Model Standardowy - QCD i QED

①

Procedura budowania teorii oddziaływania
(pola → cząstki)

- Lagranżjan + globalna symetria cechowania

  ↓

  lokalna -//- -//-

= oddziaływanie

w QED transformacja jest postaci $e^{iq\alpha(x)}$

→ $U(1)$

obrót - jeden parametr

q - ładunek

można policzyć komutator $[D_\mu, D_\nu]$, gdzie

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

$$[D_\mu, D_\nu]\psi = (\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\nu + iqA_\nu)\psi + $$
$$- (\partial_\nu + iqA_\nu)(\partial_\mu + iqA_\nu)\psi =$$

... liczymy...

$$= iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\mu A_\mu)\psi$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{\mu\nu} = -\frac{i}{q}[D_\mu, D_\nu]}$$

niezmiennicze np. $U(1)$

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\Psi}\gamma^{\mu} D_{\mu} \psi + m\bar{\Psi}\psi + \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

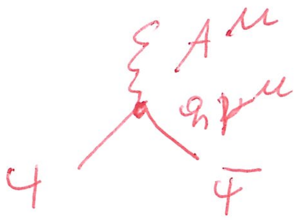
$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_0^{Dirac} + \mathcal{L}'_{odd} + \mathcal{L}_0^{foton}$$

swobodny elektron

odd. foton elek

swobodny pole $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

$$i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\Psi}\psi \qquad -q\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}$$



$\mathcal{L}_{QED}$ → opisuje pole naładowanych elektrycznie fermionów

ψ → zespolone pole

$U(1)$ → transformacje $\quad e^{iq\alpha(x^{\mu})}$

$D_{\mu} \to \partial_{\mu} + iqA_{\mu}$

$A_{\mu} \to A'_{\mu} = A_{\mu} - \partial_{\mu}\alpha(x^{\mu})$

$\psi \to \psi' = e^{iq\alpha(x^{\mu})}\psi$

$\bar{\Psi} \to \bar{\Psi}' = \bar{\Psi} e^{-iq\alpha(x^{\mu})}$

A_{μ} → fotony, $m_{\gamma} = 0$

Przypadek QCD:

- teoria dla KWARKÓW - tylko!
- nieabelowa
- symetria QCD to SU(3) z 8 generatorami*

  * SU(N) ma N^2-1 parametrów (teoria grup)

- na co ma działać transf. cechowania. Jakie pole?

  → tak na kwarki (u, d, s) to mamy U(1)

  i $\mathcal{L} = \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + m\bar{\psi}\psi$; $\psi = \psi_d \ldots$

  → jak na „ładunek" → przestrzeń kolorową

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_g \\ \psi_b \end{pmatrix} \qquad \{r, g, b\} \in C$$
$$q = \{u, d, c, s, t, b\}$$

$$\psi_r = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad \text{spinor Diraca - każdy wektor z kolorem}$$

Transf. grupy SU(3) działa na wektor ψ z trema kolorami

① $\mathcal{L} = \psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi + m\bar{\psi}\psi \qquad \bar{\psi} = i\gamma^0\psi$

Robimy $\mathcal{L}$ invariantne wzgl. cechowania w SU(3) => $\mathcal{L}_{QCD}$

- transf. globalna

$$\psi \to \psi' = e^{-iq\lambda\cdot\phi}\psi \quad ; \bar{\psi}' = \psi e^{iq\lambda\cdot\phi}$$

„−" nowe (konwencja)

to ma być grupa Lie'go, a zatem elementy tej grupy zapisujemy jako:

$$A = e^{i g_A \upsilon^A}$$

interpretujemy: $\Lambda = g_A$ generatory (8 w SU(3)) działają w przestrzeni kolorów (trzech), a zatem mają postać macierzy 3×3

$$8 \times \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

zad. policzyć (wypisać) postacie g_A

$\phi = \upsilon^A$ 8 parametrów

$q = -g$ sprzężenie, pokazuje, jak silnie kwark oddziałuje z polem

QCD – lokalne transf. cechowania

$$\phi = \phi(x^\mu)$$

$$\psi \to \psi' = e^{-ig\,\lambda \cdot \phi(x^\mu)}\psi \Rightarrow \mathcal{L} \neq inv$$

$\downarrow$

$\equiv \psi_{kolor} \Rightarrow$ zawiera RÓŻNE SPINORY dla g z ELM.

działamy w dwóch różnych kolorowych wymiarach

1°

2. QED pochodna kowariantna:

$$D_\mu \psi = \partial_\mu + ig\,\underbrace{\lambda^\alpha \cdot A_\mu{}^\alpha}_{2}$$

8 pól cechowania

$\alpha = 1 \ldots 8 \rightarrow$ dla każdego lokalne cechowanie.

numeruje generatory

8 nie zależnych generat

wymagamy: $D_\mu \psi \to D_\mu \psi' = e^{-ig\,\lambda \cdot \phi(x)} D_\mu \psi$ 2

po to, aby w 1 uprościły się wyrazy

jak to osiągnąć?

najpierw sprawdzam:

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + ig\,\lambda \cdot A_\mu \psi \to \partial_\mu \psi' + ig\,\lambda \cdot A_\mu' \psi$$

$$D_\mu \psi' = \partial_\mu \psi' + ig\,\lambda \cdot A_\mu \psi =$$

{ podstawiam dla ψ transformowanego }

$$D_\mu \psi' = \partial_\mu (\underbrace{e^{-ig\lambda\phi}\psi}_{\psi'}) + ig\lambda A'_\mu \underbrace{e^{-ig\lambda\phi}\psi}_{\psi'} =$$

{ liczymy..... }

ok ok

$$= \partial_\mu (e^{-ig\lambda\phi})\psi + e^{-ig\lambda\cdot\phi}\partial_\mu \psi +$$

$$+ ig\lambda\cdot A'_\mu e^{-ig\lambda\phi}\psi \quad (3)$$

OK, PROBLEM...

chcemy, żeby to było równe: (2) $D_\mu\psi \to D_\mu\psi'$

ok

$$= e^{-ig\lambda\phi}\underbrace{(\partial_\mu\psi + ig\lambda\cdot A_\mu\psi)}_{D_\mu\psi}$$

$$\{ D_\mu \psi e^{-ig\lambda\phi}$$

będzie tak, gdy: (2) = (3)

$$\lambda\cdot A'_\mu = e^{-ig\lambda\phi}\lambda\cdot A_\mu\cdot e^{ig\lambda\phi} + \quad **$$

$$+ \frac{i}{g}\partial_\mu(e^{-ig\lambda\cdot\phi})e^{ig\lambda\phi}$$

λ - to macierz 3×3 w przestrzeni kolorów

{ w elm. A transformowało się prosto, bo była macierz 1×1 i można było ją dać przed exp; tutaj w SU(3), ** zostawiamy w tej postaci

SU(3) jest grupą nieabelową!

$$\boxed{q = g}$$

2° ~~z~~ co z $\mathcal{L}$?

$\mathcal{L}^{int}_{QCD}$

$$\mathcal{L} = \bar\psi \gamma^\mu \partial_\mu \psi \underbrace{+ ig\bar\psi\gamma^\mu \lambda\cdot A_\mu \psi}_{\text{oddziaływanie}} + m\bar\psi\psi$$

8 gluonów

kwarki

człon oddziaływania z polem pojawił się dzięki wprowadzeniu D_μ

→ oddziaływanie między polem kwarkowym ψ i gluonowym polem A_μ

⇒ oddziaływania silne !

3° dodawanie wyrazu kinematycznego ⇒

$$\boxed{\mathcal{L}_{Proca} = \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}, \text{ gdzie}$$

$$F_{\mu\nu} = -\frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \dots$$ liczymy...

$$F_{\mu\nu} = -\frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu]\psi = -\frac{i}{g}(\partial_\mu + ig\lambda\cdot A_\mu)(\partial_\nu\psi + ig\lambda\cdot A_\nu\psi)$$

$$+\frac{i}{g}(\partial_\mu + ig\lambda\cdot A_\nu)(\partial_\mu\psi + ig\lambda\cdot A_\mu\psi) =$$ redukują się

$$= -\frac{i}{g}\partial_\mu\partial_\nu\psi + \frac{i}{g}\partial_\nu\partial_\mu\psi + \lambda\cdot A_\nu\partial_\mu\psi + \lambda\cdot A_\mu\partial_\mu\psi +$$

$$-\lambda\cdot A_\nu\partial_\mu\psi - \lambda\cdot A_\mu\partial_\nu\psi + \partial_\mu(\lambda\cdot A_\nu)\psi - \partial_\nu(\lambda\cdot A_\mu)$$

$$+ig(\lambda\cdot A_\nu)\psi - ig(\lambda\cdot A_\nu)(\lambda\cdot A_\mu)\psi =$$

$$= \partial_\mu(\lambda\cdot A_\nu) - \partial_\nu(\lambda\cdot A_\mu) + ig[\lambda\cdot A_\mu, \lambda\cdot A_\nu]$$

grupa nieabelowa → nie znika, jak w QCD

z powodu generatorów

czyli
$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu(\lambda\cdot A_\nu) - \partial_\mu(\lambda\cdot A_\mu) + ig[\lambda\cdot A_\mu, \lambda\cdot A_\nu]$$

Pseudo iloczyn skalarny:
$$\lambda\cdot A_\mu = \lambda^a \cdot A^a_\mu$$

8 generatorów $\qquad \lambda^m A^m_\mu$

$a \to \{1,2..8\}$

l

m

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu(\lambda^l A_\nu^l) - \partial_\nu(\lambda^l A_\mu^l) + ig[\lambda^m, \lambda^n] A^m_\mu A^n_\nu$$
$$= \lambda^l(\partial_\mu A_\nu^l - \partial_\nu A_\mu^l) + ig[\lambda^m, \lambda^n] A_\mu^m A_\nu^n$$

