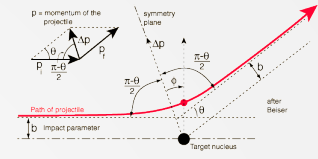


# Oddziaływanie Promieniowania Jonizującego z Materią

**Tomasz Szumlak, A. Obłąkowska-Mucha**

# „Stopping power” (VI)

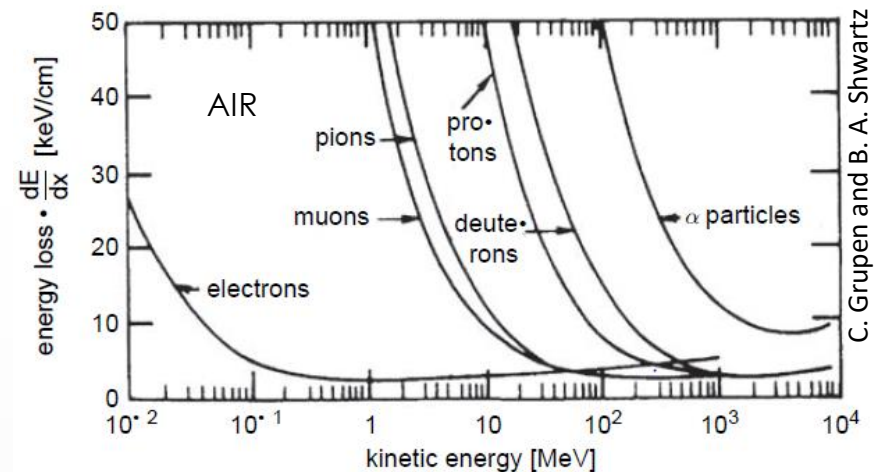


$$-\frac{dE}{dx} = K Z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[ \ln \left( \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right]$$

Absorber	$\frac{dE}{dx} \Big _{\min} \left[ \frac{\text{MeV}}{\text{g/cm}^2} \right]$	$\frac{dE}{dx} \Big _{\min} \left[ \frac{\text{MeV}}{\text{cm}} \right]$
Hydrogen (H <sub>2</sub> )	4.10	$0.37 \cdot 10^{-3}$
Helium	1.94	$0.35 \cdot 10^{-3}$
Lithium	1.64	0.87
Beryllium	1.59	2.94
Carbon (Graphite)	1.75	3.96
Nitrogen	1.82	$2.28 \cdot 10^{-3}$
Oxygen	1.80	$2.57 \cdot 10^{-3}$
Air	1.82	$2.35 \cdot 10^{-3}$
Carbon dioxide	1.82	$3.60 \cdot 10^{-3}$
Neon	1.73	$1.56 \cdot 10^{-3}$
Aluminium	1.62	4.37
Silicon	1.66	3.87
Argon	1.52	$2.71 \cdot 10^{-3}$
Titanium	1.48	6.72
Iron	1.45	11.41
Copper	1.40	12.54
Germanium	1.37	7.29
Tin	1.26	9.21
Xenon	1.25	$7.32 \cdot 10^{-3}$
Tungsten	1.15	22.20
Platinum	1.13	24.24
Lead	1.13	12.83
Uranium	1.09	20.66
Water	1.99	1.99
Lucite	1.95	2.30
Shielding concrete	1.70	4.25
Quartz (SiO <sub>2</sub> )	1.70	3.74

$$K = 4\pi N_A r_e^2 m_e^2 c^2 = 0.3071 \frac{\text{MeV}}{\text{g/cm}^2}$$

$$dx \rightarrow \rho dx$$

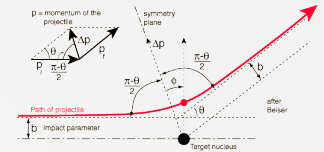


$$-\frac{dE}{dx} = 2\kappa \left[ \ln \left( \frac{E_{k \max}}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right]$$

<https://pdg.lbl.gov/2000/atomicrpp.pdf>

artykuł o poprawce delta

# Parametr $I$



- ❑ Formuła BB jest bardzo kłopotliwa i podlegała wielu „korektom” na przestrzeni lat – formuła pół-empiryczna...
- ❑ Zaczniemy naszą dyskusję od **średniego potencjału wzbudzenia  $I$**
- ❑ W przybliżeniu jest to iloczyn średniej orbitalnej częstości elektronów (w/g formuły Bohr’a) i stałej Planck’a
- ❑ W praktyce, konfiguracja powłok elektronowych jest tak skomplikowana, że nie da się wyznaczyć tego parametru nawet numerycznie
- ❑ W efekcie, parametr ten wyznaczono doświadczalnie na drodze pomiarów...  $\frac{dE}{dx}$  dla różnych materiałów...

$$\frac{I}{Z} = 12 + \frac{7}{Z} \text{ eV}, Z < 13 \quad I = 16 Z^{-0.6} \text{ eV}, Z > 1$$

$$\frac{I}{Z} = 9.76 + 58.8 \cdot Z^{-1.19} \text{ eV}, Z \geq 13$$

# Formuła BB

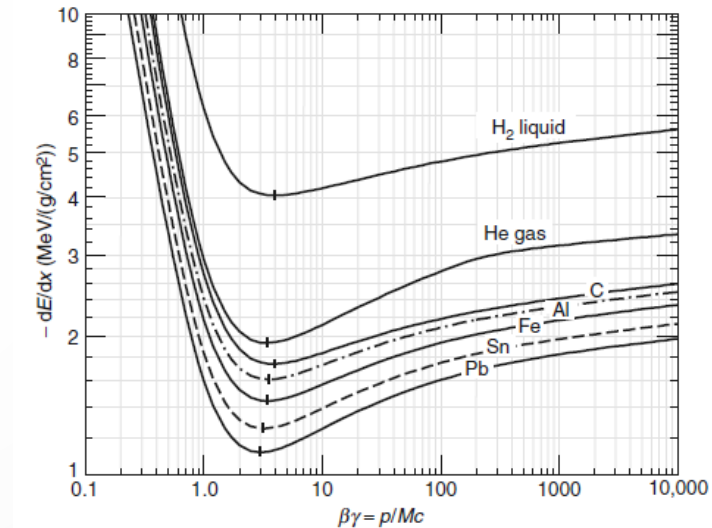
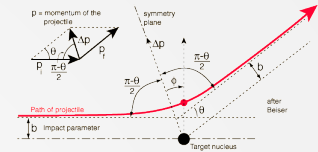
$$-\frac{dE}{dx} = K Z^2 \frac{Z}{A \beta^2} \left[ \ln \left( \frac{2 m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right)^{E_{KMAX}} - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right]$$

