Συστήματα Αναμονής
Εργαστηριακές Ασκήσεις
2η Ομάδα Ασκήσεων

8^{o} Εξάμηνο Η.Μ.Μ.Υ.	*Αγγλογάλλος Αναστάσιος*	*031 18641*
2021 - 2022		

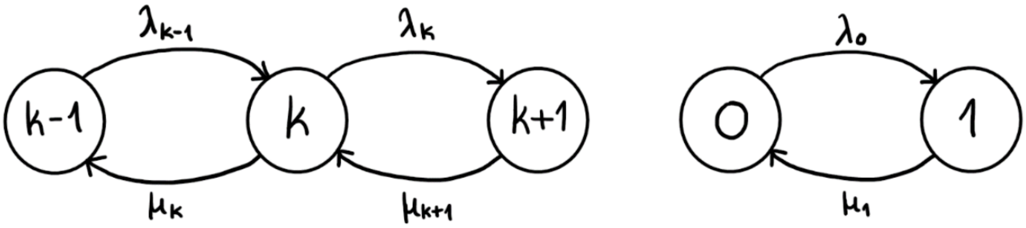
<u>**Θεωρητική μελέτη της ουράς M/M/1**</u>

Α) Η συνθήκη ώστε η δοσμένη ουρά M/M/1 να είναι εργοδική είναι ο βαθμός χρησιμοποίησης (utilization) να είναι μικρότερος του 1 (ρ < 1), καθώς η ουρά έχει άπειρο μέγεθος.

$\rho = \lambda / \mu < 1$

Αναλύοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει $\lambda < \mu$, δηλαδή ο ρυθμός εξυπηρέτησης να είναι μεγαλύτερος του ρυθμού αφίξεων.

Ακολουθεί το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων της ουράς:



Από τις εξισώσεις ισορροπίας έχουμε τις εξής σχέσεις:

$(\lambda_k + \mu_k) \cdot P_k = \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}$, $k \geq 1$ *και* $\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1 \rightarrow$
$\rightarrow P_1 = (\lambda / \mu) P_0 \rightarrow P_1 = \varrho P_0$ ($\lambda_k = \lambda$, $\mu_k = \mu$, αφού είναι σταθερό).

Για κ = 1: $(\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2 \rightarrow P_2 = \varrho^2 P_0$

Επαγωγικά προκύπτει ότι: $P_k = \varrho^k P_0$, $k > 0$

Επίσης ισχύει ότι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων ισούται με 1, άρα:

$P_0 + P_1 + \cdots + P_\kappa + \cdots = P_0\,(1 + \varrho + \varrho^2 + \varrho^3 + \cdots) = 1.$

Από την εργοδική συνθήκη έχουμε ότι $0 < \rho < 1$, άρα η παραπάνω σειρά συγκλίνει στο $1 / (1-\rho)$, άρα $P_0 = 1 - \rho$.

Συνεπώς προκύπτει ότι:

$P_k = (1 - \varrho)\varrho^k$, $k > 0$ *και* $P\{n(t) > 0\} = 1 - P_0 = \varrho$.

B) Για τις ουρές M/M/1 ισχύει η ακόλουθη ισότητα:

$$E[n(t)] = \sum_{k=1}^{+\infty} kP_k = \frac{\rho}{1-\rho}, \mu\epsilon\ \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

με βάση τον τύπο του Little, ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα (μέσος χρόνος απόκρισης) θα είναι:

$$T = \frac{E[n(t)]}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}$$

Ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα είναι το άθροισμα του χρόνου αναμονής και του χρόνου εξυπηρέτησης. ΄Αρα ο μέσος χρόνος αναμονής θα είναι:

$$W = T - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho}$$

Γ) Η πιθανότητα που ψάχνουμε είναι η P_{57} και σύμφωνα με τα παραπάνω είναι ίση με:
$P_{57} = (1-\rho)\rho^{57}$, η οποία είναι αρκετά μικρή αφού όταν το k τείνει σε μεγάλους αριθμούς η P_k τείνει στο 0 ($0 < \rho < 1$). Ωστόσο, θεωρητικά, δεν είναι μηδενική.

