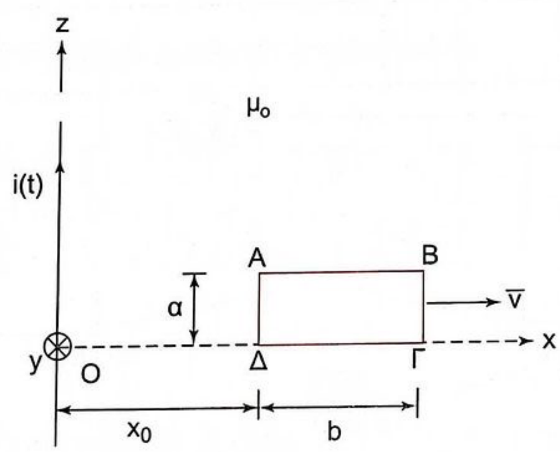
Τέταρτη σειρά ασκήσεων
(Ασκήσεις 4.6 και 4.9)

Άσκηση 4.6

4.6 Ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους, που συμπίπτει με τον άξονα z, διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα $i(t)$, χαμηλής συχνότητας. Στο επίπεδο xz υπάρχει ορθογωνικός συρμάτινος βρόχος $ΑΒΓΔ$, με τις πλευρές $ΑΔ = ΒΓ = a$ παράλληλες με τον άξονα z και την πλευρά $ΓΔ = b$ πάνω στον άξονα x, όπως φαίνεται στο Σχ. Α6. Ο βρόχος κινείται με σταθερή ταχύτητα $\bar{v} = \hat{x}v$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $ΟΔ = x_0$.

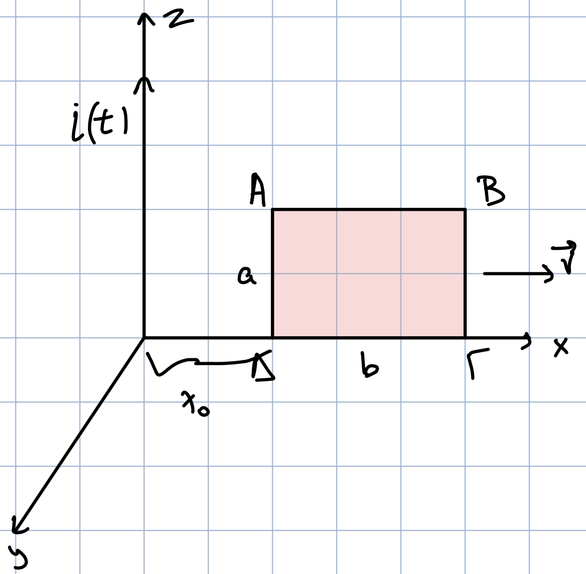
α) Να βρεθούν για $0 \le t < \infty$ η μαγνητική ροή ψ_m που περνάει από τον βρόχο και η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται σε αυτόν. Να γίνει αριθμητική εφαρμογή για $i(t) = I_{\max} \sin(\omega t)$ ($I_{\max} = 100A$, $\omega = 100\pi\ rad/s$, $t = 10s$), $a = 10cm$, $b = 20cm$, $x_0 = 15cm$ και $v = 0.5m/s$.

β) Αν απομακρυνθεί ο ευθύγραμμος αγωγός και ο παραπάνω βρόχος κινηθεί σε ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $\bar{B} = \hat{y}B_0$ ($B_0 = 0.5T$) με την ίδια σταθερή ταχύτητα $\bar{v} = \hat{x}v$, όπως και πριν, ποια θα είναι τώρα η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται σε αυτόν; Ποια είναι η φυσική σημασία του αποτελέσματος;



Σχήμα Α6

Άσκηση 4.6



α) Αφού το ΑΒΓΔ κινείται με σταθερή ταχύτητα στον άξονα $\hat{x}$ αυτό πάει να πει ότι οι άξονες μας είναι μεταξύ: $x_0 < x < x_0 + vt + b$

