ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ *20/7/2022*

"Ερμηνεία ενός παραδόξου - Halting Problem και Προβλεψιμότητα"

Εισαγωγή

Ενστικτωδώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο ντετερμινισμός συνεπάγεται προβλεψιμότητα, τουλάχιστον όταν δίνονται οι νόμοι και οι αρχικές συνθήκες του σύμπαντος . Όμως εάν συσχετίσουμε την ιδέα αυτή με την δημοσίευση του Alan Turing "On computable Number" (1936)[1], η οποία περιέχει το περίφημο Halting Problem, θα παρατηρήσουμε ότι οδηγούμαστε σε ένα παράδοξο. Το παράδοξο αυτό ονομάζεται «Παράδοξο της Προβλεψιμότητας» και μέσω της χρήσης των μαθηματικών θα το ερμηνεύσουμε και θα ορίσουμε τα όρια της ερμηνείας αυτής καθώς και τα αποτελέσματα του ισχυρισμού μας.

Ιστορική Αναδρομή

Μέσω μιας σύντομης ιστορικής αναδρομής, θα παρουσιάσουμε τα εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν για την ερμηνεία του παραδόξου.

Η ιστορία του παραδόξου της Προβλεψιμότητας ξεκινά το 1814 στο άρθρο του διάσημου μαθηματικού Laplace "A philosophical essay on Probabilities"[2]. Ισχυρίστηκε ότι :
" Όποιος κατέχει την πλήρη πληροφορία των νόμων ενός ντετερμινιστικού σύμπαντος και των θέσεων των σωματιδίων τα οποία το αποτελούν, θα μπορούσε να προβλέψει οποιοδήποτε γεγονός, οποιαδήποτε στιγμή".
Η ανθρώπινη ερμηνεία των νόμων του σύμπαντος και των θέσεων των σωματιδίων του, γίνεται μέσω των μαθηματικών. Την χρονική περίοδο αυτή, η μαθηματική επιστήμη δεν είχε ισχυρά θεμέλια και χρειάστηκαν αρκετά χρόνια και μια επιστημονική αναδιοργάνωση για να οριστούν.

Πρωτοπόρος μαθηματικός ο Cantor, εισήγαγε την συνολοθεωρία "Set theory" [3] το 1874 και μέσω της διαγωνιοποίησης, σύγκρινε άπειρα σύνολα, το οποίο προκάλεσε ρήξη στην μαθηματική κοινότητα. Δημιουργήθηκαν δύο αντίπαλες πλευρές, η μία απέρριπτε την ιδέα, ενώ η πλευρά του μαθηματικού θεμελιωτή Hilbert υποστήριζε την νέα θεωρία. Όπως και στα παράδοξα που θα ακολουθήσουν, στην συνολοθεωρία, παρατηρούμε για πρώτη φορά το πρόβλημα της αυτο-αναφοράς (self-reference). Ο Russel το 1901[4] παρατήρησε ότι τα σύνολα μπορούν να περιέχουν σύνολα, ακόμα και τον εαυτό τους. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε το σύνολο R, το οποίο ορίζεται ως το σύνολο που περιέχει όλα τα σύνολα που δεν περιέχουν τον εαυτό τους.

Russell's Paradox : " $Έστω\ \ R = \{ x \mid x \notin x \},\ τότε\ R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ "

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις :

- *Το σύνολο R δεν περιέχει τον εαυτό του, τότε σύμφωνα με τον ορισμό το σύνολο R θα έπρεπε να περιλαμβάνεται στο R.*
- *Το σύνολο R περιέχει τον εαυτό του, τότε σύμφωνα με τον ορισμό το σύνολο R δεν θα έπρεπε να περιλαμβάνεται στο R.*

