

Podstawy fizyki – sezon 1

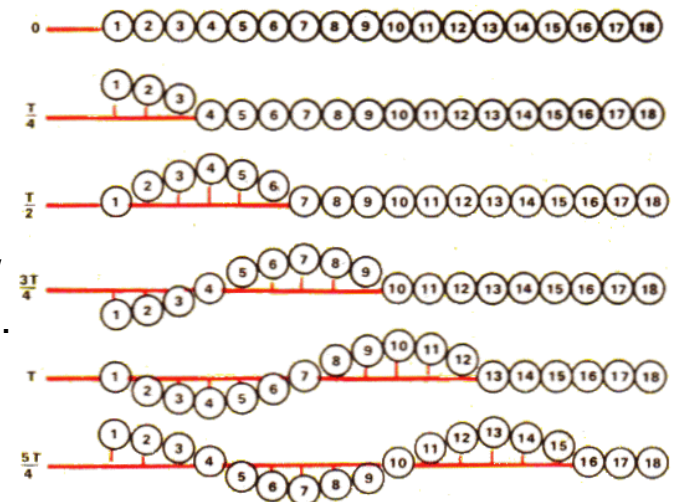
VIII. Ruch falowy

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

WFliS, Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek,
D11, pok. 106
amucha@agh.edu.pl
<http://home.agh.edu.pl/~amucha>

Gdzie szukać fal?

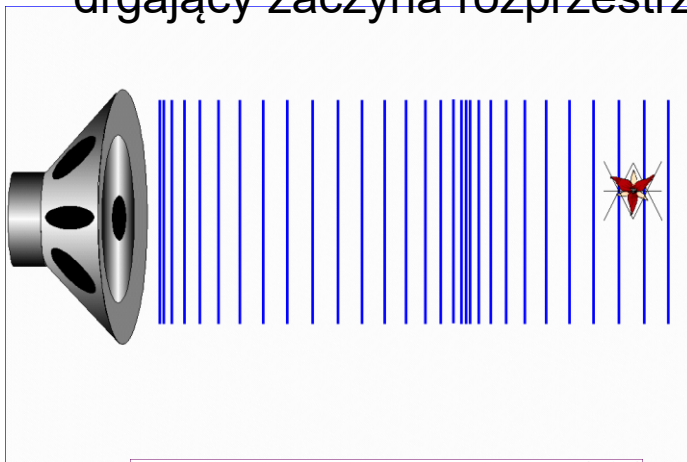
- W potocznym języku fale utożsamiamy ze zmianą kształtu ośrodka, która przemieszcza się w przestrzeni (np. fale na wodzie, fala wytworzona na sznurze).
- Znamy również: fale radiowe, fale świetlne, fale dźwiękowe, fale na stadionie,...
- Każda z tych fal ma cechę wspólną – najpierw wytwarzane jest zaburzenie, a potem to zaburzenie się rozprzestrzenia (nawet na nieskończone odległości)
- Najbardziej ogólnie fale podzielić można na:
 - **mechaniczne** - rozchodzące się zaburzenie w **ośrodku** wykazującym cechy sprężystości (np. powietrze, woda, metal)
 - **elektromagnetyczne** - rozchodzące się w **próżni** zaburzenie pól – elektrycznego i magnetycznego
 - **fale materii**



