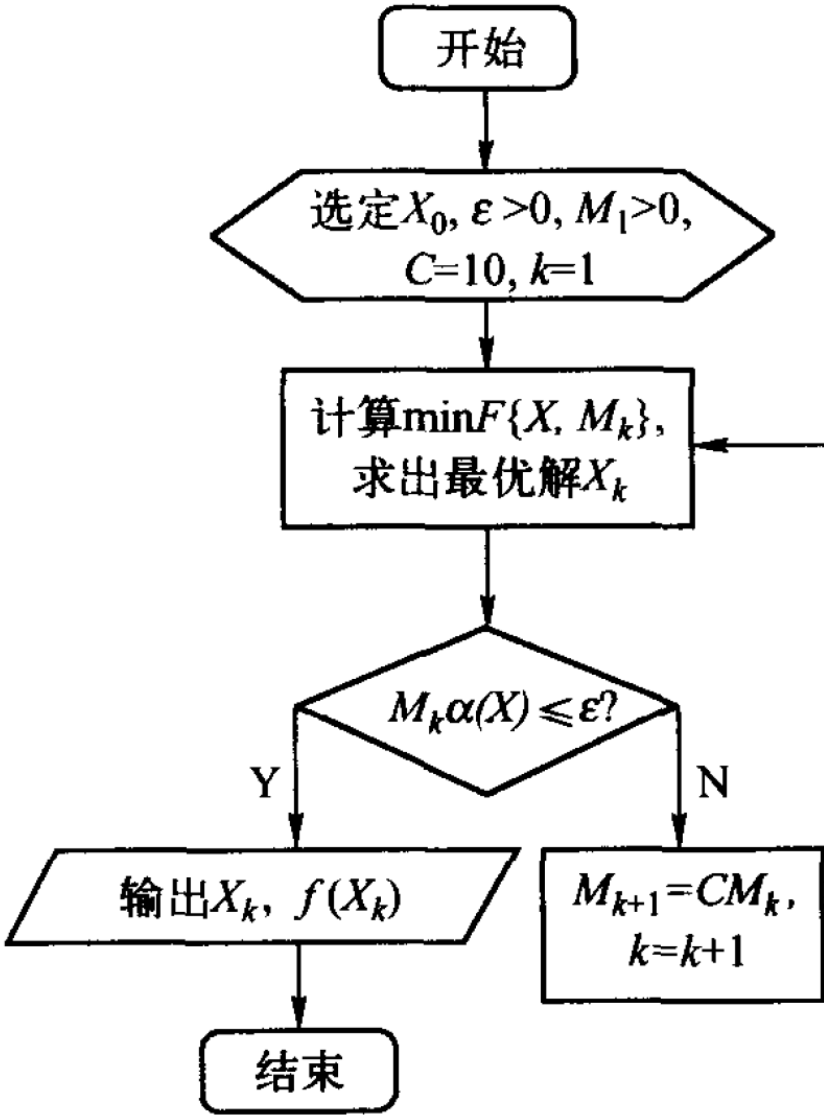
$c\in[2,50]$

常取 $c\in[4,10]$



外点罚函数法

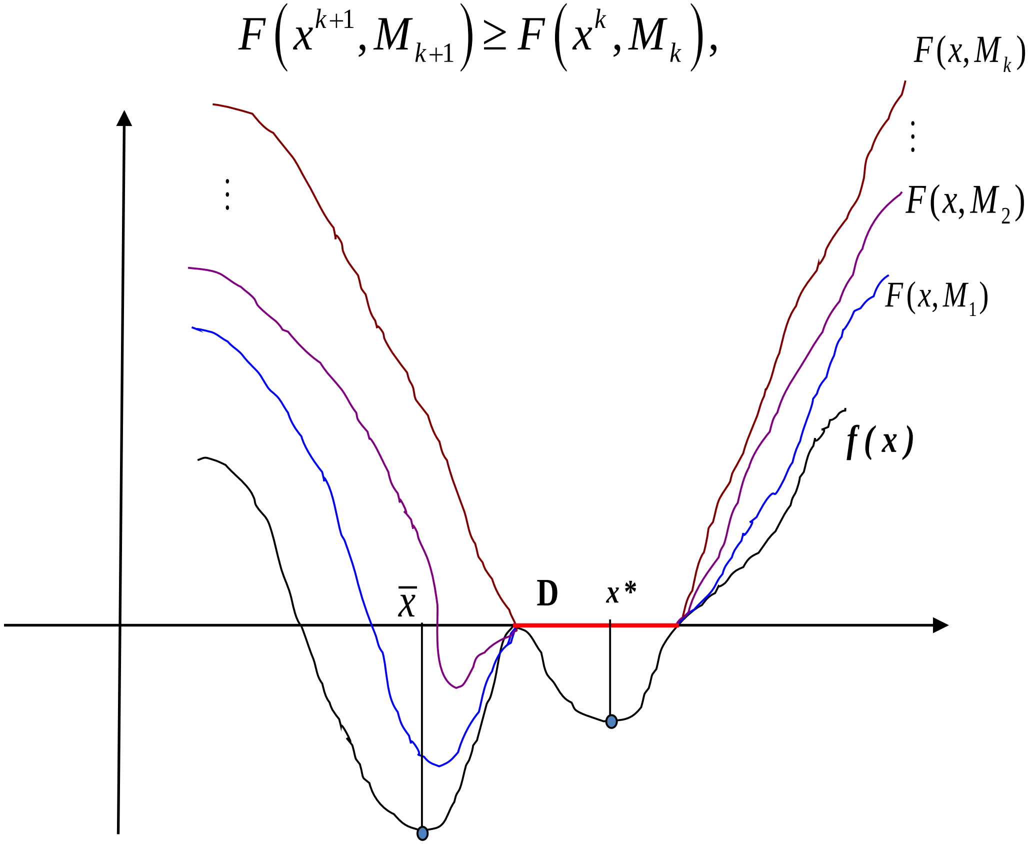
外点罚函数法



外点罚函数法

$$\min F(x, M_k) = f(x) + M_k p(x)$$

最优解记为 x^k



外点罚函数法

例1：用外点罚函数法求解如下优化问题：

$$\min\ x_1^2+2x_2^2$$
$$s.t.\ -x_1-x_2+1\le 0$$

解：问题只有不等式约束，对应的罚函数为:

$$p(x)=\left(\min\left\{x_1+x_2-1,0\right\}\right)^2$$

$$F(x,M_k)=f(x)+M_k p(x)=x_1^2+2x_2^2+M_k\left(\min\left\{x_1+x_2-1,0\right\}\right)^2$$

$$=\begin{cases} x_1^2+2x_2^2 & 若x_1+x_2\ge 1 \\ x_1^2+2x_2^2+M_k\left(-x_1-x_2+1\right)^2 & 若x_1+x_2<1 \end{cases}$$

下面用解析法求$F(x,M_k)$的驻点，令

