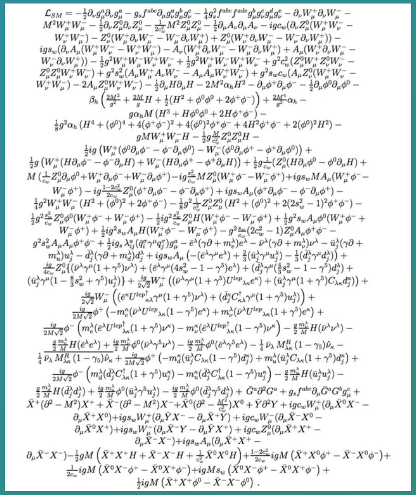
WSTĘP DO MODELU STANDARDOWEGO

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

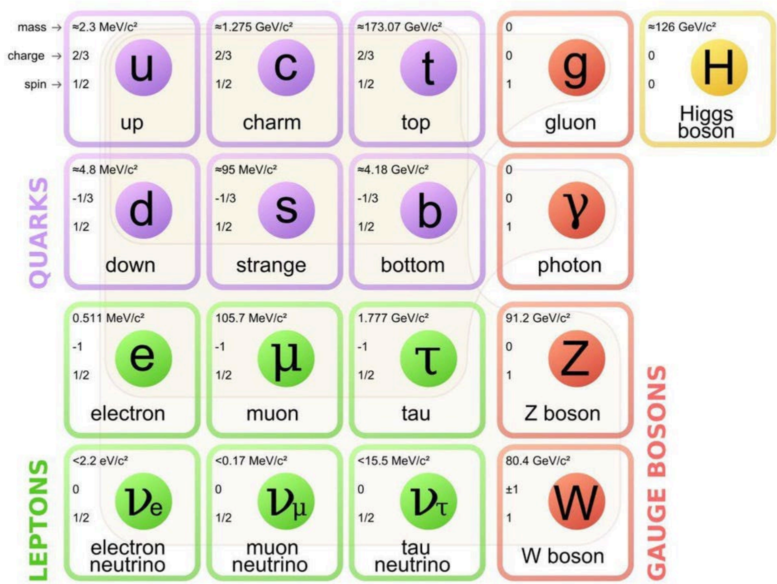
AGH UST Kraków

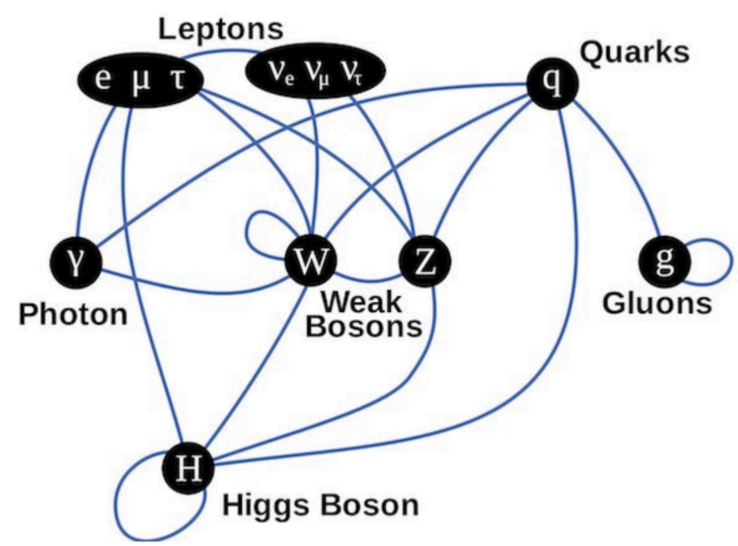
WFiIS Fizyka Techniczna



SPIS TREŚCI

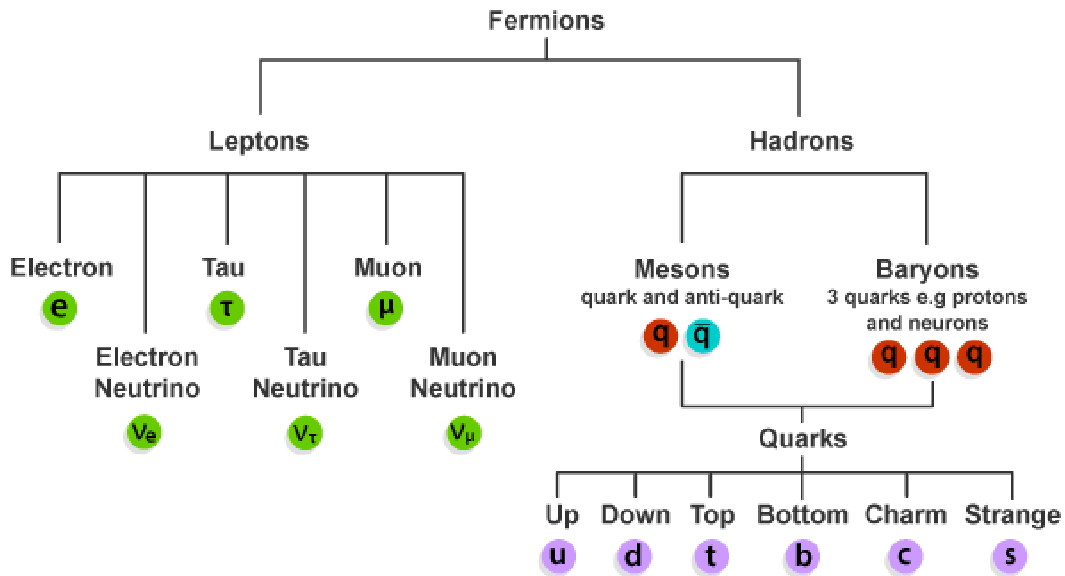
MS na obrazku

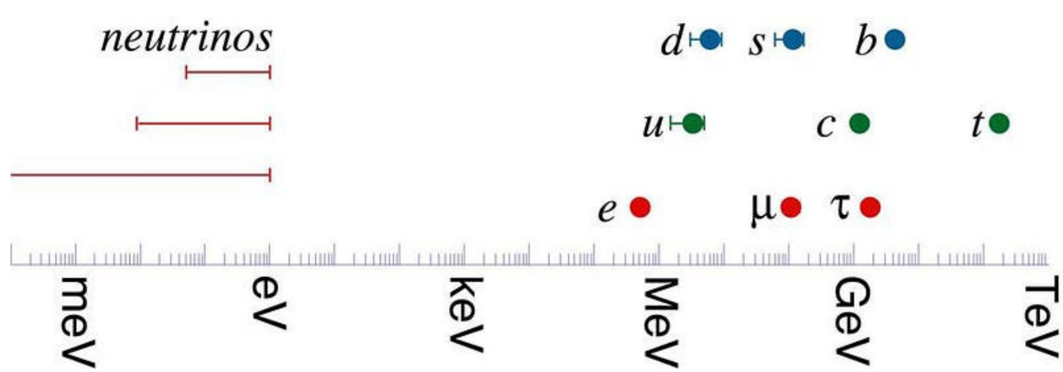




Model Standardowy ma już 50 lat!

Masy w Modelu Standardowym (problem)





MS - Lagranżian

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}'$$

$\mathcal{L}_0$ - pola (cząstki) swobodne)
$\mathcal{L}'$ - odddziaływania

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \boxed{i\,\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi}$$ fermiony

$$\mathcal{L}' = \boxed{e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi}$$ oddz. fermion-foton

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{SM} = \; & \underbrace{\frac{1}{4} W_{\mu\nu} \cdot W^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G^{\alpha}_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_{\alpha}}_{\text{kinetic energies and self-interactions of the gauge bosons}} \\