Σε αυτό το σημείο, παρατηρούμε ότι το παράδοξο του Russel, αποτελεί υποκατηγορία του Liar's paradox[5a], το παράδοξο του ψεύτη. Το παράδοξο αυτό είναι του Κρητικού φιλόσοφου Επιμενίδη (600π.χ.), ο οποίος είπε ότι: «όλοι οι Κρητικοί είναι ψεύτες». Αν αυτό που είπε δεν ήταν ψέμα, τότε αυτό που είπε ήταν αλήθεια και επομένως αυτό που είπε, είναι ψέμα. Η κατηγορία παραδόξων που ανήκει αυτό το παράδοξο, ονομάζεται ερμηνευτική και αποτελούν παράδοξα διατυπωμένα στο πλαίσιο των φυσικών γλωσσών. Σύμφωνα με το βιβλίο του Αναπολιτάνου ''Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών'' [5b] :
«*Τα ερμηνευτικά «παράδοξα», σύμφωνα με την κυρίαρχη αντίληψη της εποχής, οφείλονταν σε σύγχυση και μείξη των διαφορετικών ιεραρχικών επιπέδων μιας φυσικής γλώσσας. Η εξοστράκισή τους, λοιπόν, θεωρήθηκε πως θα μπορούσε να επιτευχθεί μόνο με πλήρη ανάλυση και ακριβή καθορισμό των ορίων των διαφορετικών ιεραρχικών επιπέδων της συγκεκριμένης φυσικής γλώσσας, στην οποί έχουν διατυπωθεί και με πιθανή απαγόρευση της χρήσης αυτοαναφορών ή αναφορών οι οποίες παραβιάζουν τα όρια που καθορίζει η διάταξη των διαφορετικών επιπέδων*»

Αντίστοιχα, θα ερμηνεύσουμε τα όρια του συστήματος του οποίου θα θεωρήσουμε και θα μελετήσουμε την χρήση της αυτοαναφοράς σε αυτό. Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που προτάθηκε στο απόσπασμα, η λύση του παραδόξου του Russell, ώστε η μαθηματική επιστήμη να θεμελιωθεί σωστά, ήταν η αντικατάσταση του αξιώματος. Συγκεκριμένα ο Zermelo[6], μαθητής του Hilbert, πρότεινε την αντικατάσταση του αξιώματος :

" $\forall$ *τύπο* $A(x)$ *υπάρχει ένα σύνολο* $y = \{\, x : A(x)\}$ "
με το αξίωμα :
" $\forall$ *τύπο* $A(x)$ *και κάθε σύνολο* b *υπάρχει ένα σύνολο* $y = \{x\colon (x \text{ μέρος του } b) \cap A(x)\}$ "

Με αυτό τον τρόπο, περιόρισε το εύρος του τύπου στο σύνολο b, το οποίο συχνά αποκαλείται και σύμπαν και αποτελεί πρακτική που θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα. Ύστερα ο Hilbert προσπάθησε να θέσει τα θεμέλια των μαθηματικών ύστερα από την έμπνευση του από το Principia Mathematica[7] και ισχυρίστηκε ότι τα μαθηματικά είναι πλήρη, συνεπή και υπολογίσημα[8]. Οι ισχυρισμοί για την πληρότητα και την συνέπεια των μαθηματικών, καταρρίφθηκαν από το Gödel ο οποίος διατύπωσε το θεώρημα της Μη-Πληρότητας[9,10] :

" Έστω Πρόταση(g) : δεν υπάρχει απόδειξη για το g

- Εάν είναι ψευδής η πρόταση, τότε υπάρχει απόδειξη και έτσι αποδείξαμε ότι το g ισχύει, άρα δεν υπάρχει απόδειξη για το g (παράδοξο)
- Εάν είναι αληθής, τότε το σύστημα μαθηματικών που χρησιμοποιούμε έχει προτάσεις που είναι αληθείς, αλλά δεν υπάρχει απόδειξη για αυτές ”

Παρατηρούμε ξανά, ότι η αυτο-αναφορά (self reference) δημιουργεί ένα παράδοξο.
Ο Gödel απέδειξε ότι σε οποιοδήποτε σύστημα μαθηματικών, θα υπάρχουν προτάσεις οι οποίες παρόλο ότι είναι αληθείς δεν μπορούν να αποδειχθούν. Το οποίο αποτελεί πυλώνα στην ερμηνεία του παραδόξου της απροβλεψίας - σε συνδυασμό με το Halting Problem του Turing, που θα αναλύσουμε παρακάτω-.
Έπειτα ο Gödel, δημοσίευσε το δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας και απέδειξε ότι οποιοδήποτε σύστημα μαθηματικών, δεν μπορεί να αποδείξει την συνέπεια του.