$$0=\frac{\partial F(x,M_k)}{\partial x_1}=\begin{cases} 2x_1 & 若x_1+x_2\ge 1 \\ 2x_1+2M_k\left(x_1+x_2-1\right) & 若x_1+x_2<1 \end{cases}$$

$$0=\frac{\partial F(x,M_k)}{\partial x_2}=\begin{cases} 4x_2 & 若x_1+x_2\ge 1 \\ 4x_2+2M_k\left(x_1+x_2-1\right) & 若x_1+x_2<1 \end{cases}$$

外点罚函数法

例1：用外点罚函数法求解如下优化问题：

$$\begin{aligned} &\min\ x_1^2+2x_2^2 \\ &s.t.\ -x_1-x_2+1\le 0 \end{aligned}$$

$$0=\frac{\partial F(x,M_k)}{\partial x_1}=\begin{cases} 2x_1 & 若 x_1+x_2\ge 1 \\ 2x_1+2M_k\left(x_1+x_2-1\right) & 若 x_1+x_2<1 \end{cases}$$

$$0=\frac{\partial F(x,M_k)}{\partial x_2}=\begin{cases} 4x_2 & 若 x_1+x_2\ge 1 \\ 4x_2+2M_k\left(x_1+x_2-1\right) & 若 x_1+x_2<1 \end{cases}$$