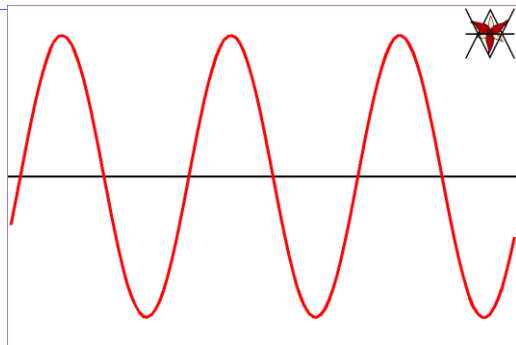
Wyjaśnienie mechanizmu powstawania fali

Fale mechaniczne

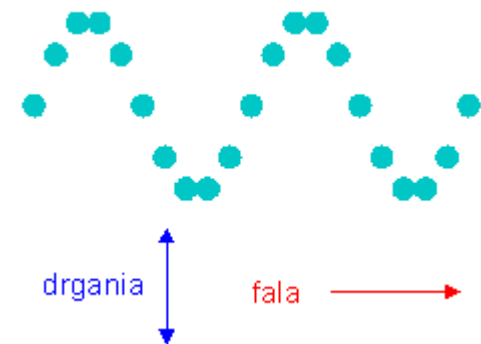
- Jeżeli pewien obszar ośrodka sprężystego pobudzimy do drgań, to takie drganie zostanie przekazane innym cząstkom tego ośrodka i wtedy ruch drgający zaczyna rozprzestrzeniać się w postaci fali.



fala podłużna



fala poprzeczna



http://www.if.pw.edu.pl/~bibliot/archiwum/adamczyk/WykLadFO/FoWwww_16.html

<http://www.ftj.agh.edu.pl/~kakol/efizyka/>

Fale – sposób wytworzenia

- **Impuls falowy** – jednorazowe zaburzenie, np. kamyk do wody

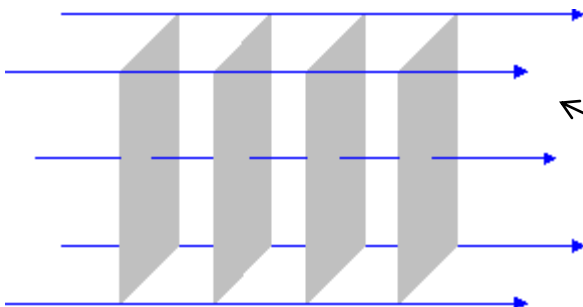


- **Fala harmoniczna** - źródło wykonuje drgania harmoniczne – wychylenie sznura

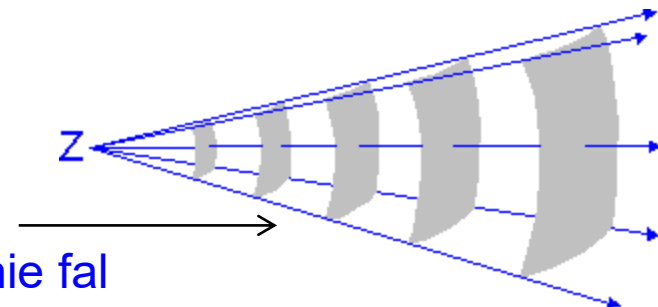


Czoło fali (powierzchnie falowe) – punkty, do których w tym samym momencie dotarła fala

- Fala płaska – równoległe płaszczyzny



- Fala kulista – wycinki sfer



promienie fal

Równanie falowe – zależność czasowa

- Do opisu zaburzenia rozchodzącego się w przestrzeni potrzeba funkcji zmiennych przestrzennych i czasu: $u(x, y, z; t)$.
- Pamiętamy, że drgania punktu są opisywane przez równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

- Drgania mogą odbywać się również w dowolnym kierunku np. u , a $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 u = 0$$

- Rozwiązaniem tego równania jest funkcja: $u(t) = A \sin \frac{2\pi}{T} t$

Jest to zależność powstałego drgania od czasu.

Potrzeba jeszcze zależności opisującej propagację tego drgania w przestrzeni.

Równanie falowe

- Jeżeli teraz wyobrazimy sobie stałe w czasie zaburzenie np. pofałdowaną powierzchnię (jak blacha na dachu), to jej kształt również opisuje funkcja typu „sinus”, ale tym razem jest to funkcja niezależna od czasu, tylko w zmiennych przestrzennych: $u(x) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$
- Funkcja ta jest rozwiązaniem, analogicznego do poprzedniego, równania:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 u = 0$$