$y = 0$

προφανώς για να είναι κάθετο το $d\vec{S}$ $\quad 0 < z < a$

στο σχήμα ΑΒΓΔ πρέπει να έχει διεύθυνση στο $\hat{y}$

άρα $dS_y = dx dz$, άρα:

Αφού έχουμε χαμηλές συχνότητες για το $i(t)$ στον άξονα τότε $H_\varphi \cdot 2\pi r = I$, αυτό ισχύει μαζί το i πρέπει να είναι κάθετο στο $\vec{H}$

$$\vec{H_\varphi}(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad \text{στις καρτεσιανές: } \vec{H_y}(x) = \frac{I}{2\pi x}\hat{y}$$

$$\Psi_m = \int \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \int_0^a \int_{x_0+vt}^{x_0+vt+b} \vec{H}(x) \cdot dx dz = \mu_0 \int_0^a \int_{x_0+vt}^{x_0+vt+b} \frac{I}{2\pi x} dx dz$$

$$\Psi_m = \frac{a \mu_0 I}{2\pi} \cdot \ln|x| \Big]_{x_0+vt}^{x_0+vt+b}$$

$$\Psi_m = \frac{a\mu_0 I}{2\pi}\left[\ln(x_0+Vt+b) - \ln(x_0+Vt)\right] = \frac{a\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{x_0+Vt+b}{x_0+Vt}\right)$$

άρα $$\boxed{\Psi_m = \frac{a\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{x_0+Vt}\right), \quad t \geq 0}$$

ο τύπος για την ηλεκτρεγερτική δύναμη είναι $V_e = -\frac{d\Psi_m}{dt}$

άρα $$\frac{d\Psi_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{a\mu_0 I(t)}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{x_0+Vt}\right)\right] = \frac{a\mu_0}{2\pi}\left[I'(t)\ln\left(1+\frac{b}{x_0+Vt}\right) - I(t)\frac{bV}{(x_0+Vt)(x_0+Vt+b)}\right]$$

$$V_e = -\frac{d\Psi_m}{dt} = \frac{a\mu_0}{2\pi}\left[I_{max}\sin(\omega t)\frac{bV}{(x_0+Vt)(x_0+Vt+b)} - I_{max}\cdot\omega\cos(\omega t)\ln\left(1+\frac{b}{x_0+Vt}\right)\right]$$

$$\boxed{V_e = \frac{a\mu_0}{2\pi}\left[I_{max}\sin(\omega t)\frac{bV}{(x_0+Vt)(x_0+Vt+b)} - I_{max}\cdot\omega\cos(\omega t)\ln\left(1+\frac{b}{x_0+Vt}\right)\right]}$$

$\Rightarrow$ για $I_{max} = 100\,A$, $\omega = 100\pi\,\frac{rad}{s}$, $t = 10\,s$, $a = 0.1\,m$

$b = 0.2\,m$, $x_0 = 0.15\,m$, $V = 0.5\,m/s$

$$\Psi_m = \frac{a\mu_0}{2\pi} I_{max}\sin(\omega t)\ln\left(1+\frac{b}{x_0+Vt}\right) = 0, \text{ αφού } \sin(1000\pi) = 0$$

$$V_e = -\frac{a\mu_0}{2\pi} I_{max}\cdot\omega\ln\left(1+\frac{b}{x_0+Vt}\right), \text{ ο όρος με το sin μηδενίζεται.}$$

$$= -\frac{(0.1m)(\cancel{4\pi}^{\,2}\times10^{-7}\frac{H}{m})}{\cancel{2\pi}}\cdot 100A\left(100\pi\,\frac{rad}{s}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{0.2}{0.15+5}\right) = -2.39\times10^{-5}\,V$$

β) το $\vec{B}=B_0\hat{y}$, συνεχής

$$\Psi_m(t) = \int_S \vec{B}\, d\vec{S} = \int_0^b\int_0^a B_0\, dx\,dz = B_0 . a . b = (0.5T)(0.1m)(0.2m)$$
$$= 0.01\,Wb$$

$V_e = -\dfrac{d\Psi_m}{dt} = 0$, η φυσική σημασία αυτών των αποτελεσμάτων είναι ότι αφού το μαγνητικό πεδίο είναι συνεχής και δεν έχουμε πλέον το $i(t)$ το Ψ_m, δηλαδή η μαγνητική ροή θα είναι σταθερή, ανεξάρτητα του χρόνου άρα η δύναμη θα είναι ίση με μηδέν, άρα δεν θα εμφανισεται η ΗΕΔ στον βρόχο

Άσκηση 4.9

4.9 Επιφανειακό ρεύμα $\overline{K}$ ρέει στην απέραντη επίπεδη επιφάνεια με $z=0$. Η ροή αυτού του ρεύματος δημιουργεί ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στον αέρα. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή 1 $(z<0)$ είναι

$$\overline{E}_1 = -\hat{y}\frac{K_0\omega\mu_0}{2\beta}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cos(\omega t+\beta z),$$

ενώ η ένταση του μαγνητικού πεδίου στην περιοχή 2 $(z>0)$ είναι

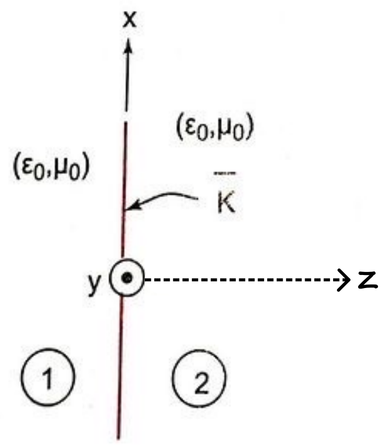
$$\overline{H}_2 = \hat{x}\frac{K_0}{2}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cos(\omega t-\beta z)+\hat{z}\frac{\pi K_0}{2\beta\ell}\cos\frac{\pi x}{\ell}\sin(\omega t-\beta z),$$

όπου

$\omega>\pi/(\ell\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})$ είναι η κυκλική συχνότητα, $\beta = \sqrt{\omega^2\varepsilon_0\mu_0-(\pi/\ell)^2}$ και K_0, ℓ γνωστές σταθερές. Στον αέρα δεν υπάρχουν πουθενά φορτία και ρεύματα. Να υπολογιστούν:

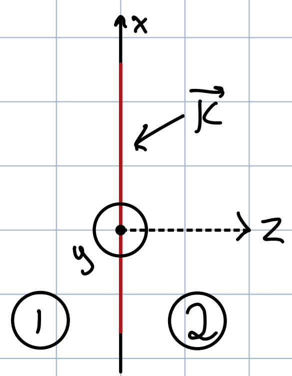
α) Η ένταση $\overline{H}_1$ του μαγνητικού πεδίου στην περιοχή 1 και η ένταση $\overline{E}_2$ του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή 2.

β) Οι επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος $\overline{K}$ και φορτίου σ για $z=0$. Να επιβεβαιωθεί ότι ικανοποιούν την οριακή συνθήκη του νόμου διατήρησης του φορτίου.



Σχήμα Α9

Άσκηση 4.9



$$\vec{E}_1 = -\hat{y}\frac{k_0 \omega \mu_0}{2\beta}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cos(\omega t + \beta z) \quad , \text{με} \quad \beta = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2}$$

$$\vec{H}_2 = \hat{x}\frac{k_0}{2}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cos(\omega t - \beta z) + \hat{z}\frac{\pi k_0}{2\beta\ell}\cos\frac{\pi x}{\ell}\sin(\omega t - \beta z)$$

α) Ψάχνουμε $\vec{H}_1$ και $\vec{E}_2$

Για το $\vec{H}_1$: χρειαζόμαστε το $\vec{E}_1$, άρα $\dot{\vec{E}}_1 = -\hat{y}\frac{k_0 \omega \mu_0}{2\beta}\sin\left(\frac{\pi x}{\beta}\right) \cdot e^{j\beta z}$

Ισχύει ότι $\nabla \times \dot{\vec{E}}_1 = -j\omega\mu_0 \dot{\vec{H}}_1$, άρα $\dot{\vec{H}}_1 = \frac{j}{\omega\mu_0}(\nabla \times \dot{\vec{E}}_1)$

$$\nabla \times \dot{\vec{E}}_1 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -\frac{k_0\omega\mu_0}{2\beta}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot e^{j\beta z} & 0 \end{vmatrix} = \hat{x}\left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{k_0\omega\mu_0}{2\beta}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot e^{j\beta z}\right)\right] + \hat{z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{k_0\omega\mu_0}{2\beta}\sin\frac{\pi x}{\ell}e^{j\beta z}\right)\right]$$

$$= \hat{x}\left[(j\cancel{\beta})\frac{k_0\omega\mu_0}{2\cancel{\beta}}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot e^{j\beta z}\right] + \hat{z}\left[-\frac{\pi}{\ell}\frac{k_0\omega\mu_0}{2\beta}\cos\frac{\pi x}{\ell}e^{j\beta z}\right] = \hat{x}j\frac{k_0\omega\mu_0}{2}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot e^{j\beta z} - \hat{z}\frac{\pi k_0\omega\mu_0}{2\ell\beta}\cos\frac{\pi x}{\ell}\cdot e^{j\beta z}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{H}}_1 = \frac{j}{\omega\mu_0}\left[\hat{x}j\frac{k_0\omega\mu_0}{2}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot e^{j\beta z} - \hat{z}\frac{\pi k_0\omega\mu_0}{2\ell\beta}\cos\frac{\pi x}{\ell}\cdot e^{j\beta z}\right] = -\hat{x}\frac{k_0}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)e^{j\beta z} - \hat{z}\frac{j\pi k_0}{2\ell\beta}\cos\frac{\pi x}{\ell}e^{j\beta z}$$

$$\vec{H}_1 = \mathrm{Re}\{\dot{\vec{H}}_1 e^{j\omega t}\} = -\hat{x}\frac{k_0}{2}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cos(\omega t - \beta z) + \hat{z}\frac{j\pi k_0}{2\ell\beta}\cos\frac{\pi x}{\ell}\cdot\cos\left(\omega t - \beta z + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vec{H}_1 = -\hat{x}\frac{k_0}{2}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cos(\omega t - \beta z) + \hat{z}\frac{j\pi k_0}{2\ell\beta}\cos\frac{\pi x}{\ell}\sin(\omega t - \beta z)$$

δεν υπάρχει κάτι στον αέρα

Για το E_2:

$$\nabla\times\dot{\vec{H}}_2 = \cancel{\dot{\vec{J}}}^{\,0} + j\omega\varepsilon_0\dot{\vec{E}}_2 \Rightarrow \dot{\vec{E}}_2 = -\frac{j}{\omega\varepsilon_0}\left[\nabla\times\dot{\vec{H}}_2\right]$$

$$\dot{\vec{H}}_2 = \hat{x}\frac{K_0}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)e^{-j\beta z} - \hat{z}\, j\frac{\pi K_0}{2\beta\ell}\cdot\cos\frac{\pi x}{\ell}\cdot e^{-j\beta z}$$

$$\nabla\times\dot{\vec{H}}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{K_0}{2}\sin\frac{\pi x}{\ell}e^{-j\beta z} & 0 & -j\frac{\pi K_0}{2\beta\ell}\cos\frac{\pi x}{\ell}e^{-j\beta z} \end{vmatrix} = \hat{x}\left[\cancel{\frac{\partial}{\partial y}\dot{H}_{z_2}}^{\,0}\right] - \hat{y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-j\frac{\pi K_0}{2\beta\ell}\cos\frac{\pi x}{\ell}\cdot e^{-j\beta z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{K_0}{2}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot e^{-j\beta z}\right)\right] + \hat{z}\left[\cancel{-\frac{\partial}{\partial y}\dot{H}_{x_2}}^{\,0}\right]$$

$$= -\hat{y}\left[j\frac{\pi^2 K_0}{2\beta\ell^2}\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)e^{-j\beta z} + j\beta\frac{K_0}{2}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot e^{-j\beta z}\right]$$