& + \underbrace{\bar{L}\gamma^\mu \left(i\partial_\mu - \frac{1}{2} g\tau \cdot W_\mu - \frac{1}{2} g' Y B_\mu \right) L + \bar{R}\gamma^\mu \left(i\partial_\mu - \frac{1}{2} g' Y B_\mu \right) R}_{\text{kinetic energies and electroweak interactions of fermions}} \\
& + \underbrace{\frac{1}{2} \left| \left(i\partial_\mu - \frac{1}{2} g\tau \cdot W_\mu - \frac{1}{2} g' Y B_\mu \right) \phi \right|^2 - V(\phi)}_{W^{\pm}, Z, \gamma \text{ and Higgs masses and couplings}} \\
& + \underbrace{g'' \left(\bar{q} \gamma^\mu T_a q \right) G^{\alpha}_{\mu}}_{\text{interactions between quarks and gluons}} + \underbrace{\left(G_1 \bar{L} \phi R + G_2 \bar{L} \phi_c R + h.c. \right)}_{\text{fermion masses and couplings to Higgs}}
\end{aligned}$$

MS w równaniu

1

$$-\tfrac{1}{2}\partial_\nu g^a_\mu \partial_\nu g^a_\mu - g_s f^{abc}\partial_\mu g^a_\nu g^b_\mu g^c_\nu - \tfrac{1}{4}g_s^2 f^{abc} f^{ade} g^b_\mu g^c_\nu g^d_\mu g^e_\nu + \tfrac{1}{2}ig_s^2(\bar{q}^\sigma_i \gamma^\mu q^\sigma_j)g^a_\mu + \bar{G}^a\partial^2 G^a + g_s f^{abc}\partial_\mu \bar{G}^a G^b g^c_\mu$$