{ A_μ, A_ν nie zależą od koloru (stałe)
λ^l nie zależą od x → tylko od koloru

algebra $su(3)$ $\qquad [g^l, g^n] = i f^{lnm} g_m$

u nas $\qquad [\lambda^m, \lambda^n] = i f^{mnk} g_k$

f^{mnk} stała struktury $SU(3)$

ostatecznie:
$$F_{\mu\nu} = \lambda^l(\partial_\mu A_\nu^l - \partial_\nu A_\mu^l) +$$
$$-g f^{lmn} \lambda^l A^m_\mu A^n_\nu$$

$$F_{\mu\nu} = \lambda^l \left\{ (\partial_\mu A^l_\nu - \partial_\nu A^l_\mu) - g f^{lmn} A^m_\mu A^n_\nu \right\}$$

$$= \underbrace{\lambda^l F^l_{\mu\nu}}$$ 8 wyrażeń, $\underline{\underline{8\ \lambda^l}}$ w przestrzeni koloru

$$\mathcal{L}^{(kin)}_{A_\mu} = \frac{1}{16\pi} F^l_{\mu\nu} F^{\mu\nu,l} = \frac{1}{16\pi}\Big(\partial_\mu A^l_\nu - \partial_\nu A^l_\mu +$$

$$- g f^{lmn} A^m_\mu A^n_\nu\Big) \times \Big(\partial^\mu A^{\nu,l} - \partial^\nu A^{\mu,l} +$$

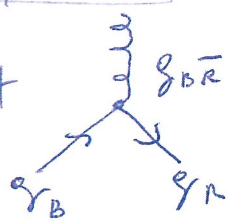
$$- g f^{lkj} A^{\mu,k} A^{\nu,j}\Big) =$$

propagator

prawie jak dla γ

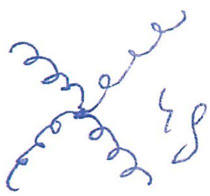
$$= \underbrace{\frac{1}{16\pi}(\partial_\mu A^l_\nu - \partial_\nu A^l_\mu)(\partial^\mu A^{\nu,l} - \partial^\nu A^{\mu,l})}_{\text{abelowa część}} +$$

$$- \underbrace{\frac{g}{16\pi} f^{lkj} A^k_\mu A^j_\nu (\partial^\mu A^{\nu,l} - \partial^\nu A^{\mu,l})}_{\text{3 pola}} +$$



$$- \underbrace{\frac{g}{16\pi} f^{lmn} A^{\mu,m} A^{\nu,n} (\partial_\mu A^l_\nu - \partial_\nu A^l_\mu)}_{\text{3 pola}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{g^2}{16\pi} f^{lmn} f^{lkj} A^m_\mu A^n_\nu A^{\mu,k} A^{\nu,j}}_{\text{4 pola}}$$



[Nośniki pola silnego oddziałują ze sobą! Mają ładunek silny]

[Oddziaływania wynikają z faktu, że grupa SU(3) jest nieprzemienna]

$$[\lambda^a, \lambda^a] \neq 0$$

$$U(1) \to [\alpha_1, \alpha_2] = 0 \quad \text{zawsze!}$$

Oddziaływanie QCD

$$\bar{\psi} \lambda \cdot A_\mu \psi \,, \qquad \lambda^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

macierze Gell-Manna

$$(\bar{\chi}_R, \bar{\chi}_B, \bar{\chi}_G)\, \lambda^1 \cdot A^1_\mu \begin{pmatrix} \chi_R \\ \chi_B \\ \chi_G \end{pmatrix}$$

Mnożenie, z uwagi na macierze G-M, nie jest trywialne. Oddziaływania mieszają kolory

$$\underbrace{(\bar{\chi}_R, \bar{\chi}_B, \bar{\chi}_G)}_{1\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{3\times 3} A^1_\mu \begin{pmatrix} \chi_R \\ \chi_B \\ \chi_G \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(\bar{\chi}_B, \bar{\chi}_R, 0)}_{1\times 3} A^1_\mu \begin{pmatrix} \chi_R \\ \chi_B \\ \chi_G \end{pmatrix} \sim \boxed{\bar{\chi}_B \chi_R + \bar{\chi}_R \chi_B}$$

S.M 13.6

$$A^1_\mu (\bar{\chi}_R, \bar{\chi}_B, \bar{\chi}_G) \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} \chi_R \\ \chi_B \\ \chi_G \end{pmatrix}}$$

3×1^t $\quad$ 3×1^t

Trywialnie:

$$\left[\bar{\chi}_R \chi_R + \bar{\chi}_B \chi_B + \bar{\chi}_G \chi_G \right]$$

Ale, w rzeczywistości

$$(\bar{\chi}_R, \bar{\chi}_B, \bar{\chi}_G) \cdot \begin{pmatrix} \chi_B \\ \chi_R \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{\chi}_R \chi_B + \bar{\chi}_B \chi_R$$

$$\begin{cases} \chi_R \to \chi_B \\ \chi_B \to \chi_R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \chi_R \to \chi_B : g_{B\bar{R}} \\ \chi_B \to \chi_R : g_{\bar{B}R} \end{cases}$$

8 różnych gluonów