AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE
AGH UNIVERSITY OF KRAKOW

Model Standardowy

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek

Grupy i symetrie w fizyce
(zwłaszcza cząstek
elementarnych)

Symetrie oddziaływań

- Wszystkie współczesne próby odnalezienia praw natury posługują się pojęciem symetrii.
- Symetria jest opisana matematycznie przez grupy, które często mają o „zakodowanych” nazwach.

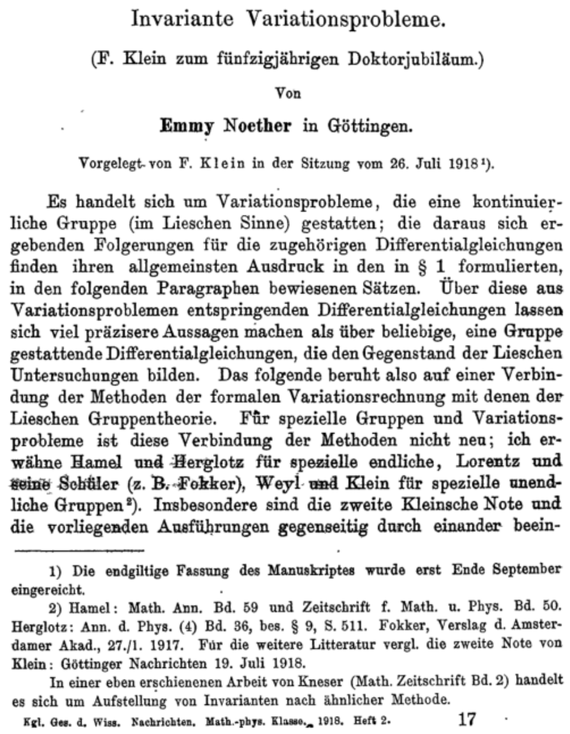
Model Standardowy ma symetrię grupy cechowania: $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$,

a właściwie $U(1)_Y \times SU(2)_L \times SU(3)_C$

- Każda ciągła symetria praw fizyki, czyli taka, która nie zmienia:
  - ✓ równań ruchu,
  - ✓ działania

  jest związana z zachowaną wartością: pęd, energia, moment pędu, ładunek.
- Praw zachowania jest tyle, ile niezależnych parametrów (lub generatorów) grupy.
- Symetrie dyskretne niekoniecznie generują prawa zachowania:
  - ✓ inwersja współrzędnych (parzystość przestrzenna) – tak
  - ✓ inwersja w czasie - nie

1918 - Prawo Emmy Noether (1882-1935)



Invariante Variationsprobleme.

(F. Klein zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum.)

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 26. Juli 1918[1]).

Es handelt sich um Variationsprobleme, die eine kontinuierliche Gruppe (im Lieschen Sinne) gestatten; die daraus sich ergebenden Folgerungen für die zugehörigen Differentialgleichungen finden ihren allgemeinsten Ausdruck in den in § 1 formulierten, in den folgenden Paragraphen bewiesenen Sätzen. Über diese aus Variationsproblemen entspringenden Differentialgleichungen lassen sich viel präzisere Aussagen machen als über beliebige, eine Gruppe gestattende Differentialgleichungen, die den Gegenstand der Lieschen Untersuchungen bilden. Das folgende beruht also auf einer Verbindung der Methoden der formalen Variationsrechnung mit denen der Lieschen Gruppentheorie. Für spezielle Gruppen und Variationsprobleme ist diese Verbindung der Methoden nicht neu; ich erwähne Hamel und Herglotz für spezielle endliche, Lorentz und seine Schüler (z. B. Fokker), Weyl und Klein für spezielle unendliche Gruppen[2]). Insbesondere sind die zweite Kleinsche Note und die vorliegenden Ausführungen gegenseitig durch einander beein-

1) Die endgiltige Fassung des Manuskriptes wurde erst Ende September eingereicht.

2) Hamel: Math. Ann. Bd. 59 und Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 50. Herglotz: Ann. d. Phys. (4) Bd. 36, bes. § 9, S. 511. Fokker, Verslag d. Amsterdamer Akad., 27./1. 1917. Für die weitere Litteratur vergl. die zweite Note von Klein: Göttinger Nachrichten 19. Juli 1918.

In einer eben erschienenen Arbeit von Kneser (Math. Zeitschrift Bd. 2) handelt es sich um Aufstellung von Invarianten nach ähnlicher Methode.