gluon

2

$$- \partial_\nu W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - M^2 W^+_\mu W^-_\mu - \tfrac{1}{2}\partial_\nu Z^0_\mu \partial_\nu Z^0_\mu - \tfrac{1}{2c_w^2}M^2 Z^0_\mu Z^0_\mu - \tfrac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu - \tfrac{1}{2}\partial_\mu H \partial_\mu H - \tfrac{1}{2}m_h^2 H^2 - \partial_\mu \phi^+ \partial_\mu \phi^- - M^2\phi^+\phi^- - \tfrac{1}{2}\partial_\mu \phi^0 \partial_\mu \phi^0 - \tfrac{1}{2c_w^2}M\phi^0\phi^0 - \beta_h[\tfrac{2M^2}{g^2} + \tfrac{2M}{g}H + \tfrac{1}{2}(H^2 + \phi^0\phi^0 + 2\phi^+\phi^-)] + \tfrac{2M^4}{g^2}\alpha_h - igc_w[\partial_\nu Z^0_\mu(W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) - Z^0_\nu(W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu \partial_\nu W^+_\mu) + Z^0_\mu(W^+_\nu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\nu \partial_\nu W^+_\mu)] - igs_w[\partial_\nu A_\mu(W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) - A_\nu(W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu \partial_\nu W^+_\mu) + A_\mu(W^+_\nu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\nu \partial_\nu W^+_\mu)] - \tfrac{1}{2}g^2 W^+_\mu W^-_\mu W^+_\nu W^-_\nu + \tfrac{1}{2}g^2 W^+_\mu W^-_\nu W^+_\mu W^-_\nu + g^2 c_w^2(Z^0_\mu W^+_\mu Z^0_\nu W^-_\nu - Z^0_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + g^2 s_w^2(A_\mu W^+_\mu A_\nu W^-_\nu - A_\mu A_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + g^2 s_w c_w[A_\mu Z^0_\nu(W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) - 2A_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu] - g\alpha[H^3 + H\phi^0\phi^0 + 2H\phi^+\phi^-] - \tfrac{1}{8}g^2\alpha_h[H^4 + (\phi^0)^4 + 4(\phi^+\phi^-)^2 + 4(\phi^0)^2\phi^+\phi^- + 4H^2\phi^+\phi^- + 2(\phi^0)^2 H^2] - gMW^+_\mu W^-_\mu H - \tfrac{1}{2}g\tfrac{M}{c_w^2}Z^0_\mu Z^0_\mu H - \tfrac{1}{2}ig[W^+_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^0) - W^-_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu\phi^0)] + \tfrac{1}{2}g[W^+_\mu(H\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu H) - W^-_\mu(H\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu H)] + \tfrac{1}{2}g\tfrac{1}{c_w}(Z^0_\mu(H\partial_\mu\phi^0 - \phi^0\partial_\mu H) - ig\tfrac{s_w^2}{c_w}MZ^0_\mu(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + igs_w MA_\mu(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) - ig\tfrac{1-2c_w^2}{2c_w}Z^0_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) + igs_w A_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) - \tfrac{1}{4}g^2 W^+_\mu W^-_\mu[H^2 + (\phi^0)^2 + 2\phi^+\phi^-] - \tfrac{1}{4}g^2\tfrac{1}{c_w^2}Z^0_\mu Z^0_\mu[H^2 + (\phi^0)^2 + 2(2s_w^2 - 1)^2\phi^+\phi^-] - \tfrac{1}{2}g^2\tfrac{s_w^2}{c_w}Z^0_\mu\phi^0(W^+_\mu\phi^- + W^-_\mu\phi^+) - \tfrac{1}{2}ig^2\tfrac{s_w^2}{c_w}Z^0_\mu H(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + \tfrac{1}{2}g^2 s_w A_\mu\phi^0(W^+_\mu\phi^- + W^-_\mu\phi^+) + \tfrac{1}{2}ig^2 s_w A_\mu H(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) - g^2\tfrac{s_w}{c_w}(2c_w^2 - 1)Z^0_\mu A_\mu\phi^+\phi^- - g^1 s_w^2 A_\mu A_\mu\phi^+\phi^-$$

Bozony W i Z

3

$$- \bar{e}^\lambda(\gamma\partial + m_e^\lambda)e^\lambda - \bar{\nu}^\lambda\gamma\partial\nu^\lambda - \bar{u}^\lambda_j(\gamma\partial + m_u^\lambda)u^\lambda_j - \bar{d}^\lambda_j(\gamma\partial + m_d^\lambda)d^\lambda_j + igs_w A_\mu[-(\bar{e}^\lambda\gamma^\mu e^\lambda) + \tfrac{2}{3}(\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu u^\lambda_j) - \tfrac{1}{3}(\bar{d}^\lambda_j\gamma^\mu d^\lambda_j)] + \tfrac{ig}{4c_w}Z^0_\mu[(\bar{\nu}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar{e}^\lambda\gamma^\mu(4s_w^2 - 1 - \gamma^5)e^\lambda) + (\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu(\tfrac{4}{3}s_w^2 - 1 - \gamma^5)u^\lambda_j) + (\bar{d}^\lambda_j\gamma^\mu(1 - \tfrac{8}{3}s_w^2 - \gamma^5)d^\lambda_j)] + \tfrac{ig}{2\sqrt{2}}W^+_\mu[(\bar{\nu}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)e^\lambda) + (\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu(1+\gamma^5)C_{\lambda\kappa}d^\kappa_j)] + \tfrac{ig}{2\sqrt{2}}W^-_\mu[(\bar{e}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar{d}^\kappa_j C^\dagger_{\lambda\kappa}\gamma^\mu(1+\gamma^5)u^\lambda_j)]$$