«Έστω ότι το F είναι ένα συνεπές σύστημα μαθηματικών το οποίο περιέχει αριθμητική , τότε $F \nvdash Cons(F)$ » [10]

Άρα δεν μπορούμε χρησιμοποιώντας το F να αποδείξουμε την συνέπεια του. Δηλαδή το καλύτερο σύστημα μαθηματικών το οποίο θα μπορούσαμε να έχουμε, θα ήταν ένα συνεπές αλλά όχι πλήρες σύστημα. Το οποίο επειδή δεν μπορούμε να το αποδείξουμε, δεν γνωρίζουμε εάν είναι συνεπές. Συνεπώς, τα μαθηματικά που χρησιμοποιούμε αυτή την στιγμή, δεν είναι αποδεδειγμένα ως συνεπή, αυτό σημαίνει ότι σε μελλοντικό χρόνο θα μπορούσαν να «καταρριφθούν» και όλη η παρακάτω ανάλυση πιθανόν να αχρηστευθεί.

Παρουσίαση του Halting Problem

Η διάψευση της τρίτης αρχής των μαθηματικών του Hilbert, ήρθε από τον Alan Turing το 1936 με την δημοσίευση του άρθρου “On Computable Numbers”. Στο άρθρο αυτό εμπεριέχεται η διάσημη απόδειξη ότι το Halting Problem είναι undecidable. Μια απλή υλοποίηση του, είναι η παρακάτω συνάρτηση σε μια προγραμματιστική γλώσσα (Python), όπως υλοποίησε ο Christopher Strachey[11]:

```
def g() :
     if halt(g) :
          loop_forever()
```

Η απόδειξη χρησιμοποιεί την απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι έχουμε υλοποιήσει μια συνάρτηση halt(program_code), η οποία παίρνει ως όρισμα τον κώδικα μιας συνάρτησης και επιστρέφει true (αληθές) εάν το πρόγραμμα θα τερματίσει, ή false (ψευδές) εάν βρεθεί σε ένα ατέρμονο βρόχο, δηλαδή δεν τερματίσει. Στο παραπάνω πρόγραμμα, οδηγούμαστε σε ένα παράδοξο. Ας εξετάσουμε τα δύο σενάρια :

Εάν η συνάρτηση halt(g) επιστρέψει true, τότε σύμφωνα με το ορισμός η g() θα πρέπει να τερματίσει, όμως εκτελείται η επόμενη εντολή loop_forever() και η g() δεν τερματίζει. (Άτοπο)

Εάν η συνάρτηση halt(g) επιστρέψει false, τότε σύμφωνα με το ορισμό η g() δεν θα τερματίσει, όμως η εκτέλεση της g() τερματίζει χωρίς πρόβλημα. (Άτοπο)

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η συνάρτηση g(), είναι το counter της halt() δηλαδή δρα αντίθετα από αυτήν. Για αυτό το λόγο η συνάρτηση halt() δεν μπορεί να προβλέψει την δράση της g(), καθώς η πρόβλεψη περιλαμβάνει την δράση της ίδιας, δηλαδή ένα πρόβλημα αυτοαναφοράς. Άρα δεν γίνεται να υπάρχει μια συνάρτηση σαν την halt(), η οποία θα μπορεί να προβλέψει την συμπεριφορά οποιοδήποτε προγράμματος.

2. Συσχετισμός Αναποφασιστικότητας (undecidability) με Απροσδιοριστία (unpredictability)