Kgl. Ges. d. Wiss. Nachrichten. Math.-phys. Klasse. 1918. Heft 2. 17

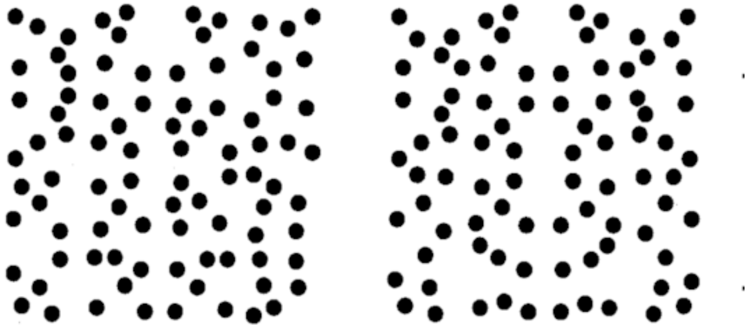
Tranformacje i symetrie

- Symetrie statyczne – obracam kwadrat i nie ma zmiany
- Symetrie dynamiczne – zmieniam lagrażjan i nie ma zmiany, tzn. $\mathcal{L} = \mathcal{L}' = \mathcal{L}$. Lagranżjan musi się składać z obiektów, które są niezmiennicze, np.

$$\mathcal{L} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$$
$$A = A' = A$$
$$B = B' = B$$
$$AB = A'B' = AB$$

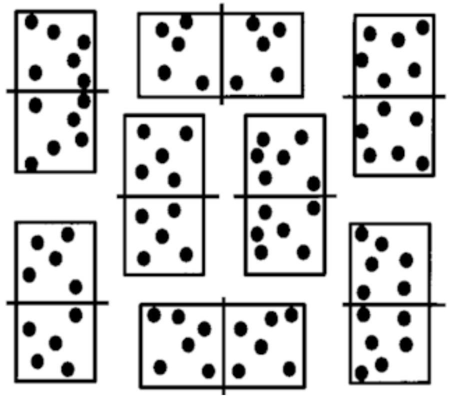
dobrymi kandydatami są: skalary, czyli również iloczyny skalarne $\vec{A} \cdot \vec{B}$

- Symetrie globalne

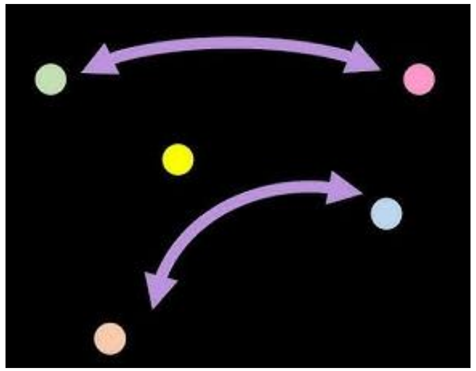


source

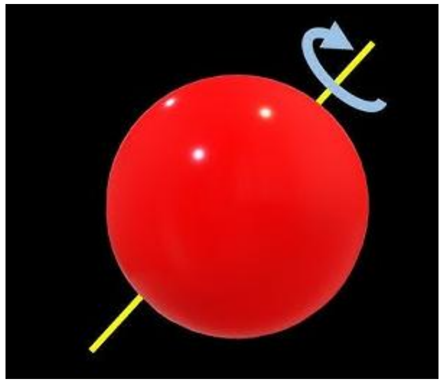
- Symetrie lokalne



- Symetrie dyskretne



- Symetrie ciągłe



source

agh.edu.pl

Grupa $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$

- Grupa U(1) to grupa symetrii oddziaływań elektromagnetycznych.
  „1" oznacza „singlety" czyli np. elektron (fermion):
  zachowana wielkość – ładunek elektryczny

1 fermion: (elektron)
1 bozon: (foton)

- Grupa SU(2) to grupa symetrii oddziaływań słabych.
  „2" oznacza „pary" , fermiony są w parach; „S" specjalna:
  zachowana wielkość – słaby izospin

2 fermiony: $\begin{pmatrix} elektron \\ neutrino \end{pmatrix}$

3 bozony: (Z^0, W^+, W^-)

- Grupa SU(3) to grupa symetrii oddziaływań silnych, związanych z kolorem.
  „3" oznacza „tryplety" , fermiony są w trójkach:
  zachowana wielkość - kolor

3 fermiony: $\begin{pmatrix} kwark\ red \\ kwark\ blue \\ kwark\ green \end{pmatrix}$

