高等数学下册期末考试参考答案

一、单选题(每小题 4 分，共 12 分) 1．C 2．D 3.B

二、填空题(每小题 4 分，共 28 分)

1．$\frac{3}{2}$ 2．-2 3．2 4．$\frac{a}{2}$ 5．$\frac{2}{3}$ 6．$\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ 7．$\frac{2+\pi}{2}$

三、(8 分)解 过直线$\begin{cases}x+y-z-2=0,\\ x-y+2z-1=0\end{cases}$的平面束方程为

$$x+y-z-2+\lambda(x-y+2z-1)=0，$$

整理得 $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(2\lambda-1)z-(\lambda+2)=0$．再由

$$1\times(1+\lambda)+2\times(1-\lambda)+1\times(2\lambda-1)=0,$$

求得 $\lambda=-2$，代入平面束方程，得 $x-3y+5z=0$．

因此所求投影直线方程为$\begin{cases}x+2y+z=3,\\ x-3y+5z=0.\end{cases}$

四、(8 分)解 积分区域Ω在xOy平面上的投影区域为$\{(x,y,0)|x^2+y^2\le 2\}$，以及积分区域Ω中$\frac{1}{2}(x^2+y^2)\le z\le 1$，故

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{1}(\rho^2+z)\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{1}(\rho^2+z)\mathrm{d}z=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\rho(\frac{1}{2}+\rho^2-\frac{5}{8}\rho^4)\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{4}\rho^2+\frac{1}{4}\rho^4-\frac{5}{48}\rho^6\right]_0^{\sqrt{2}}=2\pi(\frac{1}{2}+1-\frac{5}{6})=\frac{4}{3}\pi．$$

五、(8 分)解 方程 $F(z-x,y+z)=0$ 两边对 x 求导得 $F_1'(\frac{\partial z}{\partial x}-1)+\frac{\partial z}{\partial x}F_2'=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1'}{F_1'+F_2'}．$$

方程 $F(z-x,y+z)=0$ 两边对 y 求导得 $\frac{\partial z}{\partial y}F_1'+F_2'(1+\frac{\partial z}{\partial y})=0$，所以 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2'}{F_1'+F_2'}$．因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=1．$$

六、(10 分)解 记 $P=xy^2+\mathrm{e}^x$，$Q=x^2y+\mathrm{e}^y$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xy=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

在整个 xOy 面内恒成立，因此在整个 xOy 面内，$(xy^2+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x^2y+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分．取积分路线为：沿 x 轴从 $O(0,0)$ 到 $A(x,0)$，再沿平行 y 轴的直线从 $A(x,0)$ 到 $B(x,y)$，所求函数为

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(xy^2+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x^2y+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{OA}(xy^2+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x^2y+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y+\int_{AB}(xy^2+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x^2y+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^y(x^2y+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=\frac{x^2y^2}{2}+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y-2．$$

七、(10 分)解 记Σ_1： $z=0,x^2+y^2\le 1$，取下侧，Ω表示Σ和Σ_1围成的上半球体，D表示积分区域$\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，$D_z:x^2+y^2\le 1-z^2$，于是

$$\iint_{\Sigma}y^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$

$$=3\iiint_{\Omega}z^2\mathrm{d}v+\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\int_0^1 z^2\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\pi$$

$$=3\pi\int_0^1 z^2(1-z^2)\mathrm{d}z+\pi=\frac{2\pi}{5}+\pi=\frac{7\pi}{5}．$$

八、(10 分)解 记 $u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}x^2=x^2，$$

当$|x|<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$绝对收敛；当$|x|>1$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$发散，因此幂级数的收敛半径$R=1$．当$x=\pm 1$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，由莱布尼兹判别法知此级数收敛，故所求级数收敛域为$[-1,1]$．

设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ $(-1\le x\le 1)$，则

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(x^2)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^2)^n=\frac{1}{1+x^2}\quad(-1<x<1)．$$

于是 $s(x)=s(0)+\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan x$，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=xs(x)=x\arctan x\quad(x\in[-1,1])$．

九、(6 分)证明 (1)当 $\lambda<0$ 时，则存在正整数 N，对于 $n\ge N$，有 $\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}<0$，即$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\frac{a_n}{b_n}$，

所以

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\frac{a_n}{b_n}>\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}>\cdots>\frac{a_N}{b_N}，$$

于是 $a_{n+1}>\frac{a_N}{b_N}b_{n+1}$，由于$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散．

(2)当 $\lambda>0$ 时，则存在正整数 N，对于 $n\ge N$，有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\frac{\lambda}{2}>0，$$

于是 $a_{n+1}<\frac{2}{\lambda}(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}})$，所以 $\sum_{n=N}^{m}a_{n+1}<\frac{2}{\lambda}\sum_{n=N}^{m}(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}})=\frac{2}{\lambda}(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}})\le\frac{2}{\lambda}\frac{a_N}{b_N}$，

表明正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和有上界，因此$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛．