Capítulo 1

Probabilidad

1.1. Definiciones preliminares

Experimento aleatorio: Es aquel que, bajo las mismas condiciones iniciales, puede presentar varios resultados diferentes sin que pueda predecirse en cada caso el resultado que se obtendrá.

Para que un experimento sea aleatorio debe verificar:

- Que pueda ser repetido, en las mismas condiciones, un número ilimitado de veces.
- Se conozca de antemano los posibles resultados del experimento.
- En cada repetición no es posible conocer el resultado que se obtendrá.

Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio: Es el conjunto formado por todos los posibles resultados del experimento aleatorio. Lo designamos con la letra E.

Suceso: Se denomina así a cada uno de los subconjuntos del espacio muestral.

Existen dos tipos de sucesos según su composición:

- **Suceso elemental:** Cada uno de los resultados del experimento.
- **Suceso compuesto:** El formado por la unión de sucesos elementales.

Suceso seguro: Es aquel que se verifica siempre. Designado por E.

Suceso imposible: Es aquel que no se verifica nunca. Lo designamos por ϕ.

Espacio de sucesos: Es el conjunto formado por todos los sucesos compuestos, incluido el suceso imposible. Se designa por β.

1.2. Operaciones con sucesos

Sean $A, B \in \beta$:

Suceso unión: Es el suceso que resulta cuando ocurre A, ocurre B o ambos a la vez. Lo designamos por $A \cup B$.

Suceso intersección: Es el suceso que resulta cuando ocurren A y B a la vez. Lo designamos con $A \cap B$.

Inclusión de sucesos: Diremos que $A \subset B$ si siempre que ocurre A ocurre B. Si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$ y $A \cup B = B$.

Igualdad de sucesos: Diremos que $A = B$ si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Sucesos incompatibles: Dos sucesos son incompatibles cuando al verificarse uno, no puede hacerlo el otro, su intersección es ϕ.

Suceso contrario: El suceso contrario de A es el que se verifica cuando no lo hace A. Se verifica que $A \cap \overline{A} = \phi$ y $A \cup \overline{A} = E$.

Suceso diferencia: Se designa por $B - A$. Es el formado por todos los sucesos elementales que pertenecen a B pero no a A. Se verifica que $B - A = B \cap \overline{A}$. Además $\overline{A} = E - A$.

1.3. Leyes de Morgan

Sean $A, B \in \beta$:

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

1.4. Álgebra de sucesos

Todas las operaciones anteriores se pueden realizar porque β tiene estructura de álgebra (es un álgebra de Boole) cuando E es finito o de σ-álgebra cuando E es infinito.

1.5. Definición axiomática de probabilidad

Diremos que una aplicación $P : \beta \to \mathbb{R}$ es una probabilidad si verifica:

1. Si $A \in \beta, P(A) \geq 0$.
2. $P(E) = 1$.
3. Si $A_1, A_2, ..., A_n \in \beta$ son sucesos incompatibles dos a dos, entonces $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$.

La terna (E, β, P) se denomina **espacio probabilístico**.

1.5.1. Consecuencias de los axiomas

1. Si $A \in \beta, P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. $P(\phi) = 0$.
3. Si $A, B \in \beta$ son tales que $B \subset A$, entonces:
    1. $P(B) \leq P(A)$.
    2. $P(A - B) = P(A) - P(B)$.
4. Si $A \in \beta, P(A) \leq 1$.
5. Si $A, B \in \beta$ son compatibles, es decir, existe $A \cap B \neq \phi$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
6. Regla de Laplace: Sean $A_1, ..., A_n$ sucesos elementales, es decir, incompatibles dos a dos y tales que $A_1 \cup ... \cup A_n = E$. Supongamos además que $P(A_1) = ... = P(A_n)$. Entonces para todo $A \in \beta$:

$$P(A) = \frac{Casos\ favorables\ al\ suceso\ A}{Casos\ posibles}$$