Πέμπτη σειρά ασκήσεων
(Ασκήσεις 5.12 και 5.15)

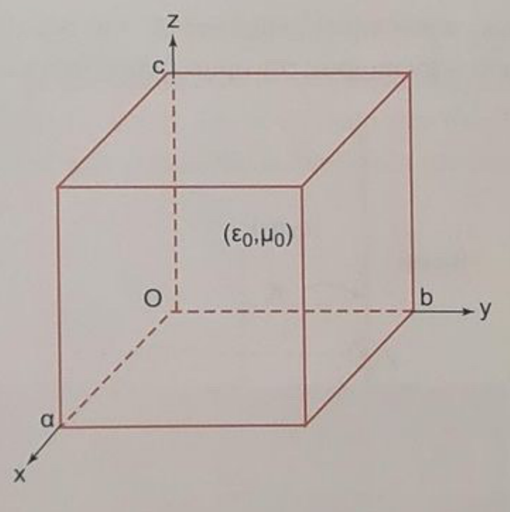
Άσκηση 5.12

5.12 Στην ορθογωνική κοιλότητα της άσκησης 4.8 να βρεθούν οι χρονικοί μέσοι όροι του διανύσματος Poynting και της συνολικής αποθηκευμένης ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας στο εσωτερικό της.

4.8 Ορθογωνική κοιλότητα διαστάσεων $a\times b\times c$ έχει τέλεια αγώγιμα τοιχώματα και πληρούται με αέρα. Στο εσωτερικό της έχει διεγερθεί ηλεκτρομαγνητικό πεδίο με ένταση ηλεκτρικού πεδίου

$$\overline{E}=\hat{z}E_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\cos(\omega t)$$

όπου E_0 είναι γνωστή σταθερά και $\omega=\sqrt{(\pi/a)^2+(\pi/b)^2}/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ η κυκλική συχνότητα. Να βρεθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου, οι χωρικές πυκνότητες φορτίου και ρεύματος στο εσωτερικό της κοιλότητας, καθώς και οι επιφανειακές πυκνότητες φορτίου και ρεύματος στα τοιχώματά της.



Σχήμα Α8

Καθώς η 4.8 δεν έχει λυθεί για το διάνυσμα Poynting θα χρειαστούμε το $\vec{H}$.

$$\vec{E} = \hat{z} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\omega t \qquad \vec{E} = Re\{\dot{\vec{E}} e^{j\omega t}\}$$

$$\dot{\vec{E}} = \hat{z} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \begin{cases} \frac{\partial \dot{\vec{E}}_z}{\partial y} - \cancel{\frac{\partial \dot{\vec{E}}_y}{\partial z}}^{\,0} = -j\omega\mu_0 \dot{\vec{H}}_x , & \dot{H}_x = \frac{jE_0}{\omega\mu_0}\frac{\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\ \cancel{\frac{\partial \dot{\vec{E}}_x}{\partial z}}^{\,0} - \frac{\partial \dot{\vec{E}}_z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 \dot{\vec{H}}_y , & \dot{H}_y = -\frac{jE_0}{\omega\mu_0}\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\ \cancel{\frac{\partial \dot{\vec{E}}_y}{\partial x}}^{\,0} - \cancel{\frac{\partial \dot{\vec{E}}_x}{\partial y}}^{\,0} = -j\omega\mu_0 \dot{\vec{H}}_z , & \dot{\vec{H}}_z = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\vec{H}} = \frac{jE_0}{\omega\mu_0}\frac{\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\hat{x} - \frac{jE_0}{\omega\mu_0}\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\hat{y}$$

Διάνυσμα Poynting με phasors: $\vec{S} = \frac{1}{2}\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*$

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\left[\hat{z} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right] \times \left[\frac{jE_0}{\omega\mu_0}\frac{\pi}{b}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\hat{x} - \frac{jE_0}{\omega\mu_0}\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\hat{y}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{j\pi E_0^2}{\omega\mu_0 b}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\frac{\sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right)}{2}(\hat{y}) - \frac{1}{2}\frac{jE_0^2\pi}{\omega\mu_0 a}\frac{\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{2}\cdot\sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)(-\hat{x})$$

$$\langle \vec{N} \rangle = Re\{\vec{S}\} = 0$$

για την ενέργεια:

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_z^2 \Rightarrow \langle W_e \rangle = \frac{1}{4}\varepsilon_0 |\dot{E}_z|^2$$

$$W_m = \frac{1}{2}\mu_0 (H_x^2 + H_y^2) \Rightarrow$$

$$\langle W_m \rangle = \frac{1}{4}\mu_0 \left(|\dot{\vec{H}}_x|^2 + |\dot{\vec{H}}_y|^2\right)$$

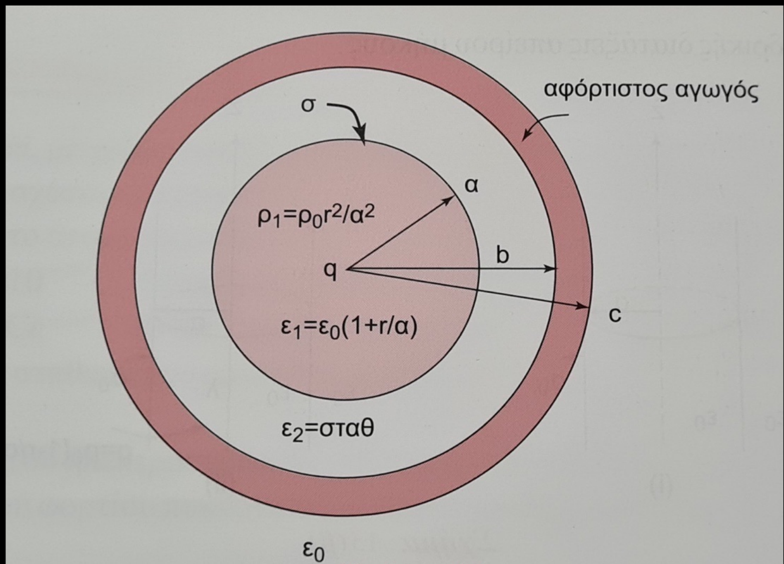
$$\langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

$$\langle w_m \rangle = \frac{1}{4} \frac{E_0^2 \pi^2}{\omega^2 \mu_0} \left[\frac{1}{b^2} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) + \frac{1}{a^2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \right]$$

$\langle W_{em} \rangle = \langle W_e \rangle + \langle W_m \rangle$ (υπολογίστηκαν και τα δύο παραπάνω)

Άσκηση 5.15

5.15 Να υπολογιστεί η συνολικά αποθηκευμένη ηλεκτρική ενέργεια σε όλο τον χώρο, στη διάταξη της άσκησης 3.4, αν $q=0$.



Σχήμα Α4

Από την λύση της άσκησης 3.4, στην Τρίτη σειρά ασκήσεων:

$$\vec{E}=\vec{E_r}(r)=\begin{cases}\left(\dfrac{q}{4\pi r^2\varepsilon_0\left(1+\frac{r}{a}\right)}+\dfrac{r^3\rho_0}{5a^2\varepsilon_0\left(1+\frac{r}{a}\right)}\right)\hat{r}, & 0<r<a\\[2ex] \left(\dfrac{q}{4\pi r^2\varepsilon_2}+\sigma\dfrac{a^2}{\varepsilon_2 r^2}+\dfrac{\rho_0 a^3}{5r^2\varepsilon_2}\right)\hat{r}, & a<r<b\\[2ex] \vec{0}, & b<r<c\\[2ex] \left(\dfrac{q}{4\pi r^2\varepsilon_0}+\sigma\dfrac{a^2}{\varepsilon_0 r^2}+\dfrac{\rho_0 a^3}{5r^2\varepsilon_0}\right)\hat{r}, & r>c\end{cases}$$