$$= -j\hat{y}\left[\frac{\pi^2 K_0}{2\beta\ell^2}\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)e^{-j\beta z} + \beta\frac{K_0}{2}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot e^{-j\beta z}\right]$$

$$\dot{\vec{E}}_2 = \frac{j}{+\omega\varepsilon_0}\cdot +j\hat{y}\left[\frac{\pi^2 K_0}{2\beta\ell^2} + \beta\frac{K_0}{2}\right]\sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot e^{-j\beta z} = -\frac{K_0}{2\omega\varepsilon_0\beta}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot e^{-j\beta z}\left[\frac{\pi^2}{\ell^2} + \beta^2\right]$$

αφού, $\beta^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0 - \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \Rightarrow \dot{\vec{E}}_2 = (\hat{y}) - \frac{K_0}{2\cancel{\omega}\cancel{\varepsilon_0}\beta}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot e^{-j\beta z}\,\omega^{\cancel{2}}\cancel{\varepsilon_0}\mu_0 = -\frac{\omega K_0\mu_0}{2\beta}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot e^{-j\beta z}\,\hat{y}$

$$\vec{E}_2 = \mathrm{Re}\left\{\dot{\vec{E}}_2\cdot e^{j\omega t}\right\} = -\hat{y}\frac{K_0\omega\mu_0}{2\beta}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot\cos(\omega t - \beta z)$$

$$\vec{E}_2 = -\hat{y}\frac{K_0\omega\mu_0}{2\beta}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot\cos(\omega t - \beta z)$$

β) $\vec{K} = \hat{n} \times (\vec{H_2} - \vec{H_1})$

$$\vec{H_1} = -\hat{x}\frac{k_0}{2}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cos(\omega t - \beta z) + \hat{z}\frac{j\pi k_0}{2\ell\beta}\cos\frac{\pi x}{\ell}\sin(\omega t - \beta z)$$

$$\vec{H_2} = \hat{x}\frac{k_0}{2}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cos(\omega t - \beta z) + \hat{z}\frac{\pi k_0}{2\beta\ell}\cos\frac{\pi x}{\ell}\sin(\omega t - \beta z)$$

$\hat{z} \times \hat{z} = 0$

$$\vec{K} = \hat{z} \times \left[\hat{x}\left(\frac{k_0}{\cancel{2}}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot\cos(\omega t - \beta z)\cdot\cancel{2}\right) + \cancel{\hat{z}}(\dots)\right]$$

$$= \hat{y}\, k_0 \sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot\cos(\omega t - \beta z)$$

$\sigma = \hat{n}(\vec{D_2} - \vec{D_1})$

$$\vec{E_1} = -\hat{y}\frac{k_0\omega\mu_0}{2\beta}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cos(\omega t + \beta z)$$

$$\vec{E_2} = -\hat{y}\frac{k_0\omega\mu_0}{2\beta}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot\cos(\omega t - \beta z)$$

$$\Rightarrow \hat{z}(\vec{D_2} - \vec{D_1}) = \hat{z}\left(\cancel{-\hat{y}\frac{k_0\omega\mu_0}{2\beta}\cdot\sin\frac{\pi x}{\ell}\cos\omega t + \hat{y}\frac{k_0\omega\mu_0}{2\beta}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot\cos\omega t}\right)$$

$\sigma = 0$

$\hat{n}(\vec{J_2} - \vec{J_1}) = -\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \nabla\vec{K}$, όπου το αριστερό μέλος είναι $\hat{n}(\vec{J_2} - \vec{J_1}) = 0$ αφού δεν υπάρχουν φορτία και ρεύματα στον αέρα.

(αφού $\sigma = 0$)

το δεξί μέλος είναι $-\cancel{\frac{\partial\sigma}{\partial t}} - \nabla\vec{K} = -\left(\cancel{\frac{\partial K_x}{\partial x}} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial K_z}{\partial z}}\right)$

$$= -\frac{\partial}{\partial y}\left(k_0\sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot\cos\omega t\right) = 0$$

άρα όντως ισχύει η οριακή συνθήκη του νόμου διατήρησης φορτίου