Índice general

Capítulo 1

Probabilidad.

1.1. Definiciones preliminares.

Experimento aleatorio: Es aquel que, bajo las mismas condiciones iniciales, puede presentar varios resultados diferentes sin que pueda predecirse en cada caso el resultado que se obtendrá.

Para que un experimento sea aleatorio debe verificar:

- Que pueda ser repetido, en las mismas condiciones, un número ilimitado de veces.
- Se conozca de antemano los posibles resultados del experimento.
- En cada repetición no es posible conocer el resultado que se obtendrá.

Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio: Es el conjunto formado por todos los posibles resultados del experimento aleatorio. Lo designamos con la letra E.

Suceso: Se denomina así a cada uno de los subconjuntos del espacio muestral.

Existen dos tipos de sucesos según su composición:

- **Suceso elemental:** Cada uno de los resultados del experimento.
- **Suceso compuesto:** El formado por la unión de sucesos elementales.

Suceso seguro: Es aquel que se verifica siempre. Designado por E.

Suceso imposible: Es aquel que no se verifica nunca. Lo designamos por ϕ.

Espacio de sucesos: Es el conjunto formado por todos los sucesos compuestos, incluido el suceso imposible. Se designa por β.

1.2. Operaciones con sucesos.

Sean $A, B \in \beta$:

Suceso unión: Es el suceso que resulta cuando ocurre A, ocurre B o ambos a la vez. Lo designamos por $A \cup B$.

Suceso intersección: Es el suceso que resulta cuando ocurren A y B a la vez. Lo designamos con $A \cap B$.

Inclusión de sucesos: Diremos que $A \subset B$ si siempre que ocurre A ocurre B. Si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$ y $A \cup B = B$.

Igualdad de sucesos: Diremos que $A = B$ si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Sucesos incompatibles: Dos sucesos son incompatibles cuando al verificarse uno, no puede hacerlo el otro, su intersección es ϕ.

Suceso contrario: El suceso contrario de A es el que se verifica cuando no lo hace A. Se verifica que $A \cap \overline{A} = \phi$ y $A \cup \overline{A} = E$.

Suceso diferencia: Se designa por $B - A$. Es el formado por todos los sucesos elementales que pertenecen a B pero no a A. Se verifica que $B - A = B \cap \overline{A}$. Además $\overline{A} = E - A$.

1.3. Leyes de Morgan.

Sean $A, B \in \beta$:

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

1.4. Álgebra de sucesos.

Todas las operaciones anteriores se pueden realizar porque β tiene estructura de álgebra (es un álgebra de Boole) cuando E es finito o de σ-álgebra cuando E es infinito.

1.5. Definición axiomática de probabilidad.

Diremos que una aplicación $P : \beta \to \mathbb{R}$ es una probabilidad si verifica:

1. Si $A \in \beta, P(A) \geq 0$.
2. $P(E) = 1$.
3. Si $A_1, A_2, ..., A_n \in \beta$ son sucesos incompatibles dos a dos, entonces $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$.

La terna (E, β, P) se denomina **espacio probabilístico**.

1.5.1. Consecuencias de los axiomas.

1. Si $A \in \beta, P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. $P(\phi) = 0$.
3. Si $A, B \in \beta$ son tales que $B \subset A$, entonces:
    1. $P(B) \leq P(A)$.
    2. $P(A - B) = P(A) - P(B)$.
4. Si $A \in \beta, P(A) \leq 1$.
5. Si $A, B \in \beta$ son compatibles, es decir, existe $A \cap B \neq \phi$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
6. Regla de Laplace: Sean $A_1, ..., A_n$ sucesos elementales, es decir, incompatibles dos a dos y tales que $A_1 \cup ... \cup A_n = E$. Supongamos además que $P(A_1) = ... = P(A_n)$. Entonces para todo $A \in \beta$:

$$P(A) = \frac{Casos\, favorables\, al\, suceso\, A}{Casos\, posibles}$$

1.6. Probabilidad condicionada.

Sean $A, B \in \beta$ tales que $P(A) > 0$. Se llama probabilidad de B condicionada por A y se escribe $P(B|A)$ a la probabilidad de que ocurra B sabiendo que se ha verificado A. Se verifica que:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Análogamente, si $P(B) > 0$, se define la probabilidad del suceso A condicionada por B a:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

El espacio de probabilidad condicionada es un espacio probabilístico, luego se verifican todos los axiomas y todas las propiedades asociadas a la probabilidad.

1.7. Independencia de sucesos.

Sean $A, B \in \beta$.

- Diremos que A es independiente de B si $P(A|B) = P(A)$.
- Diremos que B es independiente de A si $P(B|A) = P(B)$.
- Si A es independiente de B, entonces B es independiente de A y podemos hablar de sucesos independientes.

1.7.1. Intersección de sucesos independientes.

Sean $A, B \in \beta$. A y B son independientes si y solo si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

1.7.2. Independencia de sucesos contrarios.

Sean $A, B \in \beta$ sucesos independientes. Entonces:

- A y $\overline{B}$ son independientes.
- $\overline{A}$ y B son independientes.
- $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes.

1.8. Probabilidad compuesta.

Tenemos un conjunto de sucesos $A_1, ..., A_n \in \beta$ tales que $P(A_1 \cap ... \cap A_n) > 0$. Entonces:

$$P(A_1 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) * P(A_2|A_1) * ... * P(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$$

1.8.1. Teorema de la probabilidad total.

Sean $A_1, ..., A_n \in \beta$ incompatibles dos a dos y tales que $A_1 \cup ... \cup A_n = E$. Sea $B \in \beta$ un suceso cualquiera y supongamos conocidas $P(A_i) > 0$ y $P(B|A_i)$. Entonces:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

1.8.2. Teorema de Bayes.

Sean $A_1, ..., A_n \in \beta$ incompatibles dos a dos y tales que $A_1 \cup ... \cup A_n = E$. Sea $B \in \beta$ un suceso cualquiera y supongamos conocidas $P(A_i) > 0$ y $P(B|A_i)$. Entonces, fijado $k \in 1, 2, ..., n$, se verifica que:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

Capítulo 2

Variables aleatorias.

2.1. Definición de variable aleatoria.

Una variable aleatoria es una aplicación $X : E \to \mathbb{R}$ que a cada elemento del espacio muestral le hace corresponder un número real.

La definición solo tiene sentido si:

- Para cada $\omega \in E$ se verifica que $X(\omega) \in \mathbb{R}$.
- Si $B = (-\infty, x] \in \mathbb{R}, X^{-1}(B) \in \beta$.

También una variable aleatoria es una cantidad variable cuyos valores dependen del azar y para la cual existe una distribución de probabilidad.

2.2. Función de distribución de una v.a.

Sea (E, β, P) un espacio probabilístico asociado a un experimento aleatorio y sea $X : E \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria. Se llama función de distribución de X a la aplicación $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ le hace corresponder:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X \in (-\infty, x])$$

2.2.1. Propiedades.

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.
2. F es monótona no decreciente.
3. F es continua por la derecha.

2.2.2. Teorema de la f. distribución.

Una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función de distribución de una v.a. X si y solo si verifica las tres propiedades. En base a lo anterior, también es válido:

$$F(a-) = P(X < a), \forall a \in \mathbb{R}$$

Además, se verifica lo siguiente:

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.
- $\forall a \in \mathbb{R}, P(X = a) = F(a) - F(a-)$.

2.3. Variables aleatorias discretas. Función de masa.

2.3.1. Definición de v.a. discreta.

Diremos que una variable aleatoria discreta es aquella que toma valores en un conjunto finito o numerable de puntos. Los puntos con probabilidad positiva se denominan **puntos de masa**.

2.3.2. Definición de f. de masa.

Sea $X : E \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria que toma valores $x_1, ..., x_n, ...$ y sean $p_i = P(X = x_i), \forall i \in I = 1, 2, ...$ El conjunto $x_i, p_{i i \in I}$ tal que $\forall i \in I p_i \geq 0$ y $\sum_{i \in I} p_i = 1$ se llama **función de masa**.

Para este caso, la función de distribución de X se calcula como:

$$Para\ cada\ x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X \leq x_i) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

La función de masa también caracteriza las v.a. discretas, por lo que usándola se puede calcular la probabilidad de cualquier suceso.

2.3.3. Conclusión.

En resumen:

1. Tanto las funciónde masa como la función de distribución caracterizan las variables aleatorias discretas.

2. Conociendo una de ellas se puede obtener la otra con facilidad.
3. Ambas permiten calcular la probabilidad de cualquier suceso asociado a ese experimento aleatorio.

2.4. Variables aleatorias continuas. Función de densidad.

2.4.1. Definición de v.a. continua.

Diremos que una variable aleatoria $X : E \to \mathbb{R}$ es continua si existe una función f integrable y no negativa tal que la función de distribución F verifica:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

2.4.2. Definición de f. densidad.

La función f se llama función de densidad asociada a x, catacteriza a la v.a. y verifica las propiedades siguientes:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}\ a < b,\ P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.
3. Si X es una v.a. continua, $\forall a \in \mathbb{R}, P(X = a) = 0$.
4. Toda función integrable f que verifica que $f(x) \geq 0, \forall \in \mathbb{R}$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ es la función de densidad de una v.a. cuya función de distribución es:
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \ \forall x \in \mathbb{R}$$
5. Si X es una v.a. continua con función de distribución F, entonces $f(x) = F'(x)$ en los puntos en que F sea derivable y 0 en el resto.

2.5. Esperanza matemática y varianza de una variable.

2.5.1. Esperanza matemática.

Sea $X : E \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria. Se llama **media, valor esperado** o **esperanza matemática** de X y se escribe $E[X]$ a:

- Si X es discreta con función de masa $\{x_i, P(X = x_i)\}_{i\in I}$ y la serie converge:
$$E[X] = \sum_{i\in I} x_i P(X = x_i)$$
- Si X es continua con función de densidad f y existe la integral:
$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Propiedades.

1. Si $X : E \to \mathbb{R}$ es una variable aleatoria y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación de manera que $Y = g(X)$ es también una variable aleatoria, entonces:
    - Si X es discreta con función de masa $\{x_i, P(X = X_i)\}_{i\in I}$ y la serie converge:
    $$E[g(X)] = \sum_{i\in I} g(x_i) P(X = x_i)$$
    - Si X es continua con función de densidad f y existe la integral:
    $$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) f(X) dx$$
2. Si $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son tales que existe $E[g_1(X)]$ y $E[g_2(X)]$, entonces para todos $a, b \in \mathbb{R}$:
$$E[ag_1(X) + bg_2(X)] = aE[g_1(X)] + bE[g_2(X)]$$
En particular:
$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

2.5.2. Varianza.

Sea $X : E \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria. Se llama **varianza** de X y se escribe $V(X)$ a $V(X) = E\big[(X - E[X])^2\big]$ si existe esta esperanza.
Para calcular la varianza, distinguimos según el tipo de variable aleatoria:

- Si X es discreta con función de masa,
$$V(X) = \sum_{i\in I} (x_i - E[X])^2 P(X = x_i)$$
siempre que la serie sea convergente.

- Si X es continua con función de densidad,

  $$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx$$

  si existe la integral.