$$-\frac{dE}{dx} \propto \frac{Z^2}{\beta^2} \ln(\alpha \beta^2 \gamma^2)$$

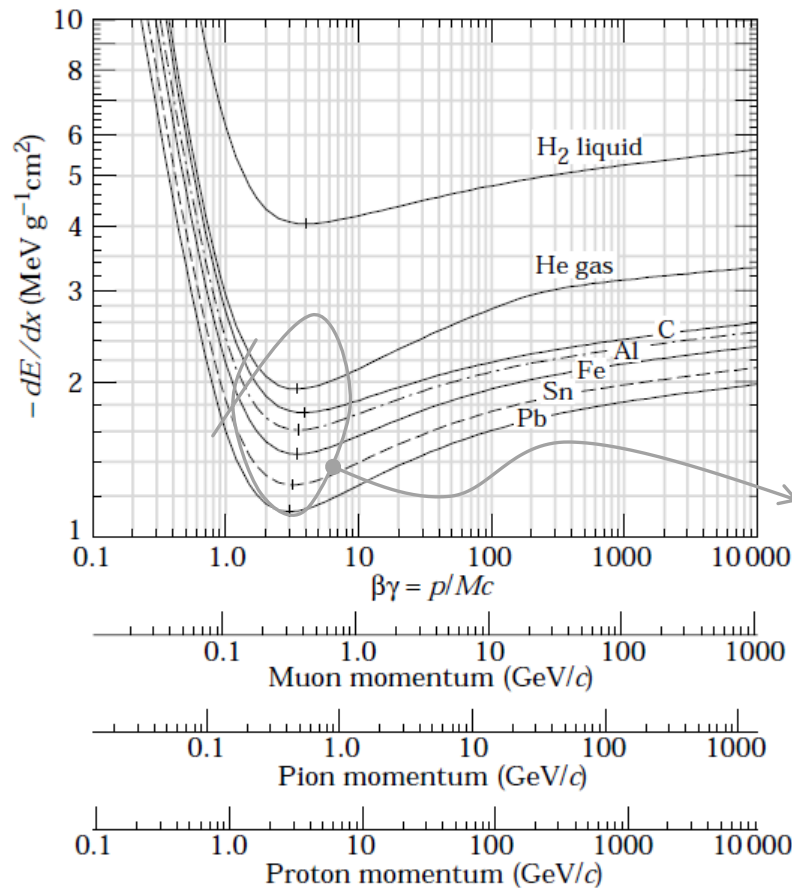
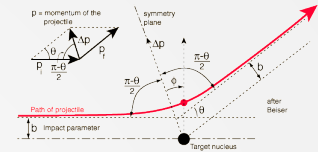
- ❑ Szybki spadek przy niskich energiach  $\propto \frac{1}{\beta^2}$
- ❑ Szerokie minimum w zakresie  $3 \leq \beta\gamma \leq 4$ ,
- ❑ MIP – cząstka z dE/dx w pobliżu minimum (dlaczego mion?)
- ❑ MIP we wszystkich ośrodkach (z wyjątkiem wodoru) traci tyle samo energii: 1-2 MeV/(g/cm<sup>2</sup>)

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{min} \approx 1 - 2 \frac{\text{MeV}}{\text{g/cm}^2}$$

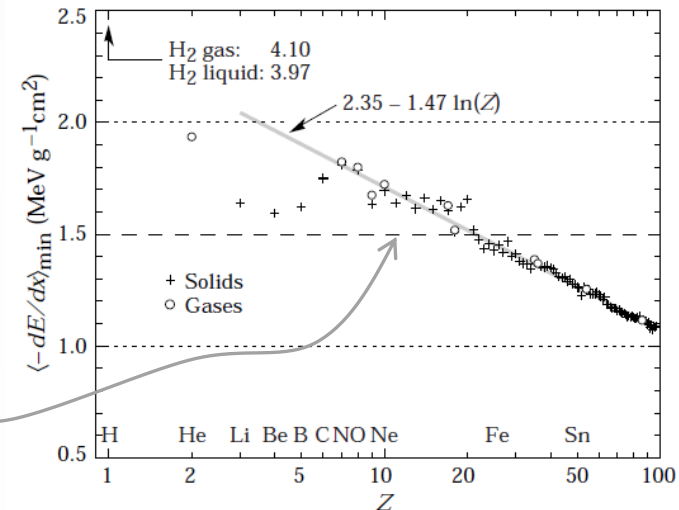
- Straty energii rosną dla  $\gamma > 4$  (wzrost logarytmiczny)



# Formuła BB

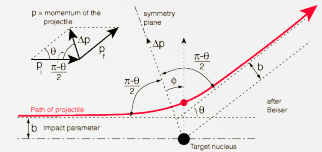


$\beta\gamma \approx 3$



- ❑ Poza przypadkiem ciekłego wodoru, cząstki o podobnych **prędkościach** charakteryzują się podobnymi **stratami energii** bez względu na absorber!

# Elektrony $\delta$

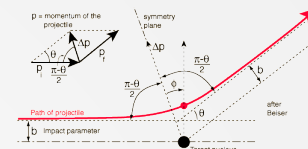


- ❑ Z uwagi na to, że główny mechanizm straty energii na drodze jonizacji polega na oddziaływaniu z elektronami atomowymi, powinniśmy się przyjrzeć dokładnie temu procesowi...
- ❑ „From the top” – cząstki naładowane, przechodzące przez materię (detektor) mogą **wzbudzać atomy** (emisja fotonów) albo przekazać wystarczającą **energię** elektronowi, aby **usunąć go z atomu** – jonizacja
- ❑ Istotnym problemem jest tutaj **maksymalna energia** jaką cząstki penetrujące mogą przekazać elektronom (**dla czego?**)
- ❑  $E_k^{(Max)}$  będzie zależeć od masy spoczynkowej cząstki oraz od jej pędu:

$$p = mv = \gamma m_0 \beta c, \gamma = \frac{E}{m_0 c^2}$$

$$E_k^{(Max)} = \frac{2m_e p^2}{m_0^2 + m_e^2 + \frac{2m_e E}{c^2}}$$

# Elektrony $\delta$



- Ta maksymalna strata energii kinetycznej cząstki jest oczywiście powiązana z jej energią całkowitą:

$$E_k^{(Max)} = E - m_0 c^2 = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} - m_0 c^2$$

- Pouczająca jest analiza asymptotyczna tych równań

- Jeżeli energia cząstki jest niezbyt duża ( $\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} \sim 10$ ,  $\frac{2\gamma m_e}{m_0} \ll 1$ ) oraz jej masa jest dużo większa od masy elektronu:

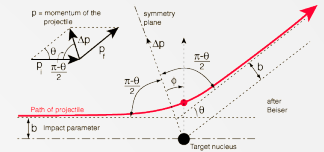
$$E_k^{(Max)} \approx 2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2$$

Np. mion, dla którego  $\gamma = 10$ ,  $E = 1.06 \text{ GeV}$ ,  $m_\mu c^2 = 106 \text{ MeV}$

może przekazać maksymalnie  $E_k^{(Max)} \approx 100 \text{ MeV}$

- Możemy również założyć, że cząstki posiadają bardzo dużą energię oraz masę dużo większą niż masa elektronu, wówczas...

