Wstęp do Modelu Standardowego

Przekroje czynne i rozpady,

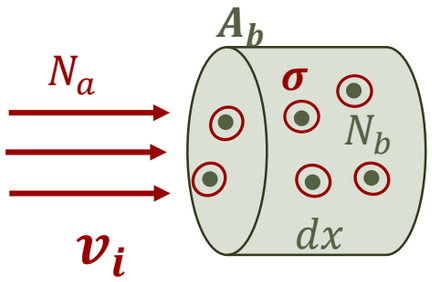
czyli, gdzie teoria spotyka eksperyment

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

agh.edu.pl

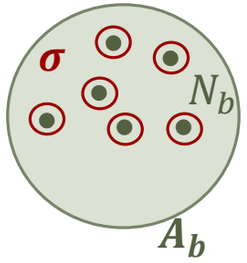
Przekrój czynny



- Przekrój czynny jest miarą prawdopodobieństwa oddziałania.
- Geometrycznie jest to powierzchnia centrów rozpraszania, takich, że jak cząstka w nie trafi, to zajdzie oddziaływanie

$$P = \frac{\sigma}{A_b} = n_b v_a A_b \, dt \frac{\sigma}{A_b} = n_b v_a \, \sigma \, dt$$

$$\boxed{R_a = \underbrace{\frac{N_a}{A\,t}} \; N_b \, \sigma}$$



$\boldsymbol{\Phi_a = n_a v_i}$ strumień cząstek $\boldsymbol{a}$

Problem: strumień cząstek (flux) nie jest niezmienniczy lorenzowsko, dla każdego procesu należy go wyznaczać oddzielnie.
Można pokazać (M.Thomson), że strumień w niezmienniczej postaci wyrażony jest poprzez:

$$F = 4\left[(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 \, m_b^2\right]^{1/2}$$

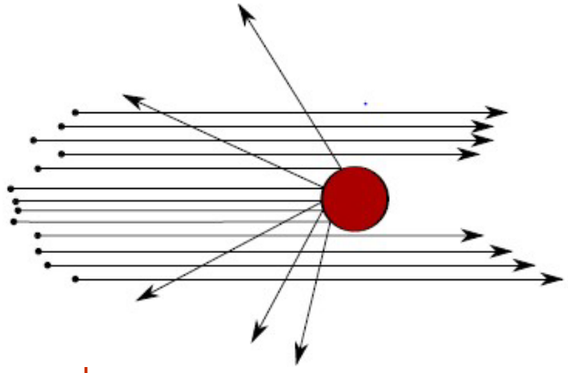
Przekrój czynny

- Rozważmy proces: $a + b \rightarrow c + d$
- Przekrój czynny:

$$\sigma = \frac{Liczba\ zdarzeń\ na\ liczbę\ cząstek\ tarczy/czas}{strumień\ cząstek\ "a"}$$

$$= \frac{W}{strumień\ wejściowy}$$

$$W = \sigma\ \Phi$$



W – prawdopodobieństwo zajścia procesu na jednostkę czasu (*transition probability*) [W]=1/s , wyznaczane na podstawie Złotej Reguły Fermiego lub wyznaczane doświadczalnie
Strumień Φ – obliczany

Częstość (rate):
$R = \frac{dN}{dt}$ = strumień × liczba cząstek tarczy × przekrój czynny
strumień = liczba cząstek padających / jednostkę czasu i powierzchni

Przekrój czynny

Przekrój czynny:

- inkluzywny - gdy interesuje nas jedynie jedna obserwabla, nie znamy energii i pędów wszystkich cząstek, całkujemy po pozostałych, np. przekrój czynny na produkcję cząstek „do przodu”
- ekskluzywny – wszystkie parametry są zmierzone.

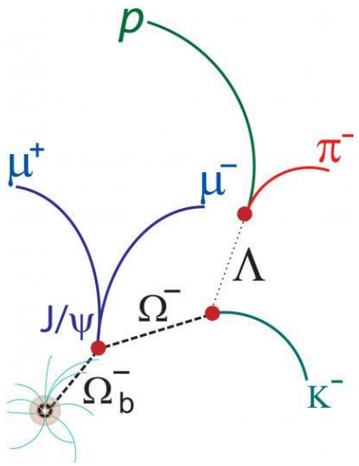
W wyniku zderzenia mogą powstać różne stany końcowe:

$$a + b \rightarrow \begin{cases} a + b & \text{elastyczne} \\ c_1 + d_1 & \\ c_i + d_i + e_i & \text{nieelastyczne} \end{cases}$$

są to różne kanały reakcji,
na każdy kanał jest określony parcjalny przekrój czynny: σ_i

$$\sigma_{tot} = \sum \sigma_i$$

Rozpady



Rozpady są to procesy, w których jedna cząstka spontanicznie zmienia się w inne, typu $\boldsymbol{a \rightarrow b + c + d}$

W rozpadach interesuje nas:

- (średni) czas życia,
- sposób rozpadu,
- prawdopodobieństwo rozpadu

czas życia:

rozpad ma charakter stochastyczny – każdy mion (np.) ma inną długość życia (nawet mion w spoczynku) i p-two rozpadu nie zależy od długości życia (rozpady eksponecjalne nie mają „pamięci”),

