Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
AGH University of Krakow

Uczelnia Badawcza
Inicjatywa Doskonałości

Model Standardowy

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek

Mechanika klasyczna

- Lagranżjan
- Hamiltonian
- Zasada najmniejszego działania

Lagranżjany pól

Równianie Schrodingera

Równanie Kleina-Gordona

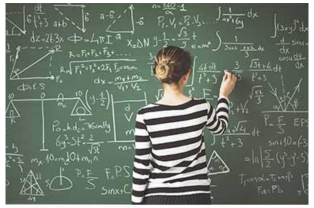
Funkcja Lagrange'a

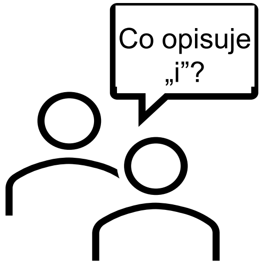
- Model Standardowy opiera się na Kwantowej Teorii Pola (QFT).
- Zarówno w mechanice klasycznej, jak i QFT w opisie dynamiki układu pomocna jest funkcja Lagrange'a (tzw. Lagranżjan)

Mechanika klasyczna:

- Równanie ruchu: $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ wyprowadzić można znając lagranżian i równania Eulera-Lagrange'a.
- Dla sił zachowawczych mamy: $\vec{F} = -\nabla U$.
- Lagrażian to funkcja uogólnionych współrzędnych q_i i ich pochodnych czasowych $\dot{q}_i$
- Lagranżian to różnica energii kinetycznej i potencjalnej:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T - U$$





- Równania Eulera-Lagrange'a:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}$$

Funkcja Lagrange'a

Przykłady (równania E-L we współrzędnych uogólnionych), wyznaczyć równania ruchu :

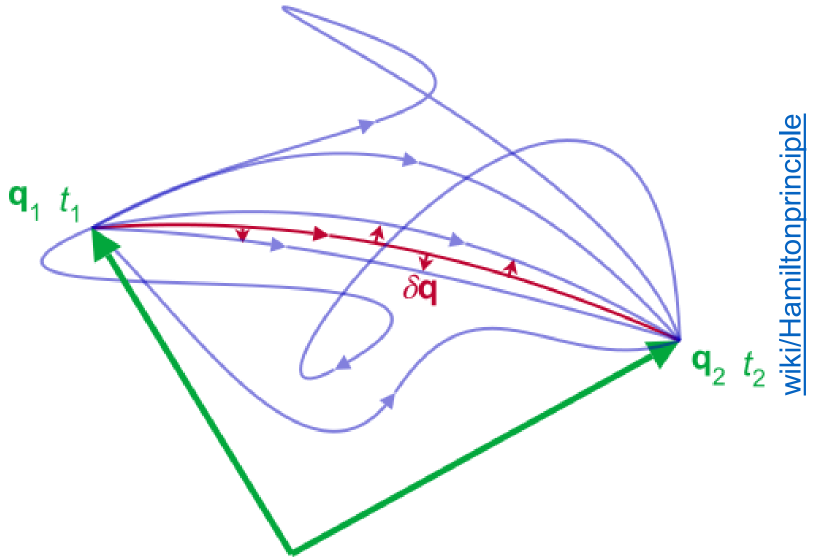
- Ruch jednej cząstki w polu o energii potencjalnej $U(\vec{r})$, $q_i = \{x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$
- Ruch wahadła matematycznego (energia kinetyczna i potencjalna jako funkcje $q_i \equiv \theta$)

zastosować równania E-L

Zasada Hamiltona

Zasada Hamiltona (zasada najmniejszego działania):

- opis układów dynamicznych z wykorzystaniem analizy wariacyjnej.
- zastosowanie w mechanice klasycznej i teorii pola.



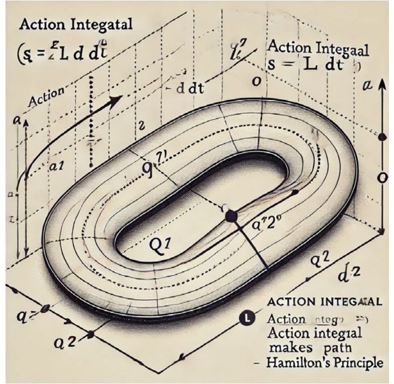
Ruch układu fizycznego odbywa się w taki sposób, że całkowita wartość działania S, zdefiniowanego jako całka z funkcji Lagrange'a , przyjmuje wartość ekstremalną (najczęściej minimalną).