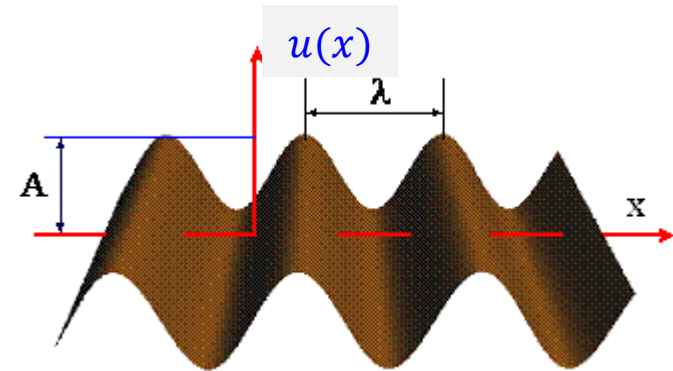
Jeżeli połączymy obydwa równania: $u = - \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \frac{d^2 u}{dt^2}$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \left(\frac{T}{\lambda} \right)^2 \frac{d^2 u}{dt^2} = 0$$

to:

$$\text{gd}y: \frac{T}{\lambda} = \frac{T}{vT} = \frac{1}{v}$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{1}{v^2} \frac{d^2 u}{dt^2} = 0$$



równanie falowe

Równanie falowe - interpretacja

- Rozwiązanie równania falowego w postaci: $u(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$, $\frac{2\pi}{\lambda} = k$ (k- **wektor falowy**) oznacza falę biegnącą w **prawo** (dodatni kierunek „x”):



- Rozwiązanie równania falowego w postaci: $u(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$, oznacza falę biegnącą w **lewo** (ujemne „x”):



- Równanie dla fali rozchodzącej się w przestrzeni:

sprawdzić!

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

∂ - pochodna cząstkowa

można zapisać używając operatora d’Alamberta: $\square \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$

$$\square u(x, y, z, t) = 0$$

Fale sprężyste (mechaniczne)

- Fale sprężyste rozchodzą się w ośrodku wykazującym sprężystość objętości lub sprężystość postaci (gazy, ciecze i ciała stałe).
- Z każdą falą sprężystą stowarzyszone są trzy rodzaje prędkości.

- **Prędkość ruchu cząstek** - jest to prędkość chwilowa (np. drgań harmoniczných) ruchu cząsteczek (punktów) ośrodka sprężystego wokół ustalonych położeń równowagi;

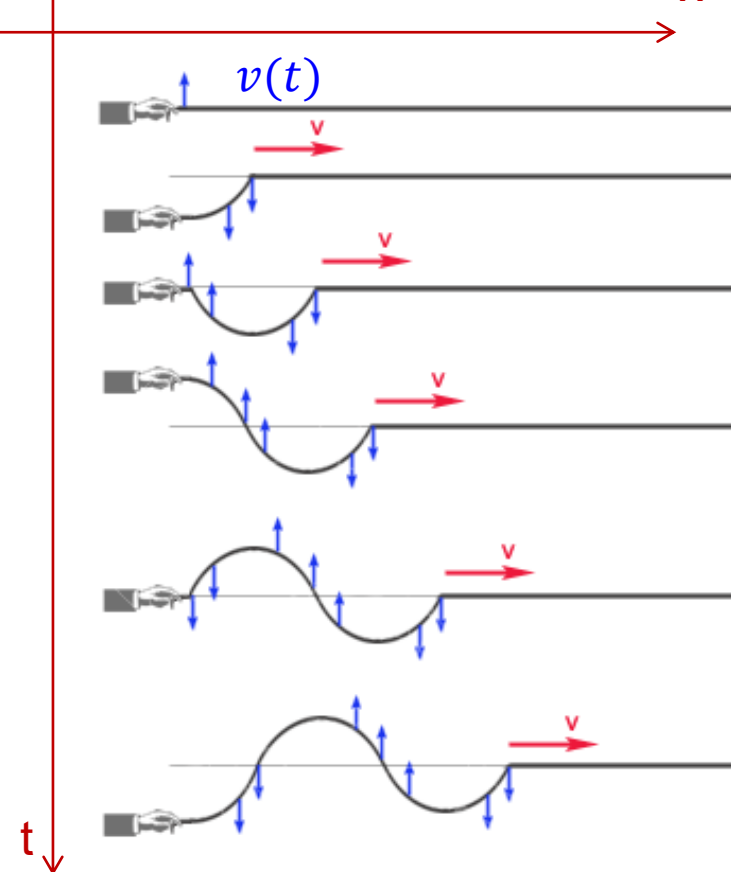
$$v(t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -A \cos(kx - \omega t)$$