słabe oddziaływanie

cząstek

4

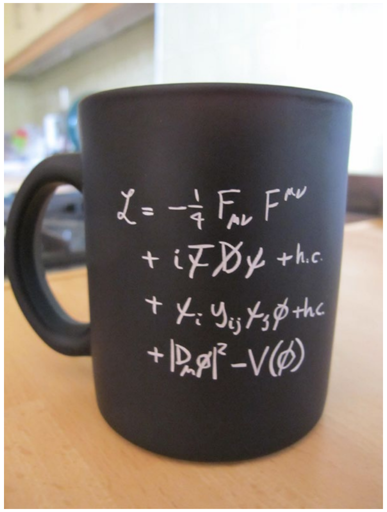
$$+ \tfrac{ig}{2\sqrt{2}}\tfrac{m_e^\lambda}{M}[-\phi^+(\bar{\nu}^\lambda(1-\gamma^5)e^\lambda) + \phi^-(\bar{e}^\lambda(1+\gamma^5)\nu^\lambda)] - \tfrac{g}{2}\tfrac{m_e^\lambda}{M}[H(\bar{e}^\lambda e^\lambda) + i\phi^0(\bar{e}^\lambda\gamma^5 e^\lambda)] + \tfrac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^+[-m_d^\kappa(\bar{u}^\lambda_j C_{\lambda\kappa}(1-\gamma^5)d^\kappa_j) + m_u^\lambda(\bar{u}^\lambda_j C_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)d^\kappa_j] + \tfrac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^-[m_d^\lambda(\bar{d}^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)u^\kappa_j) - m_u^\kappa(\bar{d}^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa}(1-\gamma^5)u^\kappa_j] - \tfrac{g}{2}\tfrac{m_u^\lambda}{M}H(\bar{u}^\lambda_j u^\lambda_j) - \tfrac{g}{2}\tfrac{m_d^\lambda}{M}H(\bar{d}^\lambda_j d^\lambda_j) + \tfrac{ig}{2}\tfrac{m_u^\lambda}{M}\phi^0(\bar{u}^\lambda_j\gamma^5 u^\lambda_j) - \tfrac{ig}{2}\tfrac{m_d^\lambda}{M}\phi^0(\bar{d}^\lambda_j\gamma^5 d^\lambda_j)$$

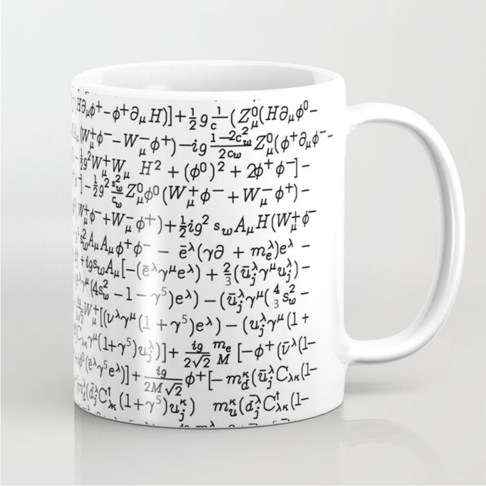
wirtualne duchy

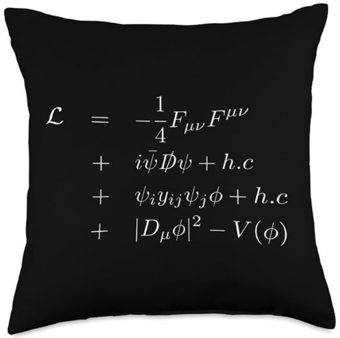
5

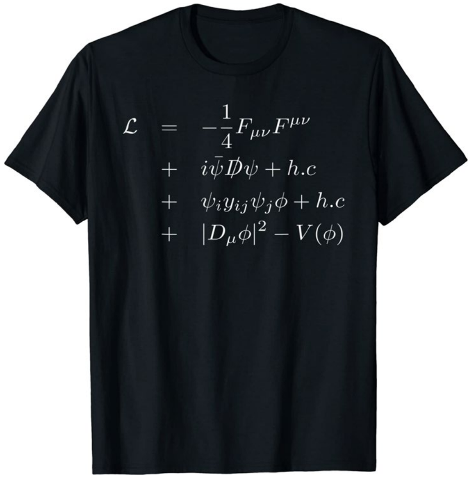
$$+ \bar{X}^+(\partial^2 - M^2)X^+ + \bar{X}^-(\partial^2 - M^2)X^- + \bar{X}^0(\partial^2 - \tfrac{M^2}{c_w^2})X^0 + \bar{Y}\partial^2 Y + igc_w W^+_\mu(\partial_\mu\bar{X}^0 X^- - \partial_\mu\bar{X}^+ X^0) + igs_w W^+_\mu(\partial_\mu\bar{Y}X^- - \partial_\mu\bar{X}^+ Y) + igc_w W^-_\mu(\partial_\mu\bar{X}^- X^0 - \partial_\mu\bar{X}^0 X^+) + igs_w W^-_\mu(\partial_\mu\bar{X}^- Y - \partial_\mu\bar{Y}X^+) + igc_w Z^0_\mu(\partial_\mu\bar{X}^+ X^+ - \partial_\mu\bar{X}^- X^-) + igs_w A_\mu(\partial_\mu\bar{X}^+ X^+ - \partial_\mu\bar{X}^- X^-) - \tfrac{1}{2}gM[\bar{X}^+ X^+ H + \bar{X}^- X^- H + \tfrac{1}{c_w^2}\bar{X}^0 X^0 H] + \tfrac{1-2c_w^2}{2c_w}igM[\bar{X}^+ X^0\phi^+ - \bar{X}^- X^0\phi^-] + \tfrac{1}{2c_w}igM[\bar{X}^0 X^-\phi^+ - \bar{X}^0 X^+\phi^-] + igMs_w[\bar{X}^0 X^-\phi^+ - \bar{X}^0 X^+\phi^-] + \tfrac{1}{2}igM[\bar{X}^+ X^+\phi^0 - \bar{X}^- X^-\phi^0]$$

MS przy porannej kawie









Struktura Modelu Standardowego

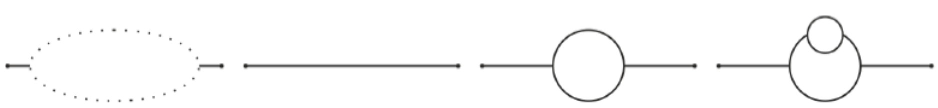
- MS jest to MODEL, a nie TEORIA.
- MS jest to efektywna teoria, w której istotną rolę odgrywają wyniki doświadczalne (np. masa elektronu, stałe sprzężenia, etc.).