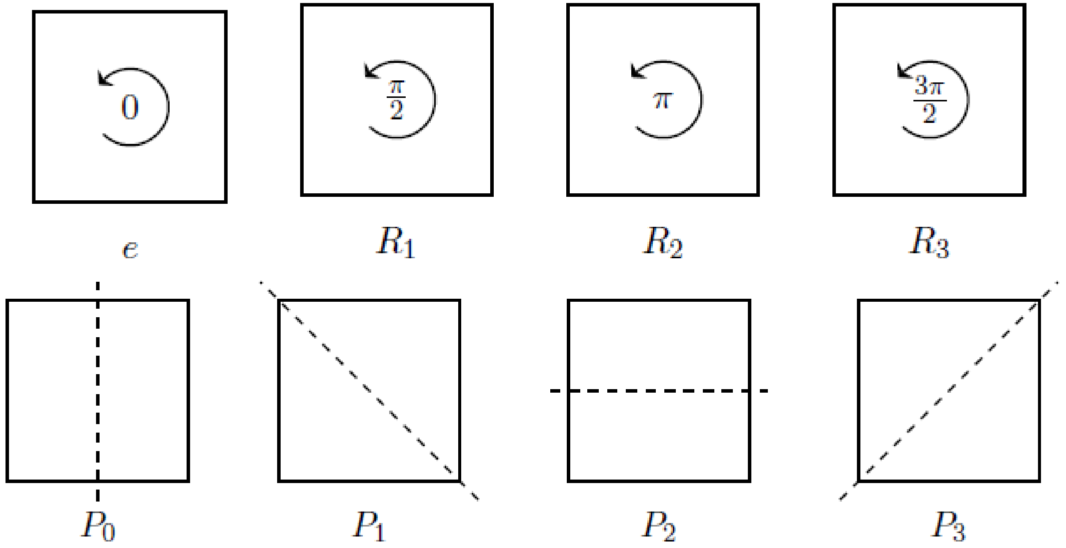
8 bozonów: (kolorowe gluony)

Z symetrii cechowania (gauge) wynika zachowany ładunek: elektryczny, izospin, kolorowy

Wybrane aspekty teorii grup – symetria dyskretna

Rozważmy symetrie kwadratu:

- obrót o $\pi/2$ wzg. środka pozostawia kwadrat w stanie niezmienionym:
  - ✓ Istnieją trzy nietrywialne obroty i jeden neutralny.
- Kwadrat również nie zmieni się, przy odbiciach (transformacji parzystości przestrzennej).



Kwadrat ma 8 transformacji, które twoarzą grupę dihedralną (wielokąty): $D_4 = \{e, R_1, R_2, R_3, P_0, P_2, P_3\}$

Każde dwie transformacje tworzą nowy element grupy,

⇒ tablice mnożenia (czyli dodawania kolejnych obrotów) $R_{\pi/2}R_\pi = R_{3\pi/2}$

(elementy komutują?):

	g_1	g_2	$\cdots$
g_1	g_1g_1	g_2g_1	$\cdots$
g_2	g_1g_2	g_2g_2	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\Longrightarrow$

	e	R_1	R_2	R_3	P_0	P_1	P_2	P_3
e	e	R_1	R_2	R_3	P_0	P_1	P_2	P_3
R_1	R_1	R_2	R_3	e	P_3	P_0	P_1	P_2
R_2	R_2	R_3	e	R_1	P_2	P_3	P_0	P_1
R_3	R_3	e	R_1	R_2	P_1	P_2	P_3	P_0
P_0	P_0	P_1	P_2	P_3	e	R_1	R_2	R_3
P_1	P_1	P_2	P_3	P_0	R_3	e	R_1	R_2
P_2	P_2	P_3	P_0	P_1	R_2	R_3	e	R_1
P_3	P_3	P_0	P_1	P_2	R_1	R_2	R_3	e

Reprezentacje

- Jak można zapisać symetrię grupy D_4 w postaci macierzy?

Działamy na punkty w 2D, czyli na element (a, b).

- Zatem najprostsza **reprezentacja** to macierze 2×2, np:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sprawdzam!

- Punkt $\vec{x} = (a, b)$ transformuje się jak: $\vec{x}' = R_i \cdot \vec{x}$

- Reprezentacja grupy jest to sposób, w który można zapisać abstrakcyjną grupę w postaci macierzy, operatora lub funkcji, które działają w przestrzeni wektorowej.
- Reprezentacja grupy to przypisanie każdemu elementowi grupy macierzy, operatora, etc., tak, aby działanie grupy odpowiadało mnożeniu macierzy.

Reprezentacje

Jak można zapisać symetrię grupy D_4 w postaci macierzy?

- Działamy na punkty w 2D, czyli na element (a, b).
- Podgrupy obrotów: $\mathbb{Z}_4 = \{e, R_1, R_2, R_3\}$ lub $\mathbb{Z}_2 = \{e, R_2\}$ możemy reprezentować liczbami zespolonymi:

$$e = 1, \qquad R_1 = e^{i\pi/2}, \qquad R_2 = e^{i\pi}, \qquad R_3 = e^{i3\pi/2}$$

- A reprezentację (zespoloną) możemy zapisać jako:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ideą tych zabiegów jest pomysł, że „zapominamy” o rzeczywistym kwadracie, a zostawiamy jedynie reprezentacje i ogólne własności grupy.

Jak znajdziemy elementy należące do danej grupy – będziemy umieli je transformować dzięki tym macierzom

Wybrane aspekty teorii grup – symetria ciągła

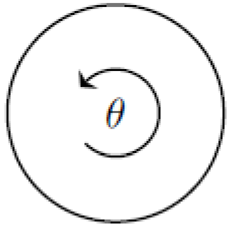
Grupa dihedralna D_n przy $n \to \infty$ daje symetrię okręgu – 2-wymiarową (2d na płaszczyźnie) ortogonalną grupę O(2).

- Tablice mnożenia:

	$R(\theta_2)$	$P(\phi_2)$
$R(\theta_1)$	$R(\theta_1+\theta_2)$	$P(\phi_2-\theta_1)$
$P(\phi_1)$	$P(\phi_1+\theta_2)$	$R(\phi_1-\phi_2)$

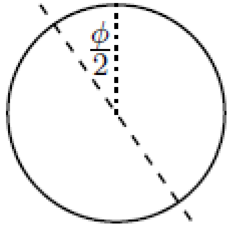
- Elementy reprezentacji nie komutują: $R(\theta)P(\phi) \neq P(\phi)R(\theta)$.

obrót



$R(\theta) \mid \theta \in [0, 2\pi)$

odbicie



$P(\phi) \mid \phi \in [0, 2\pi)$

- Grupa ortogonalna O(2) może być reprezentowana przez macierze 2x2 działające na dowolny punkt okręgu (a, b):

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad P(\phi) = \begin{pmatrix} -\cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

- Obie macierze spełniają warunek $MM^T = 1$, a ile wynosi $\det M$?

- Element grupy to pojedynczy obiekt należący do grupy.
  - ✓ Elementem grupy D_4 są obroty R_i i odbicia P_i (8 elementów).

agh.edu.pl

Formalna definicja grupy

Grupa to struktura algebraiczna, czyli zbiór (np. liczb) z określonym działaniem, które spełnia:

- **Łączność:** $(a * b) * c = a * (b * c)$ dla dowolnych a, b, c z grupy.
- **Element neutralny:** Istnieje element e w grupie, taki że $a * e = e * a = a$ dla każdego a w grupie.
- **Element odwrotny:** Dla każdego elementu a w grupie istnieje element a^{-1} w grupie, taki że $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (gdzie e to element neutralny).

Grupę nazywamy **abelową** (przemienną), gdy działanie w niej określone jest **przemienne:**

$$\boxed{a * b = b * a}$$

grupy abelowe to m.in. grupy z działaniem dodawanie lub mnożenie:

	Działanie	El. neutralny	wynik	El. odwrotny
dodawanie	$x + y$	0	nx	$-x$
mnożenie	$x \cdot y\, , xy$	1	x^n	x^{-1}

Czy grupy omówione za poprzednich slajdach są grupami? A które grupami abelowymi?
Do tego właśnie służą tablice mnożenia

Grupy w MS

W fizyce znaczenia nabierają grupy macierzy:

- grupa przekształceń Lorentza – 4x4
- grupy unitarne n-wymiarowe: $U(n)$, takie, że $UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = \mathbb{I}$, $U^{\dagger} = U^{*T}$
- Dla $U(n)$, macierze zachowują iloczyn skalarny zespolony, co oznacza, że transformacje opisane przez takie macierze nie zmieniają długości ani kątów między wektorami w przestrzeni zespolonej.
- Jak wyznacznik macierzy =1, to grupa jest „specjalna” $SU(n)$.
- Jak macierze są rzeczywiste, to grupa jest „ortogonalna” $O(n)$, np. obroty

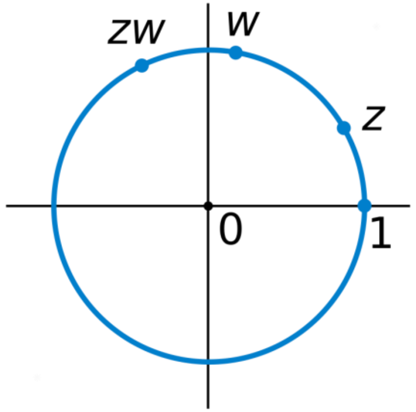
$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad U^{\dagger} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad U^{\dagger}U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \left(-\frac{i^2}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

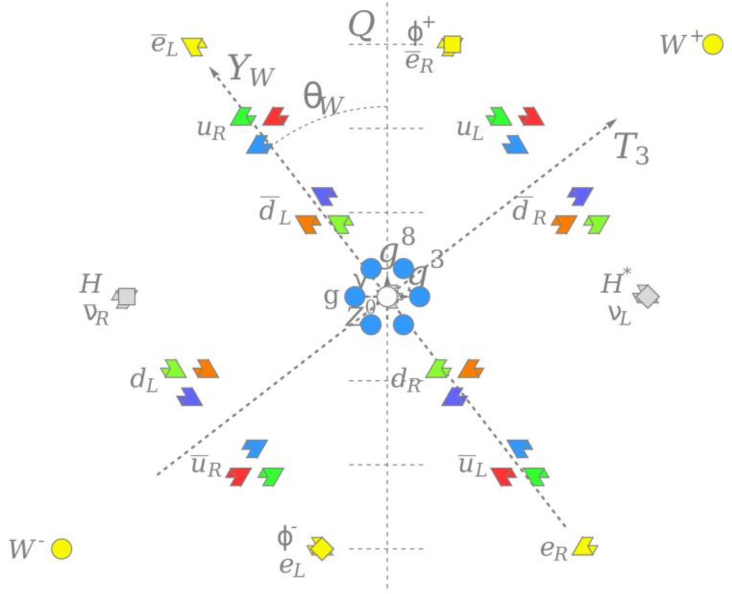
$$UU^{\dagger} = \mathbb{I}$$

Grupy Lie

- W HEP ciekawe są grupy ciągłe ze specjalną algebrą – algebrą Lie:
- **Grupa Liego** to grupa **ciągła**, tzn. taka że jej elementy można jednoznacznie opisać za pomocą jednego lub większej liczby parametrów rzeczywistych.
- Grupa Liego to np. zbiór liczb zespolonych $z(\phi) = e^{i\phi}$, o module 1, z mnożeniem jako działaniem



- 1930 E.Wigner wskazał związek cząstek elementarnych ze strukturą grupy Lie i algebra Lie.
- Elementy ciągłej grupy Lie powstają poprzez pewną operację na sobie.
- Cząstki (stany kwantowe) pochodzą z nieredukowalnych reprezentacji grupy Lie, a ich własności (masy, spektra) związane są z grupami Lie i symetriami natury.



https://en.wikipedia.org/wiki

Reprezentacja grupy - formalnie

Macierz N-wymiarowa $D(G)$ jest reprezentacją grupy G, gdy mapuje elementy G na zbiór $N \times N$ macierzy $G \rightarrow GL(N)$, takie, że:

- $D(e) = 1;$
- $D(g_1)D(g_2) = D(g_1 g_2)$, dla każdego $g_1, g_2 \in G$;
- Reprezentacja $D(G)$ jest unitarna, gdy $D(g)$ jest macierzą unitarną dla każdego $g \in G$;
- Grupy mogą mieć wiele reprezentacji.

W QFT interesują nas jedynie reprezentacje unitarne:

- Gdy teoria przewiduje grupę symetrii G, fizyczne stany powinny się transformować jak unitarne reprezentacje grupy:

$$|\psi\rangle \rightarrow D(G)|\psi\rangle$$

- Co prowadzi do wniosków:
  - ✓ iloczyn $\langle\psi|\psi\rangle$ pozostanie niezmienniczy względem tej symetrii,
  - ✓ operatory hermitowskie, które transformują się unitarną reprezentacją grupy pozostają hermitowskie po transformacji: $O \rightarrow D(G)OD(G)^{-1}$

Grupy Lie - generatory

- Grupa Lie jest rozmaitością różniczkową – jeśli można określić infinitezymalne małe przekształcenie, to umiemy zbudować z niego wszystkie elementy grupy. Np z obrotu o 1° zrobimy: R(45°) = R(1°)^{45}
- Grupy unitarne są grupami Liego
- Grupy Lie zapisuje się przy użyciu specjalnych funkcji zwanych generatorami:

$$\boxed{A = e^{ig_A v^A}}$$

g_A - generatory grupy,
v^A - wektor parametrów

? przestrzenie dualne $g_A v^A$?

$g_A v^A$ to kombinacja przekształceń, np.: dla $SO(3)$ $g_A v^A = g_{xy}(\alpha) + g_{xz}(\beta) + g_{yz}(\gamma)$ to obroty o α, β, γ względem płaszczyzn xy, xz, yz

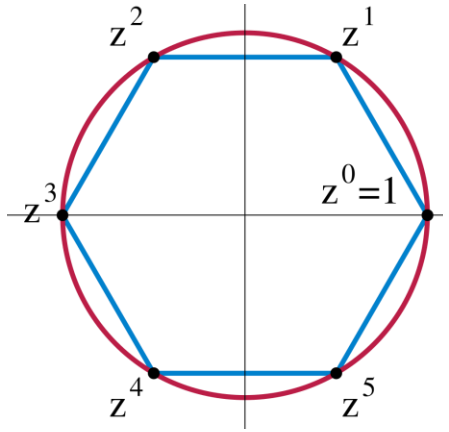
- Obroty w 3D to elementy grupy $SO(3)$, a jak znaleźć generatory tej grupy?

$$R_{yz}(\theta) = e^{ig_{yz}\theta} = I + ig_{yz}\theta + \frac{1}{2!}\left(ig_{yz}\theta\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(ig_{yz}\theta\right)^3 + \cdots$$

$$R_{yz}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sin\theta \\ 0 & -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} = \cdots$$

Grupa U(1)

$\boxed{A = e^{ig_A v^A}}$



- Grupa $U(1)$ to najprostsza grupa Lie'go,

  - jest to grupa unitarnych macierzy 1x1, z mnożeniem jako działaniem

  czyli jest to zbiór liczb zespolonych o module 1.

  ✓ $U(1)$ jest grupą abelową.