- **Prędkość fazowa (falowa)** – jest to prędkość v z jaką przemieszcza się w ośrodku powierzchnia stałej fazy (np. garby lub doliny fali biegnącej w sznurku)

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\text{faza fali: } \Phi = kx - \omega t,$$

$$u(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$



Prędkość fazowa i grupowa

Faza fali: $\Phi = kx - \omega t$ ma pozostać stała, czyli $d\Phi = 0$.

liczymy: $d\Phi = k dx - \omega dt$, $d\Phi = 0$,

gdy: $\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \equiv v$ **prędkość fazowa**

Obliczona tak prędkość fazowa jest dodatnia –stąd wiemy, że fala rozchodzi się w stronę „dodatnich” „x”.

Zad: Obliczyć prędkość fazową dla fali propagującej się w przeciwnym kierunku:

$$u(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$$

- **Prędkość grupowa** – jest to prędkość v_{gr} pakietu (grupy, paczki) fal. Jest to prędkość z jaką przenoszona jest przez falę sprężystą energia $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$



● prędkość fazowa \gg ● prędkość grupowa

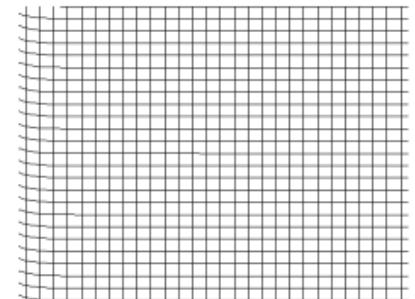
http://pl.wikipedia.org/wiki/Pr%C4%99dko%C5%9B%C4%87_grupowa

Prędkość fal

- Praktycznie za prędkość fali uważa się prędkość fazową: $v = \frac{\omega}{k}$
- Prędkość rozchodzenia się fali zależy od właściwości sprężystych ciał, nie zależy od częstotliwości, ani amplitudy:

$$v = \sqrt{\frac{\text{czynniki sprężystości}}{\text{czynniki bezwładności}}}$$

- np. fala w napiętym sznurze rozchodzi się z prędkością: $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, F - siła sprężystości, μ – masa liniowa (masa/jedn. długości),
- fala poprzeczna w ciele stałym: $v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, G - moduł sztywności
- fala podłużna w ciele stałym: $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, E - moduł Younga



Energia przenoszona przez fale

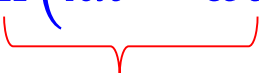
- Szybkość wykonywania pracy – MOC: $P(t) = F(t) v(t)$

$$P = -F \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = FA^2 k \omega \cos^2(kx - \omega t) = 4\pi A^2 f^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

- Moc (szybkość przepływu energii):
 - oscyluje w czasie,
 - jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy i częstotliwości.

Interferencja fal

- Interferencja – zjawisko nakładania się fal.
- W wyniku nałożenia się dwóch fal o tych samych częstościach i amplitudach, ale różniących się o fazę φ :
$$u_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$
$$u_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi)$$
- Nakładające się fale dodają się algebraicznie: $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$
zatem dostajemy falę, która jest postaci:
- $u(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$


amplituda fali wypadkowej

por. nakładanie drgań!
- Wynik nakładania się fal (interferencji) zależy wyłącznie od różnicy faz φ . Dla $\varphi = 0$ fale są zgodne w fazie i wzmacniają się maksymalnie ($A' = 2A$), dla $\varphi = 180^\circ$ fale są przeciwne w fazie i wygaszają się ($A' = 0$).
- Nakładające się fale nie wpływają na siebie wzajemnie – gdy równocześnie pojawi się kilka efektów, ich skutek jest sumą efektów poszczególnych skutków- **ZASADA SUPERPOZYCJI**

