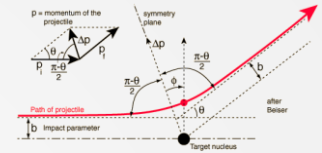


Oddziaływanie Promieniowania Jonizującego z Materią

Tomasz Szumlak, A. Obłąkowska-Mucha

„Stopping power” (poprzedni wykład)



W zastosowaniach HEP powszechnie używa się zmodyfikowanej formuły Bethe'go, zwaną równaniem Bethe'go-Bloch'a:

$$\left\langle -\frac{dE}{dx} \right\rangle = \kappa Z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{MAX}}{I^2} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right] \quad [1] \text{ PDG}$$

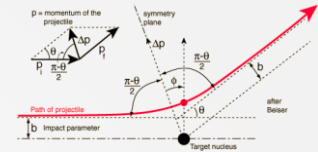
$$\kappa = 4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 = 0.3071 \text{ MeV cm}^2/g$$

Nowości to:

- ☐ Czynniki Lorentza γ
- ☐ Poprawka „gęstościowa” na straty jonizacyjne, istotna dla cząstek ultra-relatywistycznych
- ☐ T_{MAX} - maksymalna energia kinetyczna przekazana elektronowi
- ☐ Jednostki w jakich mierzymy straty energii - $\left[\frac{\text{MeV} \cdot \text{cm}^2}{g} \right]$

Powyższy zapis używany jest, aby podkreślić, że straty energii cząstek naładowanych (o tym samym ładunku) są jedynie funkcją β (dla cząstek o najwyższych energiach formuła powyższa zaczyna również zależeć od masy cząstki jonizującej – dE/dx umożliwia identyfikację cząstek!)

„Stopping power“ (VI)

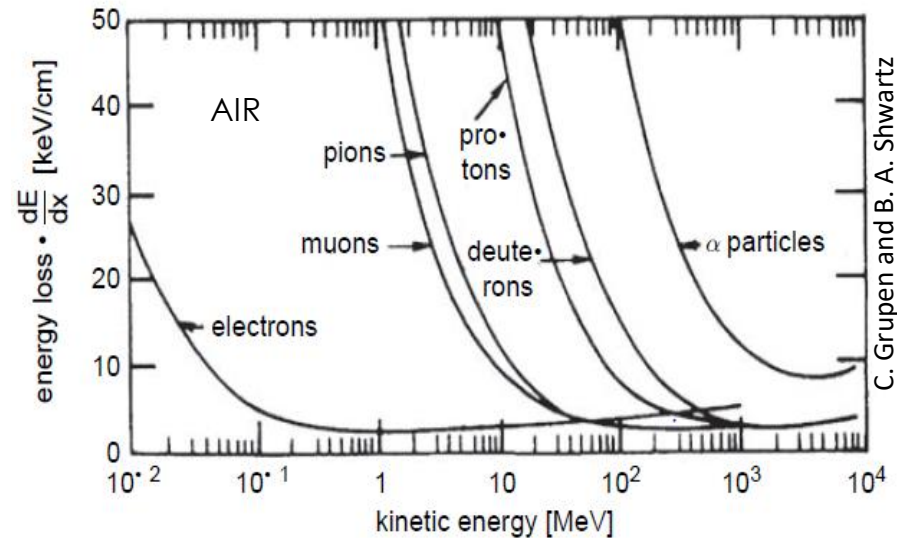


$$-\frac{dE}{dx} = \kappa Z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 E_{k,max}}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right]$$

[2] C. Grupen,
B. Schwartz

Absorber	$\frac{dE}{dx} \Big _{\min} \left[\frac{\text{MeV}}{\text{g/cm}^2} \right]$	$\frac{dE}{dx} \Big _{\min} \left[\frac{\text{MeV}}{\text{cm}} \right]$
Hydrogen (H ₂)	4.10	$0.37 \cdot 10^{-3}$
Helium	1.94	$0.35 \cdot 10^{-3}$
Lithium	1.64	0.87
Beryllium	1.59	2.94
Carbon (Graphite)	1.75	3.96
Nitrogen	1.82	$2.28 \cdot 10^{-3}$
Oxygen	1.80	$2.57 \cdot 10^{-3}$
Air	1.82	$2.35 \cdot 10^{-3}$
Carbon dioxide	1.82	$3.60 \cdot 10^{-3}$
Neon	1.73	$1.56 \cdot 10^{-3}$
Aluminium	1.62	4.37
Silicon	1.66	3.87
Argon	1.52	$2.71 \cdot 10^{-3}$
Titanium	1.48	6.72
Iron	1.45	11.41
Copper	1.40	12.54
Germanium	1.37	7.29
Tin	1.26	9.21
Xenon	1.25	$7.32 \cdot 10^{-3}$
Tungsten	1.15	22.20
Platinum	1.13	24.24
Lead	1.13	12.83
Uranium	1.09	20.66
Water	1.99	1.99
Lucite	1.95	2.30
Shielding concrete	1.70	4.25
Quartz (SiO ₂)	1.70	3.74

$$\kappa = 4\pi N_A r_e^2 m_e^2 c^2 = 0.3071 \frac{\text{MeV}}{\text{g/cm}^2}$$



C. Grupen and B. A. Schwartz

Straty energii (jednostki)

$$-\frac{dE}{dx} = 2\kappa \left[\ln \left(\frac{E_{k\max}}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right]$$

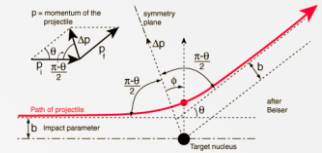
$$\left[\frac{dE}{dx} \right] = \frac{\text{MeV}}{\text{g/cm}^2}$$

$$\kappa = 4\pi N_A r_e^2 m_e^2 c^2 = 0.3071 \frac{\text{MeV}}{\text{g/cm}^2}$$

$[dx] = \text{g/cm}^2$, bo $d\mathbf{x} = \rho d\mathbf{s}$, $[\rho] = \text{g/cm}^3$
gdzie $d\mathbf{s}$ to długość, a $d\mathbf{x}$ to efektywnie gęstość powierzchniowa