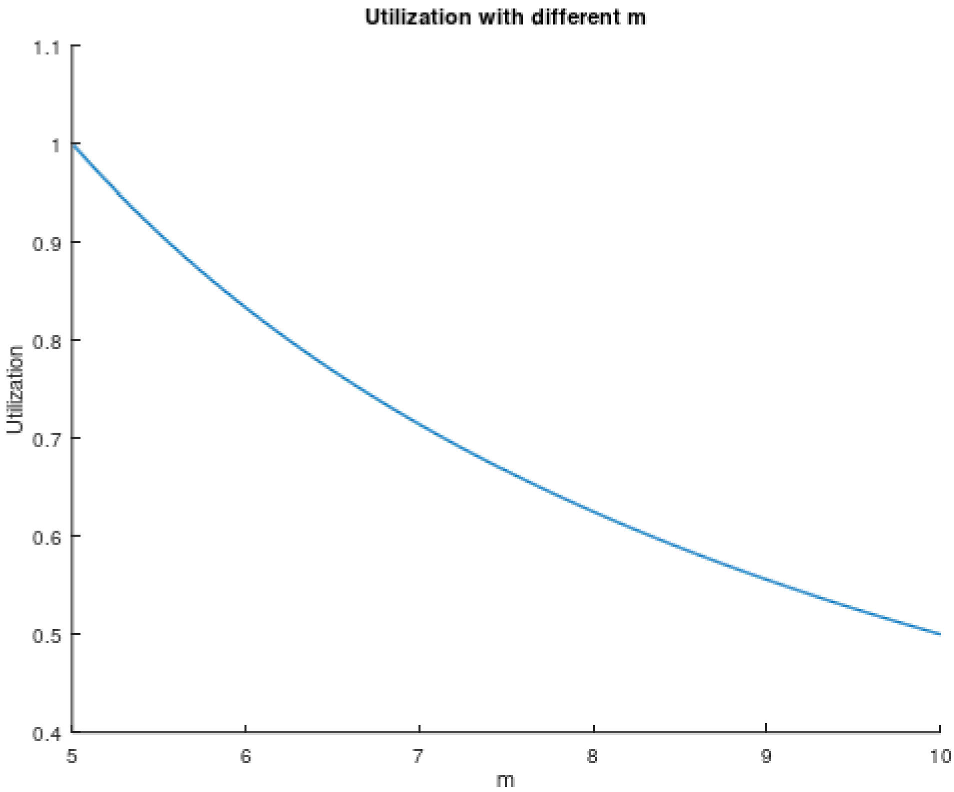
Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave

A) Για να είναι εργοδικό το σύστημά μας πρέπει να ισχύει το εξής για τον βαθμό χρησιμοποίησης ρ (utilization):

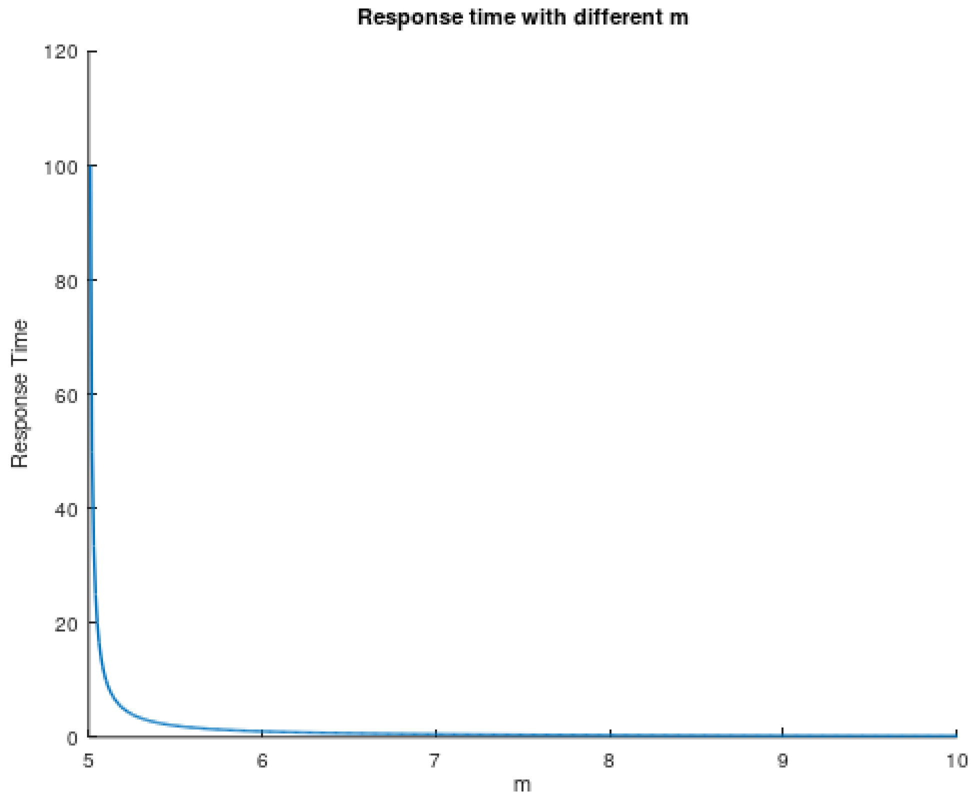
$$0 < \rho < 1 \rightarrow 0 < \frac{\lambda}{\mu} < 1 \rightarrow \mu > \lambda$$