当 $x_1+x_2\ge 1$ 时，$x_1=0=x_2$，舍去该点；

当 $x_1+x_2<1$ 时，由 $\frac{\partial F(x,M_k)}{\partial x_1}=\frac{\partial F(x,M_k)}{\partial x_2}=0$，得到

$$\begin{cases} 2x_1+2M_k\left(x_1+x_2-1\right)=0 \\ 4x_2+2M_k\left(x_1+x_2-1\right)=0 \end{cases}$$

所以 $x_1=\frac{2M_k}{2+3M_k},\ x_2=\frac{M_k}{2+3M_k}$，令 $M_k\to+\infty$，得到 $x^*=\left(2/3,1/3\right)^T$



外点罚函数法

例2：用外点罚函数法求解如下优化问题：

$$\min\ f(x)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2$$

$$s.t\quad g(x)=x_1+x_2-4=0$$



外点罚函数法

例2：用外点罚函数法求解如下优化问题：

$$\min\ f(x)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2$$
$$s.t\quad g(x)=x_1+x_2-4=0$$

解：问题只有等式约束，对应的罚函数为:

$$p(x)=(x_1+x_2-4)^2$$

$$F(x,M_k)=f(x)+M_k p(x)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2+M_k(x_1+x_2-4)^2$$

下面用解析法求$F(x,M_k)$的驻点，令

$$0=\frac{\partial F(x,M_k)}{\partial x_1}=2(x_1-3)+2M_k(x_1+x_2-4)$$
$$0=\frac{\partial F(x,M_k)}{\partial x_2}=2(x_2-2)+2M_k(x_1+x_2-4)$$



外点罚函数法

例2：用外点罚函数法求解如下优化问题：

$$\min\ f(x)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2$$

$$s.t\quad g(x)=x_1+x_2-4=0$$

解：

$$0=\frac{\partial F(x,M_k)}{\partial x_1}=2(x_1-3)+2M_k(x_1+x_2-4)$$

$$0=\frac{\partial F(x,M_k)}{\partial x_2}=2(x_2-2)+2M_k(x_1+x_2-4)$$

从中解得 $x_1=\dfrac{3+5M_k}{1+2M_k},\ x_2=\dfrac{2+3M_k}{1+2M_k}$

令 $M_k\to+\infty$，得到

$$x^*=(5/2,3/2)^T$$



外点罚函数法

外点罚函数法-性质特点

(1) 初始点可以任选

(2) 对等式约束和不等式约束均可适用

(3) 罚因子M_k递增($\rightarrow\infty$), $M_{k+1}=cM_k$,递增系数c, c>1 通常取c=[4,10]。

(4) 如果有了求解无约束问题的好算法，利用外罚函数法求解约束问题很方便。

外点罚函数法-性质特点

(1) 初始罚因子要选择得当，否则会影响迭代计算的正常进行, M_1太小，将增加迭代的次数，M_1 太大，会使惩罚函数的性态变坏，甚至难以收敛到极值点

许多计算表明，取 $M_1=1$常常可以取得满意的效果；

按经验公式计算 M_1 值

$$M_1=\max\left\{\frac{0.02}{m\,g_i\left(x^0\right)f\left(x^0\right)}\right\}\qquad\left(i=1,\cdots,m\right)$$



外点罚函数法-性质特点

(2) 如果在可行域外目标函数$f(x)$的性质复杂或者没有定义时，外点法就不适用了；

(3) 外点法中要求 $M_k \to +\infty$，而 M_k太大将造成增广目标函数$F(x, M_k)$的Hesse阵条件数越大，趋于病态，给无约束问题求解增加很大困难，甚至无法求解。

拉格朗日乘子法可解决这个问题

(4) 每个近似解 x^k 往往不是可行解，这是某些实际问题所不能接受的。如果要求在迭代中产生的点列 $\left\{x^k\right\}$，必须满足某些约束条件时，方法也失效，为克服上述缺点，人们又提出了内点罚函数法。

