




CZĄSTKI ELEMENTARNE I ODDZIAŁYWANIA

II RELATYWISTKA, ZDERZENIA, ROZPADY
ŚWIETLNOŚĆ AKCELERATORA

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

<http://home.agh.edu.pl/~amucha/>
Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek



Cząstki relatywistyczne

- Jaką cząstkę nazywamy relatywistyczną? Jaka energia uważana jest za relatywistyczną?
- Ważne, ponieważ wyniki pomiaru (np. czas życia, droga) będą zależeć od układu odniesienia.
- Każda teoria powinna być niezmiennicza względem transformacji układu.
- Czerowektory (kontawariantne) ($c = 1$):
 - położenia: $x^\mu = (t, x, y, z)$
 - energii i pędu: $P^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$
 - potencjału: $p^\mu = (\varphi, \vec{A})$
 - gęstości prądu: $j^\mu = (\rho, j)$

Czerowektor to obiekt, który transformuje się względem transformacji Lorentza jak:

$$p'_x = \gamma(p_x - \beta E)$$

$$E' = \gamma(E - \beta p_x)$$

$$x' = \gamma(x - \beta t)$$

$$t' = \gamma(t - \beta x)$$

a kwadrat czerowektora, czyli iloczyn skalarny: $P^2 = p_\mu p^\mu$ jest niezmiennikiem transformacji Lorentza,

kwadrat czerowektora energii i pędu nazywany jest masą (niezmienniczą): $m^2 = E^2 - \vec{p}^2$

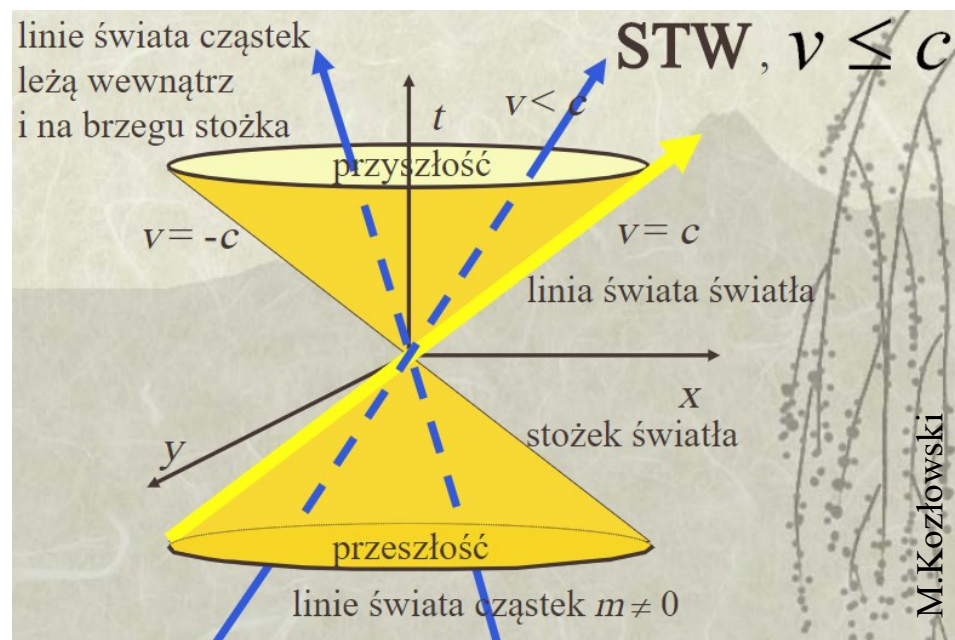
Interwały

$P^2 = p_\mu p^\mu \equiv m^2$
 $m^2 = E^2 - \vec{p}^2$

Jest to definicja masy obiektów swobodnych (nieoddziałujących), zarówno punktowych, jak i złożonych.

- dla czterowektora położenia interwał czasowy $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ jest niezmiennikiem TL (ma taką samą wartość we wszystkich układach odniesienia).

- gdy $P^2 = p_\mu p^\mu > 0$, to 4-wektor nazywamy czasowym (time-like, czasopodobnym), $v < c$, zdarzenia mogą być połączone przyczynowo
- gdy $P^2 = p_\mu p^\mu < 0$, to 4-wektor nazywamy przestrzennym (space-like, przestrzennopodobnym), $v > c$
- gdy $P^2 = p_\mu p^\mu = 0$, $v = c$ (light-like)



Jakie cząstki uważamy za relatywistyczne?

$$E = m$$

$$E = m_0 \gamma$$

$$p = mv$$

$$p = m_0 \gamma \beta$$

$$p = E \beta$$

$$E - p = E(1 - \beta)$$

co z jednostkami?
dopiszmy!

cząstka	energia	masa spoczynkowa m_0	γ	β	$E - p$	Relatywistyczna
elektron	1 MeV	511 keV	2			tak
elektron	1 GeV	511 keV	$2 \cdot 10^3$	0,99999999995		tak
proton	1 GeV	1 GeV	1		5 MeV	nie
proton	100 GeV	1 GeV	10^2			tak
foton	1 GeV	0		1	0	tak

Jeżeli różnica pomiędzy energią cząstki a jej masą spoczynkową jest dużo większa od masy spoczynkowej, to taka cząstka uważana jest za relatywistyczną, a do obliczeń przyjmuje się, że jest cząstką bezmasową.

$$E = p$$

Masa układu cząstek

- Czteropęd układu cząstek: $P^\mu = P_1^\mu + P_2^\mu = (E_1 + E_2, \vec{p}_1 + \vec{p}_2)$
określamy jako masą (niezmienniczą): $m = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}$
- Masa układu jest równa lub większa od sumy mas poszczególnych cząstek (nawet, gdy nie oddziałują).
- Masa układu jest **niezmiennicza** – wygodny sposób na obliczenia kinematyki procesu w różnych układach.
- Uwaga na różne pojęcia masy:
 - masa relatywistyczna i masa spoczynkowa: $m = m_0\gamma$,
 - masa kwarków? 1/3 masy protonu? Trudna do określenia bez teorii.

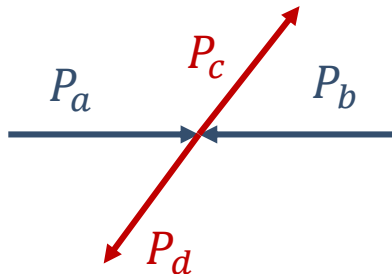
Niezmienniki relatywistyczne (zawsze kombinacja kwadratu 4-pędu):

$$s = (P_a + P_b)^2 \quad s \geq 0$$

$$t = (P_c - P_a)^2 \quad t \leq 0$$

$$u = (P_d - P_a)^2 \quad u \leq 0$$

$$s + t + u = ?$$



gdy $E \gg m$, to:

$$s \approx 2P_a P_b$$

$$t \approx -2P_a P_c$$

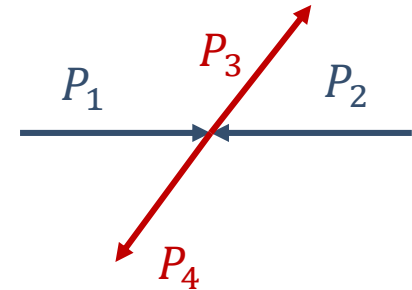
$$u \approx -2P_a P_d$$

Zderzenia

- Zderzenia cząstek o czteropędach P_1 i P_1 :

kwadrat czteropędu: $M^2 \equiv s = (P_1 + P_2)^2$

- jest to niezmiennik s ;
- jest to masa niezmiennicza układu cząstek 1 i 2:



- Liczymy:
$$s = (P_1 + P_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 =$$
$$= m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \cos \angle(\vec{p}_1, \vec{p}_2))$$

- Przy zderzeniach cząstek przeciwbieżnych: $\cos \angle(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = -1$,
a dla cząstek relatywistycznych: $E = p$ i mamy:

$$s = 4E_1 E_2$$

Kwadrat sumy czteropędów zderzanych cząstek to niezmiennik s i zarazem masa niezmiennicza tego układu.

Masa układu zależy od kierunku pędów cząstek!

Układ środka masy

Wybieramy teraz pewien układ – **środek masy**, w którym całkowity pęd cząstek wynosi zero:

$$\sum \vec{p} = 0$$

zatem czteropęd zapiszemy jako:

$$P = (E_1^* + E_2^*, 0)$$



Jeżeli policzymy w nim niezmiennik s , to otrzymamy:

$$s = (P_1 + P_2)^2 = (E_1^* + E_2^*)^2 - \underbrace{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}_{=0} = (\sum E_i^*)^2$$

$$s = \left(\sum E_i^* \right)^2$$

Kwadrat czteropędu układu jest kwadratem całkowitej energii w układzie środka masy (CMS).

MASA układu jest równa całkowitej energii w CMS (układzie środka masy):

$$m = \sqrt{s} = \sum E_i^*$$

\sqrt{s} jest **maksymalną energią** w oddziaływaniu, która może być wykorzystana do produkcji nowych stanów.

Skoro s jest niezmiennikiem, to można dokonywać obliczeń w innym układzie, np. laboratoryjnym...

Układ laboratoryjny

Określany jest jako układ, w którym jedna cząstka (tarcza) spoczywa, czyli:

$$\vec{p}_2 = 0$$

$$P_1 = (E_1, \vec{p}_1) \quad \longrightarrow \quad P_2 = (m_2, 0)$$

czteropęd układu: $P = (E_1 + m_2, \vec{p}_1)$

a niezmiennik s: $s = (P_1 + P_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 m_2)$

$$\sqrt{s} = \sqrt{2E_1 m_2}$$

Przykłady:

- proton o energii 100 GeV zderza się z tarczą: $\sqrt{s} = \sqrt{2E_p m_p} = 14 \text{ GeV}$
- dwie wiązki 100 GeV protonów: $\sqrt{s} = 2E = 200 \text{ GeV}$

W zderzeniach ze stałą tarczą większość energii protonu jest zmarnowana – unoszona jest jako pęd układu, a nie do produkcji nowych cząstek.

Przy projektowaniu eksperymentu należy przeliczyć, co się bardziej „opłaca” ..

Jaki układ wybrać?

Użyteczne zależności:

$$\vec{v} = \frac{\gamma m c^2 \vec{v}}{\gamma m c^2} = \frac{\vec{p} c^2}{E}, \quad \gamma = \frac{\gamma m c^2}{m c^2} = \frac{E}{m c^2}$$

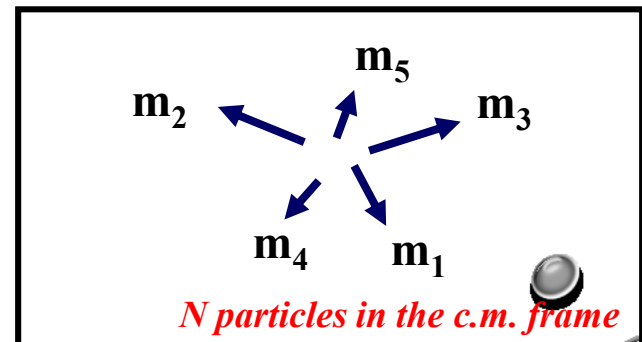
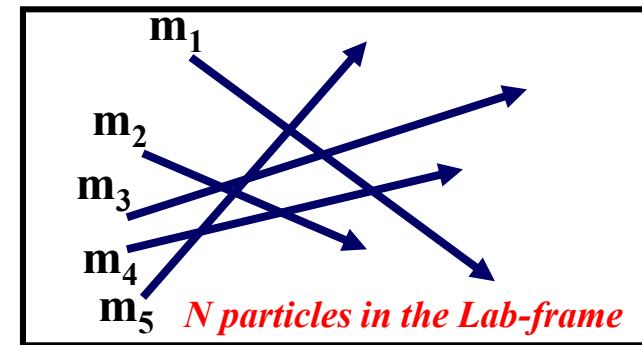
$$\begin{cases} E_{tot} &= \sum \gamma_i m_i c^2 \\ \vec{p}_{tot} &= \sum \gamma_i m_i \vec{v}_i \\ M_{tot}^2 c^4 &= E_{tot}^2 - \vec{p}_{tot}^2 c^2 \end{cases}$$

CMS „boost”:

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{p}_{tot} c}{E_{tot}}, \quad |\vec{\beta}| = \frac{|\sum \gamma_i m_i \vec{v}_i|}{\sum \gamma_i m_i c} \leq \frac{\sum |\gamma_i m_i \vec{v}_i|}{\sum \gamma_i m_i c} \leq 1$$

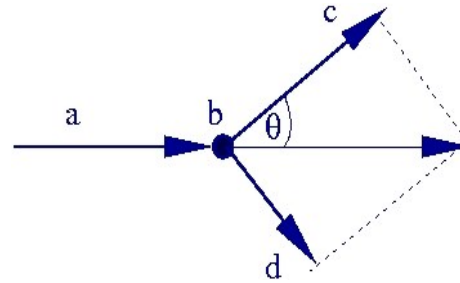
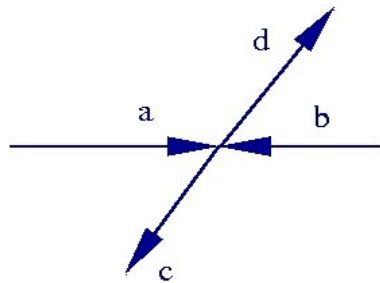
$$\gamma = \frac{E_{tot}}{M_{tot} c^2}$$

$$\begin{aligned} E'_{tot} &= \gamma(E_{tot} - \vec{\beta} \cdot \vec{p}_{tot} c) = \frac{E_{tot}^2 - \vec{p}_{tot}^2 c^2}{M_{tot} c^2} = \frac{M_{tot}^2 c^4}{M_{tot} c^2} = M_{tot} c^2 \\ \vec{p}'_{tot} &= \gamma(\vec{p}_{tot} - \vec{\beta} E_{tot}/c) = \vec{0} \end{aligned}$$



Produkcja cząstek

- W eksperymentach chodzi przeważnie o produkcję nowych, ciężkich obiektów.
- Masa jest niezmiennicza – taką samą wartość \sqrt{s} , jaką udało się osiągnąć w zderzeniu – będziemy mieć do dyspozycji po zderzeniu (przy zderzeniach protonów dużo mniej, bo nie są to obiekty punktowe).
- Staramy się zatem o jak największe \sqrt{s} – energię w układzie środka masy.
- Np:
 - obserwacja bozonów $Z^0 \rightarrow \sqrt{s} > 90 \text{ GeV}$, co można osiągnąć zderzając wiązki elektronów o energii 45 GeV
 - obserwacja cząstki Higgsa $\rightarrow \sqrt{s} > 120 \text{ GeV}$, a najlepiej $\sqrt{s} > 1 \text{ TeV}$
 - do obserwacji pary bozonów naładowanych – potrzeba podwojonej energii.



Zadania!

Energia progowa

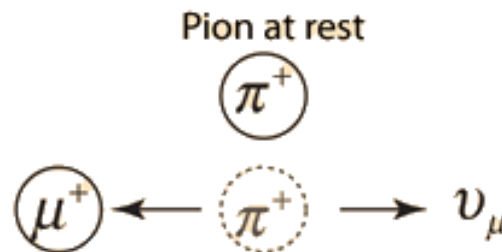
W zderzeniach wyprodukowano nową cząstkę, ale jak wyznaczyć jej masę, gdy rozpadła się na tyle szybko, że nie udało się jej zarejestrować?

$$A \rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + N$$

Korzystamy znowu z niezmiennika:

$$M_A^2 = \left(\sum E_i \right)^2 - \left(\sum \vec{p} \right)^2$$

masa rozpadającej się cząstki jest równa masie niezmienniczej produktów rozpadu



Energia progowa

- Do produkcji stanów wielocząstkowych również potrzeba pewnej energii progowej:

np. produkcja antyprotonów: $p + p \rightarrow p + \bar{p} + p + p$

wymaga energii w CMS: $E_{CM} \geq 4 m_p$

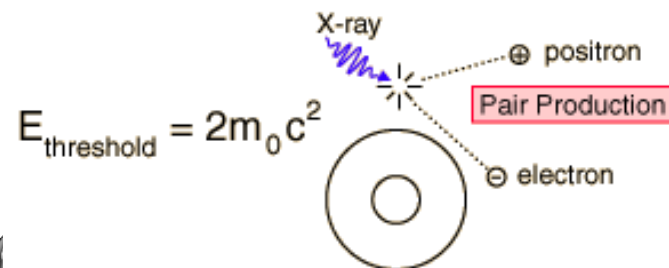
a przy zderzaniu protonów z tarczą: $E_L \geq 7 m_p = 6.6 \text{ GeV}$

jest to tzw. energia progowa na produkcję antyprotonów.

- Przy obliczaniu energii progowej należy uwzględnić prawa zachowania, np:

$$p + p \rightarrow p + n + \pi^+, E_p = 1.23 \text{ GeV}$$

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^-, E_p = 1.54 \text{ GeV}$$



Fizyka akceleratorów w pigułce

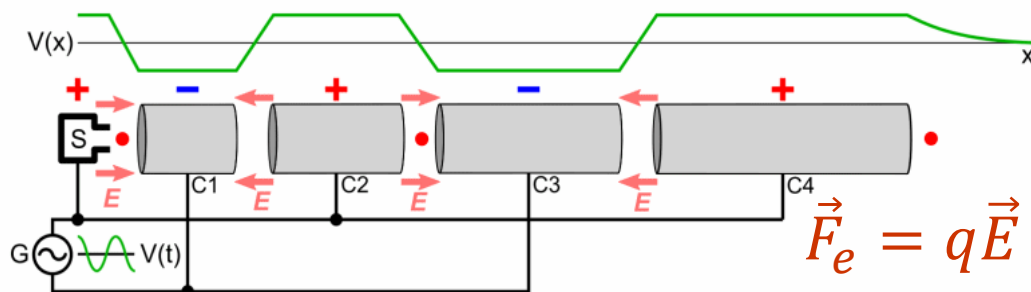
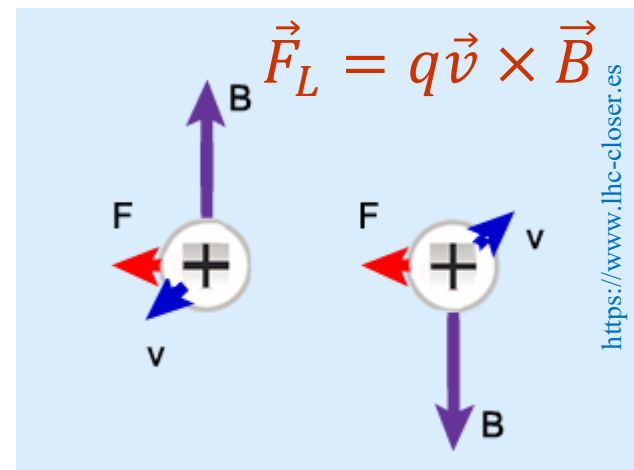
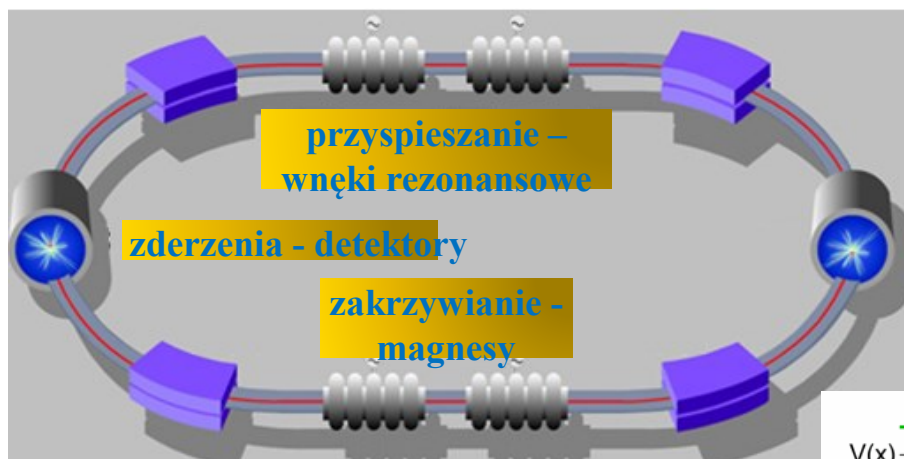
- Akceleratory to urządzenia do przyspieszania cząstek, głównie naładowanych.

- Najefektywniej jest przyspieszać je wielokrotnie w tych samych elementach.

- Musimy zatem mieć:

pole magnetyczne do zakrzywiania toru i ogniskowania cząstek,

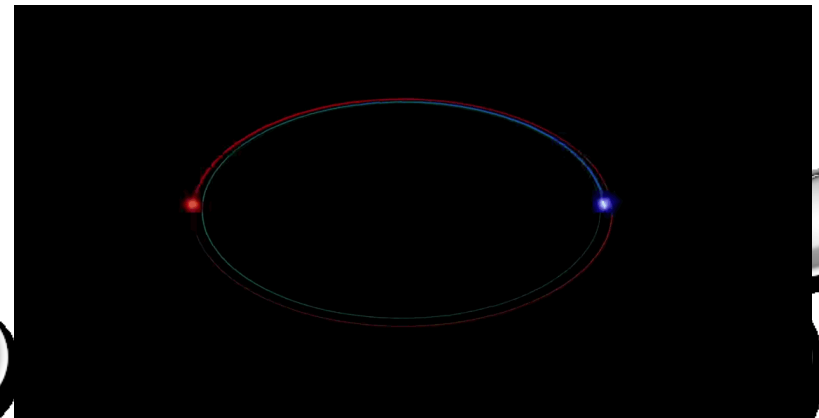
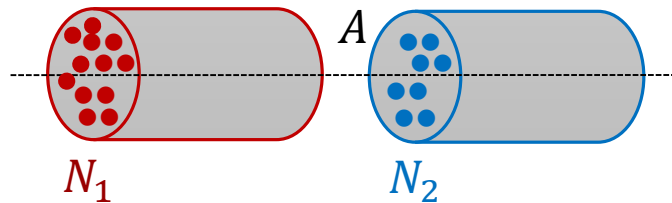
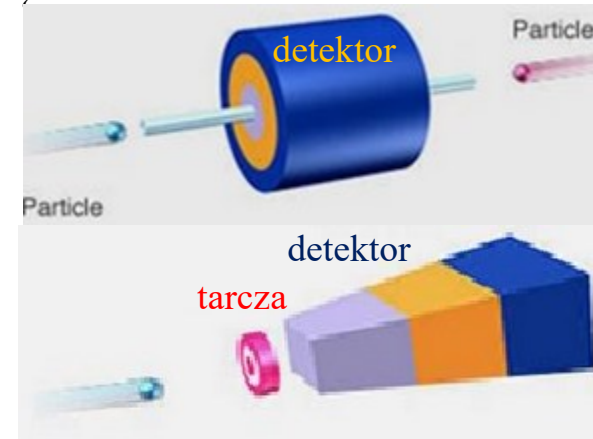
pole elektryczne do przyspieszania



From Wikimedia Commons

Akceleratorzy – parametry

- Przyspieszać możemy wiązki przeciwbieżne cząstek lub jedną wiązkę i zderzać ją z tarczą.
- W akceleratorach zależy nam na uzyskaniu odpowiedniej energii:
 - największej, gdy chodzi o produkcję nowych cząstek,
 - dokładnie określonej, gdy celem jest zbadanie konkretnych stanów, np. produkcja Z^0 czy mezonów B .
- Ważne również jest, aby było możliwie dużo zderzeń – dlatego zderza się wiązki z pęczkami cząstek, np. o liczności rzędu 10^{11} .
- Zderzenia będą częstsze, gdy wiązki mają małe przekroje poprzeczne, np. $10\ \mu\text{m}$.



Światłość akceleratora

- O jakości akceleratora świadczy parametr nazywany światłością (**luminosity**).
- Jest to liczba decydująca o tym ile i jak częstych zderzeń możemy oczekiwać.
- Jeżeli **światłość** będzie za mała, to np. rzadkich procesów możemy się nie doczekać.

$$\mathcal{L} = n_b \frac{N_1 N_2}{\sigma_x \sigma_y} f$$

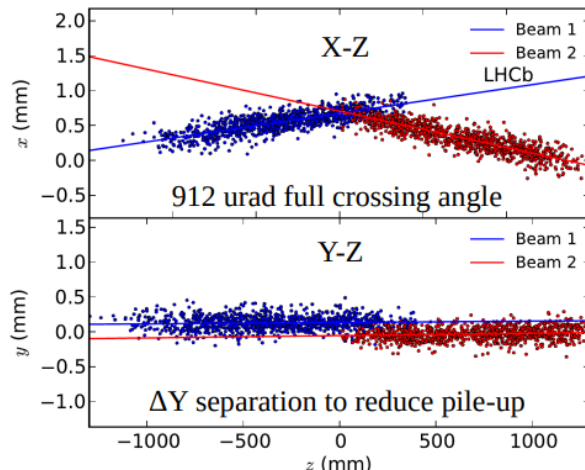
$$[\mathcal{L}] = \frac{1}{\text{cm cm}} \frac{1}{\text{s}} = \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$$

Światłość podawana jest w pewnym okresie zbierania danych, jako „skałkowana” światłość:

$$\int \mathcal{L} dt = L$$

$$[L] = \text{cm}^{-2}$$

$$[L] = \text{GeV}^{-2}$$



Dlaczego wiązki zderzane są względem siebie pod kątem?



Yield, czyli o uzysk przede wszystkim chodzi....

Światłość LHC w latach 2015-18 wynosiła (proszę obliczyć):

- zderzano wiązki $1.6 \cdot 10^{11}$ protonów o przekrojach poprzecznych $40 \mu\text{m}$ z częstością 25 ns .
- znając rozmiar protonów, można oszacować, ile pustej przestrzeni było pomiędzy protonami (długość pęczku to ok. 4 cm) oraz prawdopodobieństwo zderzenia.
- Jeżeli eksperyment trwa 3 miesiące, to ile wynosi scałkowana światłość?
- Liczba obserwowanych przypadków zależy od:
 - przekroju czynnego,
 - światłości akceleratora,
 - wydajności (detekcji, rekonstrukcji, identyfikacji, itp.)
- liczba przypadków/czas (*rate*)
- liczba przypadków/rok (*yield*)

$$\frac{dN}{dt} = \mathcal{L} \sigma \mathcal{E}$$

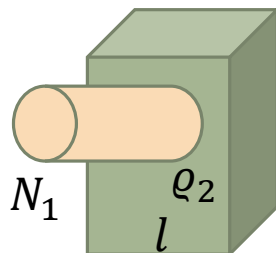
$$\left[\frac{1}{s} = \frac{1}{\text{cm}^2} \frac{1}{s} \text{ cm}^2 \right]$$

$$y = \int \frac{dN}{dt} dt = \int \mathcal{L} \sigma \mathcal{E} dt = L \sigma \mathcal{E}$$
$$\begin{matrix} [\text{cm}^{-2} \text{ cm}^2] \\ [\text{fb}^{-1} \text{ fb}^1] \end{matrix}$$

Przykład: Eksperyment zebrał 100 fb^{-1} danych, a przekrój czynny na produkcję cząstki Higgsa wynosi 1 fb^1 . Ile cząstek Higgsa zaobserwowano przy wydajności 1%?

Zderzenia z tarczą

Dla zderzeń z tarczą:

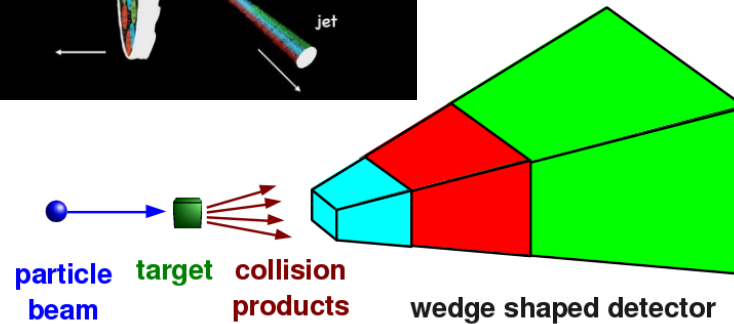
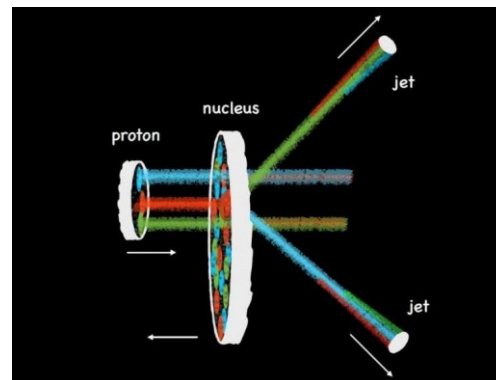


$$\mathcal{L} = N_1 Q_2 l$$

Wiązka 10^{13} protonów zderzana z tarczą wodorową o grubości 1m:

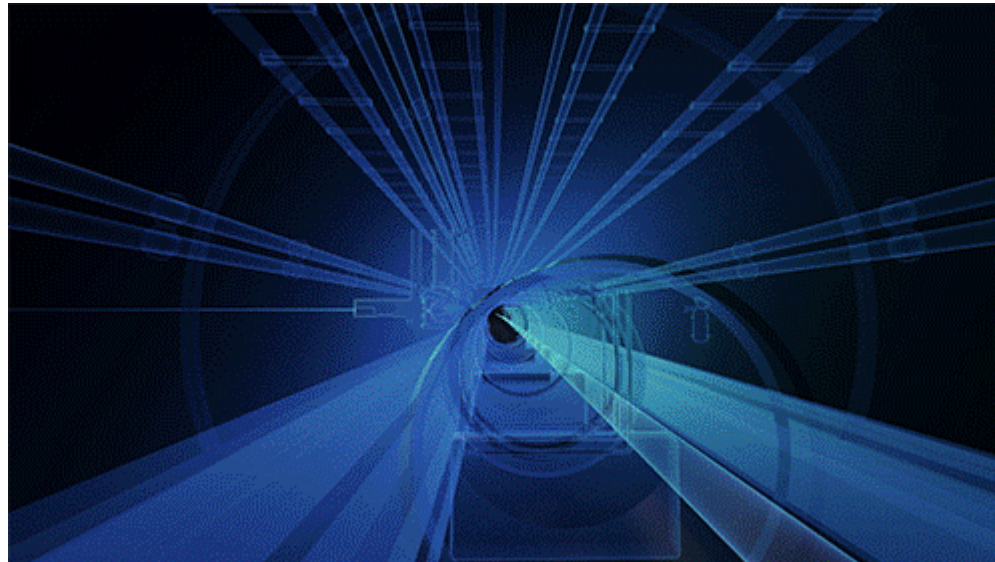
$$\mathcal{L} = 10^{38} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

po zderzeniu wiązka jest tracona.



Podsumowanie

- Dlaczego wysokie energie?
- Koniecznie mechanika relatywistyczna. Masa niezmiennicza i czteropędy.
- Układ środka masy i laboratoryjny.
- Zderzenia wiązek przeciwbieżnych i zderzenia wiązki z tarczą.
- Światłość, przekrój czynny i spodziewana liczba przypadków.



ZADANIA 1

1. Proton o wysokiej energii zderza się z jonami wodoru. Jaka musi być minimalna energia, aby powstały antyprotony?
2. Jaka jest energia i pęd produktów rozpadu pionu (w spoczynku) w procesie: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$.
3. Jaka jest energia elektronu z rozpadu mionu: $\nu^- \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$.
4. Rozpatrz ogólny przypadek rozpadu cząstki X na a i b .
 - a) Pokaż, że w układzie spoczynkowym X , energia cząstki a jest wyrażana poprzez zależność: $E_a = \frac{m_X^2 + m_a^2 - m_b^2}{2m_X}$,
 - b) ile wynosi pęd cząstki a ?
 - c) a ile wynoszą pędy a i b , gdy są to cząstki o tej samej masie?
5. Relatywistyczny ($\gamma \gg 1, \beta \approx 1$) neutralny pion rozpada się na dwa fotony: $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$. Porównaj kąt pomiędzy tymi fotonami w układzie środka masy i laboratoryjnym. Policz go dla pędów pionu: $p_\pi = 1 \text{ GeV}$ i $p_\pi = 10 \text{ GeV}$.
6. Oblicz średni czas życia mezonu K_S^0 , jeżeli w detektorze obserwuje się, że odległość od miejsca produkcji do rozpadu na dwa naładowane piony wynosi 3.7 cm, a jego pęd wynosi 700 MeV.
7. Relatywistyczna cząstka o masie m i pędzie \vec{p} skierowanym wzdłuż osi z zderza się ze spoczywającą cząstką o masie M . Obliczyć energie i pędy obu cząstek w ich układzie środka masy. Jaką energię musi mieć proton zderzający się z tarczą wodorową, aby w układzie środka masy zderzeń proton-proton energia wynosiła 1 TeV.
8. Jakie powinny być energie wiązek elektronów, aby możliwa była produkcja:
 - a) jednego bozonu neutralnego o masie $M_Z = 90 \text{ GeV}$,
 - b) dwóch bozonów naładowanych o masie $M_W = 80 \text{ GeV}$ każdy.
 - c) bozonu Higgsa o masie 125 GeV.Jaki akcelerator umożliwi przeprowadzenie ww doświadczeń?
6. Światłość LHC planowana była jako: $\mathcal{L} = 2 \times 10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ a przekrój czynny na produkcję bozonu Higgsa szacowany jest na 50 fb. Ile trzeba było czekać na pojawienie się pierwszej takiej cząstki?
7. Przy światłości eksperymentu LHCb $\mathcal{L} = 2 \times 10^{32} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ zaobserwowano 20 tysięcy przypadków pewnego procesu w ciągu roku zbierania danych (10^7 s). Jaki jest przekrój czynny na ten proces? Ile wynosi tzw. scałkowana światłość za rok zbierania danych (wyrażona w fb^{-1})?