Σε ένα ντετερμινιστικό σύμπαν, θεωρούμε πως κάθε δράση είναι αποτέλεσμα μιας αλυσιδωτής αντίδρασης και ενός καθολικού συστήματος φυσικών φαινομένων. Σε οποιαδήποτε στιγμή, η τωρινή θέση ενός σωματιδίου στο χώρο μπορεί να ερμηνευθεί από την ανάλυση των προηγούμενων γεγονότων. Όμως αντίθετα με το Laplace, θα δείξουμε ότι η γνώση των θέσεων των σωματιδίων και των φυσικών νόμων, δεν συνεπάγεται προβλεψιμότητα. Για να το αποδείξουμε, θα υποθέσουμε ότι ισχύει η εικασία του, δηλαδή μπορούμε να προβλέψουμε την κίνηση των σωματιδίων στο χώρο. Τότε θα μπορούσε να υπάρχει μια μηχανή η οποία θα μπορούσε να προβλέψει τις κινήσεις και τις δράσεις οποιαδήποτε στιγμή οποιουδήποτε αντικειμένου του σύμπαντος. Η μηχανή αυτή ως μέρος του σύμπαντος θα πρέπει να μπορεί να προβλέψει την δράση της ίδιας. Έτσι, αντίστοιχα με τα προηγούμενα παράδοξα και πιο συγκεκριμένα με το Halting Problem, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σενάριο στο οποίο η μηχανή αυτή, δεν θα μπορεί να προβλέψει.

Έστω ότι η μηχανή προβλέπει το γεγονός ότι ο αναγνώστης θα σταματήσει να διαβάζει μετά από αυτήν την πρόταση. Όμως δεν κατάφερε να προβλέψει ότι ο αναγνώστης μπορεί να δράσει όπως το counter που αναφέραμε και να συνεχίσει να διαβάζει, όταν η πρόβλεψη του ανακοινώνεται. Συνεπώς οδηγούμαστε σε ένα παράδοξο : το σύμπαν το οποίο υποθέσαμε είναι ντετερμινιστικό, αλλά η μηχανή είναι ανίκανη να προβλέψει τις δράσεις του αναγνώστη. Δηλαδή δεν υπάρχει μηχανή που μπορεί να αποφασίσει την δράση του αναγνώστη :

Επιλογή 1 : Θα συνεχίσει να διαβάζει

Επιλογή 2 : Δεν θα συνεχίσει να διαβάζει

Η αδυναμία του μηχανήματος να πάρει την σωστή απόφαση για την δράση του αναγνώστη (decidability), οδηγεί στην λάθος πρόβλεψη.

Άρα οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το ντετερμινιστικό σύμπαν δεν συνεπάγεται προβλεψιμότητα.

ντετερμινισμός ⊭ προβλεψιμότητα

Σε αυτό το σημείο δείξαμε, ότι αν θεωρήσουμε ότι βρισκόμαστε σε ένα ντετερμινιστικό σύστημα στο οποίο κάθε αντικείμενο υπακούει κάποιο νόμο δράσης αντίδρασης, τότε δεν υπάρχει κάποιο μηχάνημα το οποίο βρίσκεται στο σύστημα αυτό και μπορεί να προβλέψει μελλοντικές καταστάσεις του συστήματος. Συνεπώς εάν δεν υπάρχει τεχνητή νοημοσύνη που μπορεί να προβλέψει τις μελλοντικές καταστάσεις και άμα θεωρήσουμε ότι ο ανθρώπινος νους δουλεύει με τρόπο αντίστοιχο της μηχανής ή με άλλο τρόπο διαφορετικό, αλλά αδυνατεί να προβλέψει και αυτός τις μελλοντικές καταστάσεις, τότε μπορούμε να πούμε, ότι ο άνθρωπος που ζει στο σύμπαν αυτό, νιώθει ότι έχει ελεύθερη βούληση.

Άρα ο τελικός συλλογισμός, ας τον ονομάσουμε Συλλογισμός Παραδόξου Προβλεψιμότητας (Σ.Π.Π.), είναι ο εξής :

α. Έστω ότι βρισκόμαστε σε ένα ντετερμινιστικό σύστημα.
β. Έστω ότι υπάρχει μηχάνημα το οποίο θα μπορούσε να προβλέψει τις μελλοντικές καταστάσεις του συστήματος αυτού → Άτοπο, δεν υπάρχει
γ. Συνεπώς μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αφού κανένας που βρίσκεται μέσα στο σύστημα αυτό δεν μπορεί να προβλέψει τις μελλοντικές καταστάσεις του, τότε ο άνθρωπος ο οποίος είναι μέρος αυτού, νιώθει ότι έχει ελεύθερη βούληση ως προς αυτό. Δηλαδή οι δράσεις ενός ανθρώπου Α ως προς τον παρατηρητή Β δεν μπορούν να προκαθοριστούν πλήρως και ο Α νιώθει ότι έχει αυτοέλεγχο του εαυτού του, δηλαδή ελεύθερη βούληση.