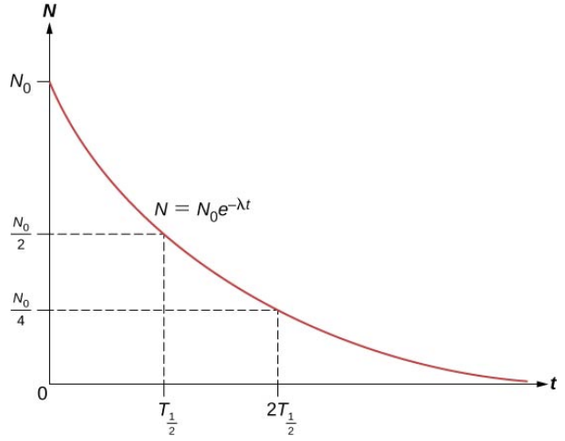
- można mówić p-twie na jedn.czasu, że mion się rozpadnie, czyli o *decay rate* Γ*,
- dla wielu obserwowanych rozpadów: $dN = -\Gamma\, N\, dt$

$$N(t) = N(0)\, e^{-\Gamma\, t} = N(0) e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$W = \frac{1}{\tau}$$

- mówimy o **średnim** czasie życia zgodnie z:

$$N(t) = N(0)\, e^{-\Gamma\, t} = N(0) e^{\frac{-t}{\tau}}$$



Γ jest to współcz. proporc. między aktualną liczbą cząstek (jąder, atomów) a szybkością, z którą ta liczba maleje i praktycznie oznacza prawdopodobieństwo procesu

Rozpady

Jeżeli cząstka rozpada się na i– sposobów, to:

$$dN = -N\,\Gamma_1\,dt - N\,\Gamma_2\,dt - \ \ldots = -N\sum_i \Gamma_i = N\,\Gamma\,dt$$

gdzie całkowita szybkość rozpadu jest sumą wszystkich *rozpadów parcjalnych*: $\Gamma = \sum_i \Gamma_i$

a względna częstość rozpadu (*Branching Ratio, Branching Fraction*): $BR(i) = \frac{\Gamma_i}{\Gamma}$

CHARMED MESONS

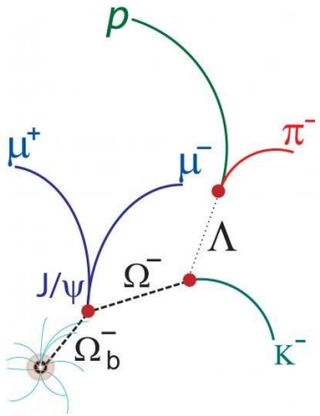
($C = \pm 1$)

$D^+ = c\,\bar{d}$, $D^0 = c\,\bar{u}$, $\bar{D}^0 = \bar{c}\,u$, $D^- = \bar{c}\,d$, similarly for D^*'s

D^0 $\quad I(J^P) = 1/2(0^-)$

Mode		*Fraction* (Γ_i/Γ)
▾ Hadronic modes with one $\bar{K}$		
Γ_{37}	$K^-\pi^+$	$(3.947 \pm 0.030)\%$
Γ_{38}	$K^0_S\,\pi^0$	$(1.240 \pm 0.022)\%$
Γ_{39}	$K^0_L\,\pi^0$	$(9.76 \pm 0.32) \times 10^{-3}$

Rozpady



- Rozważmy proces: $\boldsymbol{a \rightarrow 1 + 2}$
- Co trzeba wiedzieć, aby obliczyć przekrój czynny:
  - ✓ Stan (funkcję falową Ψ, znormalizowaną, np., do elementu objętości $\int \Psi\, \Psi^* dV = N^2 = 1/a^3$, problem?) cząstki a,
  - ✓ prawdopodobieństwo rozpadu (element macierzowy, pierwszy rząd rachunku zaburzeń)
  - ✓ czynnik określający, czy w ogóle rozpad może zajść (gęstość stanów)

Dla rozpadów można napisać:

Rozproszenia

Zderzenia cząstek i zderzenia z tarczą prowadzą do rozproszeń:

- elastycznych – ten sam stan końcowy, co początkowy, zachowana energia (kinetyczna) i pęd;
- nieelastycznych – stan końcowy i początkowe różnią się, pęd nie jest zachowany.

Strumień początkowy – liczba cząstek początkowych na jednostkę czasu i powierzchni.

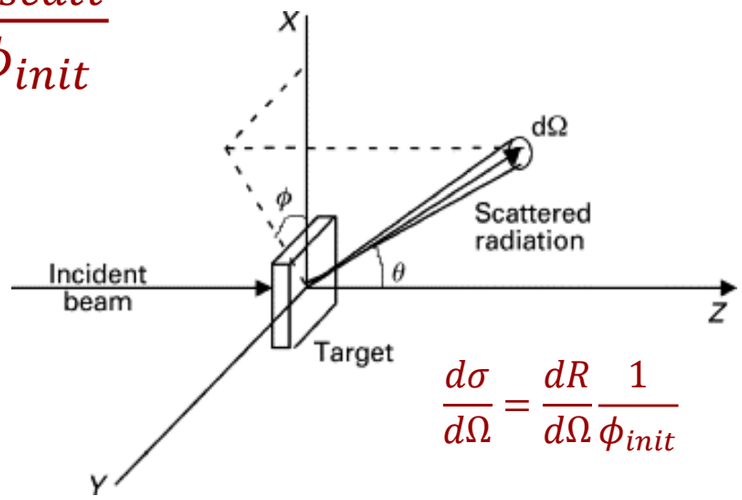
Strumień rozproszony – liczba cząstek rozproszonych w kącie bryłowym $d\Omega$ w jednostce czasu.