# Elektrony $\delta$



$$E_k^{(Max)} = \frac{p^2}{\gamma m_0 + \frac{m_0^2}{2m_e}}$$

- Dla cząstek o dużych energiach mamy:

$$E_k \approx E, E \approx pc \rightarrow E_k^{(Max)} \approx \frac{E^2}{E + \frac{m_0^2 c^2}{2m_e}}$$

- W przypadku ultra-relatywistycznym:

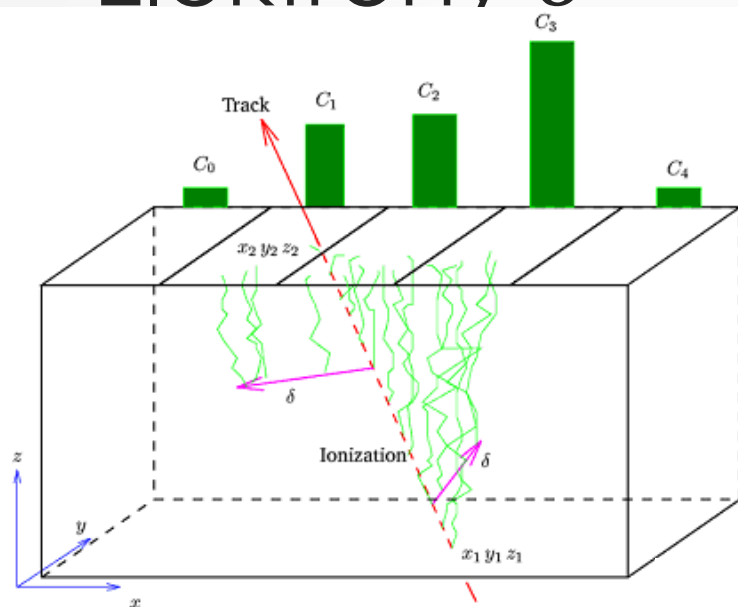
$$E \gg \frac{m_0^2 c^2}{2m_e} \rightarrow \underline{\underline{E_k^{(Max)} \approx E}}$$

- W przypadku, gdy cząstkami penetrującymi są elektrony

$$E_k^{(Max)} = E - m_e^2 c^2$$

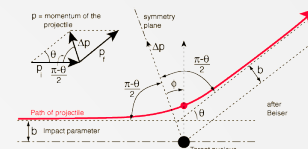
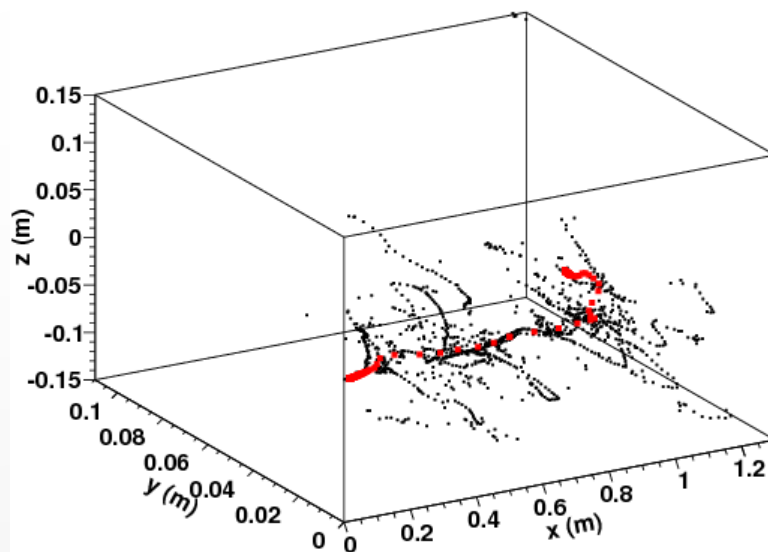


# Elektrony $\delta$

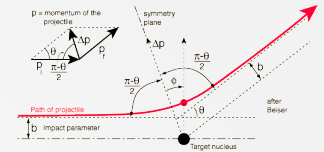


- ❑ Prowadzi to do dużej komplikacji w procesie modelowania odpowiedzi detektorów
- ❑ Może wpłynąć istotnie na pozycję cząstki jaką otrzymujemy podczas rekonstrukcji

- ❑ Elektrony  $\delta$  mogą mieć bardzo istotne znaczenie dla detektorów pozycjo-czułych
- ❑ Wysokoenergetyczne „wybite” elektrony mogą prowadzić do wtórnej jonizacji
- ❑ Zmieniają też istotnie rozkład wygenerowanego ładunku
- ❑ Elektrony  $\delta$  mogą „uciec” z absorbera

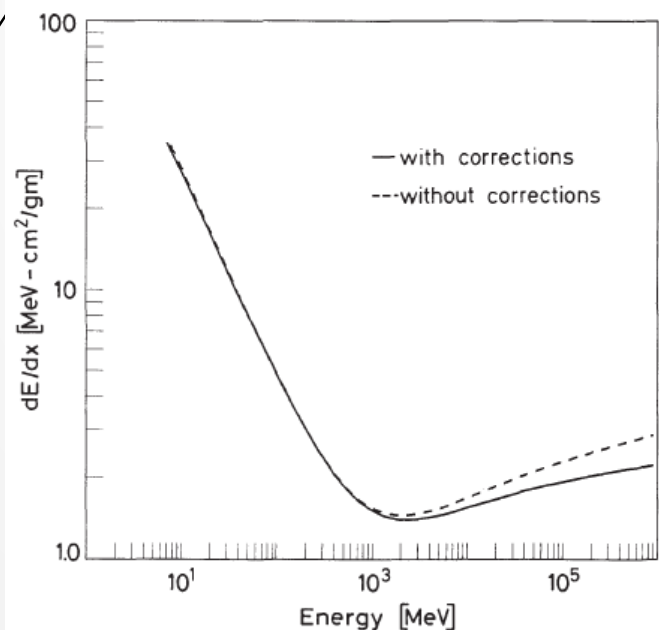
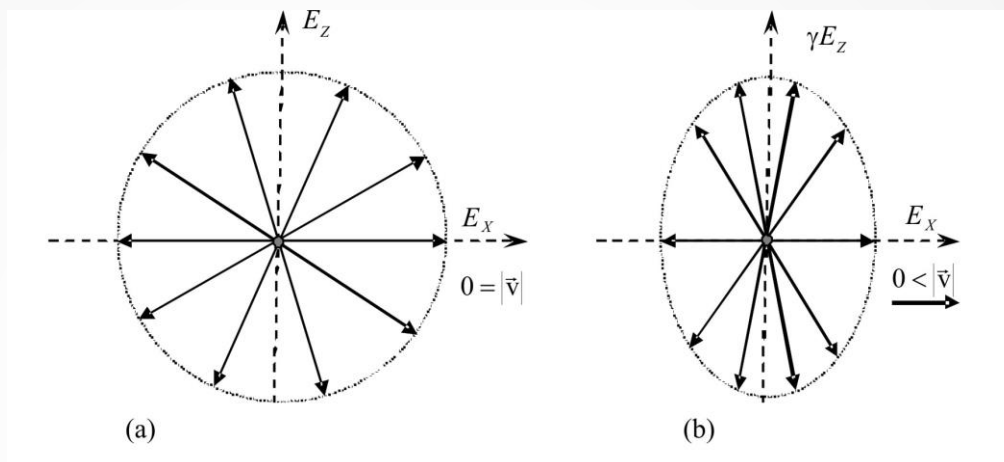
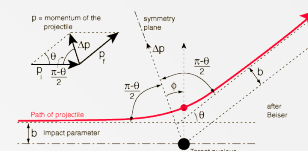