  Teoria strun (dla odmiany) nie potrzebuje wyników – jest wyprowadzana z czysto matematycznych przesłanek.

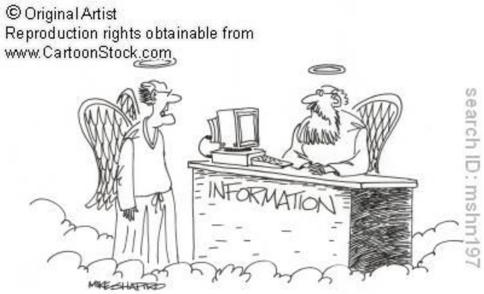
- MS oparty jest na teorii, w której liczba cząstek nie jest stała, ale są one nieustannie tworzone i ciągle anihilują.

  tą teorią nie jest Mechanika Kwantowa, ani Relatywistyczna MK

- MS oparty jest na Kwantowej Teorii Pola (QFT).



$$MS(QFT) = QM + RM$$

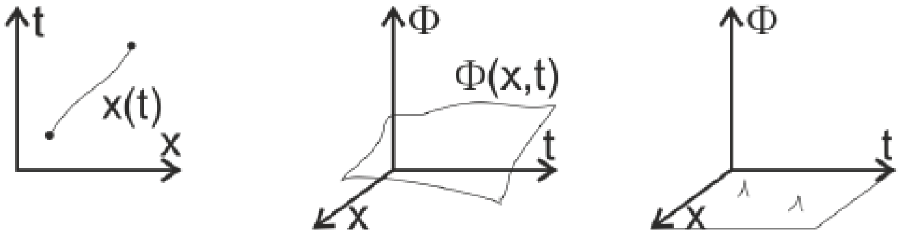


"I still don't understand quantum theory."