<https://meroli.web.cern.ch/EnergyLossCalculation.html>

Parametr I



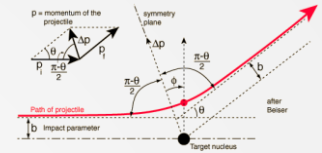
- ❑ Formuła BB jest bardzo kłopotliwa i podlegała wielu „korektom” na przestrzeni lat – formuła pół-empiryczna...
- ❑ Zaczniemy naszą dyskusję od **średniego potencjału wzbudzenia I**
- ❑ W przybliżeniu jest to iloczyn średniej orbitalnej częstości elektronów (w/g formuły Bohr’a) i stałej Planck’a
- ❑ W praktyce, konfiguracja powłok elektronowych jest tak skomplikowana, że nie da się wyznaczyć tego parametru nawet numerycznie
- ❑ W efekcie, parametr ten wyznaczono doświadczalnie na drodze pomiarów... $\frac{dE}{dx}$ dla różnych materiałów... $I \sim 10 \text{ eV}$

$$\frac{I}{Z} = 12 + \frac{7}{Z} \text{ eV}, Z < 13$$

$$I = 16 Z^{-0.6} \text{ eV}, Z > 1$$

$$\frac{I}{Z} = 9.76 + 58.8 \cdot Z^{-1.19} \text{ eV}, Z \geq 13$$

Elektrony δ

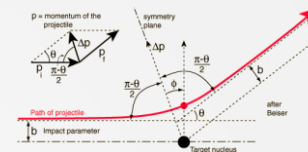


- ❑ Z uwagi na to, że główny mechanizm straty energii na drodze jonizacji polega na oddziaływaniu z elektronami atomowymi, powinniśmy się przyjrzeć dokładnie temu procesowi...
- ❑ „From the top” – cząstki naładowane, przechodzące przez materię (detektor) mogą **wzbudzać atomy** (emisja fotonów) albo przekazać wystarczającą **energię** elektronowi, aby **usunąć go z atomu** – jonizacja
- ❑ Istotnym problemem jest tutaj **maksymalna energia** jaką cząstki penetrujące mogą przekazać elektronom (**dla czego?**)
- ❑ $E_k^{(Max)}$ będzie zależeć od masy spoczynkowej cząstki oraz od jej pędu:

$$p = mv = \gamma m_0 \beta c, \gamma = \frac{E}{m_0 c^2}$$

$$E_k^{(Max)} = \frac{2m_e p^2}{m_0^2 + m_e^2 + \frac{2m_e E}{c^2}}$$

Elektrony δ



- Ta maksymalna strata energii kinetycznej cząstki jest oczywiście powiązana z jej energią całkowitą:

$$E_k^{(Max)} = E - m_0 c^2 = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} - m_0 c^2$$

- Pouczająca jest analiza asymptotyczna tych równań

- Jeżeli energia cząstki jest niezbyt duża ($\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} \sim 10$, $\frac{2\gamma m_e}{m_0} \ll 1$) oraz jej masa jest dużo większa od masy elektronu:

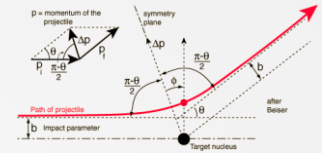
$$E_k^{(Max)} \approx 2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2$$

Np. mion, dla którego $\gamma = 10$, $E = 1.06 \text{ GeV}$, $m_\mu c^2 = 106 \text{ MeV}$

może przekazać maksymalnie $E_k^{(Max)} \approx 100 \text{ MeV}$

- Możemy również założyć, że cząstki posiadają bardzo dużą energię oraz masę dużo większą niż masa elektronu, wówczas...

Elektrony δ



$$E_k^{(Max)} = \frac{p^2}{\gamma m_0 + \frac{m_0^2}{2m_e}}$$

- Dla cząstek o dużych energiach mamy:

$$E_k \approx E, E \approx pc \rightarrow E_k^{(Max)} \approx \frac{E^2}{E + \frac{m_0^2 c^2}{2m_e}}$$

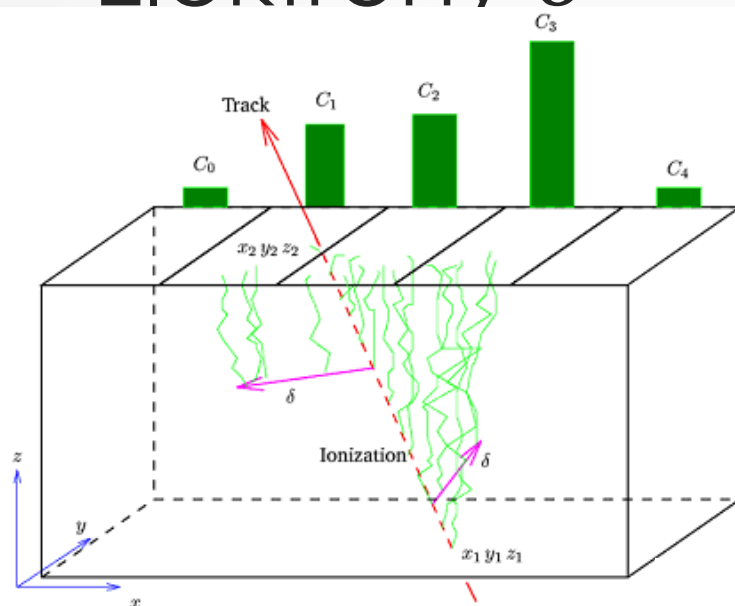
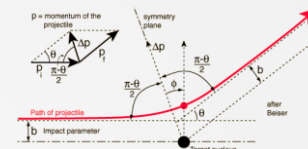
- W przypadku ultra-relatywistycznym:

$$E \gg \frac{m_0^2 c^2}{2m_e} \rightarrow \underline{\underline{E_k^{(Max)} \approx E}}$$

- W przypadku, gdy cząstkami penetrującymi są elektrony

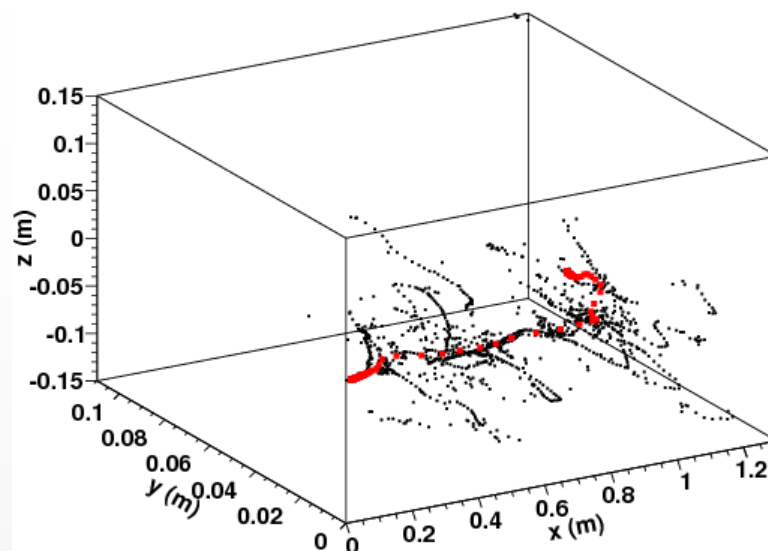
$$E_k^{(Max)} = E - m_e^2 c^2$$

Elektrony δ

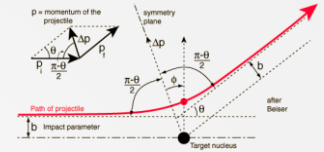


- ❑ Elektrony δ mogą mieć bardzo istotne znaczenie dla detektorów pozycjoczułych
- ❑ Wysokoenergetyczne „wybite” elektrony mogą prowadzić do wtórnej jonizacji
- ❑ Zmieniają też istotnie rozkład wygenerowanego ładunku
- ❑ Elektrony δ mogą „uciec” z absorbera

- ❑ Prowadzi to do dużej komplikacji w procesie modelowania odpowiedzi detektorów
- ❑ Może wpłynąć istotnie na pozycję cząstki jaką otrzymujemy podczas rekonstrukcji