Fale stojące

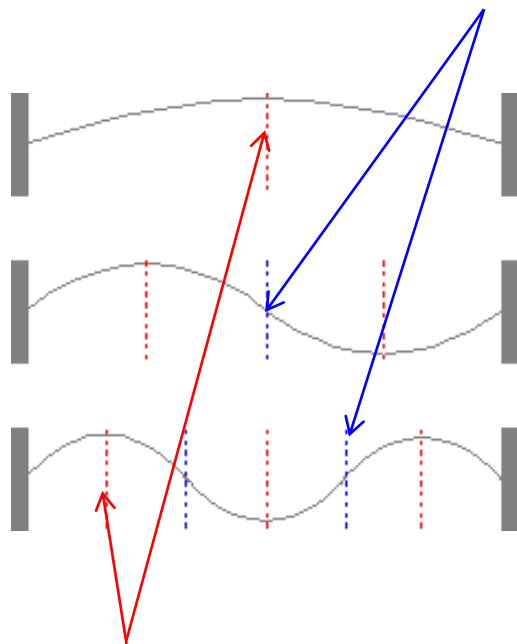
- **Interferencja** dwu fal o równych częstotliwościach i amplitudach, ale rozchodzących się **w przeciwnych kierunkach** - np fala rozchodząca się w danym ośrodku (ciele) odbija się od granicy ośrodka (ciała) i nakłada się na falę padającą.
- Nakładamy fale o równaniach:
$$u_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$
$$u_2(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$$
- Otrzymujemy falę wypadkową: $u(x, t) = u_1 + u_2 = \underbrace{2A \sin kx \cos \omega t}_{\text{amplituda fali wypadkowej}} \quad \text{policzyć!!}$
- Cząstki ośrodka drgają ruchem harmonicznym prostym, ale różne punkty ośrodka mają różną amplitudę drgań zależną od ich położenia x . Taką falę nazywamy **falą stojącą**.
- Amplituda fali wypadkowej (część równania niezależna od czasu) zmienia się okresowo z liczbą falową k .
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

fala jako liczba zespolona
– II semestr

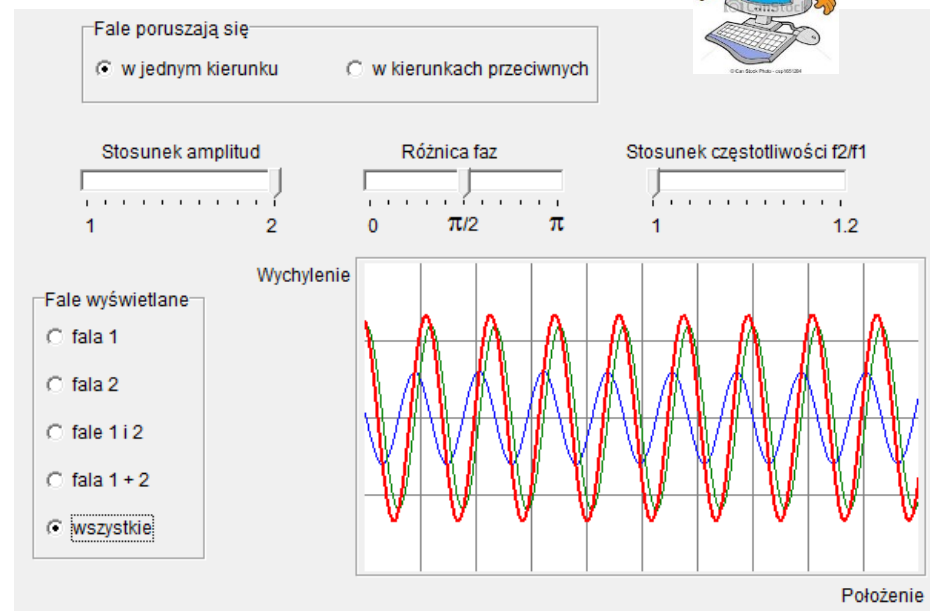
Fala stojąca

- gdy $kx = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots\right\}$, czyli $x = \left\{\frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda, \dots\right\}$ - maksymalna amplituda. Wtedy w punktach x mamy **strzałki** fali.
- gdy $kx = \{\pi, 2\pi, 3\pi, \dots\}$, czyli $x = \left\{\frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3}{2}\lambda, \dots\right\}$ - minimalna amplituda. Takie punkty nazywamy **węzłami** fali.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$