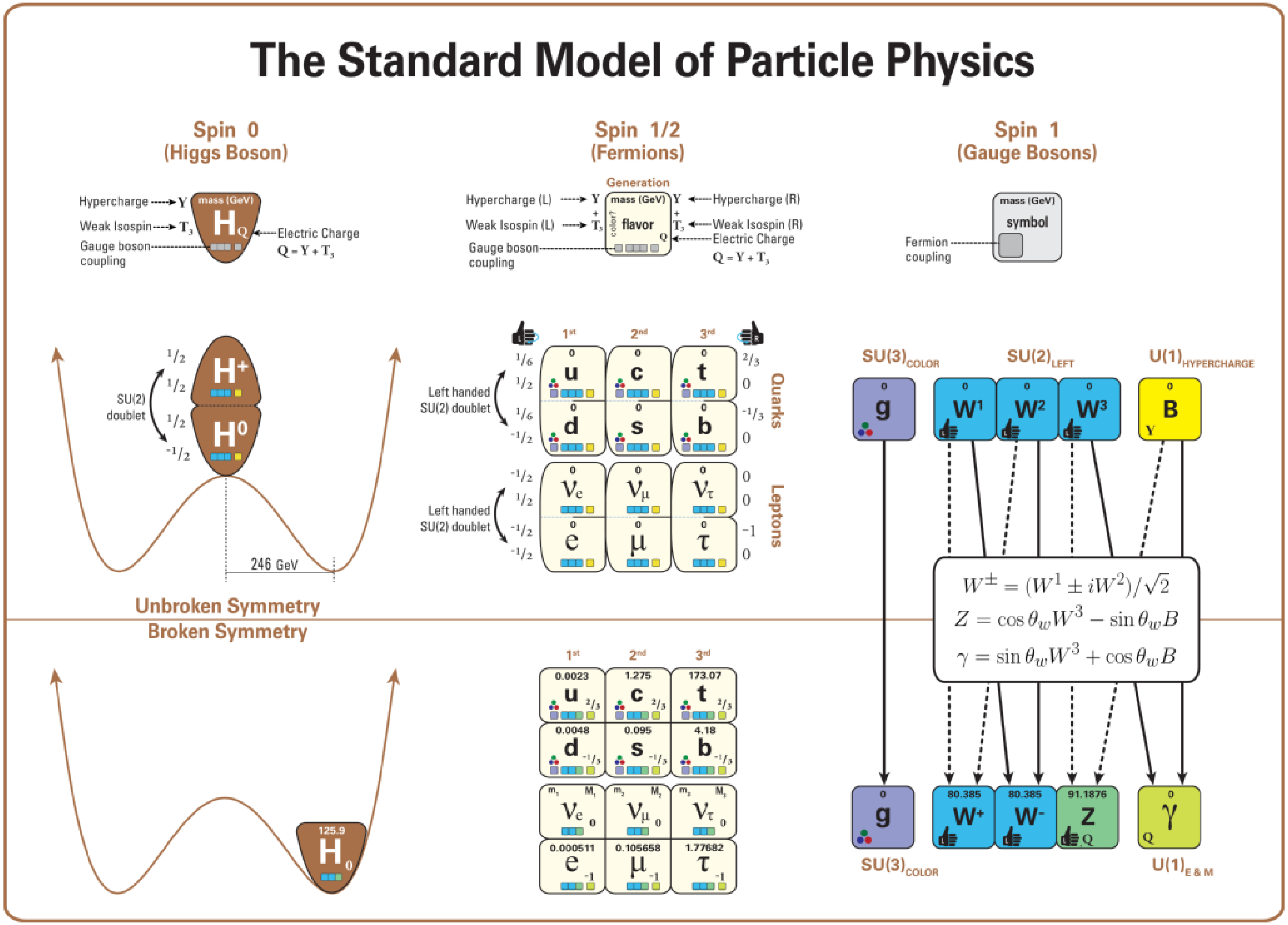
QFT – pierwsze spojrzenie

QFT czerpie z mechaniki klasycznej, mechaniki kwantowej i mechaniki relatywistycznej

1. Cząstka porusza się po czasoprzestrzennej trajektorii opisanej funkcją $x(t)$, czas jest tu parametrem.
2. Pole to obiekt opisany funkcją $\Phi(x, t)$. Zupełnie różny od cząstek.
3. Ale czasem występują małe fluktuacje tego pola, i je przypiszemy powstaniu cząstek.



4. QFT to teoria uwzględniająca spin, identyczność cząstek, zjawiska perturbacyjne i nieperturbacyjne


The Standard Model of Particle Physics
Spin 0
(Higgs Boson)
Spin 1/2
(Fermions)
Spin 1
(Gauge Bosons)
Unbroken Symmetry
Broken Symmetry
Quarks
Leptons
Left handed SU(2) doublet
SU(2) doublet
246 GeV
SU(3)COLOR
SU(2)LEFT
U(1)HYPERCHARGE
U(1)E & M
$W^{\pm} = (W^1 \pm iW^2)/\sqrt{2}$
$Z = \cos\theta_w W^3 - \sin\theta_w B$
$\gamma = \sin\theta_w W^3 + \cos\theta_w B$

Składzik z narzędziami QFT

Relatywistyka

Równanie Schrödingera

Równanie Kleina-Gordona

Równanie Eulera-Lagrange'a

Pole elektromagnetyczne

Czterowektory
Interwał czasoprzestrzenny
Tensor metryczny
Operatory różniczkowania

Równanie ciągłości.
Gęstość prawdopodobieństwa

Opis układu w mechanice kwantowej

- Stan cząstki – funkcja falowa: $\Psi(\vec{x},t) = Ne^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)}$.
- Kinematyka:

  Równanie Schrödingera: $i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{x},t)}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2\Psi(\vec{x},t)}{\partial x^2} + \hat{V}(\vec{x},t)$

  opisuje cząstki nierelatywistyczne

H określa dynamikę układu, $\Psi(\vec{x},t)$ zawiera informację o pozycji cząstek

- Równanie ruchu: $i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{x},t)}{\partial t} = H(x)\,\Psi$
- Transformacje do innego układu $x \to x'$ i funkcja falowa $\Psi'(x')$ powinna opisywać to samo zdarzenie co $\Psi(\mathrm{x})$, a związek jest, np poprzez pewien operator U:

$$\Psi'(x') = \mathrm{U}\,\Psi(\mathrm{x})$$

- Dwa rodzaje transformacji:

  zmiana układu (opisu współrzędnych) $x \to x' \equiv f(x)$

  transformacji funkcji falowej (stanu układu): $\Psi \to \Psi' \equiv U\,\Psi$

Transformacje funkcji falowych i operatorów

- Zapis bra-ketowy: $\Psi_a \equiv |a\rangle$, wtedy: $\Psi_a' \equiv U\,\Psi_\mathrm{a}$, co zapisujemy jako $|a'\rangle = U|a\rangle$

  a jak zapiszemy $\Psi_a'^{\dagger} \equiv \Psi_a^{\dagger} U^{\dagger}$ to $\langle a'| = \langle a'|U^{\dagger}$

- Iloczyn $\langle b'|a'\rangle = \langle b|U^{\dagger}U|a\rangle$ i jest równy $\langle b|a\rangle$ dla dowolnych Ψ_a, Ψ_b gdy $U^{\dagger}U = I$. Transformacja funkcji falowych jest unitarna.

- Rozważmy obserwablę A i element macierzowy $\langle b|A|a\rangle \equiv \int \Psi_b^{\dagger}\, A\, \Psi_a\, d^3x$

Chcemy, aby $\langle b'|A|a'\rangle = \langle b|A|a\rangle$ dla każdego Ψ_a i Ψ_b.
Mamy:

$$\langle b|U^{\dagger}A'U|a\rangle = \langle b|A|a\rangle$$

$$\Rightarrow U^{\dagger}A'U = A$$

$$\Rightarrow A' = U^{\dagger}A'U$$

Gdy A ma być niezmienione, to $\mathrm{A} = A = A'$

$$\Rightarrow U^{\dagger}A'U = A$$

$$\Rightarrow UA = AU$$

$$[A, U] = 0$$

Jaką postać mógłby mieć operator U, taki że $\Psi \to \Psi' = U\,\Psi$?

np. $U = \exp(iaX)$, a funkcję X nazywamy generatorem transformacji

Symetrie w mechanice kwantowej

- Transformacja (przekształcenie)

