

# Índice general

<b>1. Probabilidad</b>	<b>2</b>
1.1. Definiciones preliminares . . . . .	2
1.2. Operaciones con sucesos . . . . .	3
1.3. Leyes de Morgan . . . . .	3
1.4. Álgebra de sucesos . . . . .	4
1.5. Definición axiomática de probabilidad . . . . .	4
1.5.1. Consecuencias de los axiomas . . . . .	4
1.6. Probabilidad condicionada . . . . .	5
1.7. Independencia de sucesos . . . . .	5
1.7.1. Intersección de sucesos independientes . . . . .	5
1.7.2. Independencia de sucesos contrarios . . . . .	5
1.8. Probabilidad compuesta . . . . .	6
1.8.1. Teorema de la probabilidad total . . . . .	6
1.8.2. Teorema de Bayes . . . . .	6
<b>2. Variables aleatorias</b>	<b>7</b>
2.1. Definición de variable aleatoria . . . . .	7
2.2. Función de distribución de una v.a. . . . .	7
2.2.1. Propiedades . . . . .	7

# Capítulo 1

## Probabilidad

### 1.1. Definiciones preliminares

**Experimento aleatorio:** Es aquel que, bajo las mismas condiciones iniciales, puede presentar varios resultados diferentes sin que pueda predecirse en cada caso el resultado que se obtendrá.

Para que un experimento sea aleatorio debe verificar:

- Que pueda ser repetido, en las mismas condiciones, un número ilimitado de veces.
- Se conozca de antemano los posibles resultados del experimento.
- En cada repetición no es posible conocer el resultado que se obtendrá.

**Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio:** Es el conjunto formado por todos los posibles resultados del experimento aleatorio. Lo designamos con la letra  $E$ .

**Suceso:** Se denomina así a cada uno de los subconjuntos del espacio muestral.

Existen dos tipos de sucesos según su composición:

- **Suceso elemental:** Cada uno de los resultados del experimento.
- **Suceso compuesto:** El formado por la unión de sucesos elementales.

**Suceso seguro:** Es aquel que se verifica siempre. Designado por  $E$ .

**Suceso imposible:** Es aquel que no se verifica nunca. Lo designamos por  $\phi$ .

**Espacio de sucesos:** Es el conjunto formado por todos los sucesos compuestos, incluido el suceso imposible. Se designa por  $\beta$ .

## 1.2. Operaciones con sucesos

Sean  $A, B \in \beta$ :

**Suceso unión:** Es el suceso que resulta cuando ocurre  $A$ , ocurre  $B$  o ambos a la vez. Lo designamos por  $A \cup B$ .

**Suceso intersección:** Es el suceso que resulta cuando ocurren  $A$  y  $B$  a la vez. Lo designamos con  $A \cap B$ .

**Inclusión de sucesos:** Diremos que  $A \subset B$  si siempre que ocurre  $A$  ocurre  $B$ . Si  $A \subset B$ , entonces  $A \cap B = A$  y  $A \cup B = B$ .

**Igualdad de sucesos:** Diremos que  $A = B$  si  $A \subset B$  y  $B \subset A$ .

**Sucesos incompatibles:** Dos sucesos son incompatibles cuando al verificarse uno, no puede hacerlo el otro, su intersección es  $\phi$ .

**Suceso contrario:** El suceso contrario de  $A$  es el que se verifica cuando no lo hace  $A$ . Se verifica que  $A \cap \bar{A} = \phi$  y  $A \cup \bar{A} = E$ .

**Suceso diferencia:** Se designa por  $B - A$ . Es el formado por todos los sucesos elementales que pertenecen a  $B$  pero no a  $A$ . Se verifica que  $B - A = B \cap \bar{A}$ . Además  $\bar{A} = E - A$ .

## 1.3. Leyes de Morgan

Sean  $A, B \in \beta$ :

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

## 1.4. Álgebra de sucesos

Todas las operaciones anteriores se pueden realizar porque  $\beta$  tiene estructura de álgebra (es un álgebra de Boole) cuando  $E$  es finito o de  $\sigma$ -álgebra cuando  $E$  es infinito.

## 1.5. Definición axiomática de probabilidad

Diremos que una aplicación  $P : \beta \rightarrow \mathbb{R}$  es una probabilidad si verifica:

1. Si  $A \in \beta$ ,  $P(A) \geq 0$ .
2.  $P(E) = 1$ .
3. Si  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \beta$  son sucesos incompatibles dos a dos, entonces  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ .

La terna  $(E, \beta, P)$  se denomina **espacio probabilístico**.

### 1.5.1. Consecuencias de los axiomas

1. Si  $A \in \beta$ ,  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .
2.  $P(\phi) = 0$ .
3. Si  $A, B \in \beta$  son tales que  $B \subset A$ , entonces:
  1.  $P(B) \leq P(A)$ .
  2.  $P(A - B) = P(A) - P(B)$ .
4. Si  $A \in \beta$ ,  $P(A) \leq 1$ .
5. Si  $A, B \in \beta$  son compatibles, es decir, existe  $A \cap B \neq \phi$ , entonces  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
6. Regla de Laplace: Sean  $A_1, \dots, A_n$  sucesos elementales, es decir, incompatibles dos a dos y tales que  $A_1 \cup \dots \cup A_n = E$ . Supongamos además que  $P(A_1) = \dots = P(A_n)$ . Entonces para todo  $A \in \beta$ :

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables al suceso } A}{\text{Casos posibles}}$$

## 1.6. Probabilidad condicionada

Sean  $A, B \in \beta$  tales que  $P(A) > 0$ . Se llama probabilidad de  $B$  condicionada por  $A$  y se escribe  $P(B|A)$  a la probabilidad de que ocurra  $B$  sabiendo que se ha verificado  $A$ . Se verifica que:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Análogamente, si  $P(B) > 0$ , se define la probabilidad del suceso  $A$  condicionada por  $B$  a:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

El espacio de probabilidad condicionada es un espacio probabilístico, luego se verifican todos los axiomas y todas las propiedades asociadas a la probabilidad.

## 1.7. Independencia de sucesos

Sean  $A, B \in \beta$ .

- Diremos que  $A$  es independiente de  $B$  si  $P(A|B) = P(A)$ .
- Diremos que  $B$  es independiente de  $A$  si  $P(B|A) = P(B)$ .
- Si  $A$  es independiente de  $B$ , entonces  $B$  es independiente de  $A$  y podemos hablar de sucesos independientes.

### 1.7.1. Intersección de sucesos independientes

Sean  $A, B \in \beta$ .  $A$  y  $B$  son independientes si y solo si:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

### 1.7.2. Independencia de sucesos contrarios

Sean  $A, B \in \beta$  sucesos independientes. Entonces:

- $A$  y  $\overline{B}$  son independientes.
- $\overline{A}$  y  $B$  son independientes.
- $\overline{A}$  y  $\overline{B}$  son independientes.

## 1.8. Probabilidad compuesta

Tenemos un conjunto de sucesos  $A_1, \dots, A_n \in \beta$  tales que  $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$ . Entonces:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) * P(A_2|A_1) * \dots * P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

### 1.8.1. Teorema de la probabilidad total

Sean  $A_1, \dots, A_n \in \beta$  incompatibles dos a dos y tales que  $A_1 \cup \dots \cup A_n = E$ . Sea  $B \in \beta$  un suceso cualquiera y supongamos conocidas  $P(A_i) > 0$  y  $P(B|A_i)$ . Entonces:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) * P(A_i)$$

### 1.8.2. Teorema de Bayes

Sean  $A_1, \dots, A_n \in \beta$  incompatibles dos a dos y tales que  $A_1 \cup \dots \cup A_n = E$ . Sea  $B \in \beta$  un suceso cualquiera y supongamos conocidas  $P(A_i) > 0$  y  $P(B|A_i)$ . Entonces, fijado  $k \in 1, 2, \dots, n$ , se verifica que:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) * P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) * P(A_i)}$$

# Capítulo 2

## Variables aleatorias

### 2.1. Definición de variable aleatoria

Una variable aleatoria es una aplicación  $X : E \rightarrow \mathbb{R}$  que a cada elemento del espacio muestral le hace corresponder un número real.

La definición solo tiene sentido si:

- Para cada  $\omega \in E$  se verifica que  $X(\omega) \in \mathbb{R}$ .
- Si  $B = (-\infty, x] \in \mathbb{R}$ ,  $X^{-1}(B) \in \beta$ .

También una variable aleatoria es una cantidad variable cuyos valores dependen del azar y para la cual existe una distribución de probabilidad.

### 2.2. Función de distribución de una v.a.

Sea  $(E, \beta, P)$  un espacio probabilístico asociado a un experimento aleatorio y sea  $X : E \rightarrow \mathbb{R}$  una variable aleatoria. Se llama función de distribución de  $X$  a la aplicación  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que a cada  $x \in \mathbb{R}$  le hace corresponder:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X \in (-\infty, x])$$

#### 2.2.1. Propiedades

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ .
2.  $F$  es monótona no decreciente.
3.  $F$  es continua por la derecha.

**2.2.2. Teorema de la f. distribución**

Una función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función de distribución de una v.a.  $X$  si y solo si verifica las tres propiedades. En base a lo anterior, también es válido:

$$F(a-) = P(X < a), \forall a \in \mathbb{R}$$