strzałki



<http://www.ftj.agh.edu.pl/~kakol/efizyka/>

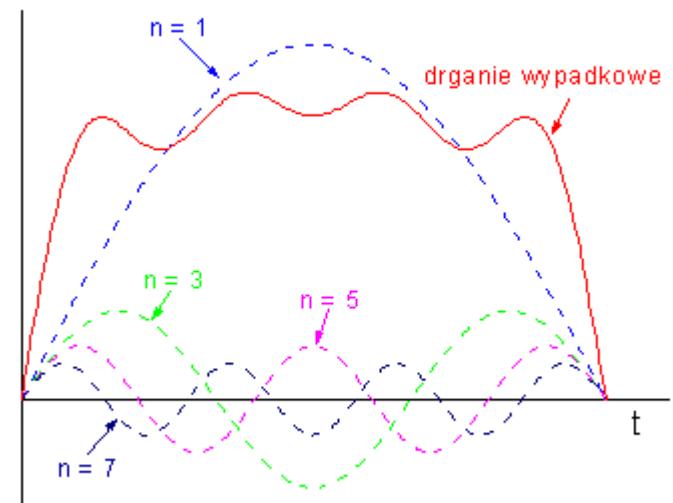
Analiza fal złożonych

- W strunie o długości D zamocowanej z obu końców (poprzedni slajd) może powstać tylko fala o długości $n \cdot \frac{1}{2} \lambda = D$.
- Ogólnie – długość fal powstałych w strunie: $\lambda_n = \frac{2D}{n}$
- Prędkość fali: $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$, oraz $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, co prowadzi do zależności na częstotliwość fal stojących w strunie:

$$f_n = \frac{n}{2D} v = \frac{n}{2D} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Analiza Fouriera: Dowolne drganie okresowe o okresie T możemy przedstawić jako kombinację liniową (sumę) drgań harmonicznnych o okresach danych wzorem $T_n = T/n$, gdzie n jest liczbą naturalną.

por. drgania!



Modulacja

- Fala stojąca – fala o amplitudzie stałej w czasie, ale zależnej od położenia cząstki w przestrzeni (interferencja w przestrzeni).
- Jeśli dodamy fale nieznacznie różniące się częstotliwościami i zbadamy jaką amplitudę dostaniemy w pewnej chwili czasu t – zbadamy interferencje w czasie.
- Znane z poprzedniego wykładu wzory:

$$u_1(t) = A \sin\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t$$

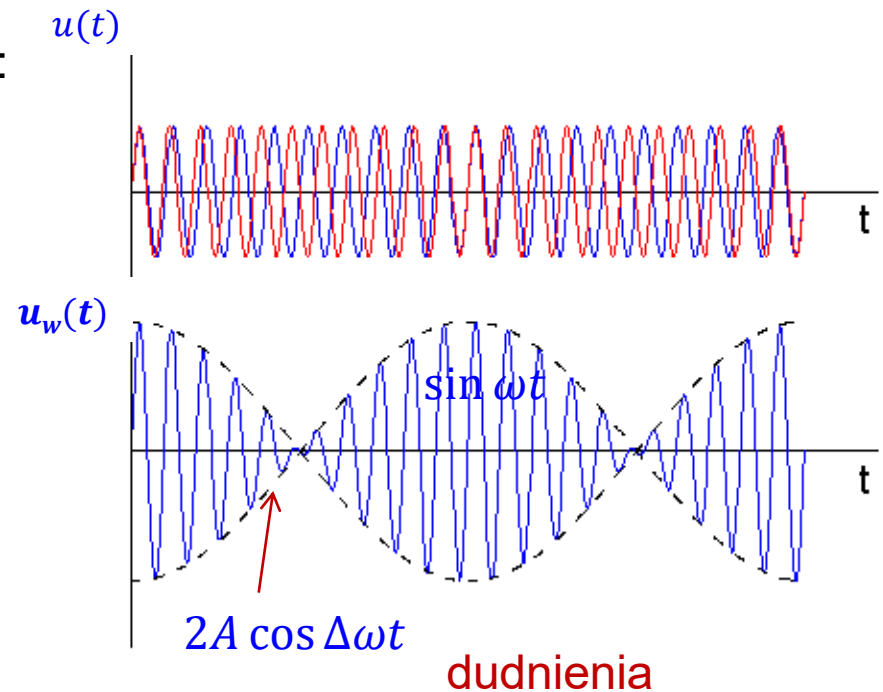
$$u_2(t) = A \sin\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t$$