内点罚函数法可解决这两个问题

有约束最优化方法

内点罚函数法

基本思想:

迭代点在可行域的内部移动，并对接近可行域边界的点施加惩罚(加入障碍)，距边界越近障碍越大，这相当于在可行域的边界上筑起一道很高的“围墙”，阻止迭代点穿越边界，从而将最优解“挡”在可行域内。内点罚函数法又称为障碍函数法。

内点法要求迭代点在可行域内部移动，初始点必须是内点，可行域的内部必须是非空的，内点法只能处理不等式约束，等式约束构成的集合内部为空。内点法只适合于不等式约束问题。

$$\min \quad f(x)$$
$$s.t. \quad g_i(x) \geq 0, \; i = 1, \ldots, m$$

（障碍墙）

内点罚函数法

内点罚函数法

$B(x)$ 障碍函数

r 障碍因子

障碍函数$B(x)$应满足的性质 $F(x,r_k)=f(x)+r_kB(x)$

$r_k>0$,且 $r_1>r_2>\ldots>r_k>r_{k+1}>\ldots,\ r_k\to 0$

$B(x)$ 满足下面的条件：

(1) $B(x)$ 在可行域D的内部 $\operatorname{int} D$ 连续；

(2) 当x趋向可行域的边界时，$B(x)\to+\infty$ ，且 $r_kB(x)$ 很大； 受到惩罚

在可行域内部远离可行域边界时， $r_kB(x)$ 很小，此时 $F(x,r_k)$的取值近似原目标函数$f(x)$； 几乎不受惩罚

$$\min\ f(x)$$
$$s.t.\ g_i(x)\ge 0,\ i=1,\ldots,m$$

障碍函数$B(x)$的构造常用两种形式：

$$B(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(x)}$$ --------------倒数障碍函数

$$B(x)=-\sum_{i=1}^{m}\ln\left(g_i(x)\right)$$ --------------对数障碍函数

内点罚函数法

$$\min \ f(x)$$
$$s.t. \ g_i(x) \geq 0, \ i = 1,2,\ldots,m$$

$$\min F(x, r_k) = f(x) + r_k B(x)$$
$$s.t. \ x \in \operatorname{int} D$$

r_k越小，$\min F(x,r_k)$的最优解越接近$\min f(x)$的最优解

r_k太小，$\min F(x,r_k)$不好求

从形式上看，右式仍是一个约束优化问题；从计算的观点看，右式是一个无约束优化问题。

在可行域的边界附近，右式的目标函数值趋于$+\infty$，只要从可行域D的任何一个内点开始迭代，并注意控制一维搜索的步长，就可使得迭代点x^k不越过可行域，因此不必直接地与约束问题打交道。

内点罚函数法

步骤1： 给定初始点 $x^0 \in \operatorname{int} D$，初始罚因子 $r_1 > 0$ (可取 $r_1 = 10$)，精度 $\varepsilon > 0, k := 1.$

步骤2： 以 x^{k-1} 初始点，求解无约束优化问题 $\min F(x, r_k) = f(x) + r_k B(x)$

得到极小点 $x^*(r_k)$，记为 x^k，　其中

$$B(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)} \quad \text{或者} \quad B(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln\left(g_i(x)\right)$$