εμείς πρέπει να υπολογίσουμε την συνολικά αποθηκευμένη ηλεκτρική ενέργεια για $q=0$, σε όλο τον χώρο άρα το $\vec{E}$ έχει τις παρακάτω τιμές σε όλο τον χώρο

$$\vec{E}=\vec{E_r}(r)=\begin{cases}\left(\dfrac{r^3\rho_o}{5a^2\varepsilon_o(1+\frac{r}{a})}\right)\hat{r}, & 0<r<a\\[2ex] \left(\sigma\dfrac{a^2}{\varepsilon_2 r^2}+\dfrac{\rho_o a^3}{5r^2\varepsilon_2}\right)\hat{r}, & a<r<b\\[2ex] \vec{0}, & b<r<c\\[2ex] \left(\sigma\dfrac{a^2}{\varepsilon_o r^2}+\dfrac{\rho_o a^3}{5r^2\varepsilon_o}\right)\hat{r}, & r>c\end{cases}$$

$0<r<a \quad \varepsilon_1=\varepsilon_o\left(1+\frac{r}{a}\right)$

$b<r<c \quad \varepsilon_2=\sigma\tau\alpha\vartheta$

$r>c \quad \varepsilon_o$

Περιοχή 1 $\quad 0<r<a$

$$w_{e,1}=\frac{1}{2}\varepsilon_1 E_r^2(r)=\frac{1}{2}\cdot\varepsilon_o\left(1+\frac{r}{a}\right)\left[\frac{r^3\rho_o}{5a^2\varepsilon_o\left(1+\frac{r}{a}\right)}\right]^2=\frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_o\left(1+\frac{r}{a}\right)}\cdot\frac{r^6\rho_o^2}{25a^4\left[\varepsilon_o\left(1+\frac{r}{a}\right)\right]^{\cancel{2}}}$$

$$w_{e,1}=\frac{r^6\rho_o^2}{50a^4\varepsilon_o\left(1+\frac{r}{a}\right)}, \quad W_{e,1}=\int_{V_1} w_{e,1}\,dV_1=\int_{r=0}^{a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{r^6\rho_o^2}{50a^4\varepsilon_o\left(1+\frac{r}{a}\right)}r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$\left.\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\varphi\,d\theta=2\pi\cdot\left.-\cos\theta\right]_0^{\pi}=4\pi\right\}\quad W_{e,1}=\frac{4\pi\rho_o^2}{50a^3\varepsilon_o}\int_0^a\frac{r^8}{a+r}dr$$

$$\int\frac{r^8}{a+r}dr=\int\frac{(u-a)^8}{u}du=$$

Αν θέσουμε $u=a+r$, $du=dr$, ανοίγουμε το $(u-a)^8$, ολοκληρώνουμε ως προς du

και στην συνέχεια αντικαθιστούμε $u=a+r$ και παραγοντοποιούμε για απλοποίηση της συνάρτησης, καταλήγουμε ότι:

$$\int_0^a\frac{r^8}{a+r}dr=a^8\left[\ln(2a)-\ln(a)\right]-\frac{533}{840}a^8=a^8\left(\ln 2-\frac{533}{840}\right)$$

$$W_{e,1}=\frac{2\pi\rho_o^2}{25\cancel{a^3}\varepsilon_o}a^{\cancel{8}\,5}\left(\ln 2-\frac{533}{840}\right)\Rightarrow \boxed{W_{e,1}=\frac{2\pi a^5\rho_o^2}{25\varepsilon_o}\left(\ln 2-\frac{533}{840}\right)}$$

Περιοχή 2 $\quad a<r<b$ $\qquad \vec{E}(r) = \left(\sigma \frac{a^2}{\varepsilon_2 r^2} + \frac{\rho_0 a^3}{5 r^2 \varepsilon_2}\right)\hat{r}$

$$w_{e,2} = \frac{1}{2}\varepsilon_2 E_r^2(r) = \frac{1}{2}\frac{\cancel{\varepsilon_2}}{\varepsilon_2^{\cancel{2}}}\left(\sigma^2\frac{a^4}{r^4} + 2\sigma\frac{a^2}{r^2}\cdot\frac{\rho_0 a^3}{5r^2} + \frac{\rho_0^2 a^6}{25 r^4}\right)$$

$$= \frac{a^4}{2r^4\varepsilon_2}\left[\sigma^2 + \frac{2\sigma}{5}\rho_0 a + \frac{\rho_0^2 a^2}{25}\right]$$, για ευκολία θέτω $B = \left[\sigma^2 + \frac{2\sigma}{5}\rho_0 a + \frac{\rho_0^2 a^2}{25}\right]$