Συνεπώς οι επιτρεπτές τιμές του μ είναι: $\mu \in (5, 10]$

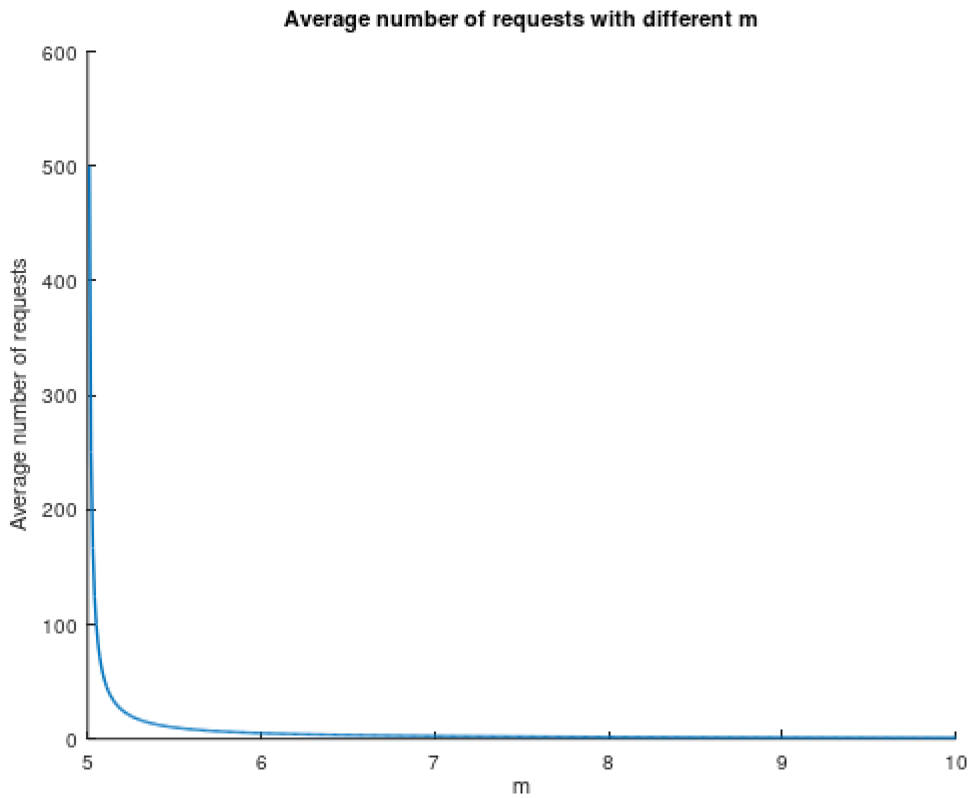
B) Βαθμός χρησιμοποίησης (utilization) ως προς ρυθμό εξυπηρέτησης:



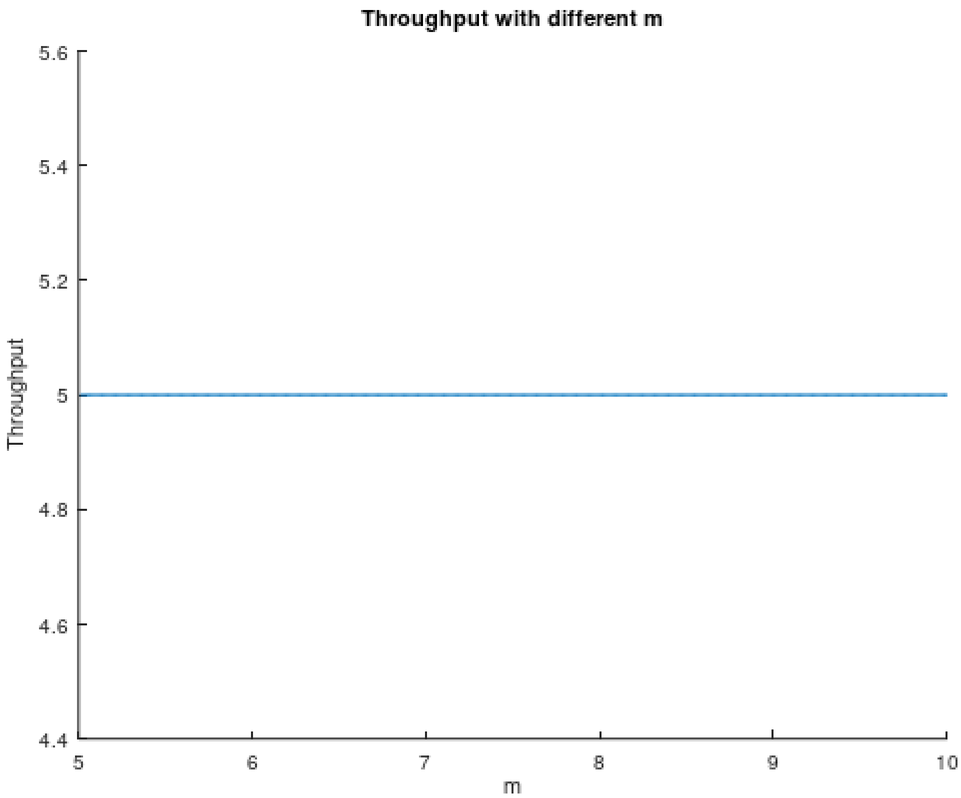
Μέσος χρόνος καθυστέρησης του συστήματος E(T) ως προς ρυθμό εξυπηρέτησης:



Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα ως προς ρυθμό εξυπηρέτησης:



Ρυθμαπόδοση (throughput) πελατών ως προς ρυθμό εξυπηρέτησης:



Γ) Από το διάγραμμα μέσου χρόνου καθυστέρησης παρατηρείται ότι το response time του συστήματος είναι πολύ μικρό και τείνει στο 0 για κάθε μ μεγαλύτερο ή ίσο του 6. Συνεπώς, θα επιλεγόταν μ=6, αφού η υλοποίηση ενός συστήματος με μεγαλύτερο μ απαιτεί και μεγαλύτερο κόστος.

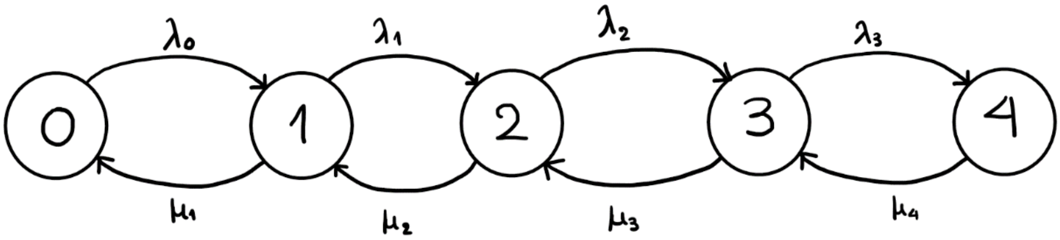
Δ) Παρατηρείται ότι εφόσον το σύστημα είναι εργοδικό, τότε το throughput είναι ίσο με τον ρυθμό άφιξης πελατών λ.

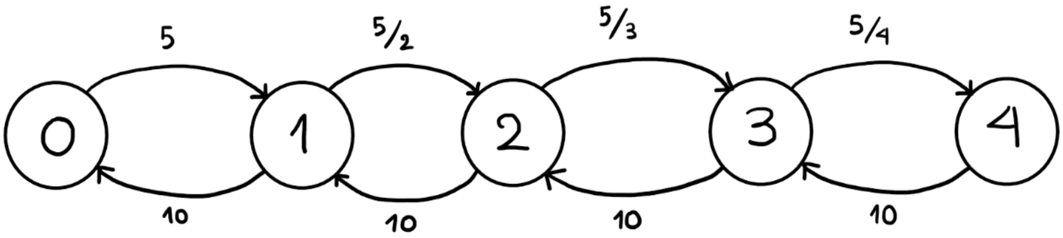
Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την άσκηση:

```
pkg load queueing;
pkg load statistics;

clc;
clear all;
close all;

m = 5.01:0.01:10;
l = zeros(1,500);

l = 5 .+ l;

[U, R, Q, X, p0] = qsmm1(l, m);

figure(1);
hold on;
plot(m, U, "linewidth", 1.3);
title("Utilization with different m")
xlabel("m");
ylabel("Utilization");
hold off;

figure(2);
hold on;
plot(m, R, "linewidth", 1.3);
title("Response time with different m")
xlabel("m");
ylabel("Response Time");
hold off;

figure(3);
hold on;
plot(m, Q, "linewidth", 1.3);
title("Average number of requests with different m")
xlabel("m");
ylabel("Average number of requests");
hold off;

figure(4);
hold on;
plot(m, X, "linewidth", 1.3);
title("Throughput with different m")
xlabel("m");
ylabel("Throughput");
hold off;
```

Διαδικασία γεννήσεων θανάτων (birth-date process): εφαρμογή σε σύστημα Μ/Μ/1/Κ

Α) Για το ζητούμενο σύστημα Μ/Μ/1/4 παρουσιάζεται παρακάτω το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων:





Για να υπολογισθούν οι ζητούμενες πιθανότητες:

$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1 \rightarrow 5P_0 = 10P_1 \rightarrow P_1 = 0.5P_0$

$\lambda_1 P_1 = \mu_2 P_2 \rightarrow {}^{5}/_{2}\, P_1 = 10P_2 \rightarrow P_2 = {}^{0.5}/_{2}\, P_1 \rightarrow P_2 = {}^{(0.5)^2}/_{2}\, P_0$

$\lambda_2 P_2 = \mu_3 P_3 \rightarrow {}^{5}/_{3}\, P_2 = 10P_3 \rightarrow P_3 = {}^{0.5}/_{3}\, P_2 \rightarrow P_3 = {}^{(0.5)^3}/_{6}\, P_0$

$\lambda_3 P_3 = \mu_4 P_4 \rightarrow {}^{5}/_{4}\, P_3 = 10P_4 \rightarrow P_4 = {}^{0.5}/_{4}\, P_3 \rightarrow P_4 = {}^{(0.5)^4}/_{24}\, P_0$

$Ισχύει\ επιπλέον\ ότι$:

$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \rightarrow P_0 + 0.5P_0 + {}^{(0.5)^2}/_{2}\, P_0 +$

$+ {}^{(0.5)^3}/_{6}\, P_0 + {}^{(0.5)^4}/_{24}\, P_0 = 1 \rightarrow P_0 = 0.60663$

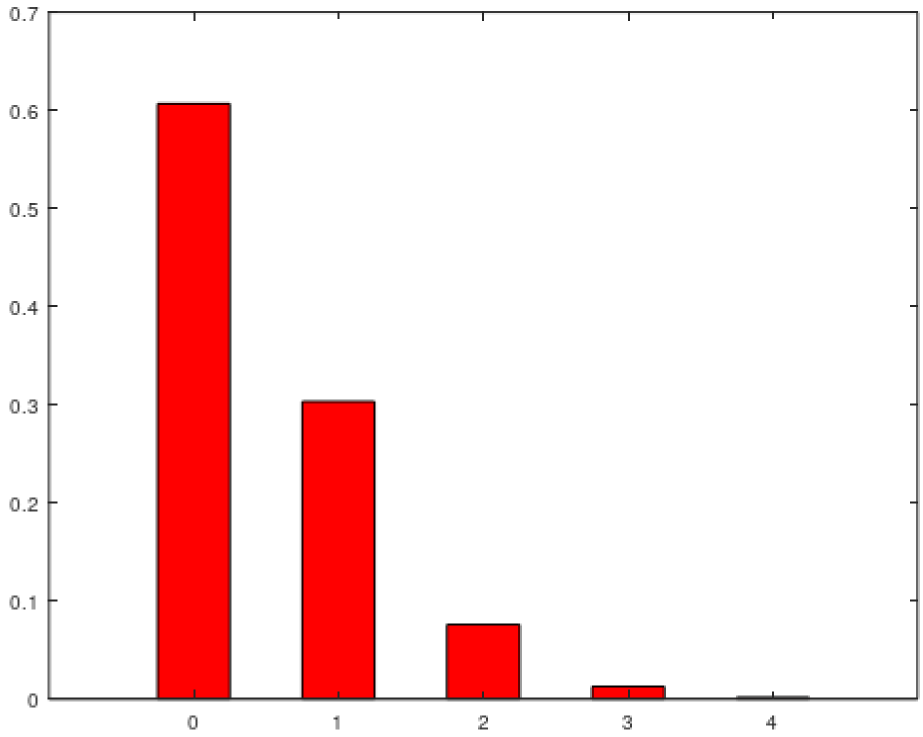
$P_1 = 0.30331\ και\ P_2 = 0.07582\ και\ P_3 = 0.01263\ και\ P_4 = 0.00157$

B) Η μήτρα ρυθμού μεταβάσεων:

```
transition_matrix =

   -5.0000    5.0000         0         0         0
   10.0000  -12.5000    2.5000         0         0
         0   10.0000  -11.6667    1.6667         0
         0         0   10.0000  -11.2500    1.2500
         0         0         0   10.0000  -10.0000
```

Οι εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος:

```
P =

   6.0664e-01   3.0332e-01   7.5829e-02   1.2638e-02   1.5798e-03
```



που όντως είναι ίδιες με αυτές που υπολογίστηκαν.

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα, όταν εκείνο βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας:

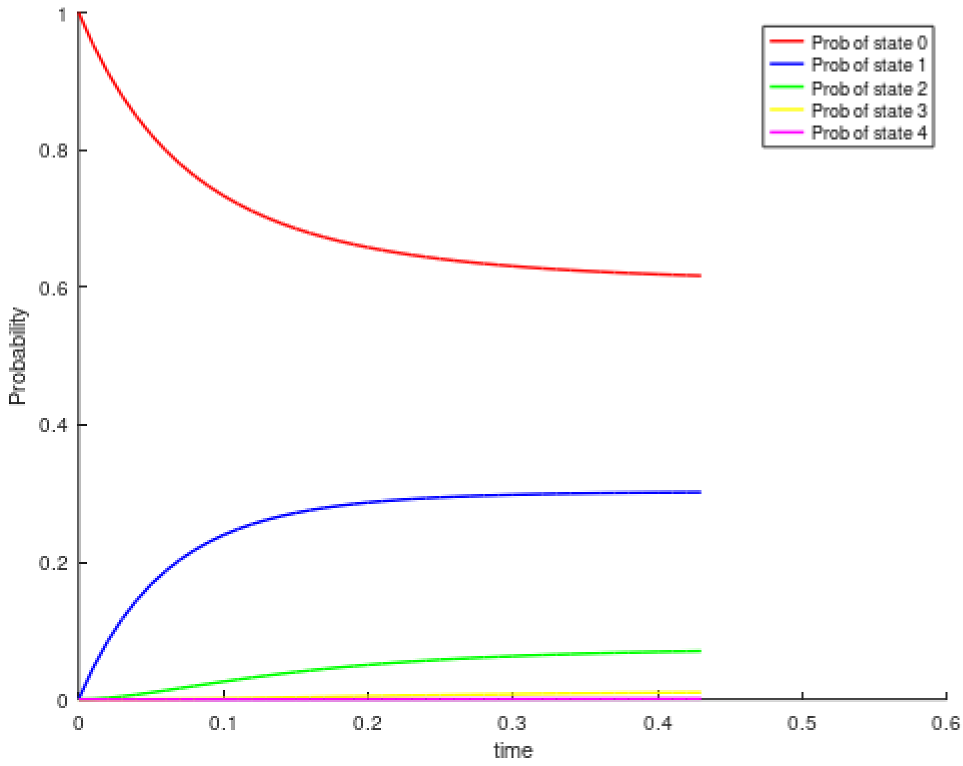
```
AverageQueue = 0.4992
```

Η πιθανότητα απόρριψης πελάτη (blocking probability) από το σύστημα, όταν εκείνο βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας:

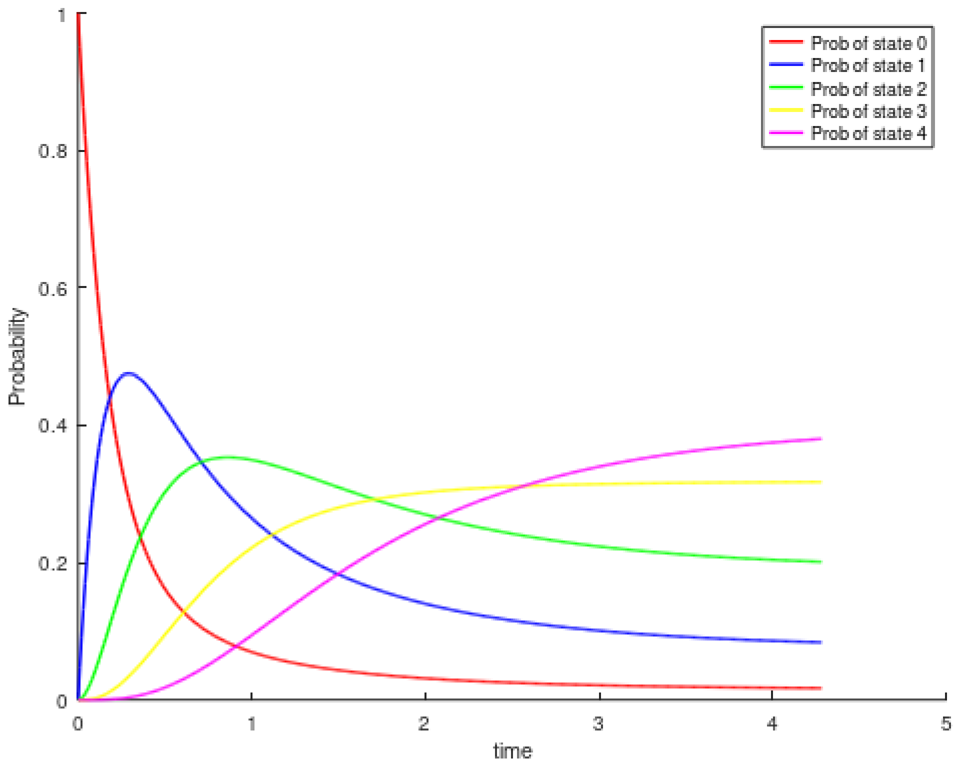
```
Pblocking = 1.5798e-03
```

που όντως είναι ίση με την P_4.

