Metody Numeryczne
Projekt 2 – Układy równań liniowych

dr inż. Grzegorz Fotyga, ETI PG

23 marca 2021

1. Wstęp

Celem projektu jest implementacja metod iteracyjnych (Jacobiego i Gaussa-Seidla) i bezpośrednich (faktoryzacja LU) rozwiązywania układów równań liniowych. Testy poszczególnych metod będą przeprowadzane na układach równań, które powstają w wyniku dyskretyzacji równań różniczkowych i są powszechnie stosowane w takich zagadnieniach jak: elektronika, elektrodynamika, mechanika (zastosowania lotnicze, biomechanika, motoryzacyja), badanie wytrzymałości materiałów i konstrukcji, symulacje odkształceń, naprężeń, przemieszczeń i drgań, akustyka, fotonika, termodynamika, dynamika płynów i wiele innych.

W rzeczywistych problemach rozwiązywane są układy równań zawierające setki milionów niewiadomych, dla których obliczenia trwają często wiele godzin, a nawet dni, mimo wykorzystywania najnowszych superkomputerów. Opracowanie nowych efektywnych metod rozwiązań (dostosowanych do współczesnych architektur komputerowych) jest dużym wyzwaniem zarówno z punktu widzenia matematyki, jak i informatyki. Jest ono przedmiotem badań wielu ośrodków naukowych, ponieważ bez niego rozwój wymienionych wyżej dziedzin wiedzy byłby **niemożliwy**.

W praktyce najczęściej stosuje się tak zwany rzadki format przechowywania macierzy (który przechowuje tylko wartości niezerowe i ich położenie w macierzy), ponieważ zdecydowana większość elementów ma wartość 0. Jednak ze względu na prostotę, w zadaniu będzie wykorzystywany tzw. format pełny (przechowujący wszystkie wartości, również 0), który może być stosowany w problemach zawierających zazwyczaj nie więcej niż kilka tysięcy niewiadomych. Mimo, że testowane będą jedynie podstawowe metody rozwiązań, wykonanie projektu będzie dobrym fundamentem do poznania bardziej zaawansowanych metod iteracyjnych (np. metody gradientów sprzężonych, GMRES, QMR...)

2. Konstrukcja układu równań

Układ równań liniowych ma następującą postać:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą systemową[1], $\mathbf{b}$ jest wektorem pobudzenia[2], natomiast $\mathbf{x}$ jest wektorem rozwiązań reprezentującym szukaną wielkość fizyczną [3].

[1] W zależności od problemu może ona reprezentować np. obwód elektroniczny, geometrię sali koncertowej, turbinę, karoserię samochodu itp.

[2] np. impuls elektroniczny, wektor siły, fala dźwiękowa itp.

[3] np. rozkład pola elektromagnetycznego, natężenie dźwięku itp.

- Na potrzeby testów przyjmijmy, że $\mathbf{A}$ jest tzw. macierzą pasmową o rozmiarze $N \times N$, gdzie N ma wartość $9cd$, c jest przedostatnią cyfrą numeru Twojego indeksu, natomiast d ostatnią[4]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a3 & a2 & a1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

  Macierz $\mathbf{A}$ zawiera więc pięć diagonali - główna z elementami $a1$, dwie sąsiednie z elementami $a2$ i dwie skrajne diagonale z elemetnami $a3$.

- Prawa strona równania to wektor $\mathbf{b}$ o długości N.

- W wyniku rozwiązania układu równań (1) otrzymujemy wektor $\mathbf{x}$.

3. Wektor residuum

Ważnym elementem algorytmów iteracyjnych (np. Jacobiego i Gaussa-Seidla) jest określenie w której iteracji algorytm powinien się zatrzymać. W tym celu najczęściej korzysta się z tzw. wektora residuum, które dla k – tej iteracji przyjmuje postać:

$$\mathbf{res}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}. \tag{3}$$

Badając normę euklidesową wektora residuum ($norm(\mathbf{res}^{(k)})$), możemy w każdej iteracji algorytmu obliczyć jaki błąd wnosi wektor $\mathbf{x}^{(k)}$. Jeżeli algorytm zbiegnie się do dokładnego rozwiązania, residuum powinno być wektorem zerowym. Przeważnie jako kryterium stopu przyjmuje się normę z residuum o wartości mniejszej niż 10^{-6}.

4. Zadania

- **Zadanie A** – Stwórz układ równań dla $a1 = 5 + e$, gdzie e jest czwartą cyfrą Twojego indeksu, $a2 = a3 = -1$ i $N = 9cd$ (patrz – punkt 2). $\mathbf{b}$ jest wektorem o długości N, którego $n-$ty element ma wartość $sin(n \cdot (f + 1))$, gdzie f jest trzecią cyfrą Twojego indeksu. (10%)

- **Zadanie B** – Zaimplementuj metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych: Jacobiego i Gaussa–Seidla. Sprawdź ile iteracji potrzebuje każda z nich, dla układu równań z podpunktu $\mathbf{A}$, żeby otrzymać normę z wektora residuum równą 10^{-9}. Porównaj czas trwania algorytmów. (30%)

- **Zadanie C** – Stwórz układ równań dla $a1 = 3$, $a2 = a3 = -1$ i $N = 9cd$, natomiast wektor $\mathbf{b}$ pozostaw bez zmian. Czy metody iteracyjne dla takich wartości zbiegają się? (10%)

- **Zadanie D** – Zaimplementuj metodę bezpośredniego rozwiązania układów równań liniowych: metodę faktoryzacji LU i zastosuj do przypadku $\mathbf{C}$. Ile wynosi norma z residuum w tym przypadku? (30%)

[4]Przykładowo: dla indeksu 102263 $N = 963$.

- **<u>Zadanie E</u>** – Stwórz wykres zależności czasu trwania poszczególnych algorytmów od liczby niewiadomych $N = \{100, 500, 1000, 2000, 3000 \ldots\}$ dla przypadku z punktu **A**. (10%)
- **<u>Zadanie F</u>** – Zwięźle opisz swoje obserwacje po wykonaniu podpunktów A–E. (10%)