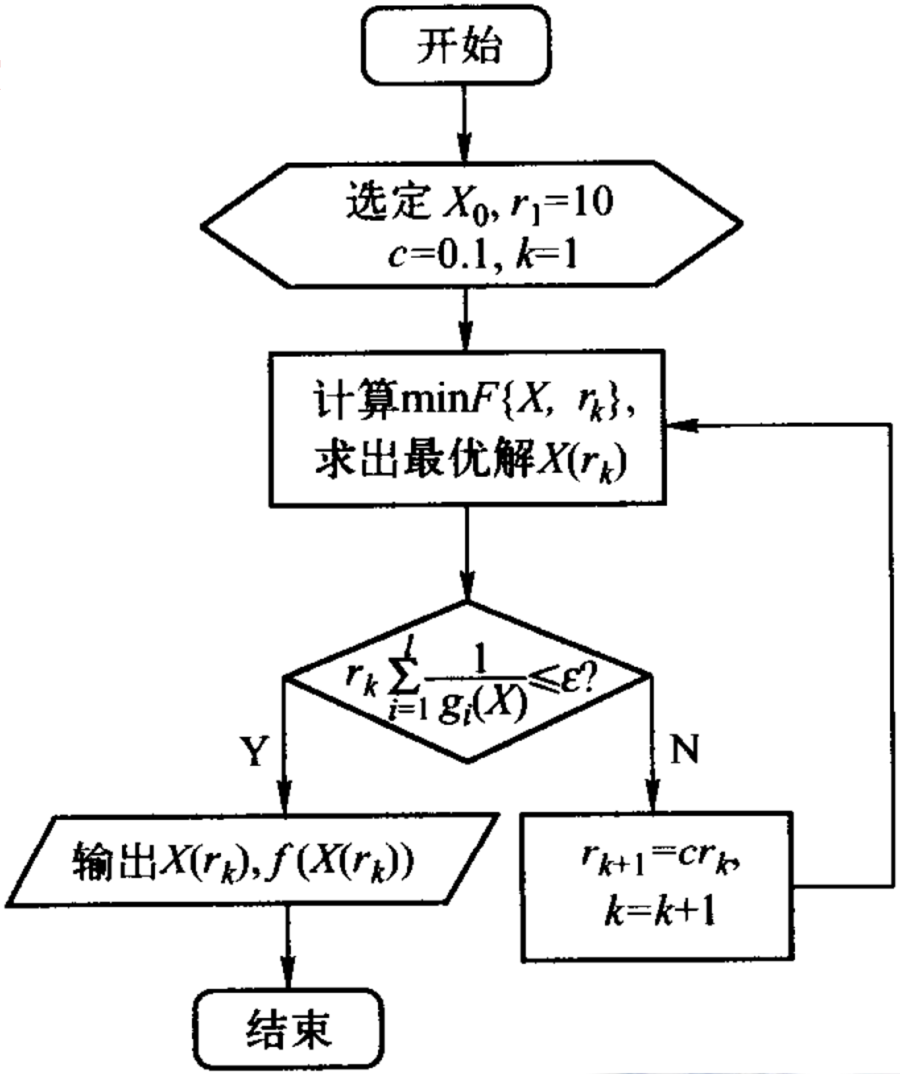
步骤3： 若 $r_k B(x^k) < \varepsilon$，则停止计算，得到近似极小点 x^k ，否则，令

$r_{k+1} = c r_k$ ，置k:=k+1，转步骤2。

$c = 0.1$



内点罚函数法


开始
选定 $X_0, r_1=10$
$c=0.1, k=1$
计算$\min F\{X, r_k\}$,
求出最优解$X(r_k)$
$r_k \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{g_i(X)} \leqslant \varepsilon$?
Y
N
输出$X(r_k), f(X(r_k))$
$r_{k+1}=cr_k$,
$k=k+1$
结束



内点罚函数法

例1：用内点法求解下面的问题

$$\min f(x)=x_1^2+x_2^2$$
$$s.t.\quad g(x)=1-x_1\le 0$$

解：构造障碍函数：

$$B(x)=-\ln(x_1-1)\quad F(x,r_k)=x_1^2+x_2^2-r_k\ln(x_1-1)$$

用解析法求函数F的极小点

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=2x_1-\dfrac{r_k}{x_1-1}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}=2x_2=0\end{cases}$$

求解得

$$\begin{cases}x_1(r_k)=\dfrac{1\pm\sqrt{1+2r_k}}{2}\\ x_2(r_k)=0\end{cases}$$

$r_k=2x_1(x_1-1)$，令$r_k\to 0$，

得 $2x_1^*(x_1^*-1)=0$

无约束极值点为：$\begin{cases}x_1^*(r_k)=\dfrac{1+\sqrt{1+2r_k}}{2}\\ x_2^*(r_k)=0\end{cases}$

$r_k\to 0$，得到$x_1^*=1$，$x_2^*=0$

$$x_1(r_k)=\frac{1-\sqrt{1+2r}}{2}$$ 不满足约束条件，舍去。

即得到原问题的极小点为 $x^*=(1,0)^T$.



内点罚函数法

例2： 用内点法求解下面的问题

$$\min\ f(x)=\frac{1}{3}(x_1+1)^3+x_2$$
$$s.t.\ 1-x_1\le 0$$
$$x_2\ge 0$$

解：构造障碍函数：

$$B(x)=\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2}\qquad F(x,r_k)=\frac{1}{3}(x_1+1)^3+x_2+r_k\left(\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2}\right)$$

用解析法求函数F的极小点

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=(x_1+1)^2-\dfrac{r_k}{(x_1-1)^2}=0\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial x_2}=1-\dfrac{r_k}{x_2^2}=0\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x_1^*(r_k)=\sqrt{1+\sqrt{r_k}}\\x_2^*(r_k)=\sqrt{r_k}\end{cases}$



内点罚函数法

例2：用内点法求解下面的问题

$$\min\ f(x)=\frac{1}{3}(x_1+1)^3+x_2$$
$$s.t.\ 1-x_1\le 0$$
$$x_2\ge 0$$

$$r_k=(x_1+1)^2\left(x_1-1\right)^2\to 0,\ \text{得到}x_1^*=1 \qquad x_1^*=-1\ \text{舍}$$
$$r_k=x_2^2\to 0,\ \text{得到}x_2^*=0$$

当 $r_k\to 0$ 时，$x^*=(1,0)^T$.

即得到原问题的极小点为 $x^*=(1,0)^T$.

注：一般 $\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}_k\right)$ 的最优解很难用解析法求出，需采用无约束最优化方法.

内点罚函数法

内点罚函数法-性质特点

每次迭代点都是可行点，当迭代到一定次数时，尽管可能没有达到约束最优点，但可以被接受为一个较好的近似最优点。

内点罚函数法-性质特点

（1）初始点x^0的选取：初始点应选择一个离约束边界较远的可行点。如果太靠近某一约束边界，求解无约束优化问题时可能会发生困难。

（2）初始罚因子r_1的选取：惩罚因子的初值应适当，否则会影响迭代计算的正常进行。一般而言，太大，将增加迭代次数；太小，会使惩罚函数的性态变坏，甚至难以收敛到极值点。 对于不同的问题，都要经过多次试算，才能决定一个适当 r_1。



内点罚函数法-性质特点

（3）罚因子的缩减系数c的选取：在构造序列惩罚函数时，罚因子r是一个逐次递减到0的数列，相邻两次迭代的惩罚因子的关系为：

$$r_{k+1} = c r_k \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

一般的看法是，c值的大小在迭代过程中不起决定性作用，通常的取值范围在0.1~0.7之间。

（4）由于无约束优化问题的解法目前已经有许多很有效的算法，如DFP算法，BFGS法等，所以在求解复杂的约束优化问题时，工程技术人员一般乐于采用罚函数法。此方法简单、易懂。

内点罚函数法

内点罚函数法-性质特点

（5）为求解约束优化问题，需要求解一系列的无约束优化问题，计算量大，且罚因子的选取方法对收敛速度的影响比较大。并且罚因子的增大（外点法）与缩小（内点法）使得问题的求解变得很困难。常常会使增广目标函数趋于病态。这是罚函数法固有的弱点，使其使用受到限制。这正是乘子法所要解决的问题。

（6）内点法适于解仅含不等式约束问题，并且每次迭代的点都是可行点。这是设计员所希望的。但要求初始点为可行域的内点，需要浪费相当的工作量。结合外点法的优缺点，人们将内点法和外点法结合起来使用，得到所谓的混合罚函数法。



