高等数学（上）试题(A)解答

2017 年 1 月

一、（**4 分×5=20 分**）

1.B； 2.D； 3.C； 4.B； 5.A.

二、（**4 分×5=20 分**）

6.$(1+2t)\mathrm{e}^{2t}$； 7.-5； 8.$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+C, & 0\le x\le 1\\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{6}+C, & x>1\end{cases}$；

9.$\dfrac{2}{3}$； 10.$y''+y'-2y=0$.

三、**1**1.解 令 $y=(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$，则 $\ln y=\dfrac{1}{\ln x}\ln(\cot x)$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\ln(\cot x) \qquad (3\text{ 分})$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}(-\csc^2 x)}{x^{-1}} \qquad (5\text{ 分})$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}=-1 \qquad (7\text{ 分})$$

故 $$\lim_{x\to 0^+}y=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y}=\mathrm{e}^{-1} \qquad (8\text{ 分})$$

12. 解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t}{x_t}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}, \qquad (4\text{ 分})$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\frac{1}{x_t}=\frac{1+t^2}{4t} \qquad (8\text{ 分})$$

13. 解 $$\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_0^{n\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x \qquad (2\text{ 分})$$

$$=\sqrt{2}n\int_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x \qquad (4\text{ 分})$$

$$=\sqrt{2}n[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x] \qquad (6\text{ 分})$$

$$=\sqrt{2}n[\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}]=2\sqrt{2}n \qquad (8\text{ 分})$$

14. 解 $$y=\mathrm{e}^{-\int x^{-1}\mathrm{d}x}(\int\frac{\cos x}{x}\mathrm{e}^{\int x^{-1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C) \qquad (4\text{ 分})$$

$$=\mathrm{e}^{-\ln x}\left(\int\frac{\cos x}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\frac{1}{x}\left(\sin x+C\right)$$ （7 分）

由 $y(\frac{\pi}{2})=0$，得 $C=-1$.所求特解： $y=\frac{1}{x}(\sin x-1)$. （8 分）

15. 解　所求平面图形的面积：

$$S=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}\Big|_{-\infty}^{0}=1$$ （2 分）

所求旋转体的体积：

$$V=\pi\int_{0}^{1}(\ln y)^2\,\mathrm{d}y$$ （4 分）

$$=\pi\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{1}(\ln y)^2\,\mathrm{d}y$$

$$=\pi\lim_{\varepsilon\to0^+}[y(\ln y)^2\Big|_{\varepsilon}^{1}-\int_{\varepsilon}^{1}2\ln y\,\mathrm{d}y]$$

$$=\pi\lim_{\varepsilon\to0^+}[0-\frac{(\ln\varepsilon)^2}{\varepsilon^{-1}}]-2\pi\lim_{\varepsilon\to0^+}y(\ln y-1)\Big|_{\varepsilon}^{1}$$ （6 分）

$$=\pi\lim_{\varepsilon\to0^+}[0-\frac{2\ln\varepsilon\cdot\varepsilon^{-1}}{-\varepsilon^{-2}}]-2\pi\lim_{\varepsilon\to0^+}[-1-\frac{\ln\varepsilon-1}{\varepsilon^{-1}}]$$

$$=\pi\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{2\ln\varepsilon}{\varepsilon^{-1}}-2\pi\lim_{\varepsilon\to0^+}[-1-\frac{\ln\varepsilon-1}{\varepsilon^{-1}}]=2\pi$$ （8 分）

四、证　设 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，

则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续， （2 分）

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\ln 1=0\quad(x>0)$$ （5 分）

故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加， （6 分）

有 $$f(x)>f(0)=0\quad(x>0)$$

即 $$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}\quad(x>0).$$ （8 分）

五、解　点 $(x,f(x))$ 处切线方程为： $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$ （2 分）

令 $X=0$，得截距　$Y=f(x)-xf'(x)$.

由题意，$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - xf'(x)$$（4 分）

上式两边乘以 x，并求导得 $xf''(x)+f'(x)=0$ （*） （6 分）

即 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xf'(x)]=0,$$

$$xf'(x)=C_1,\quad f(x)=C_1\ln|x|+C_2\quad (C_1,C_2\text{为任意常数})$$（8 分）

[解方程（*）方法 2]：令 $u=f'(x)$，则（*）化为：$xu'+u=0$，

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}=-\frac{\mathrm{d}x}{x},\quad \ln|u|=-\ln|x|+\ln|C_1|$$

$$f'(x)=u=\frac{C_1}{x}$$

$$f(x)=C_1\ln|x|+C_2$$

六、解 （1）要证：$[xf(x)]'\big|_{x=\xi}=0$，令 $\phi(x)=xf(x)$， （1 分）

则 $\phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\phi(a)=\phi(b)=0$，

由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\phi'(\xi)=0$，即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$； （2 分）

（2）令 $\psi(x)=\mathrm{e}^{-2x}f(x)$， （3 分）

则 $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\psi(a)=\psi(b)=0$，

由罗尔定理，存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $\psi'(\eta)=0$，

即 $$\mathrm{e}^{-2\eta}[-2f(\eta)+f'(\eta)]=0,$$

即 $$-2f(\eta)+f'(\eta)=0.$$（4 分）