$$W_{e,2} = \int_{V_2} w_{e,2}\, dV_2 = \int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{a^4}{2r^{\cancel{4}}\varepsilon_2}\cdot B\cancel{r^2}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr = B\int_a^b \frac{a^4}{2r^2\varepsilon_2}4\pi\, dr \Rightarrow$$

$$W_{e,2} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\pi B\, a^4}{\cancel{2}\varepsilon_2}\cdot -\frac{1}{r}\Big]_a^b = \frac{2\pi B a^4}{\varepsilon_2}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right) = \frac{2\pi B a^3}{\varepsilon_2}\frac{(b-a)}{b}$$

$$\boxed{W_{e,2} = \frac{2\pi a^3}{\varepsilon_2}\frac{(b-a)}{b}\left[\sigma^2 + \frac{2\sigma}{5}\rho_0 a + \frac{\rho_0^2 a^2}{25}\right]}$$

Περιοχή 3 $\quad b<r<c$

αφού είναι αγωγός $\vec{E}(r) = 0$

άρα $w_{e,3} = 0$ και $\boxed{W_{e,3} = 0}$

Περιοχή 4 $\quad c<r<\infty$

$w_{e,2} = w_{e,4}$, αλλά $W_{e,2} \neq W_{e,4}$

για ε_0 αντί ε_2

$$w_{e,4} = \frac{a^4}{2r^4\varepsilon_0}\left[\sigma^2 + \frac{2\sigma}{5}\rho_0 a + \frac{\rho_0^2 a^2}{25}\right]$$ θέτω $B = \left[\sigma^2 + \frac{2\sigma}{5}\rho_0 a + \frac{\rho_0^2 a^2}{25}\right]$

$$W_{e,4} = \int_{V_4} w_{e,4}\, dV_4 = \int_c^{\infty}\frac{a^4}{\cancel{2}\cancel{r^4}\varepsilon_0}\cdot B\cdot \cancel{r^2}\cdot\overset{2}{\cancel{4}}\pi\, dr = \frac{\pi a^4 B}{\varepsilon_0}\int_c^{\infty}\frac{1}{r^2}dr = \frac{\pi a^4 B}{\varepsilon_2}\cdot -\frac{1}{r}\Big]_c^{\infty}$$

$$W_{e,4} = \frac{\pi a^4 B}{\varepsilon_0}\left(-\overset{0}{\cancel{\frac{1}{\infty}}} + \frac{1}{c}\right) = \frac{\pi a^4 B}{c\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{W_{e,4} = \frac{\pi a^4}{c\varepsilon_0}\left[\sigma^2 + \frac{2\sigma}{5}\rho_0 a + \frac{\rho_0^2 a^2}{25}\right]}$$

$$W_e = W_{e,1} + W_{e,2} + W_{e,3} + W_{e,4} \,, \quad \mu\varepsilon \quad B = \left[\sigma^2 + \frac{2\sigma}{5}\rho_0 a + \frac{\rho_0^2 a^2}{25}\right]$$

$$= \frac{2\pi a^5 \rho_0^2}{25\varepsilon_0}\left(\ln 2 - \frac{533}{840}\right) + \frac{2\pi a}{\varepsilon_2}\frac{(b-a)}{b}B + 0 + \frac{\pi a^4}{C\varepsilon_0}\cdot B$$

$$= \frac{2\pi a^5 \rho_0^2}{25\varepsilon_0}\left[\ln 2 - \frac{533}{840}\right] + \pi a B\left[\frac{2}{\varepsilon_2}\left(1-\frac{a}{b}\right) + \frac{a^3}{C\varepsilon_0}\right]$$

άρα

$$\boxed{W_e = \frac{2\pi a^5 \rho_0^2}{25\varepsilon_0}\left[\ln 2 - \frac{533}{840}\right] + \pi a\left[\sigma^2 + \frac{2\sigma}{5}\rho_0 a + \frac{\rho_0^2 a^2}{25}\right]\left[\frac{2}{\varepsilon_2}\left(1-\frac{a}{b}\right) + \frac{a^3}{\varepsilon_0 C}\right]}$$