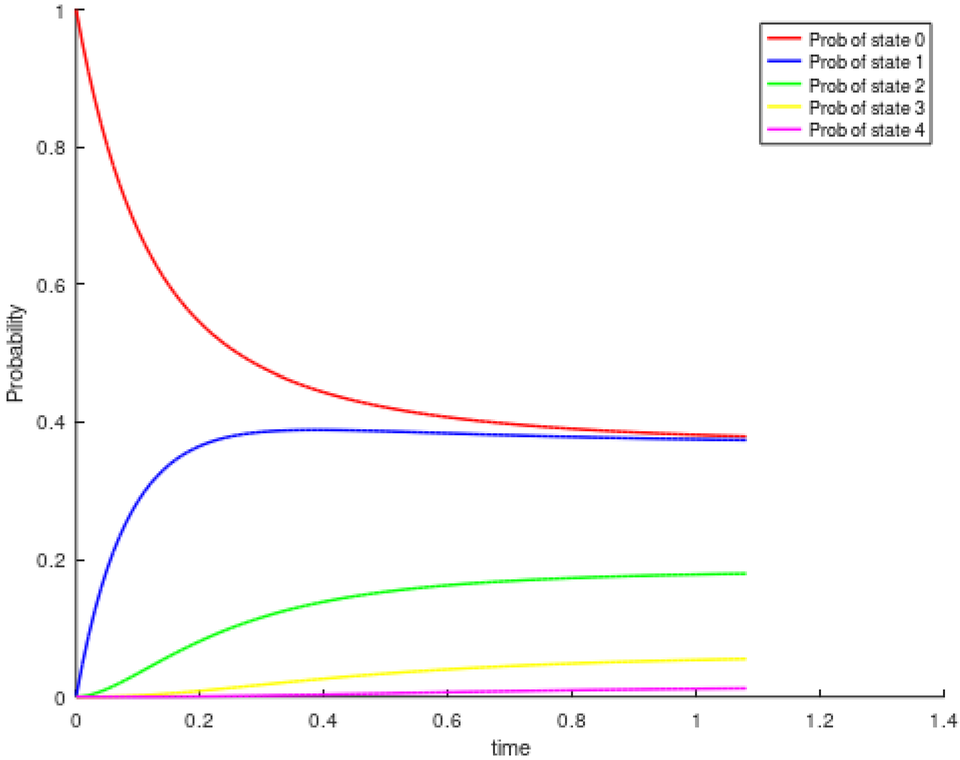
Τα ζητούμενα διαγράμματα:



Για λ=5 και μ=1:

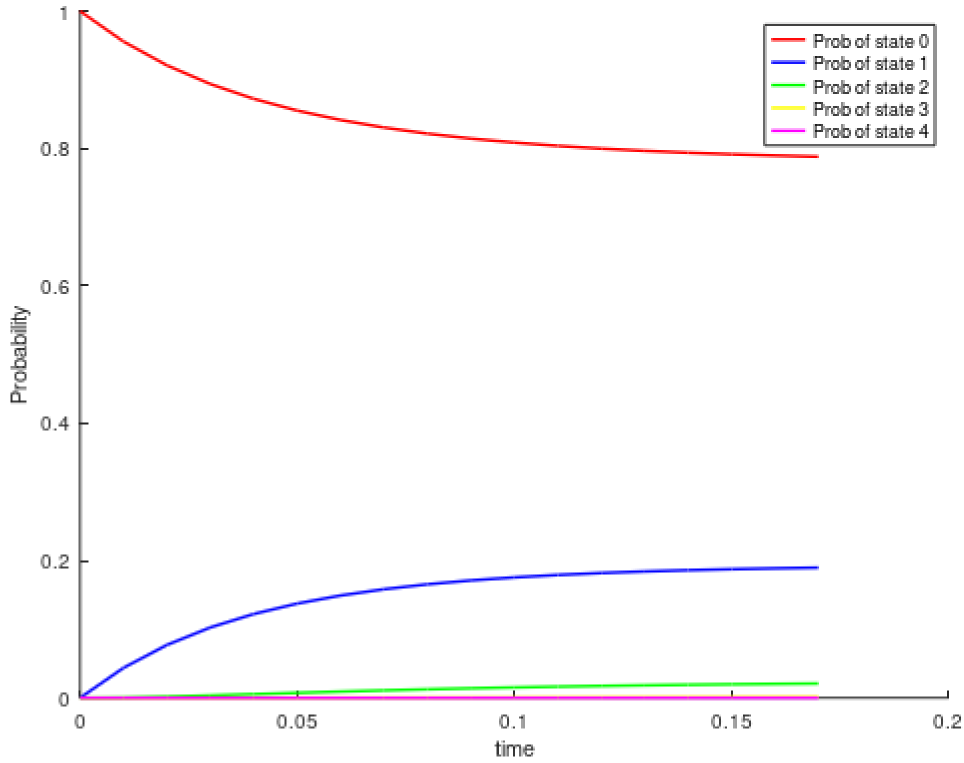


Για λ=5 και μ=5:



Prob of state 0
Prob of state 1
Prob of state 2
Prob of state 3
Prob of state 4
Probability
time
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4

Για λ=5 και μ=20:



Παρατηρείται, αρχικά, ότι όσο μεγαλύτερο μ έχουμε, τόσο πιο γρήγορα φτάνει το σύστημά μας στην εργοδική κατάσταση. Επιπλέον, καθώς αυξάνεται ο ρυθμός εξυπηρέτησης μ του συστήματός μας, τόσο αυξάνεται στην εργοδική κατάσταση η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται σε καταστάσεις με λιγότερους αναμένοντες. Έτσι, όσο μεγαλύτερο μ έχουμε, τόσο αυξάνεται και η πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο. Επίσης, φαίνεται ότι όταν το σύστημα δεν είναι εργοδικό η πιθανότητα να είναι άδειο είναι πολύ μικρή.

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την άσκηση:

```
% system M/M/1/4
% when there are 3 clients in the system, the capability of the server doubles.
pkg load queueing;
pkg load statistics;

clc;
clear all;
close all;

lambda = 5;
mu = 10;
states = [0, 1, 2, 3, 4]; % system with capacity 4 states
% the initial state of the system. The system is initially empty.
initial_state = [1, 0, 0, 0, 0];

% define the birth and death rates between the states of the system.
births_B = [lambda, lambda/2, lambda/3, lambda/4];
deaths_D = [mu, mu, mu, mu];

#i
% get the transition matrix of the birth-death process
transition_matrix = ctmcbd(births_B, deaths_D);
display(transition_matrix);

#ii
% get the ergodic probabilities of the system
P = ctmc(transition_matrix);
display(P);

% plot the ergodic probabilities (bar for bar chart)
figure(1);
bar(states, P, "r", 0.5);

#iii
%E(n(t)) = ΣkPk
AverageQueue = 0;
for i=1:1:(columns(states)-1)
  AverageQueue = AverageQueue + i*P(i+1);
endfor
display(AverageQueue);

#iv
Pblocking = P(5);
display(Pblocking);
```

```
#v
% transient probability of state 0 until convergence to ergodic probability. Convergence takes place P0 and P differ by 0.01
index = 0;
for T = 0 : 0.01 : 50
  index = index + 1;
  P0 = ctmc(transition_matrix, T, initial_state);
  Prob0(index) = P0(1);
  Prob1(index) = P0(2);
  Prob2(index) = P0(3);
  Prob3(index) = P0(4);
  Prob4(index) = P0(5);
  if P0 - P < 0.01
    break;
  endif
endfor

T = 0 : 0.01 : T;
figure(2);
hold on;

plot(T, Prob0, "r", "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob1, "b", "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob2, "g", "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob3, "y", "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob4, "m", "linewidth", 1.3);

legend("Prob of state 0","Prob of state 1","Prob of state 2","Prob of state 3","Prob of state 4");
xlabel("time");
ylabel("Probability");
hold off;
```

```
#vi
function vi (l, m, j)
  lambda = l;
  mu = m;
  states = [0, 1, 2, 3, 4];
  initial_state = [1, 0, 0, 0, 0];

  births_B = [lambda, lambda/2, lambda/3, lambda/4];
  deaths_D = [mu, mu, mu, mu];
  transition_matrix = ctmcbd(births_B, deaths_D);

  P = ctmc(transition_matrix);

  index = 0;
  for T = 0 : 0.01 : 50
    index = index + 1;
    P0 = ctmc(transition_matrix, T, initial_state);
    Prob0(index) = P0(1);
    Prob1(index) = P0(2);
    Prob2(index) = P0(3);
    Prob3(index) = P0(4);
    Prob4(index) = P0(5);
    if P0 - P < 0.01
      break;
    endif
  endfor
  T = 0 : 0.01 : T;
  figure(j);
  hold on;

  plot(T, Prob0, "r", "linewidth", 1.3);
  plot(T, Prob1, "b", "linewidth", 1.3);
  plot(T, Prob2, "g", "linewidth", 1.3);
  plot(T, Prob3, "y", "linewidth", 1.3);
  plot(T, Prob4, "m", "linewidth", 1.3);

  legend("Prob of state 0","Prob of state 1","Prob of state 2","Prob of state 3","Prob of state 4");
  xlabel("time");
  ylabel("Probability");
  hold off;
endfunction

vi(5, 1, 3);
vi(5, 5, 4);
vi(5, 20, 5);
```