$$u_w(t) = u_1(t) + u_2(t) =$$

$$A \left[\sin\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t + \sin\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t \right]$$

$$u_w(t) = 2A \cos \Delta\omega t \sin \omega t$$

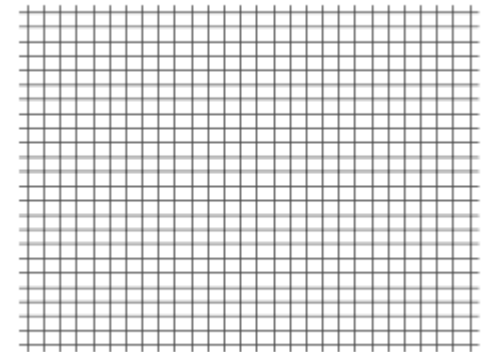
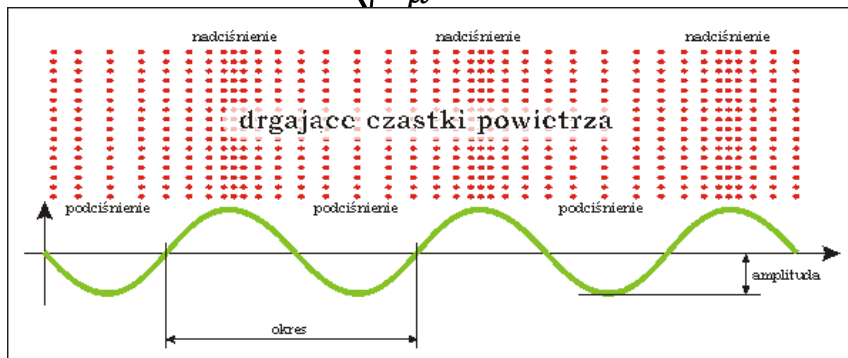
$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$
amplituda fali wypadkowej



Fale akustyczne

- Fale akustyczne - podłużne fale sprężyste.
 - Rozchodzą się w każdym materialnym ośrodku sprężystym. Prędkość zależy od własności sprężystych ośrodka.
 - Podczas propagowania się w ośrodku wprowadzają w ruch drgający cząsteczki ośrodka - powstają lokalne zmiany gęstości i ciśnienia ośrodka wzdłuż kierunku ruchu fali.
 1. Infradźwięki – $0 < f \leq 20 \text{ Hz}$.
 2. Fale dźwiękowe (dźwięk) – $20 \leq f \leq 20 \text{ kHz}$
 3. Ultradźwięki – $f > \text{od } 20 \text{ kHz}$.

Prędkość dźwięku: $v = \sqrt{\frac{\kappa RT}{\mu}}$, μ - masa molowa



Zjawisko Dopplera

- Częstość fali akustycznej zależy od prędkości względnych źródła i odbiornika tych fal.

Z życia codziennego wiemy, że jeśli źródło i odbiornik zbliżają (oddalają) się do siebie, to częstość odbieranej fali jest większa (mniejsza) od częstości emitowanej przez źródło.

Efekt Dopplera (1842)

1. Obserwator porusza się, źródło spoczywa.

- Odbiornik zbliża się do źródła z prędkością v_0 .