A jeśli interesuje nas tylko wycinek kąta bryłowego: różniczkowy przekrój czynny.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{\phi_{scatt}}{\phi_{init}}$$

A całkowity przekrój czynny:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega$$



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dR}{d\Omega}\frac{1}{\phi_{init}}$$

from M.Kotlarchyk

Złota Reguła Fermiego

Złota reguła Fermiego podaje przepis na prawd-two przejścia dla reakcji na jednostkę czasu (w odniesieniu do 1. cząstki tarczy), czyli na W:

$$\boxed{W = \Gamma_{fi} = 2\pi \left|T_{fi}\right|^2 \varrho(E_i)}$$

$$\boxed{T_{fi} = \langle f|\hat{H}'|i\rangle}$$

T_{fi} - element macierzowy amplitudy przejścia $i \to f$,

$\hat{H}'$- hamiltonian oddziaływania (fizyka!)

przewidywania, teoria!

Szybkość przejścia zależy zatem od:

- macierzy przejścia (teoria oddziaływań, dynamika procesu) T_{fi},
- liczby dostępnych stanów (zasady zachowania), która zależy od kinematyki $\varrho(E_i)$
- postaci stanów $|i\rangle$ i $|f\rangle$

Złota Reguła Fermiego

Alternatywna postać reguły:

$$\boxed{\Gamma_{fi} = 2\pi \int |T_{fi}|^2 \, \delta\left(E_i - E\right) \, dn}$$

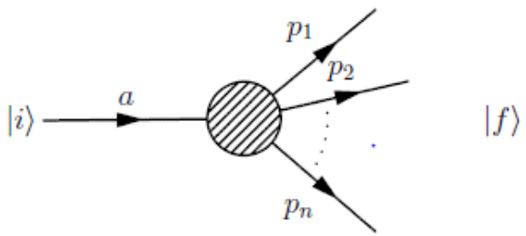
$$\Gamma_{fi} = 2\pi \, |T_{fi}|^2 \times (phase\ space)$$

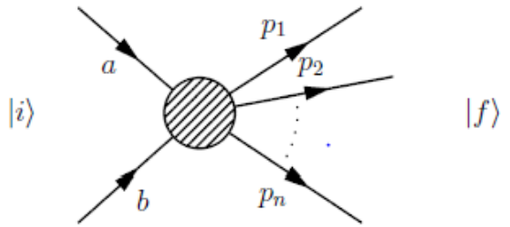
FGR można wyprowadzić z równań relatywistycznych i nierelatywistycznych, dla zainteresowanych [1]:

ale lepiej rozważyć „nasze” problemy:

- rozpady
- rozproszenia

od strony doświadczalnej i teoretycznej





[1] https://web2.ph.utexas.edu/~schwitte/PHY362L/QMnote.pdf
M. Thomson, *Modern Particle Physics*
D.J.Griffiths, *Introduction to Elementary Particles,* John Wiley @ Sons 1987, p. 198

Amplituda prawdopodobieństwa

$$T_{fi} = \langle f | \hat{H}' | i \rangle$$

- Amplituda prawdopodobieństwa przejścia ze stanu początkowego stanów $|i\rangle$ do $|f\rangle$

$$T_{fi} = \langle f | \widehat{H'} | i \rangle = \int \Psi^*(f) \hat{H}' \Psi(i) d^3\vec{r}$$

$$i \frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(\vec{r},t)$$

$$i \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} = E_i \Psi$$

$$\Psi_i(\vec{r},t) = N\phi(\vec{r})e^{iE_i t}$$

- W rozproszeniach elastycznych $E_i = E_f$ - „Born aproximation”: $\Psi_{i,f}(\vec{r}) = Ne^{i(\vec{p}_{i,f}\cdot\vec{r})}$

$\vec{p}_i, \vec{p}_f$ różne pędy stanów końcowego i początkowego $\vec{p}_i - \vec{p}_f = \Delta\vec{p} \equiv q$

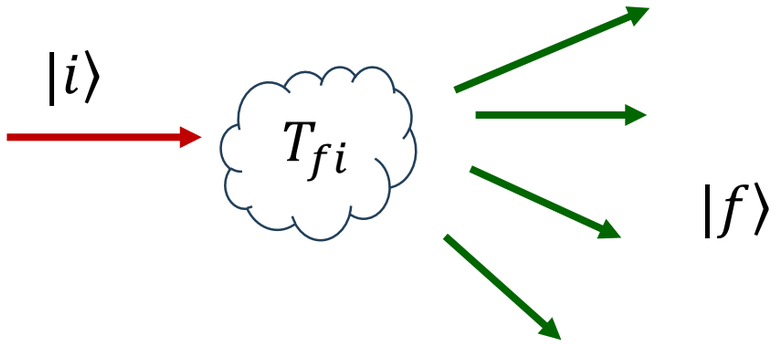
$$T_{fi} = \int \Psi^*(f)\, \mathrm{V(r)}\, \Psi(i) d^3\vec{r} = \int \Psi_{i,f}(\vec{r}) = Ne^{i(\Delta\vec{p}\cdot\vec{r})} \mathrm{V(r)}\, d^3\vec{r}$$