内点罚函数法

外点法	内点法
初始点可以任选	初始点必须在可行域的内部
对等式约束和不等式约束均可适用	适于仅具有不等式约束的数学模型
仅最优解为可行设计方案	迭代过程中各个点均为可行设计方案
一般收敛较快	一般收敛较慢
迭代中x^k不在可行域D中	迭代中x^k在可行域D中
罚因子为递增，递增率c，有c>1	罚因子为递减，递减率c，有0<c<1
非凸规划适用	非凸规划适用

有约束最优化方法

1 约束优化问题

2 外点罚函数法

3 内点罚函数法

4 混合罚函数法



混合罚函数法

约束优化问题的一般形式

$$
\begin{aligned}
&\min\ f(x) \\
&s.t.\ \ g_i(x) \geq 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, l \\
&\qquad h_j(x) = 0,\ \ j = 1, 2, \ldots, m
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

任意给定初始点后，对等式约束和不被初始点满足的不等式约束采用外点法，而对被初始点满足的不等式约束采用内点法。

对于同时具有不等式约束和等式约束的优化问题(1)，引进增广目标函数

$$
F(x, r^{(k)}, m^{(k)}) = f(x) + \underbrace{r^{(k)}}_{\text{递减序列}} B(x) + \underbrace{m^{(k)}}_{\text{递增序列}} p(x)
$$


混合罚函数法-内点形式

增广目标函数 $F(x, r^{(k)}, m^{(k)}) = f(x) + r^{(k)} B(x) + m^{(k)} p(x)$

$$F(x, r_k) = f(x) + r_k \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{g_i(x)} + \frac{1}{\sqrt{r_k}} \sum_{j=1}^{m} \left[h_j(x) \right]^2$$

其中： $I = \{ i \mid g_i(x_0) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, l \}$

$B(x) = -\sum_{i \in I} \ln(g_i(x))$ 或者 $B(x) = \sum_{i \in I} \frac{1}{g_i(x)}$ 的作用是限制搜索跑出不等式约束确定的区域，相当于内点罚函数法；

$p(x) = \sum_{j=1}^{m} \left| h_j(x) \right|^2$ 的作用是迫使搜索点向等式约束靠近，相当于外点罚函数法。

障碍因子为递减序列 $r_k > 0$, 且 $r_1 > r_2 > \ldots > r_k > r_{k+1} > \ldots$， $r_k \to 0$



混合罚函数法

统一形式

$$F(x,r^{(k)})=f(x)+\sum_{i=1}^{l}G\left[g_i(x)\right]+\sum_{j=1}^{m}H\left[h_j(x)\right]$$

式中

$$\begin{cases} G[g_i(x)]=\begin{cases} r_k\cdot\dfrac{1}{g_i(x)}\text{或}r_k\cdot-\ln(g_i(x)) & \text{(内点形式)} \\ \dfrac{1}{\sqrt{r_k}}\{\min[0,g_i(x)]\}^2 & \text{(外点形式)} \end{cases} \\ H[h_j(x)]=\dfrac{1}{\sqrt{r_k}}[h_j(x)]^2 \end{cases}$$



混合罚函数法-迭代步骤

混合法具有内点法的特点，迭代过程在可行域之内进行，参数的选择同内点法。

Step1：任意给定初始点，要求满足不等式约束，初始障碍因子 $r_0, c<1$，置k=1;

Step2：假设已获迭代点 $X_{\text{k-1}}$，以 $X_{\text{k-1}}$ 为初始点，求解 $\min F\left(x, r_k\right)$，

