

## ZAGADNIENIE WŁASNE

Z poprzednich zajęć wiemy, że równanie ruchu wygląda następująco:

$$M\ddot{x} = F - Sx$$

Policzmy „rozwiązanie ogólne równania jednorodnego”. Tzn: jakie funkcje  $x = f(t)\phi$  spełniają równanie bez sił:

$$M\ddot{x} = -Sx$$

$$\ddot{f}(t)M\phi = -f(t)S\phi$$

Jeśli znajdziemy takie  $\phi$ , że:

$$M\phi = \lambda S\phi$$

to otrzymamy:

$$\lambda \ddot{f}(t) = -f(t) \Rightarrow f(t) = \sin\left(t\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

To oznacza, że  $\sin(t\sqrt{\lambda})\phi$  jest oscylującym w czasie rozwiązaniem naszego równania dynamiki. Takie rozwiązanie nazywamy drganiem własnym układu. Równanie ( ) nazywamy równaniem własnym.

Dziś skupimy się na znalezieniu zestawu wektorów  $\phi$  i wartości  $\lambda$  dla naszej belki

## Zacznijmy od największej $\lambda$

Zacniemy od największej  $\lambda$ . Dobrze zauważyć, że największa wartość własna odpowiada najniższej częstotliwości. Są to drgania własne najmniej tłumione w fizycznym układzie i niosące zazwyczaj najwięcej energii w inżynierskich zastosowaniach.

Będziemy znajdować nasz wektor  $\phi$  iteracyjnie. Zauważmy, że wektor  $\phi$  może być dowolnej długości. To znaczy: jeśli wektor  $\phi$  spełnia równanie ( ), to także  $2\phi$  go spełnia. Możemy więc arbitralnie wybrać „skale” wektora  $\phi$ . Przyjmijmy, że  $\phi^T M \phi = 1$ , tzn: niesie on energię kinetyczną  $\frac{1}{2}$ .

Pomnóżmy równanie ( ) przez  $S^{-1}$ . Otrzymamy:

$$\phi = \frac{1}{\lambda} S^{-1} M \phi$$

Na podstawie tego wzoru możemy skonstruować prostą iterację:

$$p = S^{-1} M \phi$$

$$\phi = p \frac{1}{\sqrt{p^T M p}}$$

W pierwszym etapie liczymy wynik  $S^{-1} M \phi$ , a następnie go normalizujemy tak by  $\phi^T M \phi = 1$ . Jeśli odpowiednio długo będziemy wykonywać taką iterację, wektor własny odpowiadający największej wartości własnej zacznie dominować. Ostatecznie  $\phi$  będzie składać się tylko z tego wektora, a  $p^T M p$  zbiegnie do największej  $\lambda$ .

### Zadanie

Znajdź wektor  $\phi$  odpowiadający największej wartości własnej wg. następującego schematu iteracji: - Oblicz  $b = M \cdot \phi$  - Rozwiąż układ  $S \cdot p = b$  - Oblicz  $M p = M \cdot p$  - Oblicz  $\phi = \frac{1}{\sqrt{p^T M p}} p$

### Zadanie

Pokaż przemieszczenie  $\phi$  przy pomocy funkcji `draw`. Zrób animację tego przemieszczenia przemnożonego przez  $\sin t$ .

### Zadanie

[Dla ciekawych] By otrzymać bardziej płynną animację dodaj: `\ static int pg=0;\ setvisualpage(pg % 2);\` na początku funkcji `animate` w `winbgi2.cpp`. Zaś na końcu tej funkcji (przed `return`): `\ pg++;\ setactivepage(pg % 2);\`

## A teraz następne $\lambda$

Chcemy by wektory własne (drgania własne) były niezależne w energii kinetycznej. To znaczy, żeby energia kinetyczna ich sumy była równa sumie ich energii kinetycznych („ $E_k(\phi_0 + \phi_1) = E_k(\phi_0) + E_k(\phi_1)$ ”). To w połączeniu z naszą „skalą” daje nam bardzo ważny warunek:

$$\begin{cases} \phi_i^T M \phi_j = 0 & \text{dla } i \neq j \\ \phi_i^T M \phi_j = 1 & \text{dla } i = j \end{cases}$$

Mówiąc językiem numeryki: wektory te są do siebie ortonormalne względem macierzy  $M$ . Takiej ortonormalizacji możemy dokonać znaną z Analizy Matematycznej metodą Grama-Schmidta:

**\*\*Ortonormalizacja Grama-Schmidta\*\***  
Dla każdego  $i$  od 1 do  $n$  wykonaj: - dla każdego  $i$  od 1 do  $i - 1$  wykonaj (dla  $i = 1$  nic nie rób): - Oblicz  $\phi_i = \phi_i - \phi_j \langle \phi_j, M \phi_i \rangle$  - Oblicz  $\phi_i = \frac{1}{\sqrt{\langle \phi_i, M \phi_i \rangle}} \phi_i$  \ \ Po tej procedurze wszys-

tkie wektory  $\phi$  są ortogonalne i długości 1 względem macierzy  $M$ .

### Zadanie

Znajdź wektory  $\phi_i$  odpowiadające 10ciu największym wartościom własnym wg. następującego schematu iteracji: - Oblicz  $b = M \cdot \phi_{i,j}$  - Rozwiąż układ  $S \cdot p_j = b$  - Przepisz  $\phi_{i,j} = p_i$  - Wykonaj ortonormalizację G-S wektorów  $\phi_{i,j}$

### Zadanie

Zrób animację dla kolejnych przemieszczeń  $\phi_i$  przemnożonych przez  $\sin t$ .

### Zadanie

Wyznacz odpowiednie  $\lambda_i$