3. Μελέτη ορίων του συστήματος (Σ.Π.Π.)

3. Για να καταλήξουμε στο παραπάνω αποτέλεσμα του ισχυρισμού, έχουμε θεωρήσει αρκετούς όρους ως δεδομένους. Παρακάτω θα αναλύσουμε υπό ποιές συνθήκες, ο παραπάνω ισχυρισμός είναι αληθής και τις υπόλοιπες για τις οποίες δεν ισχύει.

3.1
Για να είναι αληθής ο παραπάνω ισχυρισμός, πρώτα θεωρήσαμε ότι το σύστημά μας είναι ντετερμινιστικό. Σε αντίθετη περίπτωση, ο ισχυρισμός ισχύει αυτόματα, καθώς δεν υπάρχει κάποιο είδος γενικότερων κανόνων, που κυβερνούν το σύστημα. Άρα, δεν θα μπορούσε να υπάρχει κάποιο μηχάνημα πρόβλεψης. Συνεπώς, θα μπορούσε να υπάρχει η αίσθηση της ελεύθερης βούλησης.

3.2 Μη επιλύσιμα προβλήματα
Το μηχανήματα τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε, για να κάνουμε προβλέψεις, δουλεύουν με ντετερμινιστικό τρόπο και έχουν άπειρη μνήμη. Όμως, επειδή είναι μηχανές Turing μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο για υπολογίσιμα προβλήματα.(Ref: Turing). Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης του Cantor, μπορούμε να

αποδείξουμε ότι το σύνολο όλων των προβλημάτων, είναι μη αριθμήσιμο και ισάριθμο του δυναμοσυνόλου των φυσικών αριθμών 2^N, όπου N οι φυσικοί αριθμοί [12].
Συνεπώς το πλήθος των προβλημάτων απόφασης , όπως το Halting Problem, είναι μη αριθμήσιμο. Έπειτα το πλήθος των προγραμμάτων υπολογιστή είναι αριθμήσιμο, καθώς είναι υποσύνολο των συμβολοσειρών. Άρα το πλήθος των προβλημάτων για τα οποία υπάρχει λύση είναι αριθμήσιμα, αφού το καθένα από αυτά, αντιστοιχεί στο πρόγραμμα επίλυσής του. Ισχύει ότι το πλήθος των προβλημάτων απόφασης, είναι μη αριθμήσιμο και είναι η ένωση των προβλημάτων για τα οποία υπάρχει και για αυτά που δεν υπάρχει λύση. Έτσι, επειδή τα προβλήματα για τα οποία υπάρχει λύση είναι αριθμήσιμα, συνεπάγεται πως τα προβλήματα για τα οποία δεν υπάρχει λύση, είναι μη αριθμήσιμα. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα με άτοπο, καθώς αν υποθέσουμε ότι τα προβλήματα για τα οποία υπάρχει λύση είναι αριθμήσιμα, τότε το πλήθος όλων των προβλημάτων είναι αριθμήσιμο ως ένωση δύο αριθμήσιμων συνόλων, το οποίο είναι άτοπο.
Άρα υπάρχουν μη αριθμήσιμα προβλήματα, για τα οποία δεν υπάρχει λύση, δηλαδή δεν υπάρχει πρόγραμμα. Ένα από αυτά αποτελεί και το Halting Problem. Συνεπώς είναι σχεδόν άτοπο να ισχυριστούμε ότι θα μπορούσε να υπάρξει μηχανή που να έχει ένα πρόγραμμα το οποίο να μπορούσε να υπολογίζει όλα τα υποπροβλήματα που θα προκύψουν από τις κινήσεις των ατόμων ενός σύμπαντος. Οπότε παρόλο που αποδεινύουμε ότι δεν θα μπορούσε να υπάρχει μηχάνημα πρόβλεψης μελλοντικών καταστάσεων, είναι χρήσιμο να πούμε ότι γενικότερα υπάρχουν μη αριθμήσιμα προβλήματα, τα οποία δεν έχουν λύση, άρα είναι πρακτικά αδύνατο να κατασκευαστεί μηχάνημα υπολογισμού για το σύνολο όλων των προβλημάτων που παρατηρούνται στο σύμπαν. Συνεπώς η θεώρηση ότι υπάρχει αλλά δεν μπορεί να δουλέψει σωστά, λόγο Halting Problem, είναι σε αρκετά θεωρητικό επίπεδο.