- Jaka może być postać potencjału $\mathrm{V(r)}$?

np. potencjał Yukawy: $V(r) = -\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{r}\, e^{-mr}$

Prawdopodobieństwa procesów

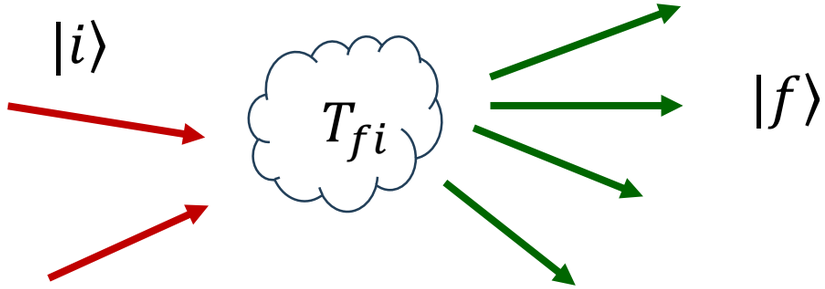
Rozpady



$$\Gamma_{fi} \sim |M_{fi}|^2 \times kinematyka$$

fizyka

Rozproszenia



$$\sigma_{fi} \sim |M_{fi}|^2 \times kinematyka$$

Uwaga:

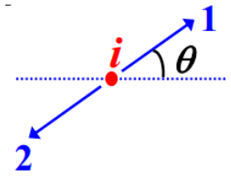
- T_{fi} powinno być lorenzowsko niezmiennicze, wtedy mamy M_{fi}
- kinematyka – wszystkie stany dozwolone z zasad zachowania

Prawdopodobieństwa procesów

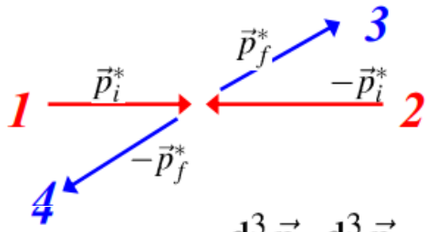
Rozpady

$$\boxed{\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{2E_i}\int |M_{fi}|^2 \delta(E_i - E_1 - E_2)\delta^3(\vec{p}_a - \vec{p}_1 - \vec{p}_2)\frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1}\frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}}$$

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{32\pi^2 E_i}\int |M_{fi}|^2 \delta\left(m_i - \sqrt{m_1^2 + p_1^2} - \sqrt{m_2^2 + p_1^2}\right)\frac{p_1^2 dp_1 d\Omega}{E_1 E_2}$$



Rozproszenia



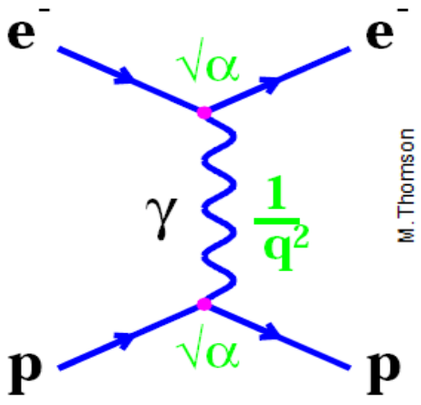
$$\sigma = \frac{(2\pi)^{-2}}{2E_1 2E_2(v_1 + v_2)}\int |M_{fi}|^2 \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4)\delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4)\frac{d^3\vec{p}_3}{2E_3}\frac{d^3\vec{p}_4}{2E_4}$$

- **Here** $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ and $E_1 + E_2 = \sqrt{s}$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \frac{(2\pi)^{-2}}{4|\vec{p}_i^*|\sqrt{s}}\int |M_{fi}|^2 \delta(\sqrt{s} - E_3 - E_4)\delta^3(\vec{p}_3 + \vec{p}_4)\frac{d^3\vec{p}_3}{2E_3}\frac{d^3\vec{p}_4}{2E_4}$$

M.Thomson

Diagramy Feynmana



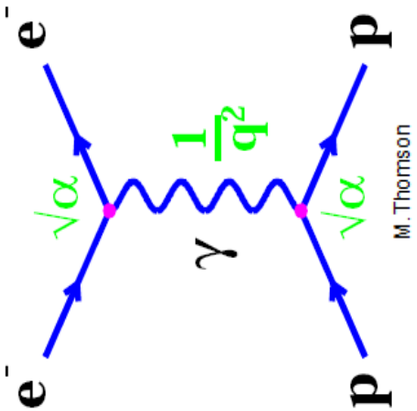
1. Oddziaływanie zachodzi, gdy następuje:
   - wymiana energii i pędu miedzy cząstkami,
   - kreacja lub anihilacja cząstek.
2. Oddziaływanie zachodzi poprzez wymianę wirtualnych cząstek
3. Każde rzeczywiste oddziaływanie (np. **rozpraszanie** elektron-proton) składa się z:
   - dwóch linii zewnętrznych reprezentujących funkcje falowe cząstek,
   - dwóch wierzchołków, każdy proporcjonalny do siły oddziaływania,
   - linii wewnętrznej opisującej wirtualną wymienianą cząstkę.
4. Werteksy i strzałki są tylko symbolami, nie reprezentują śladów cząstek w przestrzeni.
5. Diagramy czytamy od lewej do prawej strony (strzałka czasu) – z lewej strony mamy cząstki przed odziaływaniem, z prawej – po nim (czasem konwencja biegu czasu góra-dół).
6. Z lewej strony wierzchołka - strzałka skierowana do wierzchołka oznacza cząstkę wchodzącą do oddziaływania, strzałka od wierzchołka reprezentuje antycząstkę wchodzącą do oddziaływania.
7. Z prawej strony (czyli po oddziaływaniu) – odpowiednio odwrotnie.