  ✓ dowolny element grupy U(1) moze być zapisany jako: $\alpha = \exp(i\theta)\,,\quad \theta \in [0{,}2\pi)$

  ✓ reprezentacja U(1) parametryzowana jest jedną liczbą q: $D_q(e^{i\theta}) = e^{i\theta q}, e^{i\theta q} \in U(1)$,

  ✓ generator grupy, to element, którego potęgo generują wszystkie elementy grupy,

  ✓ każdy element $\alpha \epsilon U(1)$ może być zapisany jako $\alpha = \left(e^{i\theta}\right)^n$, θ jest generatorem grupy U(1)

- W fizyce działanie w grupie U(1) oznacza przemnożenie stanu przez fazę $e^{i\theta q}$.

$$\boxed{\psi \ \rightarrow \ \psi' = e^{i\theta q}\ \psi}$$

- Grupa U(1) ma jeden generator $T = \theta$

Grupa U(1) a cechowanie

- Transformacja cechowania w oddziaływaniu elektromagnetycznym polega na zmianie pochodnej i wprowadzeniu pola cechowania A_μ

$$\partial_\mu \to \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{q}\partial_\mu \alpha(x)$$

- Pochodna kowariantna $\mathcal{D}_\mu$ działa na pola:

$$\mathcal{D}_\mu \psi = (\partial_\mu + iqA_\mu)\psi$$

dzięki temu poprawnie działa na nie lokalna transformacja cechowania:

$$\mathcal{D}_\mu \psi(x) \to e^{iq\alpha(x)} \mathcal{D}_\mu \psi(x)$$

- Transformacja pól (po wprowadzeniu pochodnej kowariantnej i pola cechowania) jest identyczna jak działanie generatora grupy U(1), dla $q = e$.

wewnętrzna symetria grupy U(1) jest tożsama z lokalną transformacją cechowania w elektromagnetyzmie. Czy są inne grupy opisujące pozostałe oddziaływania?
Dzięki można by było znaleźć bozony pośredniczące w pozostałych dwóch oddziaływaniach.

Reprezentacja grupy U(1)

- Grupa U(1) związana jest z obrotem (w przestrzeni zespolonej).
- Reprezentacja grupy U(1): $D(\theta) = e^{i\theta}$.
- Pole ψ jest przemnożone przez: $\psi \to e^{i\theta}\,\psi$

- Grupa U(1) opisuje lokalną symetrię cechowania pola elektromagnetycznego z zasadą zachowania ładunku.
- Pole spinorowe $\psi(x)$ – symetrii cechowania: $\boxed{\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\,\psi(x)}$
- „Zwykła" pochodna $\partial_\mu \psi$ jest zastąpiona* pochodną kowariantną $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$.

  $$* \ \partial_\mu(e^{i\alpha(x)}\psi) = e^{i\alpha(x)}\,(\partial_\mu \psi + i(\partial_\mu \alpha)\psi)$$

- Pole A_μ transformuje się jak: $A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)$ i wtedy pochodna pola transformuje się jak pole

$$\boxed{\mathcal{D}_\mu \psi \to e^{i\alpha(x)}\mathcal{D}_\mu \psi}$$

Symetria cechowania w elm

- Lagranżjan pola elektromagnetycznego (elektron + foton):

$$\boxed{\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\mathcal{D}_{\mu} - m\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}$$

pozostaje niezmienniczy przy: $\mathcal{D}_{\mu}\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\mathcal{D}_{\mu}\psi$ $\quad A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} - \frac{1}{e}\partial_{\mu}\alpha(x)$

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\,\psi(x)$$

- Lokalna symetria U(1) prowadzi do zachowania prądu $j^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$.
- Równanie ciągłości: $\partial_{\mu}\mathrm{j}^{\mu} = 0$.
- A zatem całkowity ładunek jest zachowany: $Q = \int d^{x}xj^{0}(x)$

Lokalna symetria cechowania U(1) wprowadza pole, oddziaływanie elektronu z polem A_{μ} oraz zapewnia zachowanie ładunku elektrycznego

Grupa SU(N)

- Reprezentacja grupy SU(N) to działanie $D(U)_i^{\,j} = U_i^{\,j}$.
- Zespolone pole o N- składnikach $\psi_i = (\psi_i, \dots, \psi_N)$ transformuje się jako:

$$\boxed{\psi_i \to \psi_i' = U_i^{\,j}\psi_j}$$

- Poszukajmy zatem tych pól!

Grupa SU(2)

- Grupa unitarnych macierzy 2×2 z jednostkowym wyznacznikiem (grupa Liego).
- W MS oddziaływania słabe mają symetrię grupy $SU(2)$.
- Dokładniej – lewoskrętne fermiony są elementami grupy $SU(2)_L$ jako dublety:

$$L = \binom{\nu_e}{e^-}_L \qquad L = \binom{u}{d}_L$$

czyli neutrino przekształca się (obraca) na elektron (z emisją W),

fermiony prawoskrętne nie są „zauważane" przez oddziaływania słabe.