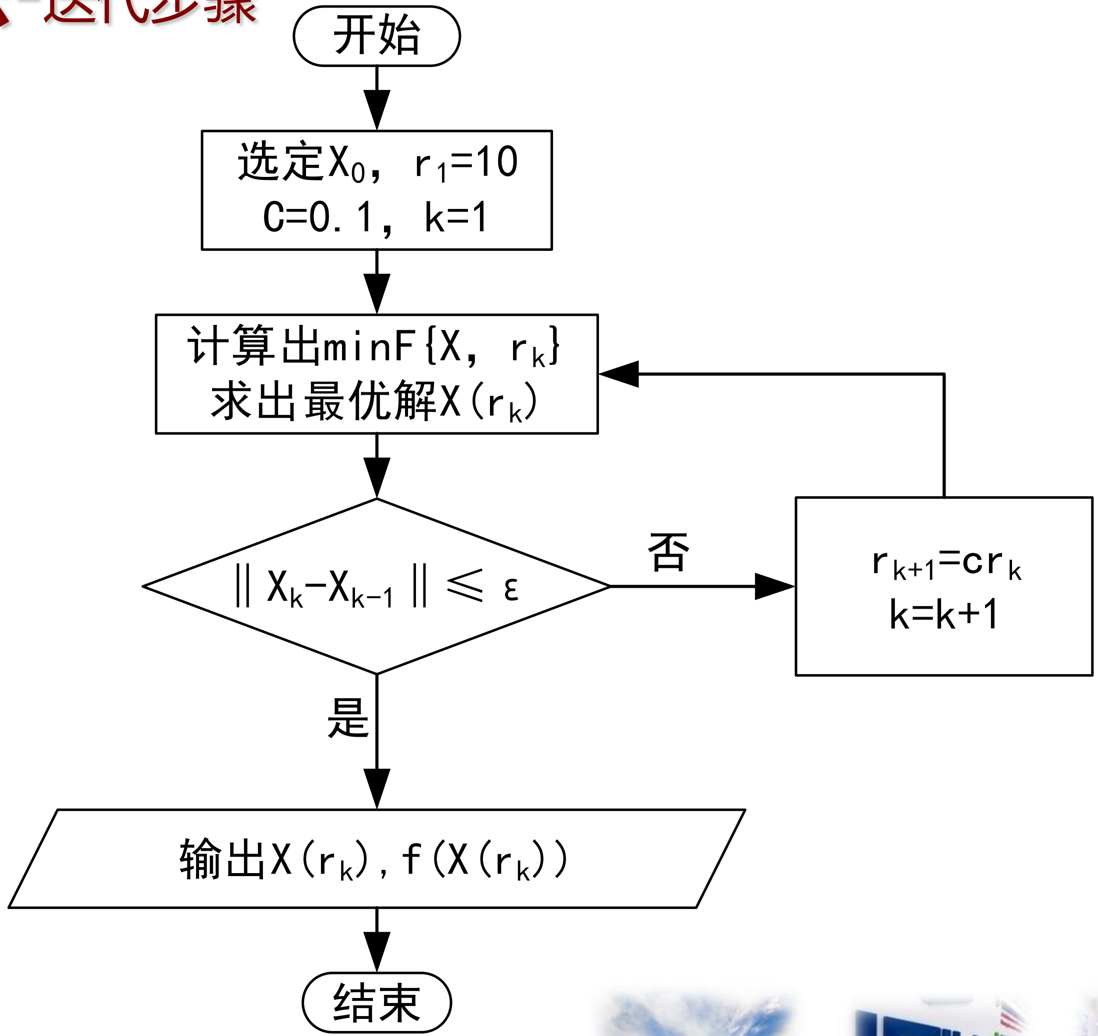
得到极小点 $X(r_k)$.

Step3：若 $\left\|X_{\text{k}}-X_{\text{k-1}}\right\| \leq \varepsilon$（例如：$\varepsilon$=$10^{-6}$）则停止计算，得到近似极小点 $X(\mathrm{r}_k)$；

否则，转Step4

Step4： $r_{k+1}=cr_k$，k=k+1，转Step 2

混合罚函数法-迭代步骤


开始
选定X_0，r_1=10
C=0.1，k=1
计算出minF{X，r_k}
求出最优解X(r_k)
$\| X_k - X_{k-1} \| \leqslant \varepsilon$
否
$r_{k+1}=cr_k$
k=k+1
是
输出X(r_k)，f(X(r_k))
结束



第五次作业:

习题六（ P137 ）

第3,4题

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

IPIU
智能感知与图像理解

Key Laboratory of Intelligent Perception and Image Understanding of Ministry of Education

THE END

Thanks for your participation!