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt$$

$$\boxed{\frac{\delta S}{\delta q_i(t)} = 0}$$

zasada najmniejszego działania

Funkcja Hamiltona



- Zasada Hamiltona (w większości zastosowań, które nas tu interesują) jest równoważna równaniom Eulera-Lagrange'a (N punktów materialnych, k więzów, $n = 3N - k$ stopni swobody, czyli n równań różniczkowych 2-go rzędu :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1, 2, \ldots, n$$

- Jest jednak czasem wygodniejsza – zamiast n równań różniczkowych 2-go rzędu, mamy $2n$ równań 1-go rzędu.
- wprowadzamy pędy uogólnione:

$$\boxed{\dot{p}_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}, i = 1, 2, \ldots, n}$$

- Definiujemy funkcję Hamiltona:

$$\boxed{H = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i\, \dot{p}_i \; - \; L(q_i, \dot{q}_i, t)}$$

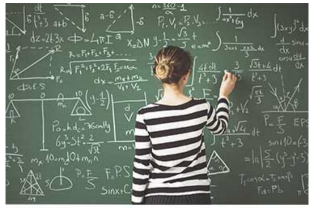
Równania Hamiltona

- Równania Hamiltona jest to układ $2n$ równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial \dot{H}}{\partial \dot{p}_i}\ ; \qquad p_i = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}\ , \qquad i = 1, 2, \dots, n}$$

- Równania te nazywane tez są równaniami kanonicznymi

- Hamiltonian jest często (gdy współrzędne uogólnione nie zależą jawnie od czasu) sumą energii kinetycznej i potencjalnej: $H = T + V$ (pokazać)

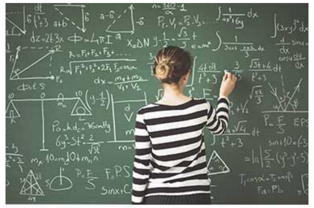


Przykład:
Rozpatrz ruch punktu materialnego w polu sił potencjalnych, napisz Hamiltonian, działanie i wyprowadź równania ruchu

Równania Hamiltona - przykłady

Hamiltonian jest często (gdy współrzędne uogólnione nie zależą jawnie od czasu) sumą energii kinetycznej i potencjalnej: $H = T + V$ (pokazać)

Rozpatrz ruch punktu materialnego w polu sił potencjalnych, napisz Hamiltonian, działanie i wyprowadź równania ruchu.



Równanie Schrödingera

Równania Hamiltona w mechanice kwantowej nazywają się …. równaniem Schrödingera:

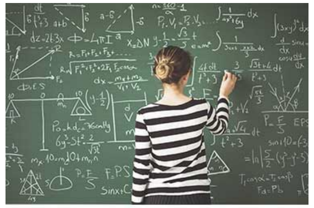
$$H = T + V \qquad\qquad H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

- wprowadzany operatory energii i pędu: $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$
- Zatem całkowita energia cząstki $E = T + V$ zapisana jest jako:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{x},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(\vec{x},t)}{\partial x^2} + \hat{V}(\vec{x},t)\Psi(\vec{x},t)$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right)\psi$$

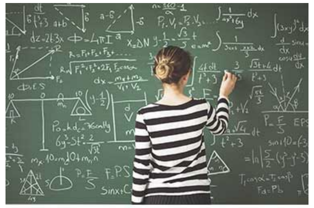
- Rozwiązanie R.S. $\Psi(\vec{x},t)$ zawiera pełną informację o stanie kwantowym.
- Funkcja falowa nie ma interpretacji fizycznej, ale jej kwadrat modułu $|\Psi(\vec{x},t)|^2$ określa gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w danym miejscu i czasie.



- Równanie ciągłości – zasada zachowania prawdopodobieństwa

Równanie Schrödingera – równanie ciągłości

gęstości prawdopodobieństwa:



$$\rho(x,t) \equiv \Psi\,\Psi^* = |\Psi(\vec{x},t)|^2$$

prąd prawdopodobieństwa:

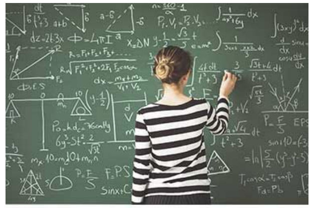
$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\,\nabla\Psi^*\right)$$

- Równanie ciągłości – zasada zachowania prawdopodobieństwa:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0$$

- Zmiana gęstości prawdopodobieństwa jest możliwa, gdy mamy „wypływ” prawdopodobieństwa
- Te same rachunki wykonamy dla równania Kleina-Gordona i Diraca