# Poprawka $\delta$



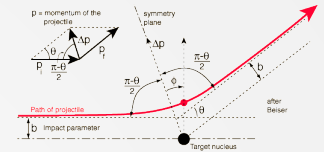
- ❑ Na początku „Health Hazard Warning” – nie ma to nic wspólnego z elektronami  $\delta$ ...
- ❑ Poprawka ta nazywa się również poprawką gęstościową i ma duże znaczenie dla cząstek o b. dużych energiach
- ❑ Efekt ten możemy zrozumieć tak:
  - ❑ Cząstka naładowana powoduje poza jonizacją również **polaryzację** atomów materiału, przez który przechodzi
  - ❑ Im **większa gęstość** tym efekt jest **wyraźniejszy**
  - ❑ Ta polaryzacja powoduje „**ekranowanie**” elektronów, które znajdują się dalej od toru cząstki penetrującej
  - ❑ Powoduje to z kolei, że oddziaływanie z elektronami „dalszymi” jest **mniej prawdopodobne**
  - ❑ W efekcie zaobserwujemy **mniejszą jonizację** (stratę energii) niż moglibyśmy się spodziewać

# Poprawka $\delta$

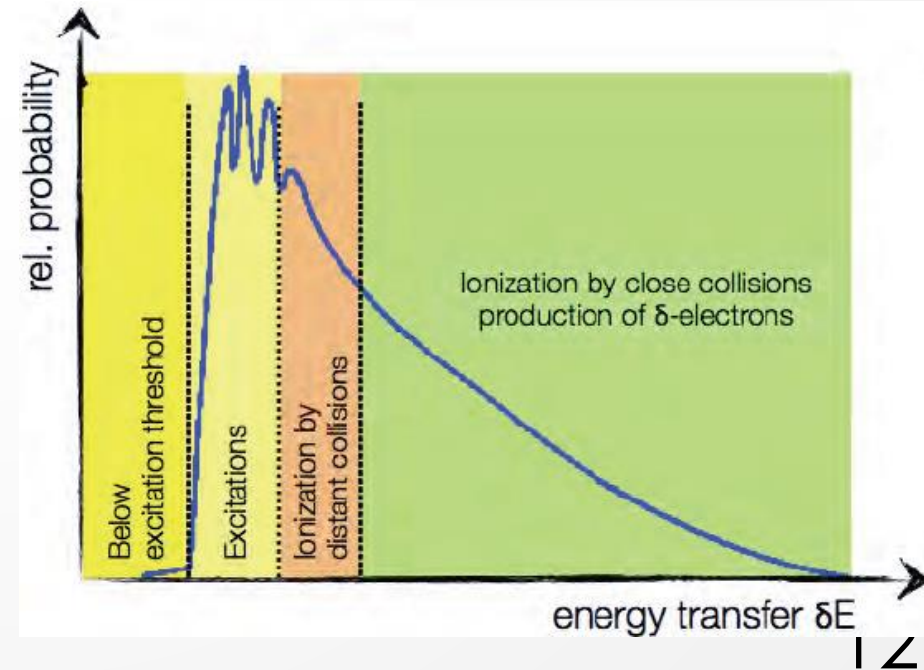


- ❑ Gdy cząstka naładowana porusza się z dużymi prędkościami jej pole elektrostatyczne ulega odkształceniu
- ❑ Jest to efekt relatywistyczny
- ❑ Gdyby nie było ekranowania, prawdopodobieństwo oddziaływań z „dalekimi” elektronami uległo by zwiększeniu
- ❑ Pomiary eksperymentalne pokazują **efekt przeciwny**

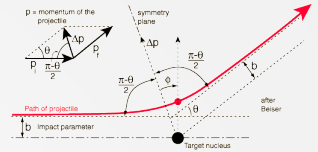
# Inne poprawki



- ❑ Poprawka na energię wiązania – poprawka powłokowa – ma znaczenie dla cząstek „b. wolnych”, dla których prędkość orbitalna elektronów nie jest zaniedbywalna
- ❑ Poprawka związana ze strukturą cząstek penetrujących
- ❑ Poprawka na przekrój czynny oddziaływań e.m. (procesy wyższego rzędu)
- ❑ Efekty związane z emisją promieniowania hamowania dla cząstek ultra-relatywistycznych
- ❑ Spin cząstek penetrujących
- ❑ Wydaje się, że nie ma dla nas ratunku... **Nie jest tak źle**, w zasadzie uwzględnienie poprawki gęstościowej oraz powłokowej załatwiają sprawę!

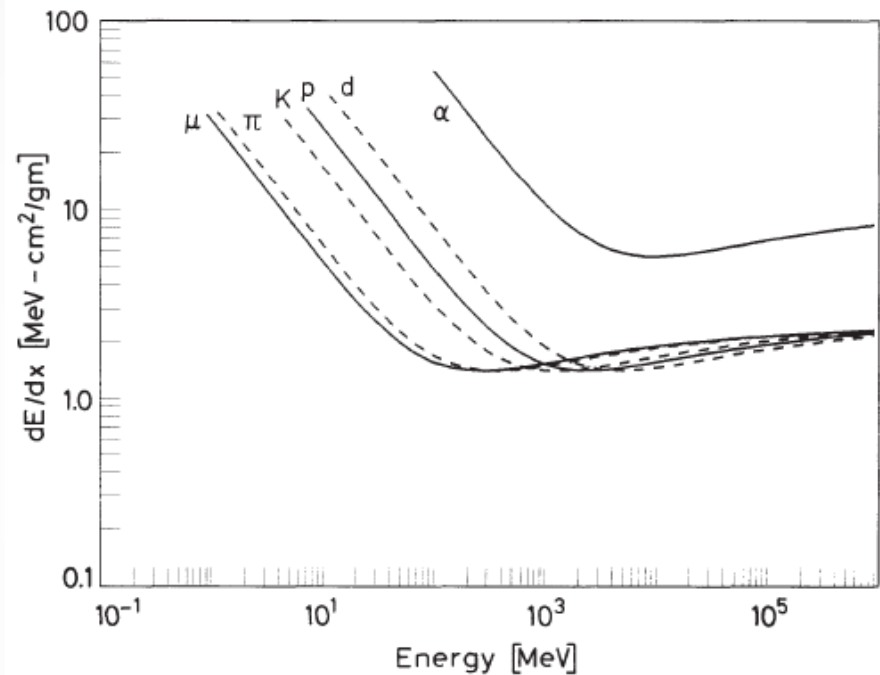
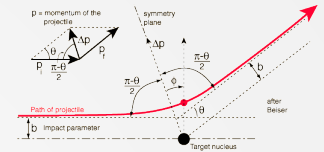


# Zależność energetyczna



- ❑ Jaki obraz strat jonizacyjnych dostaniemy, gdy użyjemy formuły BB dla **różnych typów cząstek** w funkcji ich **energii**?
- ❑ Zaczynając od „niskich” energii straty jonizacyjne **maleją szybko** wraz ze wzrostem energii ( $\sim \frac{1}{\beta^2}$ )
- ❑ W pobliżu  $\beta \approx 0.96$  szybkość strat jonizacyjnych **osiąga minimum** – minimalnie jonizujące cząstki (MIP)
- ❑ Straty energii na jonizację zaczynają następnie wzrastać dla cząstek relatywistycznych – wzrost ten ma charakter logarytmiczny ( $\frac{1}{\beta^2} \approx \text{const}$ )
- ❑ Wzrost relatywistyczny strat jonizacyjnych jest silnie tłumiony przez poprawkę gęstościową (plateau)
- ❑ Dla b. małych energii BB załamuje się, straty jonizacyjne osiągają maksimum a następnie gwałtownie maleją

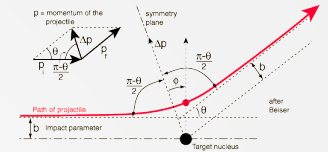
# Zależność energetyczna



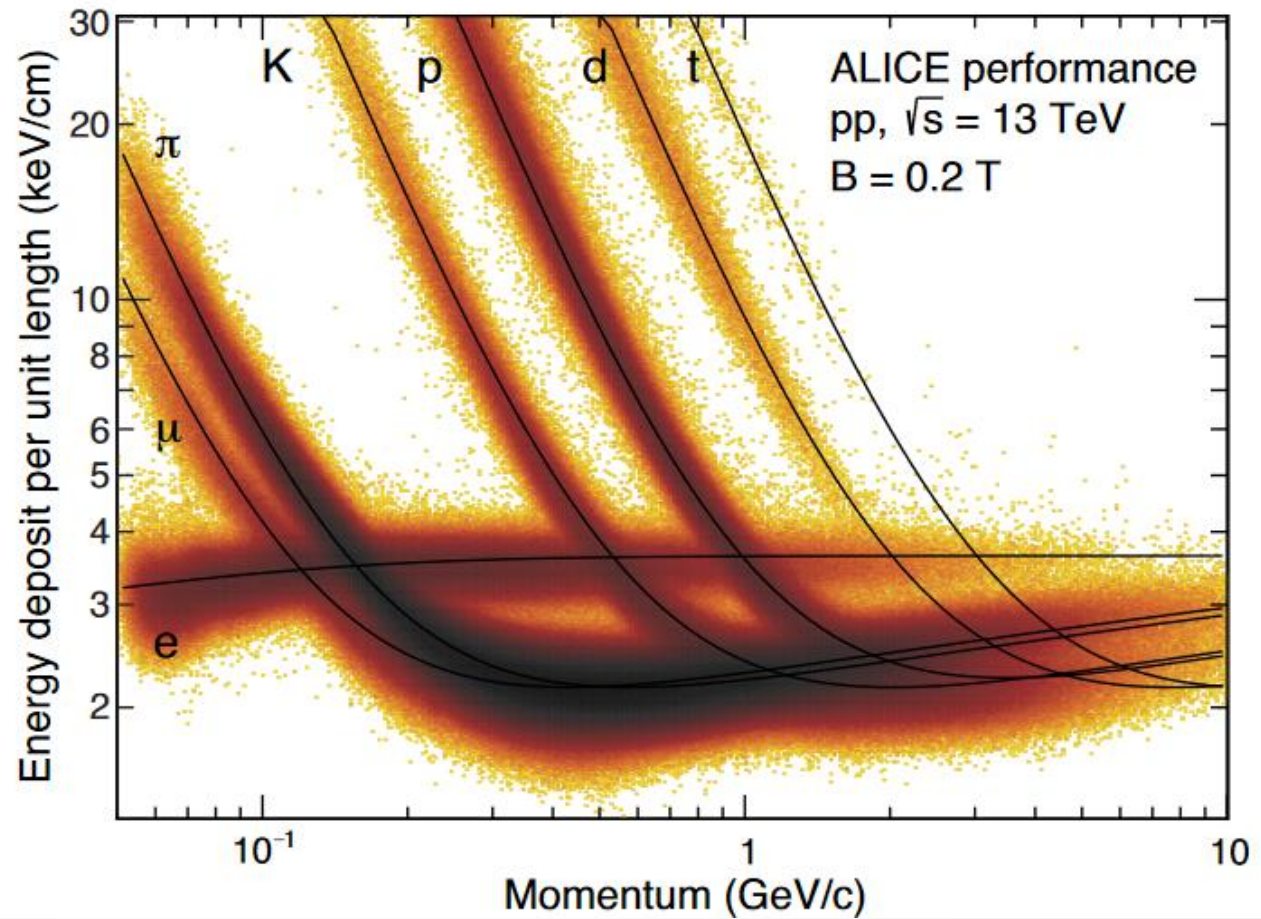
- ❑ Wartość minimalnej straty energii  $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{Min}$  jest praktycznie taka sama dla cząstek o tym samym ładunku
- ❑ Poniżej minimum krzywe strat energii są różne, co można wykorzystać do identyfikacji cząstek (w tym zakresie energii)



# Zależność energetyczna



$$\beta\gamma = \frac{p}{E} \frac{E}{m} = \frac{p}{m}$$

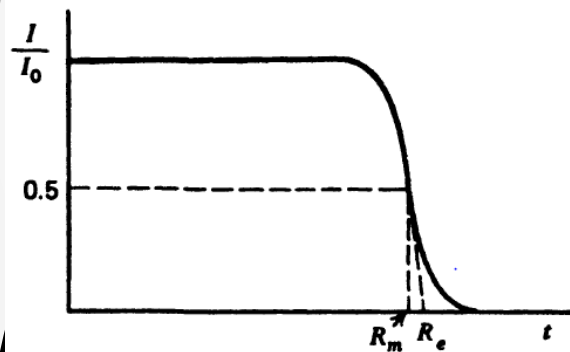


# Zasięg

$$R = \int_E^0 \frac{1}{\frac{dE}{dx}} dE$$

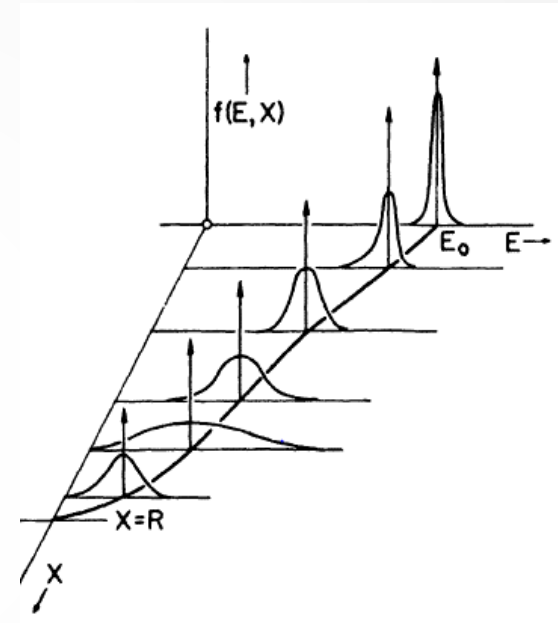
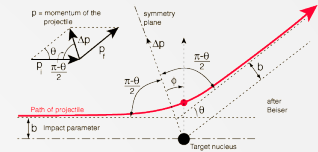
- Skomplikowana postać  $dE/dx \rightarrow$  metody przybliżone

Zasięg cząstek  $\alpha$



Zasięg:

- średni zasięg  $R_m$
- zasięg ekstrapolowany  $R_e$



**energy and range straggling:**

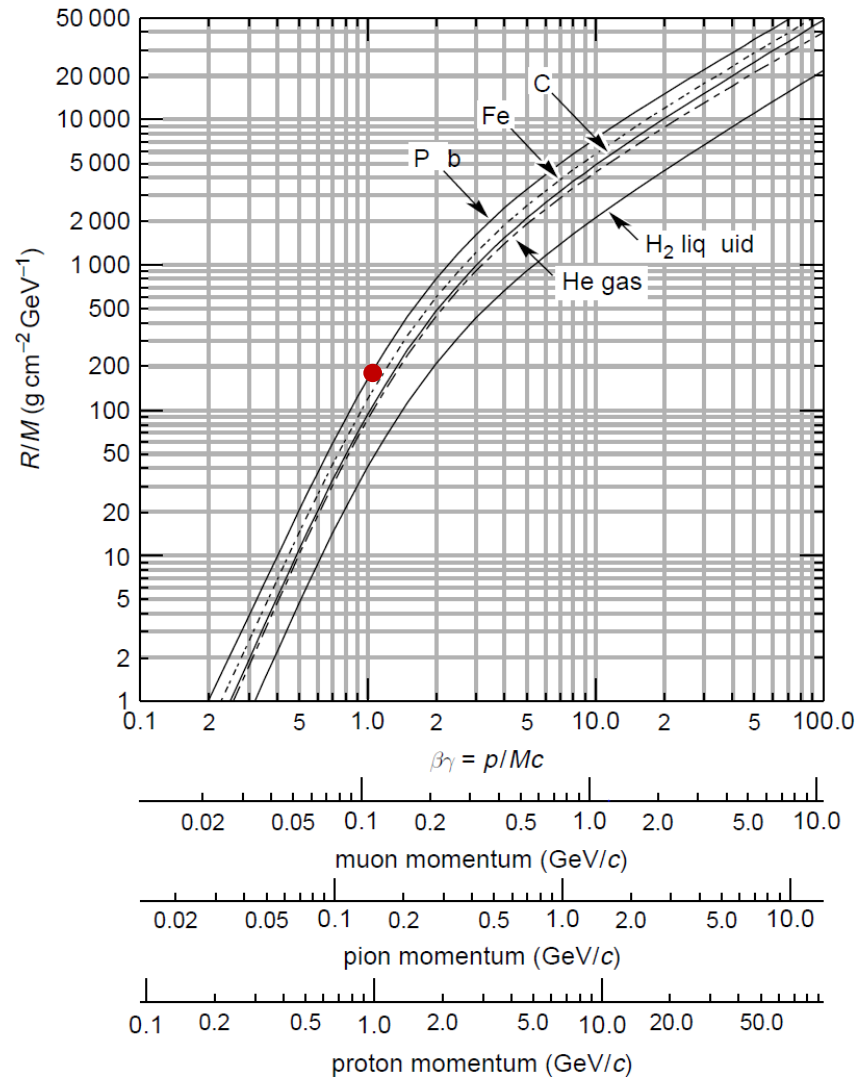
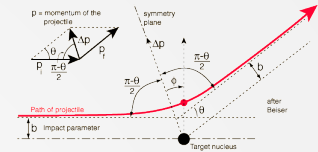
początkowo  
monoenergetyczna wiązka  
rozmywa się w absorberze  
(procesy oddziaływania są  
statystyczne)



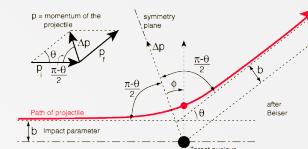
# Zasięg

$$R = \int_E^0 \frac{1}{\frac{dE}{dx}} dE$$

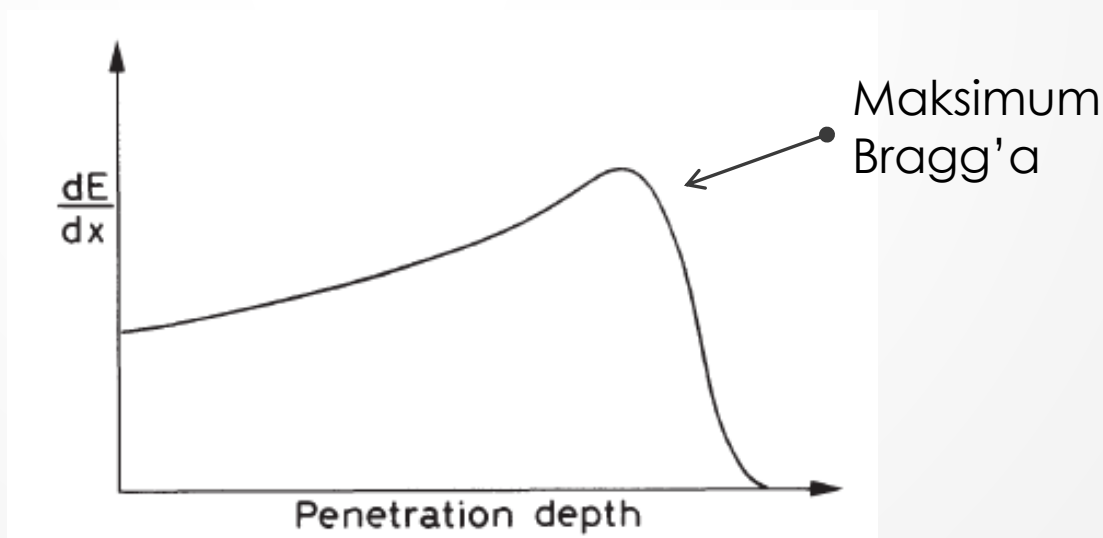
- ❑ Dla (np.) protonu o  $p=1$  GeV w Pb ( $\rho \approx 11.3 \text{ g/cm}^3$ ) odczytujemy:  
 $R/M=200 \text{ g/cm}^2/\text{GeV}^{-1}$ ,  
 $R=200/11.3 \text{ cm} \approx 18 \text{ cm}$
- ❑ Obliczenia są dobre dla cząstek, które tracą energię tylko przez jonizację i wzbudzenia:
  - Hadrony o niskich energiach,
  - miony do kilkuset GeV



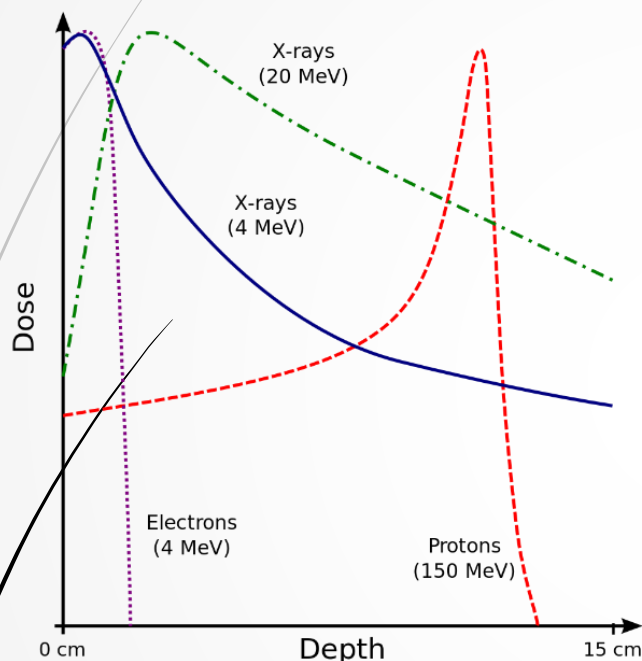
# Krzywa Bragg'a



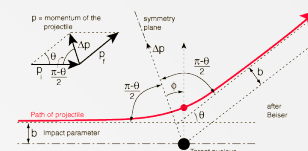
- ❑ Fakt, że przejście przez materiał cząstek naładowanych jest związany ze stratą energii prowadzi do efektu sprzężenia zwrotnego
- ❑ Straty energii oznaczają zmniejszenie prędkości cząstki, a co za tym idzie zwiększenie strat jonizacyjnych!
- ❑ Fundamentalne znaczenie dla **radioterapii hadronowej**



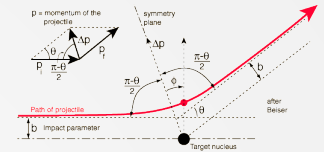
# Krzywa Bragg'a



- ☐ Dzięki tym cechom, można tak dobrać energię protonów, aby zdeponowały większość swojej energii w precyzyjnie wybranym miejscu (chora tkanka)
- ☐ **Centrum Terapii Hadronowej IFJ-PAN**
- ☐ Fotony zachowują się inaczej – atenuacja



# Fluktuacje strat energii

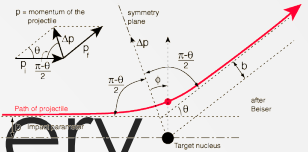


- ❑ Zależność BB opisuje **średnie** straty energii.
- ❑ Użyteczność formuły BB jest ograniczona w praktyce z uwagi na to, że nie możliwa jest (przynajmniej na razie) budowa detektora mierzącego  $\frac{dE}{dx}$  a nawet  $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle$
- ❑ Możemy natomiast łatwo **mierzyć energię zdeponowaną**  $\Delta E$  w absorberze o grubości  $\Delta x$  i mamy:  $\Delta E = - \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \Delta x$ ,
- ❑ Najczęstsze są niewielkie przekazy energii, To oznacza, że wartość **najbardziej prawdopodobna** jest przesunięta w stronę niższych przekazów
- ❑ Bardzo duże przekazy (związane z elektronami  $\delta$ ) się zdarzają. To oznacza, że **wartość średnia przekazów** przesunęła się w stronę wysokich wartości (analogia do zarobków)



- 22

# Cienkie vs grube absorbery



- ❑ Tak więc rozkład całkowitych strat energii w **grubych** absorberach jest rozkładem normalnym i można go zapisać jako:

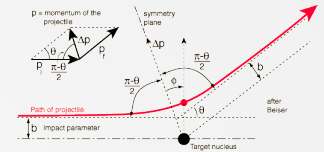
$$f(x, \Delta E) \propto \exp\left(\frac{-(\Delta E - \langle \Delta E \rangle)^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

- ❑ Odchylenie standardowe dla tego rozkładu można wyznaczyć jako (przybliżenie Bohra):

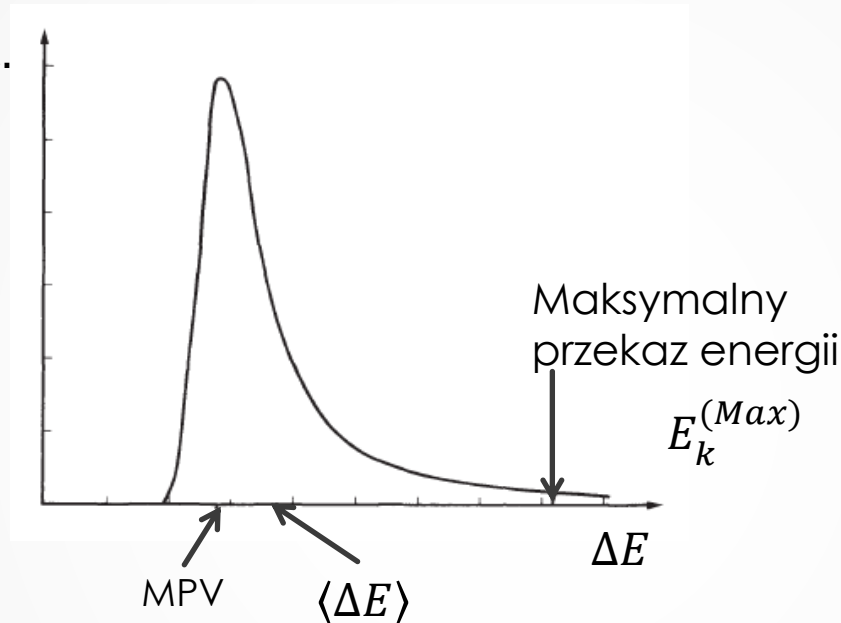
$$\sigma_0^2 = \kappa \rho x [MeV^2], \kappa = 0.1569 \frac{Z}{A}$$

- ❑ Sytuacja **komplikuje się znacznie** w przypadku, gdy liczba zderzeń jest mała – wówczas duże przekazy energii (rzadkie) zaczynają odkształcać rozkład całkowitej zdeponowanej energii (ogon w kierunku dużych strat energii)
- ❑ Średnia strata energii oraz najbardziej prawdopodobna strata energii nie są równe!
- ❑ Średnia strata energii  $\langle \Delta E \rangle \ll E_{K \max}$

# Cienkie absorbery



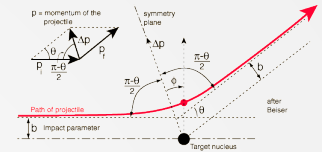
a. u.



MPV (najbardziej prawdopodobny przekaz energii) dla MIP w 1 cm Ar:  
 $\Delta E^{\text{MPV}} = 1.2 \text{ keV}$   
 $\langle \Delta E \rangle = 2.71 \text{ keV}$

- ❑ Teoretyczny opis b. skomplikowany – teoria Landau'a-Wawłowa
- ❑ Funkcja analityczna, która w przybliżeniu opisuje powyższy rozkład b. jest nietrywialna...

# Rozkład Landau'a



- ❑ Okazuje się, że jednym z najważniejszych parametrów charakteryzujących fluktuacje energii w cienkich absorberach jest stosunek średniej straty energii do maksymalnej straty w jednym oddziaływaniu:

$$\zeta = \frac{\langle \Delta E \rangle}{E_k^{(Max)}}$$

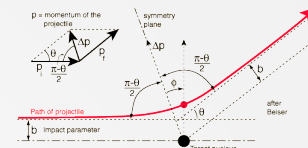
- ❑  $E_k^{(Max)}$  znamy z poprzedniego wykładu, natomiast średni depozyt energii możemy wyznaczyć z równania BB (pomijamy wszystko poza kawałkiem z logarytmem):

$$\langle \Delta E \rangle = 2\pi N_A r_e^2 m_e c^2 z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \rho x = \xi$$

- ❑ Używając parametru  $\zeta$  możemy ilościowo zdefiniować cienki absorber jako taki, dla którego  $\zeta < 10$
- ❑ Aby wprowadzić analityczne równanie, które opisuje rozkład energii dla cienkich absorberów, zdefiniujemy współczynnik  $\lambda$



# Rozkład Landau'a



$$\lambda = \frac{\Delta E - \Delta E^{MPV}}{\xi}$$

- ❑ Gdzie:  $\Delta E$  – energia zdeponowana w absorberze,  $\Delta E^{MPV}$  – to najbardziej prawdopodobna wartość energii zdeponowanej
- ❑ Półempiryczna postać  $\Delta E^{MPV}$  znana jest z literatury:

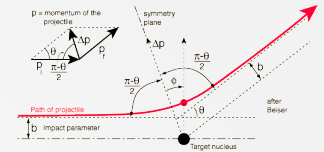
$$\Delta E^{MPV} = \xi \left[ \ln \left( \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right) + \ln \left( \frac{\xi}{I} \right) - \beta^2 - \delta(\beta\gamma) + 0.2 \right]$$

- ❑ Funkcja opisująca zadowalająco rozkład energii zdeponowanej ma postać:

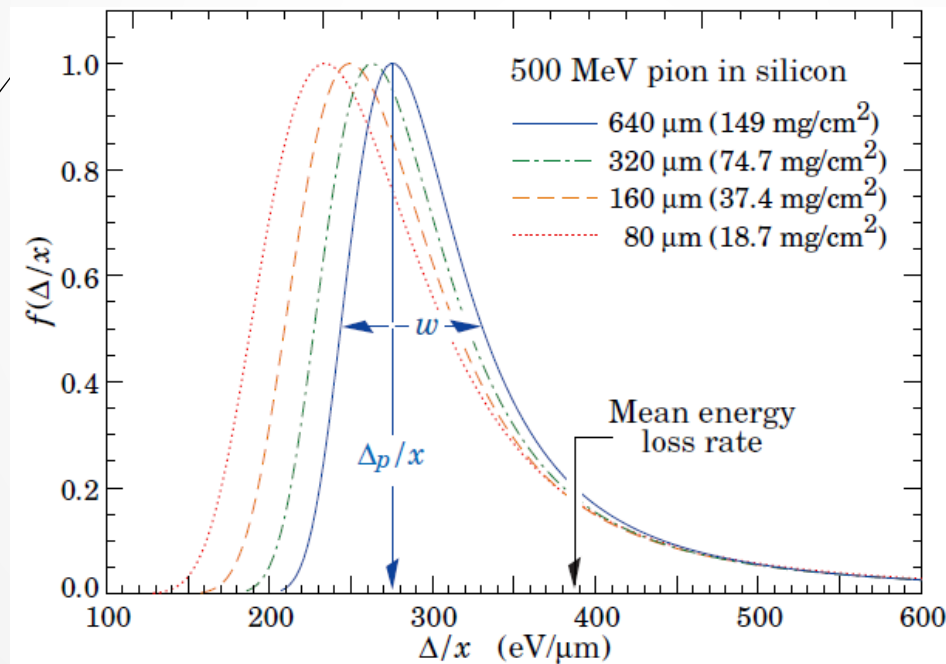
$$\phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} (\lambda + e^{-\lambda}) \right)$$

- ❑ \*Na ćwiczeniach laboratoryjnych będziemy zajmować się dokładnie pomiarem depozytów energii cząstek MIP w sensorach krzemowych (paskowe i pikselowe)

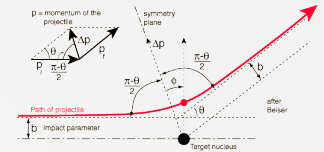
# Rozkład Landau'a



- Porównując równanie BB oraz to opisujące  $\Delta E^{MPV}$ , można zauważyć, że  $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle$  nie zależy od grubości materiału, natomiast  $\Delta E^{MPV}$  skaluje się w przybliżeniu jak  $a \cdot \ln(x) + b$
- Rozkład strat dla cienkich detektorów o różnych grubościach:



# Cienkie detektory

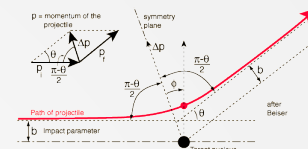


- Fluktuacje strat energii spowodowane np. elektronami  $\delta$  mogą nie być obserwowane w detektorze (energia „wycieka” z wyemitowanymi elektronami).
- Detektory mierzą energię faktycznie zdeponowaną, która różni się od energii straconej przez cząstkę.
- Praktyczny sposób: bierzemy pod uwagę tylko te przekazy energii, które są mniejsze od pewnej wartości progowej (obcinamy rozkład  $dE/dx$ )
- Obcięte (*truncated*) straty energii:

$$\left. -\frac{dE}{dx} \right|_{\leq E_{\text{cut}}} = \kappa \left( \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 E_{\text{cut}}}{I^2} - \beta^2 - \delta \right)$$

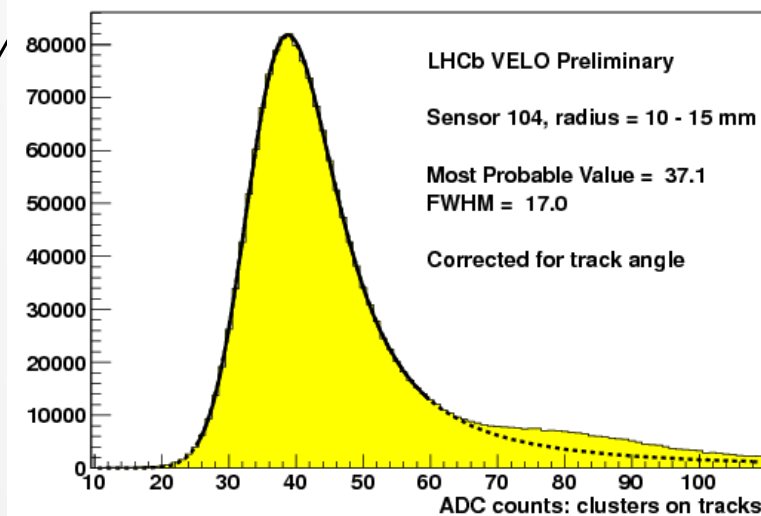
mają mniejszy „ogon” przy wysokich  $E_k^{(Max)}$

# Rozkład Landau'a



- ❑ O ile wartość najbardziej prawdopodobnej straty energii możemy wyznaczyć dość dokładnie, to szerokość rozkładu Landau'a **różni się znacznie** od „teoretycznej”
- ❑ Przyjmuje się, że wiąże się to z różnymi efektami aparaturowymi (np. szumy elektroniki odczytu)

Dane pochodzące z  
rozprośnień p-p LHC



Symulacja odpowiedzi  
sensora VELO