Jeżeli fale o długości λ rozchodzą się z prędkością v to w czasie t dociera do nieruchomego obserwatora $\frac{vt}{\lambda}$ fal. Jeżeli obserwator porusza się w kierunku źródła (wychodzi falom na przeciw) to odbiera jeszcze dodatkowo $\frac{v_0 t}{\lambda}$ fal.

W związku z tym częstotliwość f' słyszana przez obserwatora

$$f' = \frac{n_{fal}}{t} = \frac{\frac{vt}{\lambda} + \frac{v_0 t}{\lambda}}{t} = \frac{v + v_0}{\lambda} = \frac{v + v_0}{\frac{v}{f}} = f \frac{v + v_0}{v}$$

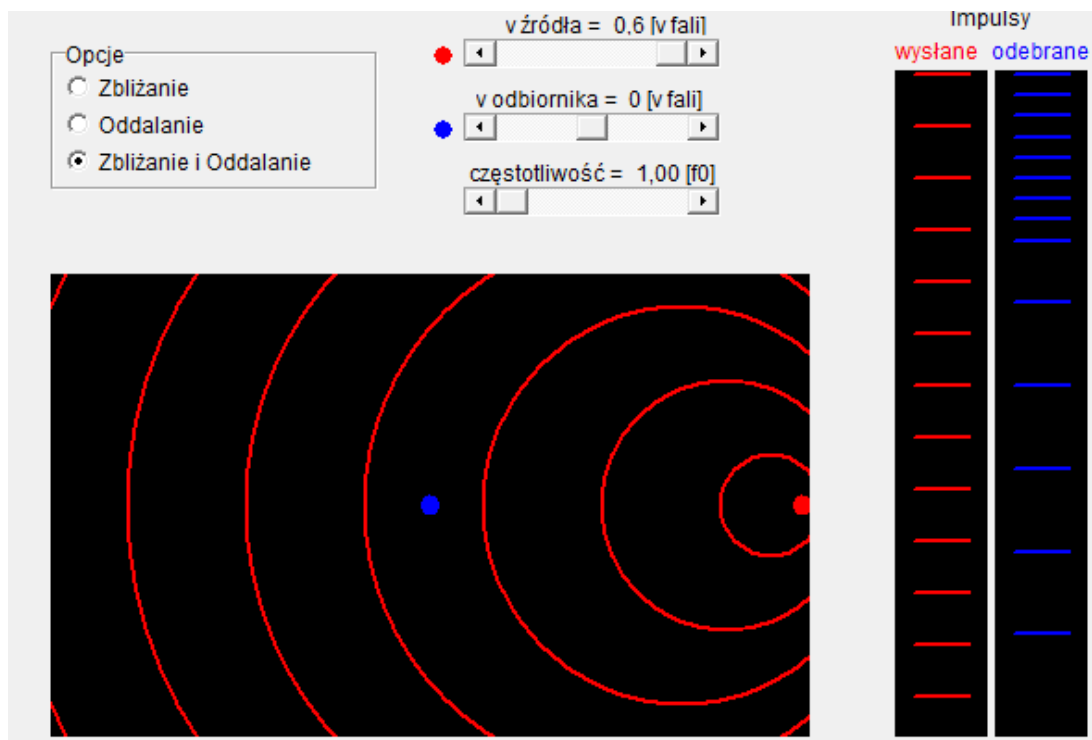
Efekt Dopplera cd

- Przybliżający się obserwator rejestruje wyższą częstotliwość niż częstotliwość źródła (oddalający – zmienić znak „+” na „-” – częstotliwość zmniejsza się).

$$f' = f \frac{v + v_0}{v}$$

2. Źródło porusza się z prędkością v_z względem nieruchomego obserwatora:

$$f' = f \frac{v}{v - v_z}$$



<http://www.ftj.agh.edu.pl/~kakol/efizyka/>

Podsumowanie

- Przykłady ruchu falowego
- Podział ze względu na
 - a) rodzaj ośrodka
 - b) kierunek rozchodzenia
- Równanie falowe – rozwiązanie, parametry ruchu, prędkość fazowa i grupowa
- Interferencja fal.
- Analiza Fouriera fal złożonych.
- Zjawisko Dopplera.