Równanie Schrödingera – równanie ciągłości



$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi.$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + V\psi^*.$$

Pomnóżmy pierwsze równanie przez ψ^*, a drugie przez ψ, i odejmijmy:

$$i\hbar\left(\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right).$$

Lewą stronę można zapisać jako $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(|\psi|^2)$, a prawą jako $-\nabla\cdot\mathbf{j}$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0.$$

Mechanika relatywistyczna - przypomnienie

- MS jest opisywany przez równania relatywistyczne.
- Obiekty MS opisywane są w 4-wymiarowej przestrzeni.
  - wektor kontrawariantny (def): $x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$
  - kowariantny tensor metryczny (def):

$$g_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  - wektor kowariantny: $x_{\mu} = g_{\mu\nu}\, x^{\nu} == (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$

- Iloczyn skalarny czterowektorów:

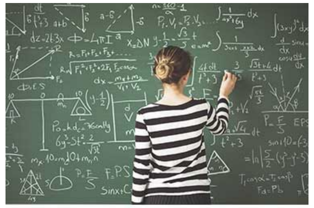
$$x \cdot y = g_{\mu\nu}\, x^{\mu} y^{\nu} = x^{\mu} y_{\mu}$$

Transformacja Lorentza

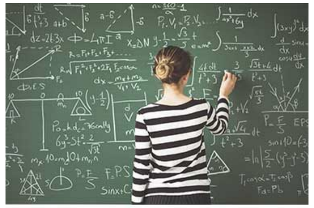
Transformacja Lorentza jest to takie przekształcenie, które nie zmienia iloczynu skalarnego czterowektorów

$$x \rightarrow x' = \Lambda\, x$$

$$x' \cdot y' = x \cdot y$$



Funkcja Lagrange'a - pola



- W QFT zamiast cząstek mamy pola, których wzbudzenia interpretujemy jako cząstki.
- Pola są ciągłymi funkcjami współrzędnych czasoprzestrzennych x^{μ}.
- W QFT wprowadza się **gęstość lagranżianu-** to funkcja pól i pochodnych pól:

$$L(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow \mathcal{L}\big(\phi_i(x^{\mu}), \partial_{\mu}\phi_i\big)$$

- Gęstość lagranżjanu jest zdefiniowana dla punktu w czasoprzestrzeni.
- Jeśli L (lagtanżjan) określimy jako energię, skalar opisujący cały układ, to gęstość Lagranżjanu $\mathcal{L}$ określa energią na jednostkę objętości

$$L = \int \mathcal{L}\, d^3x$$

Niezbędnik relatywistyczny:

$$x^{\mu} = (x^0, \vec{x}) = (ct, x, y, z)$$

$$x_{\mu} = (x^0, -\vec{x}) = (ct, -x, -y, -z)$$

? (zad*)

$$\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

$$\partial^{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$$

* W jaki sposób transformują się pochodne czterowektorów, jako wektory ko- czy kontrawariantne?

Pola - wymagania

- Pole $\phi(x^\mu)$ w każdym punkcie czasoprzestrzeni powinno się transformować wzg. transformacji Lorentza (TL) jak: skalar lub wektor lub tensor.

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad x'^\mu = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

ten sam punkt czasoprzestrzeni - $\phi(x^\mu) = \phi'(x'^\mu)$

uwaga: współrzędne „' ” odnoszą się zawsze do układu po przekształceniu. np. TL lub symetrii gauge

- Rozważmy teraz małą zmianę pola $\phi(x^\mu)$:

$$\boxed{d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}\, dx^\mu}$$

powinna być niezmiennicza wzgl. TL (Lorentz Inwariant – LI)

dx^μ jest 4-wektorem kontrawariantnym,
jakim zatem wektorem powinno być $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$?

Pochodne czterowektorów

- Operatory pochodnych (4-gradienty): $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$ $\quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$

  transformują się jak: $\partial_\mu \longrightarrow \partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \, \partial_\mu$ $\quad \partial^\mu \longrightarrow \partial'^\mu = \Lambda^\nu_\mu \, \partial^\mu$

  odwrotna TL $\qquad$ TL

niespodziewane?