Elektron i neutrino są związane symetrią grupy SU(2), poprzez oddziaływania słabe, czyli emisję W.

$$L' = generator \quad L$$

Grupa SU(2)

- Grupa unitarnych macierzy 2×2 z jednostkowym wyznacznikiem (grupa Liego).
- W MS o symetrii grupy $SU(2)$ mówimy również w przypadku izospinu: (p, n), (π^-, π^0, π^+), $(\Sigma \ldots)(\Delta \ldots)$

- Każdy element grupy SU(2) można zapisać jako: $U = e^{i\theta^a T^a}$,

  θ^a - parametry transformacji (kąty), T^a - generatory SU(2), np. w postaci macierzy Pauliego $T^a = \frac{1}{2}\sigma^a$

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ale używa się bazy złożonej z trzech innych macierzy (operatory drabinkowe, podwyższania (obniżania):

$$T_\pm = T_1 \pm iT_2 \qquad T_3$$

$$T_\pm |j, m\rangle = \hbar\lambda^\pm_{j,m} |j, m \pm 1\rangle$$

$$T_3 |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle$$

Grupa SU(2) – rola generatorów

- Wróćmy do lewoskrętnych fermiony - elementów grupy $SU(2)_L$:

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \qquad L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

- Dublet L transformuje się, jak $L \to e^{i\theta^a T^a} L$, można rozwinąć: $L \to (I + i\theta^a T^a + \cdots)L$

np. dla T^3 mamy: $U = e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_3}$ i przekształcimy wektor $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$:

$$U\psi = \begin{bmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\theta/2}\,\psi_1 \\ e^{-i\theta/2}\psi_2 \end{bmatrix}$$

$$e^{i\theta T^1} \cdot \begin{bmatrix} \nu_e \\ e^- \end{bmatrix} \approx (I + i\theta T^1) \begin{bmatrix} \nu_e \\ e^- \end{bmatrix}$$

$$T^1 \sim \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dublet $L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$ został obrócony w wewnętrznej, abstrakcyjnej symetrii grupy,

- elementy się mieszają (oddziałują poprzez wymianę bozonu W),
- elektron i neutrino są dwoma elementami tej samej struktury matematycznej (dubletu)
- oddziaływania słabe powodują zmianę (obrót) wewnątrz tej struktury, ale dopiero emisja W powoduje zmianę cząstki

Grupa SU(3)

- Grupa unitarnych macierzy 3×3 z jednostkowym wyznacznikiem.
- W MS oznacza transformacje pomiędzy trzema stanami, np. kwarkowymi (red, green, blue) – grupa $SU(3)_C$.
- Symetria $SU(3)_C$ opisuje „rotacje” pomiędzy kolorowymi stanami kwarkowymi.
- Generatory grupy $SU(3)_C$ powinny mieć związek z gluonami – nośnikami oddziaływań silnych.
- Generatory – np. macierze Gell-Manna λ_i (pomnożone przez $\hbar/2$) (grupa Lie), z bazą zawierająca operatory podwyższania.

$$\boxed{T^a = \frac{\lambda^a}{2}}$$

$$T_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$T_4 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad T_5 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & -i\\ 0 & 0 & 0\\ i & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad T_6 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$T_7 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}, \quad T_8 = \frac{\hbar}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix},$$

Grupa SU(3)

- Kwarki występują w trzech kolorach (są trypletami koloru):

$$q = \begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \end{pmatrix}$$

- Transformują się jako: $q \to U(x)q, U(x) \in SU(3)$.
- Jest 8 generatorów, zatem 8 gluonów:
- Gluony są kolorowe i oddziałują ze sobą.
- Na wzór elm wprowadzane są pola cechowania $D_\mu = \partial_\mu + ig_s G^a_\mu T^a$
- Grupa SU(3) jest nieabelowa.

Grupa SU(3) – rotacje pomiędzy kwarkami

- Każdy stan kwarkowy zapiszmy w postaci:

$$q_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

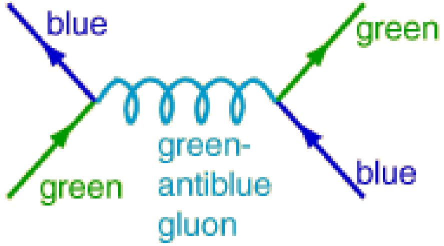
- Zadziałajmy macierzą Gell-Manna:

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^1 q_r = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} q_g$$

czyli generator T_1 zamienia część czerwonego kwarka na zielony....