  $H \rightarrow H' = U\,H\,U^{\dagger}$, $U\,U^{\dagger} = I$, stąd U jest unitarne

  $\Psi \rightarrow \Psi' = U\,\Psi$

  dają: $i\hbar \frac{\partial \Psi'(\vec{x},t)}{\partial t} = H'(x)\,\Psi'$

- Układ ma pewną symetrię (to jest symetria operatora), gdy $H = H'$

$$U\,H\,U^{\dagger} = H$$

$$U\,H = H\,U$$

$$[H, U] = 0$$

np: $[H, \exp(iaX)] = 0$ => $[H, \exp(iaX)] = 0$ oraz $\left[H, \sum \frac{1}{p!}(iaX)^p)\right] = 0$

no dla każdego „a” mam $[H, X] = 0$

Jeśli Hamiltonian układu jest niezmienniczy względem transformacji unitarnej generowanej przez operator (hermitowski) X, to oznacza istnienie zasady zachowania związanej z tym operatorem X.

Symetrie	Zachowane
Translacje w czasie i przestrzeni (t,x)	Energia i pęd (E,p)
Obroty w przestrzeni	Moment Pędu
Odbicie lustrzane	Parzystość przestrzenna
Transformacja cechowania	Ładunek

Uwaga:
Odbicie w czasie i obroty w czasoprzestrzenie nie są opisane transformacją unitarną i nie prowadzą do zachowanych parametrów

Funkcja Lagrange'a

Model Standardowy, który opisuje wszystkie oddziaływania (poza grawitacyjnym) pomiędzy cząstkami elementarnymi, opiera się na kwantowej teorii pola. Podstawowym elementem tej teorii, który w istocie decyduje o dynamice cząstek jest funkcja Lagrange'a (*lagranżjan*).

Przypomnienie z mechaniki klasycznej

Równanie ruchu cząstki w mechanice Newtona $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

Jeśli siły są zachowawcze, to można wprowadzić energię potencjalną $\vec{F} = -\nabla U$

Lagranżjan to funkcja uogólnionych współrzędnych q_i i ich pochodnych czasowych $\dot{q}_i$, wyrażająca różnicę energii kinetycznej i potencjalnej:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T - U$$

→ Znając lagranżjan możemy wyprowadzić równania ruchu układu stosując równanie Eulera–Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Funkcja Lagrange'a

Przykład : ruch jednej cząstki w polu energii potencjalnej $U(\vec{r})$

$$L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(\vec{r}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - U(x,y,z)$$

np. dla składowej x mamy:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = m v_x \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial x} = -\dfrac{\partial U}{\partial x} = F_x \end{array}\right\} \quad m\frac{dv_x}{dt} = F_x$$

Relatywistyczna teoria pola

W QFT podstawowymi obiektami są pola, których wzbudzenia interpretujemy jako cząstki. Pola te są ciągłymi funkcjami współrzędnych czasoprzestrzennych x^μ

→ Przez analogię do mechaniki klasycznej wprowadza się gęstość lagranżjanu, której niezależnymi współrzędnymi są pola i ich pochodne:

$$L(q_i,\dot{q}_i) \rightarrow \mathcal{L}\left(\phi_i(x^\mu), \partial_\mu \phi_i\right) \qquad L = \int \mathcal{L}\, d^3x$$

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (ct, x, y, z) \qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

$$x_\mu = (x^0, -\vec{x}) = (ct, -x, -y, -z) \qquad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$$

Funkcja Lagrange'a

- Podanie gęstości lagranżjanu praktycznie określa teorię dla zadanych pól. Wynikają z niego wszystkie reguły rachunkowe, np. reguły obliczania diagramów Feynmana. Podobnie jak w mechanice klasycznej, rachunek minimalnego (stacjonarnego) działania prowadzi do równań typu Eulera–Lagrange'a:

$$\boxed{\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0}$$ równania pola

<u>Przykład 1</u> : **swobodna** (nie oddziałująca) cząstka skalarna (spin 0) o masie m opisana jest przez pole skalarne ϕ i gęstość lagranżjanu:

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2}\underbrace{(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)}_{(\partial_0\phi\partial_0\phi - \partial_1\phi\partial_1\phi - \partial_2\phi\partial_2\phi - \partial_3\phi\partial_3\phi)} - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi \,, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi = \partial^0 \phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_1 \phi)} = -\partial_1 \phi = \partial^1 \phi \,, \ldots$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi = 0 \Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi}$$ **równanie Kleina Gordona**

Funkcja Lagrange'a

Przykład 2 : swobodna cząstka wektorowa o spinie 1 (np. foton)

Jej pole jest opisane przez czterowektor A^μ i lagranżjan:

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4}\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right)\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu$$

Wprowadzając oznaczenie $F^{\mu\nu} \equiv \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right)$

możemy napisać zgrabniej:

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu$$

Wynikają z tego równania pola: $\partial_\mu F^{\mu\nu} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0$

→ W przypadku pola e-m (fotony, $m = 0$ tradycyjnie zapisujemy $A^\mu = \left(\phi, \vec{A}\right)$

mamy do tego: $\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\Rightarrow \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right) \Rightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0}$$

równania Maxwella w próżni

Symetria cechowania

Jedną z głównych idei Modelu Standardowego jest tzw. lokalna symetria cechowania (*local gauge invariance*). Idea ta pozwala w bardzo elegancki sposób wprowadzić do teorii oddziaływania między cząstkami. Zobaczmy najpierw jak to funkcjonuje w najprostszym przypadku elektrodynamiki.