3.3 Μέγεθος του συστήματος

Εκτός από την θεώρηση ότι το σύμπαν είναι ντετερμινιστικό, έχουμε θεωρήσει επίσης ότι το σύμπαν είναι άπειρο. Στην περίπτωση όπου δεν είναι άπειρο ο ισχυρισμός δεν ισχύει, καθώς υπάρχει μηχάνημα που μπορεί να επιλύσει το Halting Problem. Μπορούμε να παρατηρήσουμε μια πρακτική εφαρμογή αυτής της ιδέας σε αυτόματα τα οποία είναι linear bounded[13], δηλαδή έχουν πεπερασμένη μνήμη. Το σύμπαν τους αποτελεί η μνήμη που έχουν και αντίθετα από το αρχικό Turing Machine δεν είναι άπειρη. Ένα τέτοιο μηχάνημα, έχει πεπερασμένο αριθμό από καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί και έτσι κάθε ντετερμινιστικό πρόγραμμα το οποίο εκτελείται σε αυτό, είτε θα σταματήσει, είτε θα επαναλάβει μια προηγούμενη κατάσταση. Σε αυτές τις συγκεκριμένες μηχανές, μπορούμε να προβλέψουμε την δράση τους. Το συγκεκριμένο παράδειγμα, χρησιμοποιείται ευρέως στην αρχιτεκτονική υπολογιστών και ειδικότερα στην πρόβλεψη εντολών που θα χρειαστεί να τρέξει ο επεξεργαστής. Παρατηρούμε λοιπόν ότι το Halting Problem είναι decidable δηλαδή επιλύσιμο για finite state machines, δηλαδή ντετερμινιστικά αυτόματα πεπερασμένης μνήμης. Ως αποτέλεσμα, εάν το σύμπαν στο οποίο βρισκόμαστε είναι πεπερασμένο και μπορεί να υπάρχει ένα μηχάνημα το οποίο μπορεί να γνωρίζει τους νόμους και τις αρχικές θέσεις κάθε σωματιδίου του σύμπαντος αυτού, τότε αυτό είναι ικανό να προβλέψει τις καταστάσεις που μπορεί να βρεθεί, καθώς αυτές είναι πεπερασμένες.

3.4 Υπολογισημότητα και ανθρώπινη νοημοσύνη

Κατά την ανάλυση του συλλογισμού, θεωρήσαμε ότι θα μπορούσε να υπάρχει ένα μηχάνημα το οποίο να έχει την δυνατότητα να υπολογίζει και να λύνει οποιοδήποτε πρόβλημα του ντετερμινιστικού συστήματος στο οποίο βρίσκεται. Όμως, στην περίπτωση των ανθρώπων που αποτελούν μέρος του συστήματος, δεν γνωρίζουμε ως σήμερα εάν η ανθρώπινη νοημοσύνη και συμπεριφορά είναι υπολογίσιμη. Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε σύμφωνα με το Σ.Π.Π., είναι ότι δεν είναι, καθώς οποιοδήποτε ον μηχανικό ή βιολογικό δεν μπορεί να προβλέψει πλήρως καταστάσεις ενός συστήματος στο οποίο είναι μέλος. Οπότε ο άνθρωπος έχει την αίσθηση της ελεύθερης βούλησης ως προς το σύστημα αυτό, οπότε κανένα μέλος του συστήματος δεν μπορεί να προβλέψει – υπολογίσει την συμπεριφορά του.

4. Συμπεράσματα και παρατηρήσεις του Σ.Π.Π.