A teraz popatrzmy na niezwykłe cechy diagramów Feynmana:

Diagramy Feynmana

1. Oddziaływanie zachodzi, gdy następuje:
   - wymiana energii i pędu miedzy cząstkami,
   - kreacja lub anihilacja cząstek.
2. Oddziaływanie zachodzi poprzez wymianę wirtualnych cząstek.
3. Każde rzeczywiste oddziaływanie składa się z:
   - dwóch wierzchołków,
   - dwóch [illegible] proporcjonalny do siły oddziaływania,
   - linii wewnętrznej opisującej wirtualną wymienianą cząstkę.
4. Werteksy i strzałki są tylko symbolami, nie reprezentują śladów cząstek w przestrzeni.
5. Diagramy czytamy od lewej do prawej strony (strzałka czasu) – z lewej strony mamy cząstki przed odziaływaniem, z prawej – po nim (czasem konwencja biegu czasu góra-dół).
6. Z lewej strony wierzchołka - strzałka skierowana do wierzchołka oznacza cząstkę wchodzącą do oddziaływania, strzałka od wierzchołka reprezentuje antycząstkę wchodzącą do oddziaływania.
7. Z prawej strony (czyli po oddziaływaniu) – odpowiednio odwrotnie.

Zamiast rozpraszania elektron – proton - proces opisujący anihilację protonów



A teraz popatrzmy na niezwykłe cechy diagramów Feynmana:

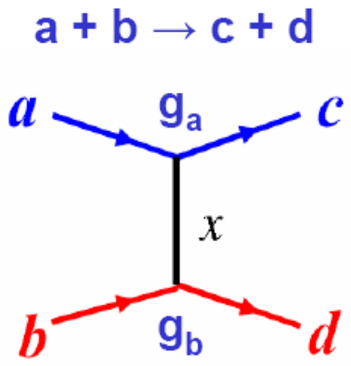
Rozpraszanie z wymianą cząstki

$$\boxed{\Gamma_{fi} = 2\pi \left|T_{fi}\right|^2 \varrho(E_f)}$$

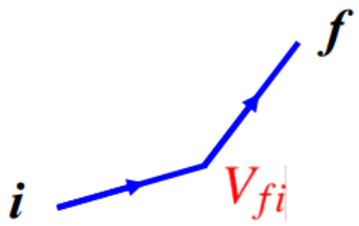
$$T_{fi} = \langle f|\widehat{H'}|i\rangle + \sum_{i\neq j} \frac{\langle f|\widehat{H'}|j\rangle\langle j|\widehat{H'}|i\rangle}{E_i - E_j} + \cdots$$

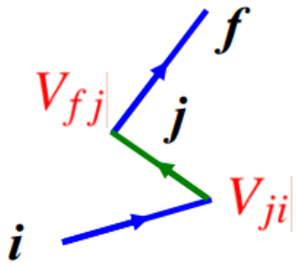
Rozpraszanie na potencjale

Rozpraszanie poprzez stan pośredni j



$$q^2 = (p_a - p_c)^2 = (E_a - E_c)^2 - (\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2 \equiv t \leq 0$$



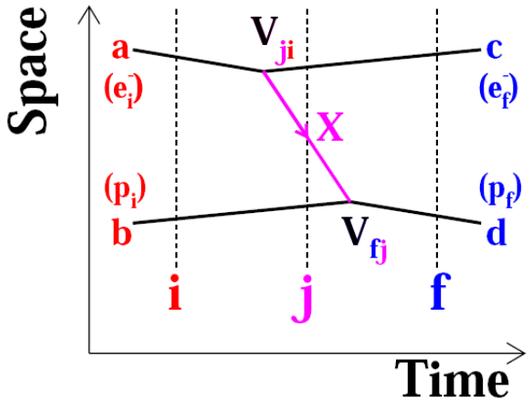


Rozpraszanie z wymianą cząstki

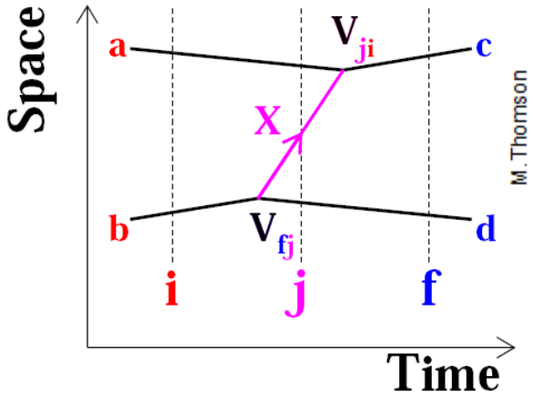
$$T_{fi} = \langle f|\widehat{H'}|i\rangle + \sum_{i\neq j} \frac{\langle f|\widehat{H'}|j\rangle\langle j|\widehat{H'}|i\rangle}{E_i - E_j} + \cdots$$