- Jeśli zatem $\phi(x^\mu)$ jest funkcją skalarną, to pochodne:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}, \nabla\phi\right) \equiv \partial_\mu\phi \qquad \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}, -\nabla\phi\right) \equiv \partial^\mu\phi$$

kontrawariantny 4-wektor $\qquad$ kowariantny 4-wektor

- Operator d'Alamberta: $\Box \equiv g^{\mu\nu}\partial^\mu \, \partial^\mu = \partial_\mu \partial^\mu = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \nabla^2\right)$

  - również jest niezmiennikiem TL

Gęstość lagranżjanu

- W QFT „wystarczy” podać odpowiedni lagranżjan i mamy dobrą teorię dla zadanych pól.
- Podobnie, jak w mechanice klasycznej, zasada minimalnego działania prowadzi do równań typu Eulera – Lagrange’a, czyli równań pola

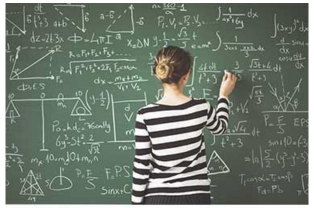
$$\boxed{\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0}$$

Pole skalarne – $\mathcal{L}$

Przykład: swobodna (nie oddziałująca) cząstka skalarna (spin 0) o masie m opisana jest przez pole skalarne ϕ i gęstość lagrangianu $\mathcal{L}$:

$$\boxed{\mathcal{L}_s = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2}$$

Jakie równanie dostaniemy z równań Eulera – Lagrange'a?



Niezbędnik:

Jak rozumieć zapis $(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)$?

Stosowana jest tzw. konwencja sumowania po powtarzających się wskaźnikach, czyli *:

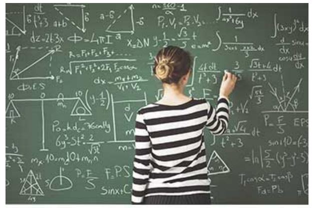
$$(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) \equiv (\partial_0 \phi)(\partial_0 \phi) - (\partial_1 \phi)(\partial_1 \phi) - (\partial_2 \phi)(\partial_2 \phi) - (\partial_3 \phi)(\partial_3 \phi)$$

* powtórka z relatywistyki w zapisie kowariantnym

Pole skalarne – $\mathcal{L}$

Przykład: swobodna (nie oddziałująca) cząstka skalarna (spin 0) o masie m opisana jest przez pole skalarne ϕ i gęstość lagrangianu $\mathcal{L}$:

$$\boxed{\mathcal{L}_s = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2}$$



Jakie równanie dostaniemy z równań Eulera – Lagrange'a?

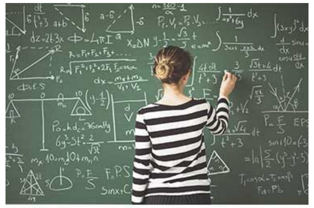
…..(dokończyć)…

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = m^2 \phi$$

równanie Kleina-Gordona

Zadanie: Zapisać równanie Kleina-Gordona we współrzędnych sferycznych, a następnie pokazać, że funkcja (tzw. potencjał Yukawy) $\Psi(r) = \frac{g_0}{4\pi r} e^{-r/R}$, gdzie $g_0, R = \frac{1}{m}$ to stałe, jest jego rozwiązaniem. Jak zinterpretować $\Psi(r)$ dla $m = 0$?

Pole skalarne – $\mathcal{L}$



$$\boxed{\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}=0}$$

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi-m^2\phi^2)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=-m^2\phi$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}=\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\right)=\partial_\mu(\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi)=\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi$$

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi-m^2\phi=0$$

$$\Box=\partial^\mu\partial_\mu=\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2$$

$$(\Box-m^2)\phi=0$$

równanie Kleina-Gordona:

- dla $m=0$ staje się równaniem falowym i opisuje pole elektromagnetyczne
- dla $m\neq 0$ opisuje swobodną cząstkę o spinie 0, człon masowy oznacza np. pole Higgsa

wyprowadzenie

Równanie Kleina-Gordona

Oskar Klein

Walter Gordon

Równanie Schrödingera (Nobel 1933r), :

- opisuje cząstki nierelatywistyczne,
- nie jest LI, ponieważ pochodne czasowe są I rzędu, przestrzenne II rzędu (czas i przestrzeń nie są traktowane tak samo).