Przypomnijmy lagrażjan Diraca (cząstka swobodna):

$$\mathcal{L}_D = i(\hbar c)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (mc^2)\bar{\psi}\psi$$

Łatwo zobaczyć, że jest on niezmienniczy względem transformacji:

$\psi \to e^{i\theta}\psi$ – globalna zmiana fazy

Mamy bowiem $\bar{\psi} \to e^{-i\theta}\bar{\psi}$, więc w wyrażeniach $\bar{\psi}\psi$ czynniki fazowe się kasują.

- Żądamy teraz (postulat teorii) czegoś znacznie mocniejszego – aby lagranżjan był niezmienniczy względem transformacji, w której zmiana fazy może być inna w każdym punkcie czasoprzestrzeni!

  $\psi \to e^{i\theta(x)}\psi$ – lokalna zmiana fazy

Niezmienniczość względem tej transformacji jest właśnie lokalną symetrią cechowania

Napotykamy jednak na trudność, bo operacja różniczkowania tworzy dodatkową funkcję x, która łamie symetrię.

Najpierw zmieniamy nieco zapis, chcemy aby: $\psi \to e^{iq\lambda(x)/\hbar c}\psi = \psi'$ (◆)

$$\Rightarrow \quad \partial_\mu \psi' = e^{iq\lambda(x)/\hbar c}\partial_\mu \psi + \frac{iq}{\hbar c}\partial_\mu \lambda(x)\, e^{iq\lambda(x)/\hbar c}\psi$$

q – ładunek cząstki Diraca

a zatem $\mathcal{L}' = i(\hbar c)\overline{\psi}'\gamma^\mu \partial_\mu \psi' - (mc^2)\overline{\psi}'\psi' = \mathcal{L} - q\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \lambda(x)\psi$

Aby odzyskać niezmienniczość musimy coś dodać: pole wektorowe, które przy transformacji cechowania będzie się tak zmieniać, żeby ten dodatkowy wyraz znikał

Zmianę tę wyrażamy przez podstawienie: $\partial_\mu \to \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = i(\hbar c)\overline{\psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - (mc^2)\overline{\psi}\psi = i(\hbar c)\overline{\psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu\right)\psi - (mc^2)\overline{\psi}\psi$$

$$= i(\hbar c)\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2)\overline{\psi}\psi - q\overline{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu$$

Wyrażenie to będzie niezmiennicze względem (◆), jeśli jednocześnie nowe pole zmieni się zgodnie z:

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda(x)$$

a to przecież wygląda jak znana transformacja cechowania pól elektromagnetycznych!

To jeszcze nie koniec. Dodaliśmy do teorii nowe pole wektorowe, musimy więc jeszcze dodać wyraz „swobodny" tego pola. Odpowiedni jest tu lagranżjan Proca, ale musimy położyć w nim $m = 0$ aby zachować niezmienniczość względem (◆). To nowe pole A to potencjały elektrodynamiczne reprezentujące foton!

→ Ostatecznie dostajemy pełny lagranżjan elektrodynamiki kwantowej:

$$\boxed{\mathcal{L}_{QED} = \underbrace{i(\hbar c)\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - (mc^2)\bar{\psi}\psi}_{\text{swobodny elektron}} \underbrace{- \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}_{\text{swobodny foton}} \underbrace{- q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}}_{\text{oddziaływanie foton - elektron}}} \qquad \textbf{QED}$$

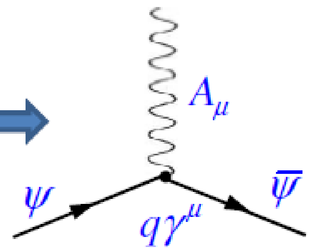
→ Równania Eulera – Lagrange'a dla pól A (dwa ostatnie wyrazy) dadzą nam:

$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = j^{\nu}$ gdzie $j^{\mu} = q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ est czterowektorem prądu

Sa to **równania Maxwella** w obecności źródeł !

→ Człon oddziaływania determinuje elementarny diagram Feynmana dla oddziaływania fermion-foton

$q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}$ ⇒



Podsumujmy

- Wyszliśmy od lagranżjanu cząstki swobodnej (elektronu) i zażądaliśmy lokalnej symetrii cechowania, w tym przypadku niezmienniczości względem lokalnej zmiany fazy:

$$\psi \rightarrow S\psi = e^{iq\lambda(x)/\hbar c}\psi$$ – unitarna operacja, która tworzy grupę **U(1)**

- Wymusiło to dodanie nowego pola – *pola cechowania* A_μ – które reprezentuje cząstkę – *bozon cechowania* – oddziałujący z elektronem. Cząstka ta (foton) musiała być bezmasowa!

- Pole cechowania musiało być przy tym niezmiennicze względem transformacji:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda(x)$$

- Pole cechowania wprowadziliśmy stosując podstawienie:

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu$$

- a postać transformacji dla pól cechowania wynikała z żądania, aby:

$$\mathcal{D}_\mu \psi \rightarrow \mathcal{D}_\mu S\psi = S\,\mathcal{D}_\mu \psi$$

→ W wyniku dostaliśmy pełny opis oddziaływania między elektronami i fotonami!