Oznacza to wymianę gluonu $\bar{r}g$ $(g_{\bar{r}g})$



HyperPhysics

Grupa SU(3)

- MS ma symetrię flavourową SU(3) (przybliżoną, bo kwarki różnią się masą): $q = \begin{pmatrix} d \\ u \\ s \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} d \quad u & \bar{s} \\ s & \bar{u} \quad \bar{d} \end{array}$$

quark triplet — antiquark anti-triplet

- Najprostszą reprezentacją symetrii SU(3) flavourowej są multiplety hadronowe:

$$\begin{array}{c} n^0 \quad p^+ \\ \Lambda^0 \\ \Sigma^- \quad \Sigma^0 \quad \Sigma^+ \\ \Xi^- \quad \Xi^0 \end{array}$$

baryon octet

$$\begin{array}{c} \Delta^- \quad \Delta^0 \quad \Delta^+ \quad \Delta^{2+} \\ \Sigma^{*-} \quad \Sigma^{*0} \quad \Sigma^{*+} \\ \Xi^{*-} \quad \Xi^{*0} \\ \Omega^- \end{array}$$

baryon decuplet

$$\begin{array}{c} \bar{\Xi}^0 \quad \bar{\Xi}^+ \\ \bar{\Lambda}^0 \\ \bar{\Sigma}^- \quad \bar{\Sigma}^0 \quad \bar{\Sigma}^+ \\ \bar{p}^- \quad \bar{n}^0 \end{array}$$

anti-baryon octet

$$\begin{array}{c} \bar{\Omega}^+ \\ \bar{\Xi}^{*0} \quad \bar{\Xi}^{*+} \\ \bar{\Sigma}^{*-} \quad \bar{\Sigma}^{*0} \quad \bar{\Sigma}^{*+} \\ \bar{\Delta}^{2-} \quad \bar{\Delta}^- \quad \bar{\Delta}^0 \quad \bar{\Delta}^+ \end{array}$$

anti-baryon anti-decuplet

$$\eta'^0$$

meson singlet

$$\begin{array}{c} K^0 \quad K^+ \\ \eta^0 \\ \pi^- \quad \pi^0 \quad \pi^+ \\ \bar{K}^- \quad \bar{K}^0 \end{array}$$

meson octet

agh.edu.pl

Spin

- Spin jest podstawową własnością cząstki, jak masa i ładunek.
- Spin jest parametrem kwantowym – jest wartość jest skwantowana $s = n\frac{1}{2}\hbar$. Można go uważać za wewnętrzny moment pędu
- Eksperymentalne potwierdzenie spinu:
  - ✓ **Stern–Gerlach**: rozszczepienie wiązki srebra w polu magnetycznym → dowód na spin ½
  - ✓ **Efekt Zeemana**: rozszczepienie poziomów energetycznych w atomie w obecności pola magnetycznego

- Spin jest elementem grupy SU(2).
- Operatorem spinu są macierze Pauliego (czyli spin jest obserwablą związaną z macierzami Pauliego),
- Wartości własne – obserwowane wartości spinu (x$\hbar/2$).
- Wektory własne – czysty stan spinowy w danym kierunku.

$$\boxed{\hat{S} = \frac{\hbar}{2}\sigma}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$$

Spin

- Spin jest elementem grupy SU(2).
- Operatorem spinu są macierze Pauliego (czyli spin jest obserwablą związaną z macierzami Pauliego

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2}\sigma \qquad S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$$

$$S_z|\psi\rangle = s_z|\psi\rangle \qquad \frac{\hbar}{2}\sigma_z|\psi\rangle = s_z|\psi\rangle \qquad \sigma_z|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

Szukamy λ i $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, tak by:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$\lambda = +1$: wektor własny $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ → **spin "w górę"** wzdłuż z,

$\lambda = -1$: wektor własny $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ → **spin "w dół"** wzdłuż z,

Wartości własne: $\lambda = \pm 1$, co odpowiada rzeczywistym wartościom spinu:

$$s_z = \pm\frac{\hbar}{2}$$

Spin

- Przestrzeń spinowa dla fermionu oparta jest o bazę:

$$|\uparrow\rangle = \alpha = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad |\downarrow\rangle = \beta = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

- Policzmy np. $S_z\,\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\qquad S_z\,\beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

- W wyniku pomiaru spinu dostaniemy wartość własną odpowiedniego operatora spinu.

- Stan spinowy cząstki opisany jest ogólnie jako dwuwymiarowy wektor:

$$\psi = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

- A skoro spin ma symetrię grupy SU(2), to: $\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\end{pmatrix} = U(\theta)\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$

  a $U(\theta)$ to macierze 2x2 postaci $U(\theta) = e^{-i\frac{1}{2}\theta\sigma}$

- Transformacja $U(\theta)$ przekształca (obraca o kąt θ) stan spinowy fermionu (spinor).

Spin – obrót w SU(2)

- Policzmy obrót stanu spinowego wokół osi z:

$$U_z(\theta) = e^{-i\frac{1}{2}\theta\sigma_z} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$U_z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \qquad U_z(\theta)|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Spinor zmienił się o globalną fazę – niemierzalną, stan się nie zmienił $|\psi'\rangle = e^{-i\theta/2}|\uparrow\rangle$
- Obrót wokół osi z obraca spin w płaszczyźnie xy – efekt nie jest mierzalny