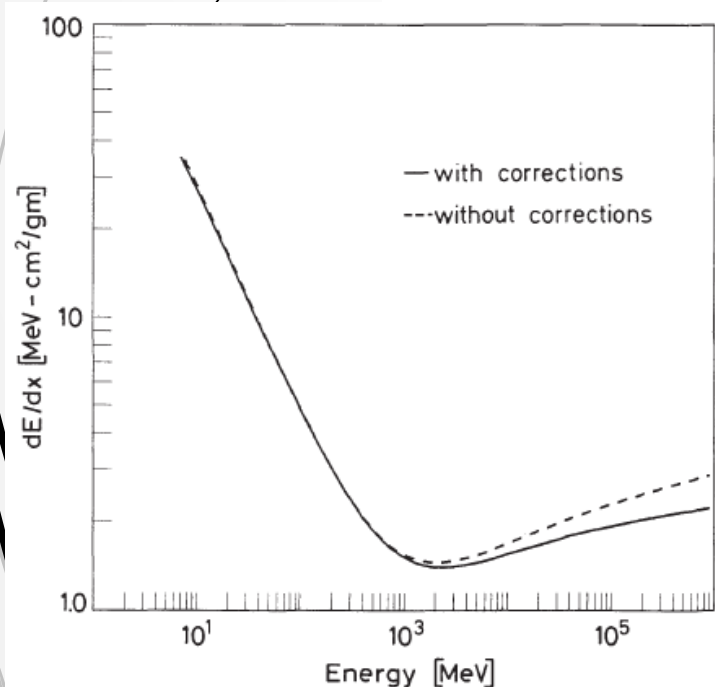
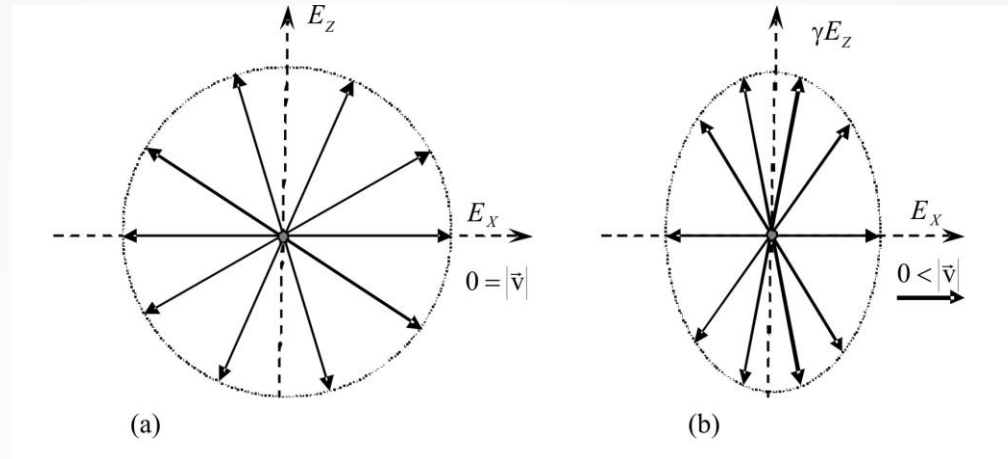
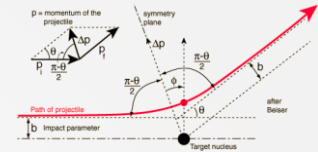


Poprawka δ



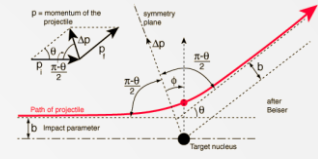
- ❑ Na początku „Health Hazard Warning” – poprawka δ nie ma nic wspólnego z elektronami δ ...
- ❑ Poprawka ta nazywa się również poprawką gęstościową i ma duże znaczenie dla cząstek o b. dużych energiach
- ❑ Efekt ten możemy zrozumieć tak:
 - Cząstka naładowana powoduje poza jonizacją również **polaryzację** atomów materiału, przez który przechodzi
 - Im **większa gęstość** tym efekt jest **wyraźniejszy**
 - Ta polaryzacja powoduje „**ekranowanie**” elektronów, które znajdują się dalej od toru cząstki penetrującej
 - Powoduje to z kolei, że oddziaływanie z elektronami „dalszymi” jest **mniej prawdopodobne**
 - W efekcie zaobserwujemy **mniejszą jonizację** (stratę energii) niż moglibyśmy się spodziewać (BB zawyża faktyczne straty)

Poprawka δ c.d.

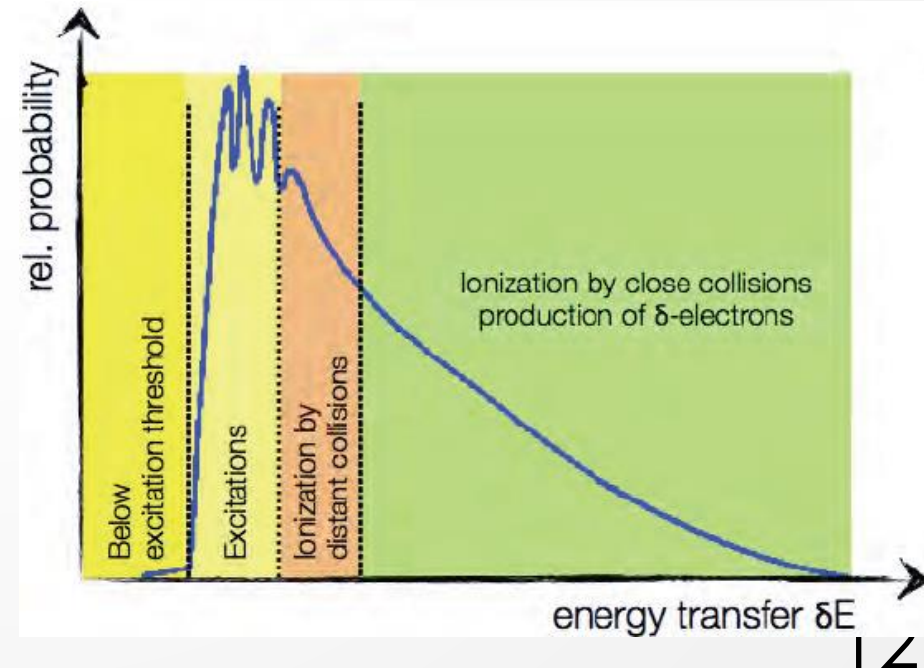


- ❑ Gdy cząstka naładowana porusza się z dużymi prędkościami jej pole elektrostatyczne ulega odkształceniu
- ❑ Jest to efekt relatywistyczny
- ❑ Gdyby nie było ekranowania, prawdopodobieństwo oddziaływań z „dalekimi” elektronami ulegało by zwiększeniu
- ❑ Pomiary eksperymentalne pokazują **efekt przeciwny**

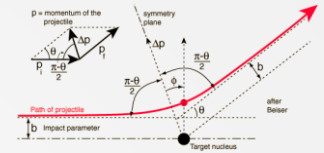
Inne poprawki



- ❑ Poprawka na energię wiązania – poprawka powłokowa – ma znaczenie dla cząstek „b. wolnych”, dla których prędkość orbitalna elektronów nie jest zaniedbywalna
- ❑ Poprawka związana ze strukturą cząstek penetrujących
- ❑ Poprawka na przekrój czynny oddziaływań elm. (procesy wyższego rzędu)
- ❑ Efekty związane z emisją promieniowania hamowania dla cząstek ultra-relatywistycznych
- ❑ Spin cząstek penetrujących
- ❑ Wydaje się, że nie ma dla nas ratunku... **Nie jest tak źle**, w zasadzie uwzględnienie poprawki gęstościowej oraz powłokowej załatwiają sprawę!

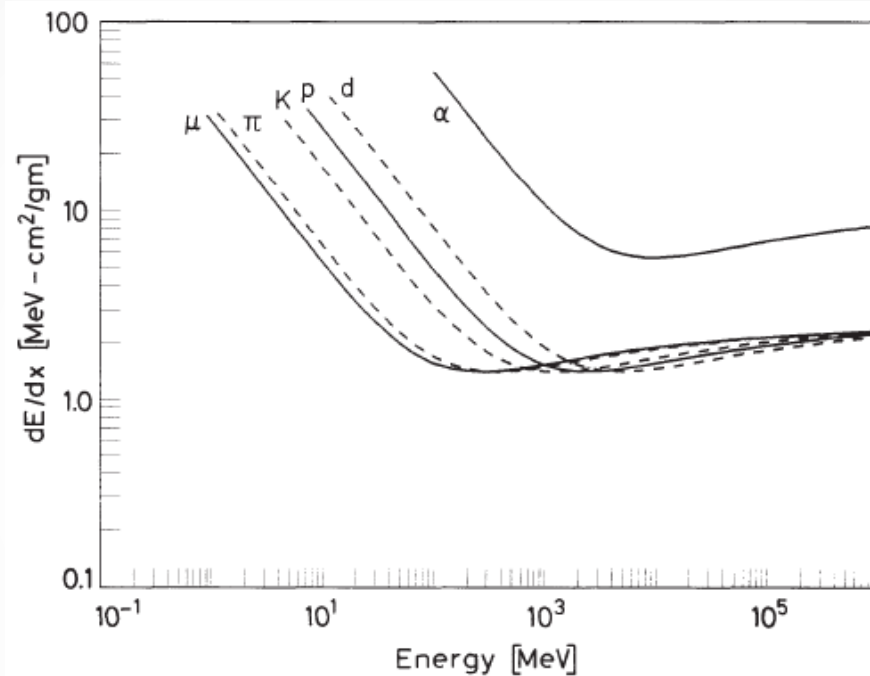
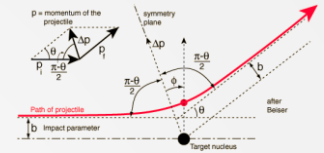


Zależność energetyczna



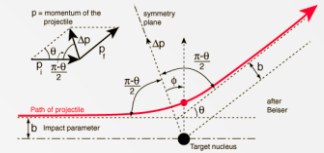
- ❑ Jaki obraz strat jonizacyjnych dostaniemy, gdy użyjemy formuły BB dla **różnych typów cząstek** w funkcji ich **energii**?
- ❑ Zaczynając od „niskich” energii straty jonizacyjne **maleją szybko** wraz ze wzrostem energii ($\sim \frac{1}{\beta^2}$)
- ❑ W pobliżu $\beta \approx 0.96$ szybkość strat jonizacyjnych **osiąga minimum** – minimalnie jonizujące cząstki (MIP)
- ❑ Straty energii na jonizację zaczynają następnie wzrastać dla cząstek relatywistycznych – wzrost ten ma charakter logarytmiczny ($\frac{1}{\beta^2} \approx \text{const}$)
- ❑ Wzrost relatywistyczny strat jonizacyjnych jest silnie tłumiony przez poprawkę gęstościową (plateau)
- ❑ Dla b. małych energii BB załamuje się, straty jonizacyjne osiągają maksimum a następnie gwałtownie maleją

Zależność energetyczna

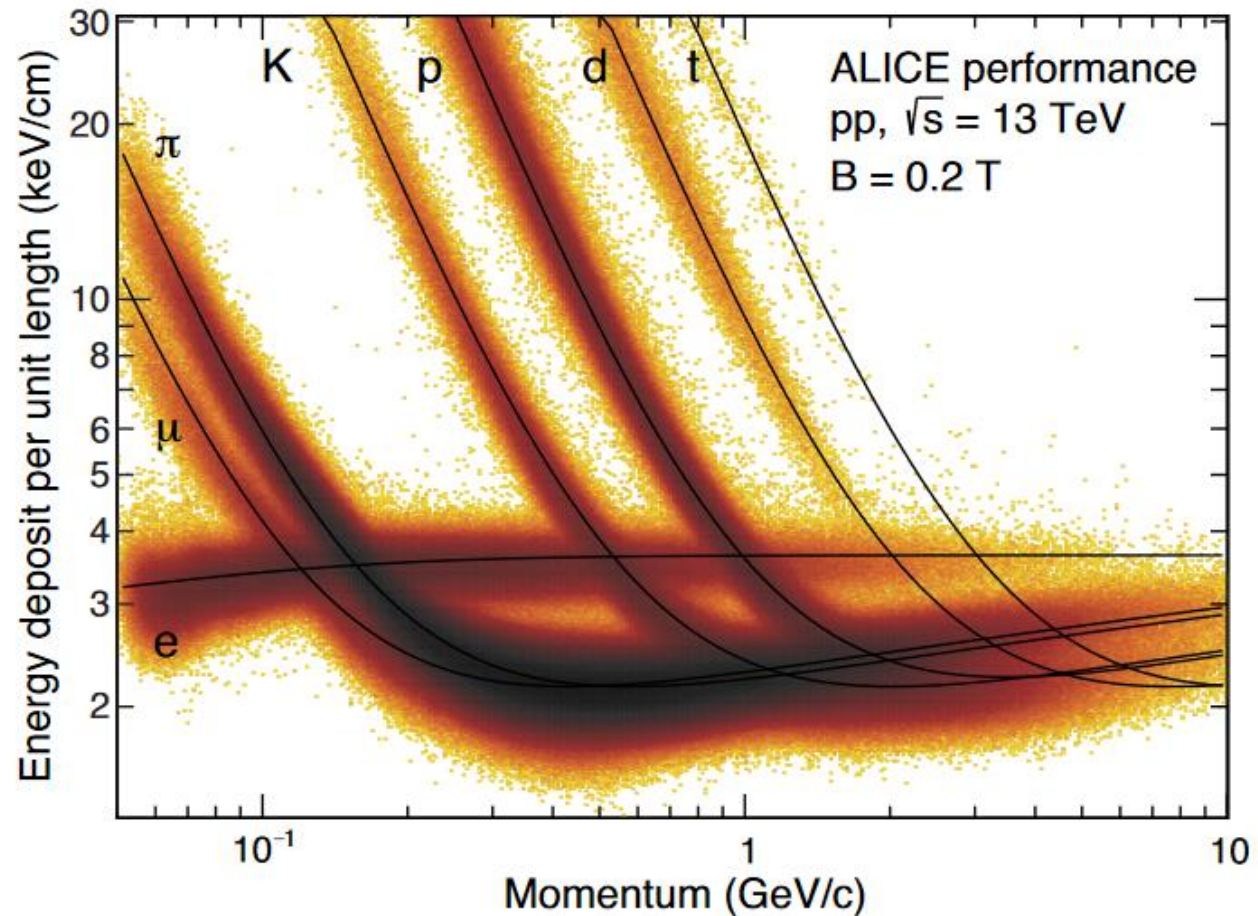


- ❑ Wartość minimalnej straty energii $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{Min}$ jest praktycznie taka sama dla cząstek o tym samym ładunku
- ❑ Poniżej minimum krzywe strat energii są różne, co można wykorzystać do **identyfikacji cząstek** (w tym zakresie energii)

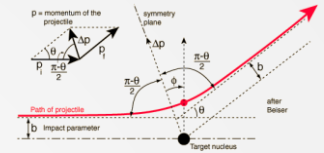
Zależność energetyczna



$$\beta\gamma = \frac{p}{m}$$

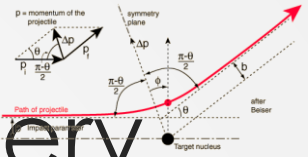


Fluktuacje strat energii



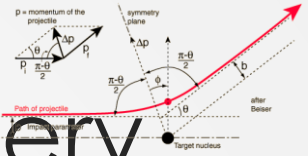
- ❑ Zależność BB opisuje **średnie** straty energii.
- ❑ Użyteczność formuły BB jest ograniczona w praktyce z uwagi na to, że nie możliwa jest (przynajmniej na razie) budowa detektora mierzącego $\frac{dE}{dx}$ a nawet $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle$
- ❑ Możemy natomiast łatwo **mierzyć energię zdeponowaną** ΔE w absorberze o grubości Δx i mamy: $\Delta E = - \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \Delta x$,
- ❑ Najczęstsze są niewielkie przekazy energii, To oznacza, że wartość **najbardziej prawdopodobna** ΔE^{MPV} jest przesunięta w stronę niższych przekazów
- ❑ Bardzo duże przekazy (związane z elektronami δ) się zdarzają. To oznacza, że **wartość średnia przekazów** przesunęła się w stronę wysokich wartości (analogia do zarobków)

Cienkie vs grube absorbery



- ❑ Jeżeli grubość materiału czynnego jest „odpowiednio duża” wtedy możemy zastosować do opisu rozkładu strat energii rozkład normalny (Centralne Twierdzenie Graniczne)
 - ❑ założmy, że naszą zmienną losową jest strata energii w pojedynczym zderzeniu z elektronem atomowym
 - ❑ jeżeli strata energii, δE , nie jest duża (ciężkie cząstki!) to możemy zaniedbać zmianę prędkości cząstki, a co za tym idzie sposobu oddziaływania z materią (energia się nie zmienia)
 - ❑ całkowita strata energii, może być więc wyznaczona jako suma strat elementarnych (posiadających taki sam P.D.F.) $\Delta E = \sum_{i/1}^{i/N} \delta E$

Cienkie vs grube absorbery



- ❑ Tak więc rozkład całkowitych strat energii w **grubych** absorberach jest rozkładem normalnym i można go zapisać jako:

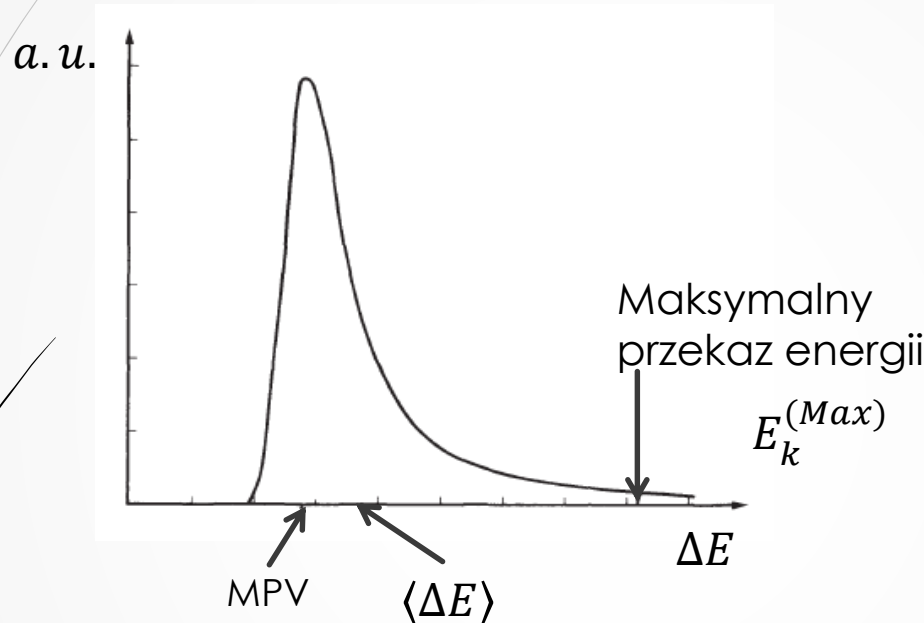
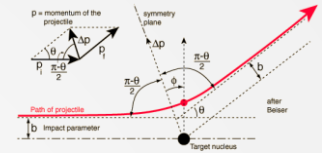
$$f(x, \Delta E) \propto \exp\left(\frac{-(\Delta E - \langle \Delta E \rangle)^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

- ❑ Odchylenie standardowe dla tego rozkładu można wyznaczyć jako (przybliżenie Bohra):

$$\sigma_0^2 = \kappa \rho x [MeV^2], \kappa = 0.1569 \frac{Z}{A}$$

- ❑ Sytuacja **komplikuje się znacznie** w przypadku, gdy liczba zderzeń jest mała – wówczas duże przekazy energii (rzadkie) zaczynają odkształcać rozkład całkowitej zdeponowanej energii (ogon w kierunku dużych strat energii)
- ❑ Średnia strata energii oraz najbardziej prawdopodobna strata energii nie są równe!
- ❑ Średnia strata energii $\langle \Delta E \rangle \ll E_{K \max}$

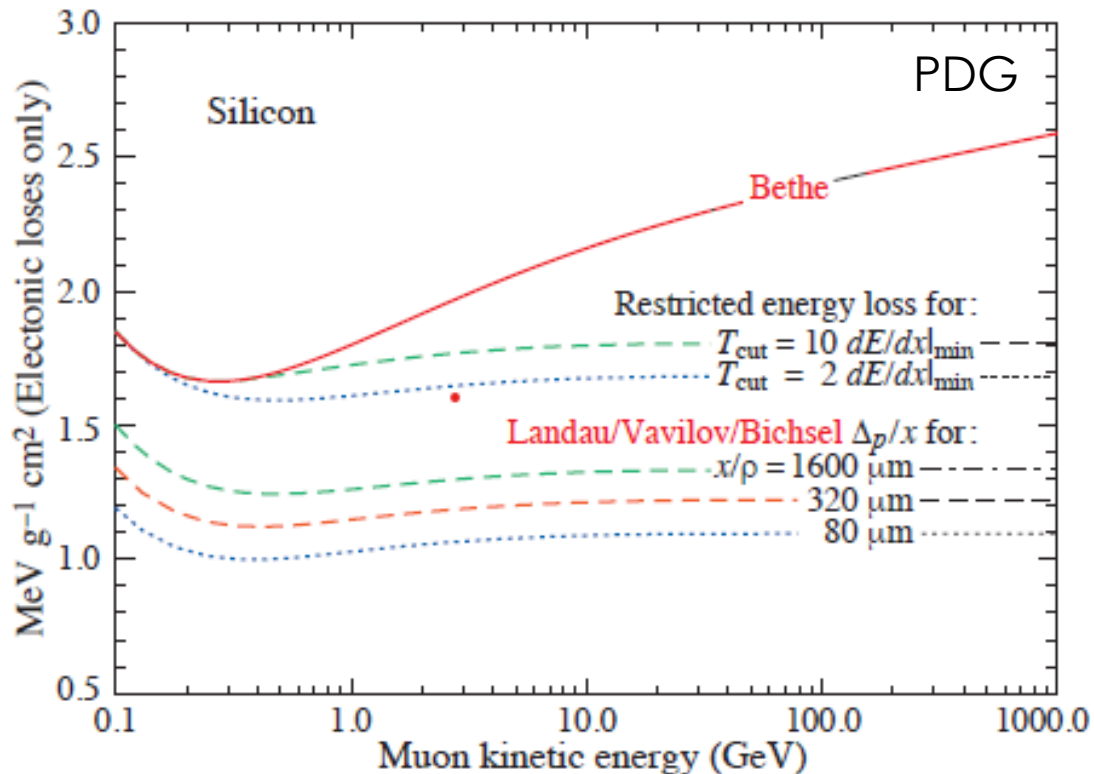
Cienkie absorbery



MPV (najbardziej prawdopodobny przekaz energii) dla MIP w 1 cm Ar:
 $\Delta E^{\text{MPV}} = 1.2 \text{ keV}$
 $\langle \Delta E \rangle = 2.71 \text{ keV}$

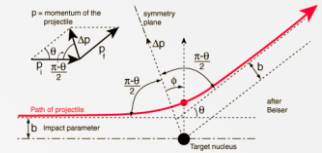
- ❑ Teoretyczny opis b. skomplikowany – teoria Landau'a-Wawłowa
- ❑ Funkcja analityczna, która w przybliżeniu opisuje powyższy rozkład b. jest nietrywialna...
- ❑ uwaga: teraz najważniejszą zmienną jest: najbardziej prawdopodobny przekaz energii ΔE^{MPV}

Cienkie absorbery



- Rzadkie, ale bardzo duże przekazy energii (aż > ście GeV) powodują przesunięcie średnich strat $\langle dE/dx \rangle$ w stronę „ogonu” rozkładu (duże fluktuacje, elektronika)
- BB nie nadaje się do cienkich absorbentów

Rozkład Landau'a



- ❑ Okazuje się, że jednym z najważniejszych parametrów charakteryzujących fluktuacje energii w cienkich absorberach jest stosunek średniej straty energii do maksymalnej straty w jednym oddziaływaniu:

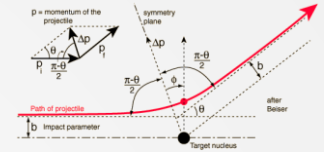
$$\zeta = \frac{\langle \Delta E \rangle}{E_k^{(Max)}}$$

- ❑ $E_k^{(Max)}$ znamy z poprzedniego wykładu, natomiast średni depozyt energii możemy wyznaczyć z równania BB (pomijamy wszystko poza kawałkiem z logarytmem):

$$\langle \Delta E \rangle = 2\pi N_A r_e^2 m_e c^2 z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \rho x = \xi$$

- ❑ Używając parametru ζ możemy ilościowo zdefiniować cienki absorber jako taki, dla którego $\zeta < 10$
- ❑ Aby wprowadzić analityczne równanie, które opisuje rozkład energii dla cienkich absorberów, zdefiniujemy współczynnik λ

Rozkład Landau'a



$$\lambda = \frac{\Delta E - \Delta E^{MPV}}{\xi}$$

- ❑ Gdzie: ΔE – energia zdeponowana w absorberze, ΔE^{MPV} – to najbardziej prawdopodobna wartość energii zdeponowanej
- ❑ Półempiryczna postać ΔE^{MPV} znana jest z literatury:

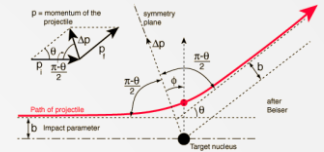
$$\Delta E^{MPV} = \xi \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right) + \ln \left(\frac{\xi}{I} \right) - \beta^2 - \delta(\beta\gamma) + 0.2 \right]$$

- ❑ Funkcja opisująca zadowalająco rozkład energii zdeponowanej ma postać:

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\lambda + e^{-\lambda}) \right)$$

- ❑ *Na ćwiczeniach laboratoryjnych będziemy zajmować się dokładnie pomiarem depozytów energii cząstek MIP w sensorach krzemowych (paskowe i pikselowe)

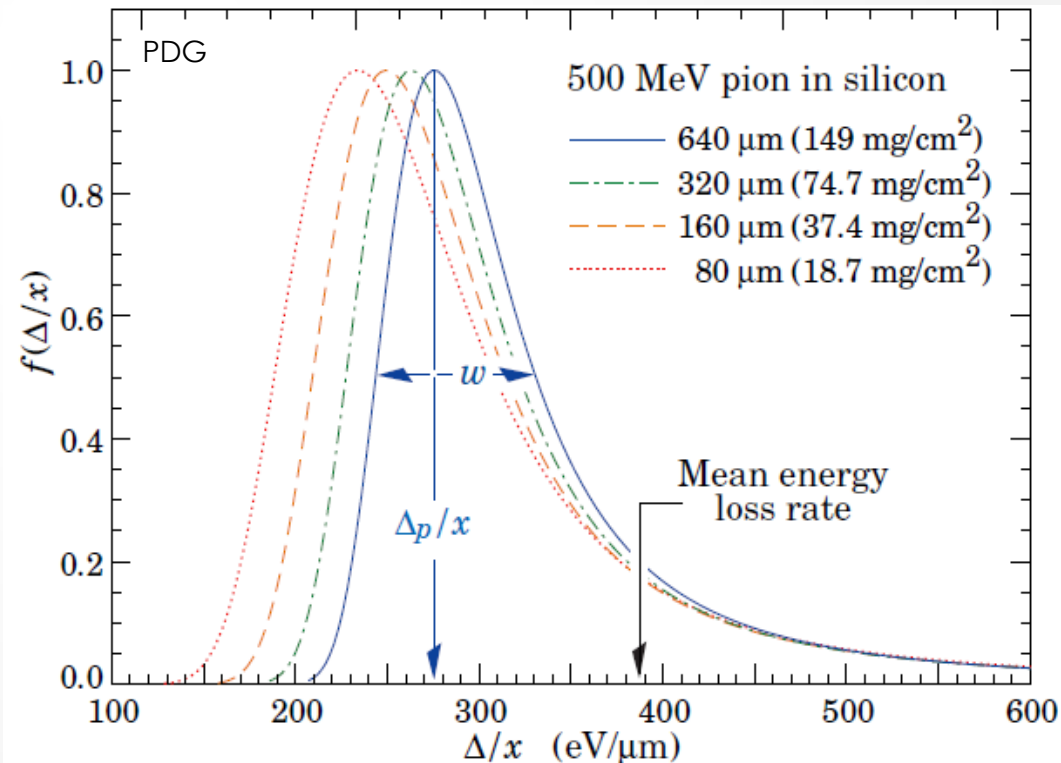
Rozkład Landau'a



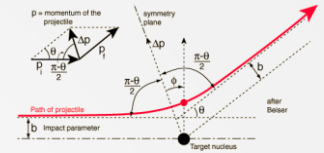
- ❑ Porównując równanie BB oraz to opisujące ΔE^{MPV} , można zauważyć, że $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle$ nie zależy od grubości materiału, natomiast ΔE^{MPV} skaluje się w przybliżeniu jak $a \cdot \ln(x) + b$
- ❑ Rozkład strat dla cienkich detektorów o różnych grubościach:

Straty energii w stosunku do grubości x dla rosnących grubości Si:

- ΔE^{MPV} przesuwają się w stronę wyższych przekazów,
- asymetria maleje,
- szerokość rozkładu maleje



Cienkie detektory

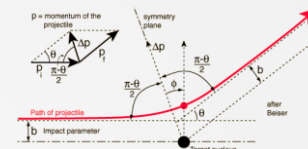


- Fluktuacje strat energii spowodowane np. elektronami δ mogą nie być obserwowane w detektorze (energia „wycieka” z wyemitowanymi elektronami).
- Detektory mierzą energię faktycznie zdeponowaną, która różni się od energii straconej przez cząstkę.
- Praktyczny sposób: bierzemy pod uwagę tylko te przekazy energii, które są mniejsze od pewnej wartości progowej (obcinamy rozkład dE/dx)
- Obcięte (*truncated*) straty energii:

$$\left. -\frac{dE}{dx} \right|_{\leq E_{\text{cut}}} = \kappa \left(\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 E_{\text{cut}}}{I^2} - \beta^2 - \delta \right)$$

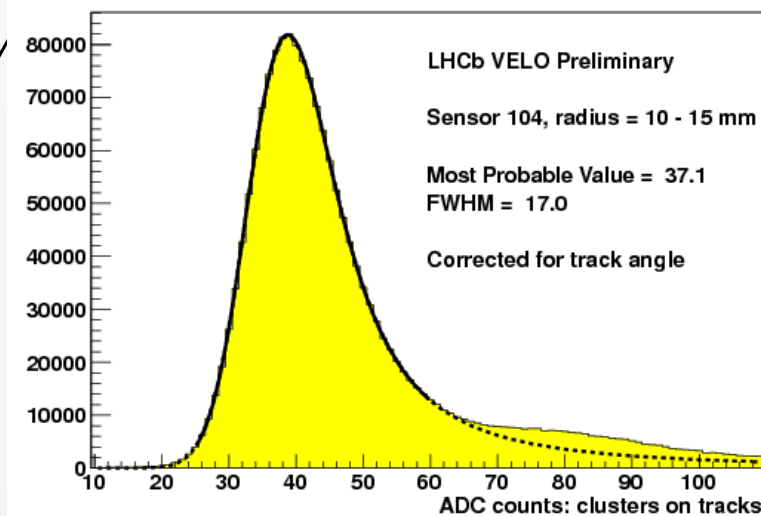
mają mniejszy „ogon” przy wysokich $E_k^{(Max)}$

Rozkład Landau'a

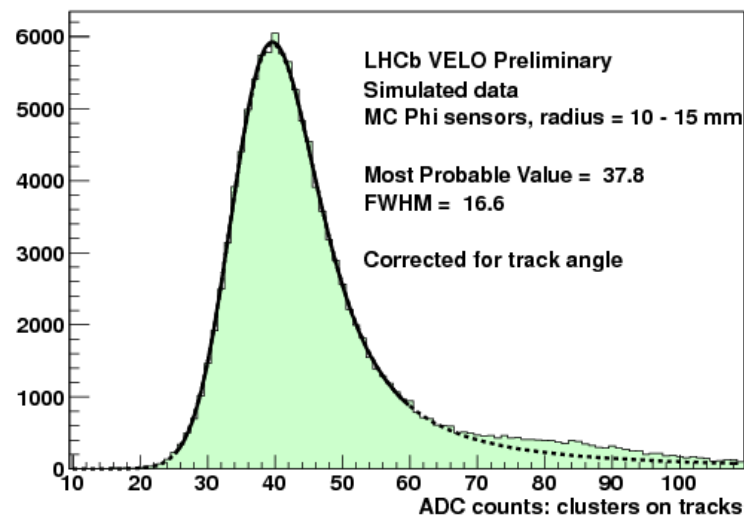


- ❑ O ile wartość najbardziej prawdopodobnej straty energii możemy wyznaczyć dość dokładnie, to szerokość rozkładu Landau'a **różni się znacznie** od „teoretycznej”
- ❑ Przyjmuje się, że wiąże się to z różnymi efektami aparaturowymi (np. szumy elektroniki odczytu)

Dane pochodzące z
rozprośnień p-p LHC



Symulacja odpowiedzi
sensora VELO

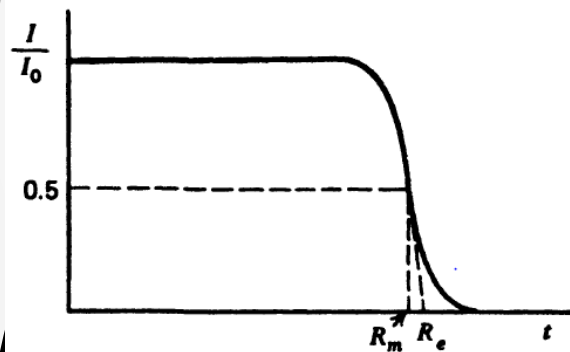


Zasięg

$$R = \int_E^0 \frac{1}{\frac{dE}{dx}} dE$$

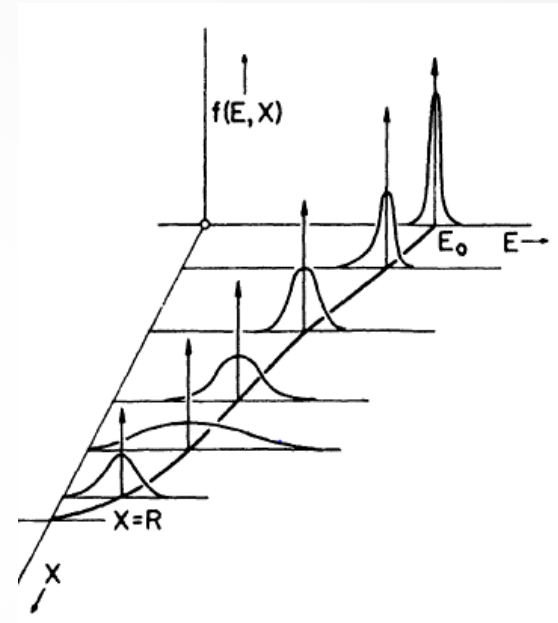
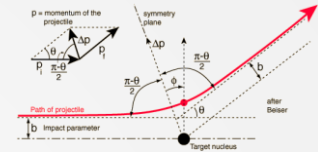
- Skomplikowana postać $dE/dx \rightarrow$ metody przybliżone

Zasięg cząstek α



Zasięg:

- średni zasięg R_m
- zasięg ekstrapolowany R_e



energy and range straggling:

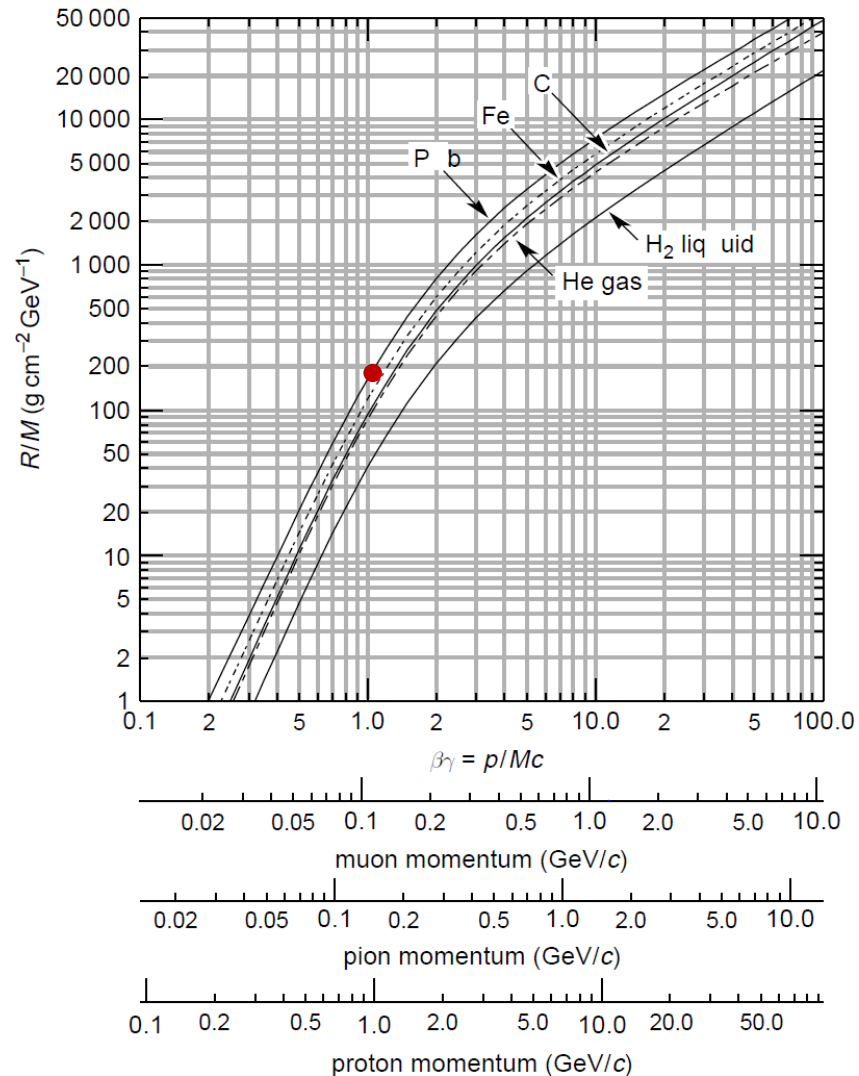
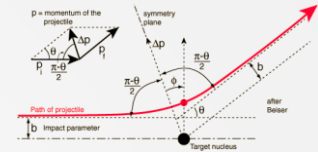
początkowo
monoenergetyczna wiązka
rozmywa się w absorberze
(procesy oddziaływania są
statystyczne)

Zasięg

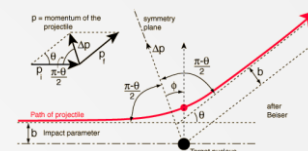
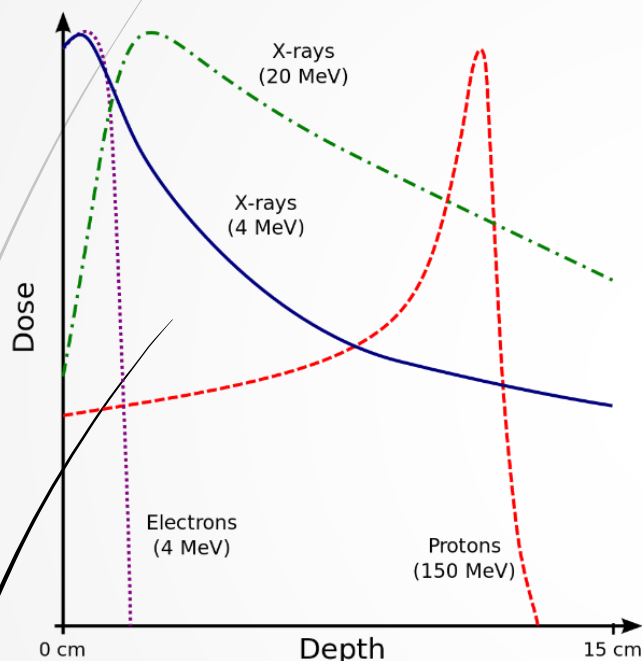
$$R = \int_E^0 \frac{1}{\frac{dE}{dx}} dE$$

$$\left[\frac{1}{\frac{\text{MeV cm}^2}{g}} = g \text{ cm}^{-2} \text{MeV}^{-1} \right]$$

- ❑ Dla (np.) protonu o $p=1 \text{ GeV}$ w Pb ($\rho \approx 11.3 \text{ g/cm}^3$) odczytujemy:
 $R/M = 200 \text{ g/cm}^2/\text{GeV}^{-1}$,
 $R = 200/11.3 \text{ cm} \approx 18 \text{ cm}$
- ❑ Obliczenia są dobre dla cząstek, które tracą energię tylko przez jonizację i wzbudzenia:
 - Hadrony o niskich energiach,
 - miony do kilkuset GeV

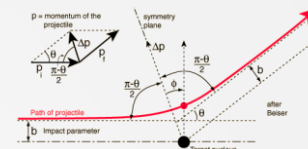


Krzywa Bragg'a



- ☐ Dzięki tym cechom, można tak dobrać energię protonów, aby zdeponowały większość swojej energii w precyzyjnie wybranym miejscu (chora tkanka)
- ☐ **Centrum Terapii Hadronowej IFJ-PAN**
- ☐ Fotony zachowują się inaczej – atenuacja

Krzywa Bragg'a



- ❑ Fakt, że przejście przez materiał cząstek naładowanych jest związany ze stratą energii prowadzi do efektu sprzężenia zwrotnego
- ❑ Straty energii oznaczają zmniejszenie prędkości cząstki, a co za tym idzie zwiększenie strat jonizacyjnych!
- ❑ Fundamentalne znaczenie dla **radioterapii hadronowej**