Rozpraszanie na potencjale

Rozpraszanie poprzez stan pośredni j



+



$$M_{fi} = \frac{g_a\, g_b}{(E_a - E_c)^2 - (\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2 - m_X^2}$$

+

$$M_{fi} = \frac{g_a\, g_b}{(E_b - E_d)^2 - (\vec{p}_b - \vec{p}_d)^2 - m_X^2}$$

Rozpraszanie z wymianą cząstki

Dla wszystkich diagramów, w różnej kolejności czasowej, element w postaci niezmienniczej:

$$M_{fi} = \frac{g_a\, g_b}{(E_a - E_c)^2 - (\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2 - m_X^2} = \frac{g_a\, g_b}{(P_a - P_c)^2 - m_X^2}$$

czteropędy cząstki początkowej i końcowej

gdy zapiszemy: $\boldsymbol{P_a - P_c = q}$

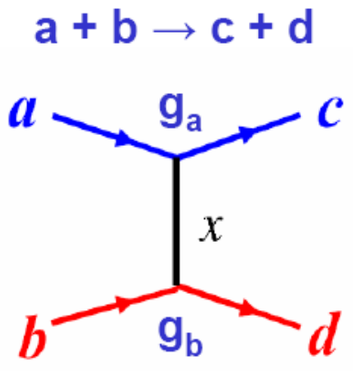
Masa wymienianej cząstki X zależy od energii i pędu rozpraszanych cząstek.

Co to oznacza?

to $\boldsymbol{q}$ rozumiane jest jako czteropęd wymienianej cząstki, co daje:

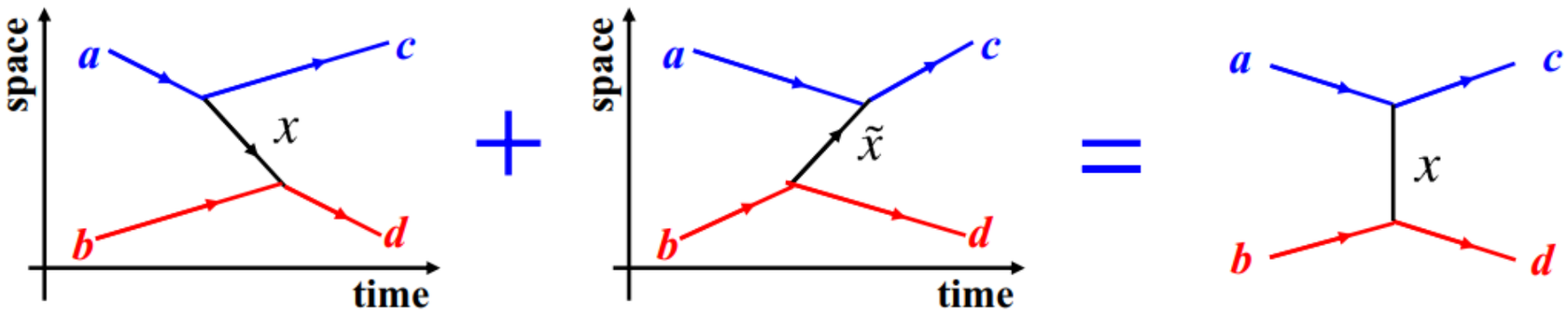
$$\boxed{M_{fi} = \frac{g_a\, g_b}{q^2 - m_X^2}}$$

czynnik $\dfrac{1}{q^2 - m_X^2}$ nazywamy PROPAGATOREM



Element macierzowy oddziaływania z dwoma wierzchołkami zależy od:
- kwadratu przekazanego czteropędu,
- masy wymienianej cząstki,
- siły oddziaływania w każdym wierzchołku

Oddziaływania z wymiana cząstek



Diagramy o określonym porządku czasowym emisji i absorpcji X:

- nie są lorenzowskao niezmiennicze (czas jest wyróżniony)
- pęd jest zachowany
- energia nie jest zachowana
- wymieniana cząstka X jest „na powłoce masy”: $E_x^2 = p_x^2 + m_X^2$

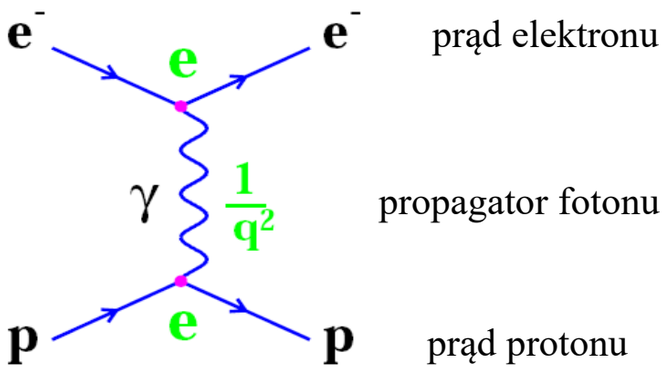
W sumie diagramów:

- element M_{fi} jest LI,
- energia i pęd są zachowane w każdym wierzchołku,
- wymieniana cząstka X jest wirtualna, poza powłoką masy $E_x^2 \neq p_x^2 + m_X^2$.
- Oddziaływania zachodzą, gdy wymienianą cząstką jest odpowiedni bozon pośredniczący: foton, bozony $W^{\pm}$, Z^0, gluony