Θεωρώντας ότι ο συλλογισμός ισχύει, μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποια επιπλέον συμπεράσματα, τα οποία θα μελετήσουμε παρακάτω :

4.1 Η ανικανότητα πρόβλεψης δεν συνεπάγεται μη ντετερμινιστικό σύστημα

$$(\ulcorner (\text{προβλεψιμότητα})) \nvDash (\ulcorner (\text{ντετερμινισμός}))$$

Η ανικανότητα πρόβλεψης των δράσεων των αντικειμένων στο σύμπαν, δεν σημαίνει ότι αυτό παύει να είναι ντετερμινιστικό. Καθώς σύμφωνα με τον ορισμό της έννοιας του ντετερμινισμού, αποτελεί την « θεωρία που παραδέχεται ότι όλα όσα συμβαίνουν στον κόσμο γίνονται σύμφωνα με κάποια αιτία, που την ακολουθεί αναγκαστικά πάντα το ίδιο αποτέλεσμα ».

Γνωρίζοντας τους νόμους του σύμπαντος, όπως υποθέσαμε, θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε τα φαινόμενα τα οποία συμβαίνουν, όμως όπως «αποδείξαμε» παραπάνω δεν θα μπορούμε να τα προβλέψουμε. Άρα τα φυσικά φαινόμενα θα ακολουθούν κάποιους ορισμένους κανόνες, οι οποίοι θα αποτελούν ερμηνεία των αποτελεσμάτων κάποιας αιτίας , δηλαδή θα υπάρχει μια αλυσιδωτή αντίδραση αίτιου και αποτελέσματος . Συνεπώς μπορούμε να έχουμε ντετερμινισμό και αδυναμία προβλεψιμότητας στο σύστημά μας. Για το συγκεκριμένο λόγο, ο άνθρωπος που είναι μέσα στο σύστημα αυτό, λέμε πως αισθάνεται ότι έχει ελεύθερη βούληση και όχι πως έχει ελεύθερη βούληση.

4.2 Προβλεψιμότητα εκτός του οριοθετημένου σύμπαντος.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η λύση που πρότεινε ο Zermelo για το παράδοξο του Russell ήταν ο περιορισμός του πεδίου δράσης των ισχυρισμών στην συνολοθεωρία. Δηλαδή ο προσδιορισμός ενός καθορισμένου σύμπαντος στο οποίο έχει ισχύ η έννοια. Έτσι αντί για να μπορούμε να έχουμε ως έννοια Q(x) τώρα το Q(x) πρέπει να ανήκει σε ένα U που αποτελεί το σύμπαν μας. Ένας εξωτερικός παρατηρητής του U ο οποίος δηλαδή δεν ανήκει σε αυτό, θα μπορούσε να προβλέψει τις μελλοντικές καταστάσεις του U, εάν αυτό είναι ντετερμινιστικό. Ως εξωτερικός παρατηρητής δεν μπορεί να υπάρξει «θύμα» του παραδόξου του ψεύτη και της αυτοαναφοράς, έτσι μπορεί να λύσει το Halting Problem και γενικότερα να προβλέψει τις μελλοντικές καταστάσεις του U, αρκεί να γνωρίζει του νόμους και τις αρχικές του καταστάσεις. Αντίστοιχα στο δικό μας σύμπαν, εάν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Σ.Π.Π. , τότε ένας εξωτερικός παρατηρητής του δικού μας σύμπαντος, πιθανώς κάποιο ον τεσσάρων διαστάσεων με πρόσβαση στην διάσταση του χρόνου, θα μπορούσε εύκολα να γνωρίζει όλες τις καταστάσεις του συστήματος το οποίο παρατηρεί.