Zacznijmy zatem od niezmiennika: $E^2 - p^2 = m^2$

lub jego postaci kowariantnej $p^\mu p_\mu - m^2 = 0$ (jednostki naturalne $c = 1$)

- Dla operatorów pędu i energii mamy:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi + \nabla^2\Psi = m^2\Psi \qquad (-\partial^\mu\partial_\mu - m^2)\psi = 0$$

Równanie Kleina-Gordona:

- rozwiązanie w postaci fali laskiej:$\Psi(\vec{x}, t) \propto e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}$
- opisuje cząstki relatywistyczne,
- ma rozwiązania o ujemnej energii
- prowadzi do ujemnej gęstości prawdopodobieństwa (wyprowadzić)

Pole wektorowe – $\mathcal{L}$

- Pole swobodnej cząstki wektorowej (o spinie 1, np. fotonu) opisane jest przez czterowektor A^μ i gęstość lagrangianu:

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) + \frac{1}{2} m^2 A^\nu A_\nu$$

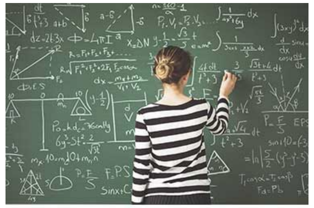
- Definiujemy tzw. tensor elektromagnetyczny $F^{\mu\nu} \equiv (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$ i zapisujemy:

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^\nu A_\nu}$$

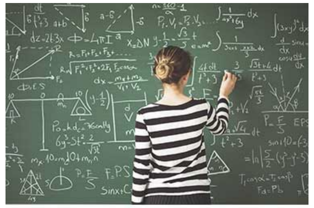
- A równania pola wyglądają tak:

$$\partial^\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$$

- Jak mamy do czynienia np. z fotonem ($m = 0$), to powinny z tego wyjść równania Maxwella…



Pole wektorowe – $\mathcal{L}$



- Gdy:
$$A^{\mu} = (\phi, \vec{A})$$
$$A_{\mu} = (\phi, -\vec{A})$$
$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}$$
$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$$

- Wyznaczyć elementy tensora elektromagnetycznego:
$$F^{\mu\nu}$$
$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

- Napisać pole wektorowe Proca dla $m = 0$.

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad\qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Symetria cechowania $\mathcal{L}$agranżianu

1. Globalna symetria cechowania – mnożenie Ψ przez macierz unitarną, czyli:

$$\Psi \rightarrow U\Psi$$

$$U = e^{i\phi}$$

$$\Psi' = e^{i\phi}\,\Psi$$

jest to obrót funkcji Ψ i kąt ϕ (transformacja fazy).

gdy $\phi \equiv q\lambda$, to widać tu grupę $U(1)$ z generatorem λ.

Mamy też $\Psi^* = e^{-i\phi}\,\Psi^*$, co powoduje, że w $\Psi^*\Psi$ czynniki fazowe się kasują $\Rightarrow$ Ψ jest niezmiennicze wgl. globalnej zmiany fazy, wybór fazy jest umowny.

Pochodna fcji falowej transformuje się jak: $\frac{\partial\Psi'}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu\Psi' = e^{iq\lambda}\,\Psi$

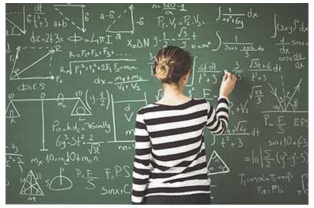
2. Teoria powinna jednak być niezmiennicza względem LOKALNEJ zmiany fazy $\phi(x)$:

$$\Psi \rightarrow e^{iq\lambda(x)}\Psi$$

co oznacza lokalną symetrię cechowania (*local gauge invariance of SM*), a z nią oddziaływanie między cząstkami

Lokalna symetria cechowania pola elm

Zadanie: Pokazać jak lokalna transformacja cechowania $\Psi \rightarrow e^{i\theta(x)}\Psi$ lagranżjanu pola elektromagnetycznego wprowadza oddziaływania elektronu z fotonem.



Podsumowując

- Zaczęliśmy od lagranżjanu cząstki swobodnej (elektronu).
- Wymagamy lokalnej symetrii cechowania, czyli niezmienniczości względem zmiany fazy:

$$\Psi \rightarrow U\,\Psi = e^{iq\lambda(x)}\Psi$$

  Jest to unitarna transformacja, która tworzy grupę U(1).

- Wymaganie to spowodowało dodanie nowego pola – pola cechowania A_μ, które reprezentuje pole – bozon cechowania, oddziałujący z elektronem, czyli foton.

  Dodatkowy warunek, który będzie miał wiele konsekwencji w oddz. elektrosłabych – bozon ten musi być bezmasowy!

- Pole cechowania pojawiło się po podstawieniu:

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

- Pole cechowania musiało być przy tym niezmiennicze względem transformacji:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\lambda(x)$$

Efekt końcowy: opis oddziaływania pomiędzy elektronem a fotonem!