Oddziaływania elektromagnetyczne

- Oddz. elektromagnetyczne zachodzą poprzez wymianę (wirtualnego) fotonu
- Element macierzowy M_{fi} faktoryzuje się na trzy czynniki, np. w:

ROZPRASZANIU elektron-proton



$$M_{ep} = \langle \psi_c | V | \psi_a \rangle \frac{1}{q^2 - m_X^2} \langle \psi_d | V | \psi_b \rangle$$

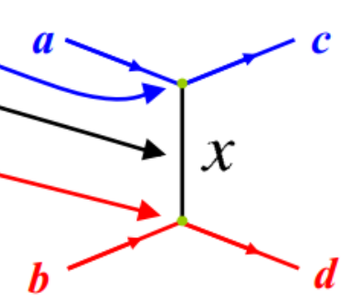
$$M \propto \alpha \, (p_1 + p_2) \, \frac{1}{q^2} (p_3 + p_4)$$

- Każdy wierzchołek opisuje prawdopodobieństwo emisji fotonu. Jest ono proporcjonalne do propagatora fotonu.
- Propagator określa, jak bardzo cząstka jest wirtualna (poza powłoką). Im większa wirtualność, tym mniejsza szansa produkcji takiej cząstki.
- Jednocześnie najbardziej prawdopodobna jest emisja fotonu mało wirtualnego ($q^2 = 0$ – fotony prawie-rzeczywiste)

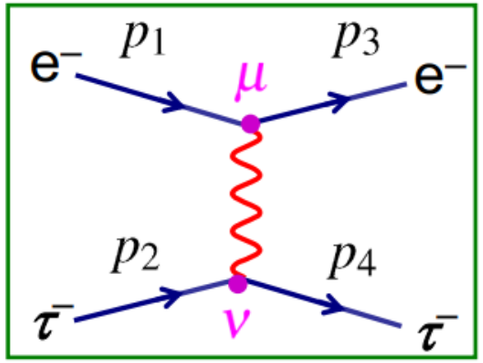
•Previously with the example of a simple spin-less interaction we had:

$$M = \langle \psi_c | V | \psi_a \rangle \frac{1}{q^2 - m_x^2} \langle \psi_d | V | \psi_b \rangle$$

$$\langle \psi_c | V | \psi_a \rangle = g_a \qquad \langle \psi_d | V | \psi_b \rangle = g_b$$



★In QED we could again go through the procedure of summing the time-orderings using Dirac spinors and the expression for $\hat{V}_D$. If we were to do this, remembering to sum over all photon polarizations, we would obtain:



$$M = \underbrace{\left[u_e^\dagger(p_3) q_e \gamma^0 \gamma^\mu u_e(p_1)\right]}_{\text{Interaction of } e^- \text{ with photon}} \underbrace{\sum_\lambda \frac{\varepsilon_\mu^\lambda (\varepsilon_\nu^\lambda)^*}{q^2}}_{\text{Massless photon propagator summing over polarizations}} \underbrace{\left[u_\tau^\dagger(p_4) q_\tau \gamma^0 \gamma^\nu u_\tau(p_2)\right]}_{\text{Interaction of } \tau^- \text{ with photon}}$$

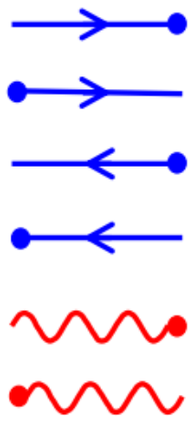
•All the physics of QED is in the above expression !

$$M = \left[\bar{u}_e(p_3) q_e \gamma^\mu u_e(p_1)\right] \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} \left[\bar{u}_\tau(p_4) q_\tau \gamma^\nu u_\tau(p_2)\right]$$

Basic Rules for QED

- **External Lines**

spin 1/2	incoming particle	$u(p)$	
	outgoing particle	$\bar{u}(p)$	
	incoming antiparticle	$\bar{v}(p)$	
	outgoing antiparticle	$v(p)$	
spin 1	incoming photon	$\varepsilon^{\mu}(p)$	
	outgoing photon	$\varepsilon^{\mu}(p)^{*}$	

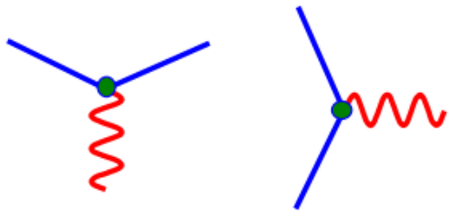


- **Internal Lines (propagators)**

spin 1	photon	$-\dfrac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$	μ ν
spin 1/2	fermion	$\dfrac{i(\gamma^{\mu}q_{\mu}+m)}{q^2-m^2}$	