Όπως αναφέρθηκε στο 3. (Μέγεθος σύμπαντος) ο ισχυρισμός δεν ισχύει όταν το U είναι πεπερασμένο. Άρα θα θεωρήσουμε ότι το σύμπαν είναι άπειρο. Επίσης εάν μπορούμε να θεωρήσουμε το σύμπαν U καθορισμένο, τότε θα μπορούσαμε και να το μελετήσουμε ως εξωτερικοί παρατηρητές. Όμως πρέπει όπως αναφέρει η Ismael(2019)[14], να γνωρίζουμε ότι : « Εάν οι προβλέψεις μας προκαλούν αναταράξεις στο σύμπαν το οποίο προσπαθούμε να προβλέψουμε, τότε είναι αναμενόμενο να περιορίζουμε την ικανότητά μας να προβλέψουμε » (p.491)

Επίλογος

Μέσω της παραπάνω ανάλυσης, παρατηρήσαμε ότι το παράδοξο της προβλεψιμότητας, είναι στενά δεμένο με μαθηματικές έννοιες και ατέλειες. Το παράδοξο δημιουργείται, όταν γνωρίζοντας τις αρχικές καταστάσεις και τους νόμους ενός συστήματος θεωρούμε ότι ένα αποδοτικό πρόγραμμα πρόβλεψης, μπορεί να υπάρξει για ολόκληρο το σύστημα και ταυτόχρονα να αποτελεί μέρος του. Στην περίπτωση όπου το σύμπαν είναι άπειρο και ντετερμινιστικό, τότε ακόμα και εάν όλα τα προβλήματα στο σύστημα αυτό είναι υπολογίσιμα, δεν μπορεί να υπάρξει μηχάνημα το οποίο να μπορεί να προβλέψει τις μελλοντικές καταστάσεις του συστήματος. Έτσι καταλήγουμε ως άνθρωποι στο συμπέρασμα ότι αισθανόμαστε να έχουμε ελευθερία βούλησης.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

1. Alan Turing (1936), " On Computable Numbers, with an application to the Entscheidungsproblem "

2. Pierre Simon, Marquis De Laplace, " A philosophical essay on Probabilities " https://bayes.wustl.edu/Manual/laplace_A_philosophical_essay_on_probabilities.pdf

3. Georg Cantor, " Set Theory " , https://plato.stanford.edu/entries/set-theory/

4. Russell's Paradox :
    a. https://plato.stanford.edu/entries/russell-paradox/
    b. Irvine, A. D., & Deutsch, H. (1995). Russell's paradox

5. Liar Paradox :
    a. https://en.wikipedia.org/wiki/Liar_paradox
    b. Διονύσιος Α. Αναπολιτάνος, 'Εισαγωγή στη Φιλοσοφική των Μαθηματικών' , Ένατη Έκδοση, Εκδόσεις Νεφέλη , σελίδα 215-216

6. Zermello's Solution, Axiom of Choice , https://www.britannica.com/science/axiom-of-choice

7. Principia Mathematica :
    a. Russell, B., & Whitehead, A. (1973). Principia Mathematica [PM], vol I, 1910, vol. II, 1912, vol III, 1913, vol. I, 1925, vol II & III, 1927, Paperback Edition to* 56. Cambridge UP.
    b. David Hilbert and Principia Mathematica https://link.springer.com/chapter/10.1057/9781137344632_2?noAccess=false

8. Richard Zach , Hilbert's Program (2003), https://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/

9. Gödel, K. (1992). On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems. Courier Corporation.

10. Gödel, K. (1986). Kurt Gödel: Collected Works: Volume I: Publications 1929-1936 (Vol. 1). Oxford University Press, USA

11. Christopher Strachey (1965). "An impossible program". The Computer Journal. 7 (4): 313.

12. Δ. Φωτάκης , Δ. Σούλιου , Σύνολα , http://www.softlab.ntua.gr/~fotakis/discrete_math/data/02_Sets.pdf

13. Daylight, Edgar G. (2021), "The halting problem and security's language-theoretic approach: Praise and criticism from a technical historian"

14. Ismael, J. T. (2019) Determinism, Counterpredictive Devices, and the Impossibility of Laplacean Intelligences. The Monist, 102, 478-498

Πηγές :

Math's Fundamental Flaw, Veritasium, Derek Alexander Muller,
https://www.youtube.com/watch?v=HeQX2HjkcNo&t=1366s

Victor Gijsbers (2020) The Paradox of Predictability
https://link.springer.com/article/10.1007/s10670-020-00369-3

Halting Problem in Python – Computerphile, Thorsten Altenkirch,
https://www.youtube.com/watch?v=r__GZ7ubU0M&t=93s