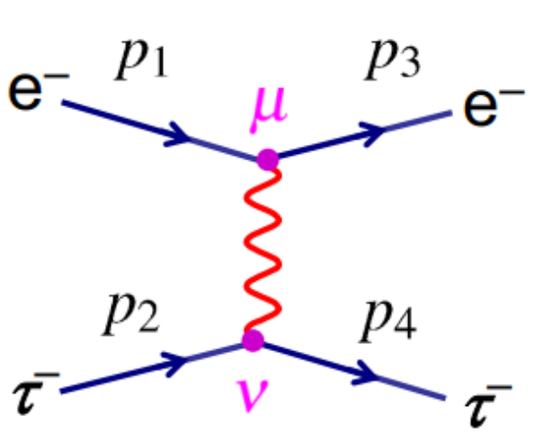
- **Vertex Factors**

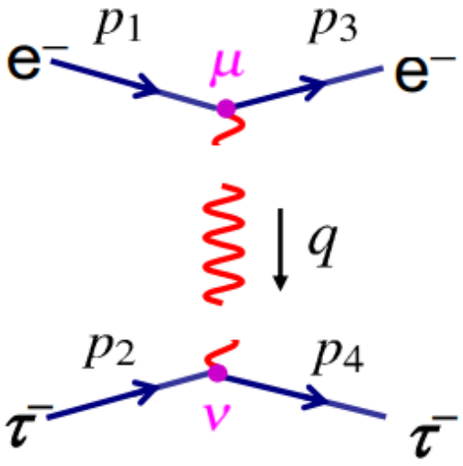
spin 1/2	fermion (charge -e)	$ie\gamma^{\mu}$	



- **Matrix Element** $-iM$ = **product of all factors**

e.g.





$$\bar{u}_e(p_3)[ie\gamma^\mu]u_e(p_1)$$

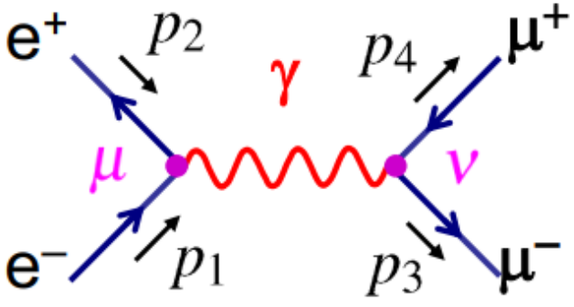
$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$$

$$\bar{u}_\tau(p_4)[ie\gamma^\nu]u_\tau(p_2)$$

$$-iM = [\bar{u}_e(p_3)ie\gamma^\mu u_e(p_1)]\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}[\bar{u}_\tau(p_4)ie\gamma^\nu u_\tau(p_2)]$$

- **Which is the same expression as we obtained previously**

e.g.



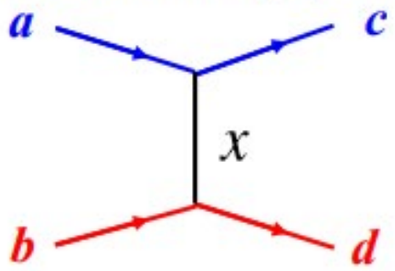
$$-iM = [\bar{v}(p_2)ie\gamma^\mu u(p_1)]\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}[\bar{u}(p_3)ie\gamma^\nu v(p_4)]$$

Note:

- **At each vertex the adjoint spinor is written first**
- **Each vertex has a different index**
- **The $g_{\mu\nu}$ of the propagator connects the indices at the vertices**

★ Can view the scattering of an electron by a proton at rest in two ways:

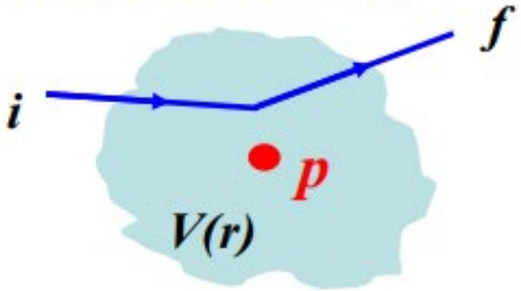
- Interaction by particle exchange in 2nd order perturbation theory.



$$M_{fi} = \frac{g_a g_b}{q^2 - m_x^2}$$

- Could also evaluate the same process in first order perturbation theory treating proton as a fixed source of a field which gives rise to a potential V(r)

$$M = \langle \psi_f | V(r) | \psi_i \rangle$$



Obtain same expression for M_{fi} using

$$V(r) = g_a g_b \frac{e^{-mr}}{r}$$

YUKAWA potential

★ In this way can relate potential and forces to the particle exchange picture

★ However, scattering from a fixed potential $V(r)$ is not a relativistic invariant view

W podsumowaniu

- Oddziaływania elektromagnetyczne opisywane są w ramach kwantowej pola - elektrodynamiki kwantowej (QED).
- QED jest teorią pola opartą na grupie cechownia U(1).
- Oddziaływania pomiędzy cząstkami zachodzą poprzez wymianę cząstki pośredniczącej, a lorenzowsko niezmienniczy (LI) element macierzowy ma postać:

$$M_{fi} = \frac{g_a g_b}{q^2 - m_x^2}$$

- Podstawowe oddz. elm. pomiędzy naładowanymi fermionami daje równanie:

$$-iM = [\bar{u}(p_3) ie\gamma^\mu u(p_1)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}(p_4) ie\gamma^\mu u(p_2)]$$

- QED jest teorią w pełni przeliczalną i wzorem dla opisu oddz. silnych i słabych (elektrosłabych)

Zapraszam na dalsze kursy związane z fizyką i detekcją cząstek elementarnych !

agh.edu.pl