



CZĄSTKI ELEMENTARNE I ODDZIAŁYWANIA

III ZŁOTA REGUŁA FERMIEGO

EKSPERYMENT VS TEORIA

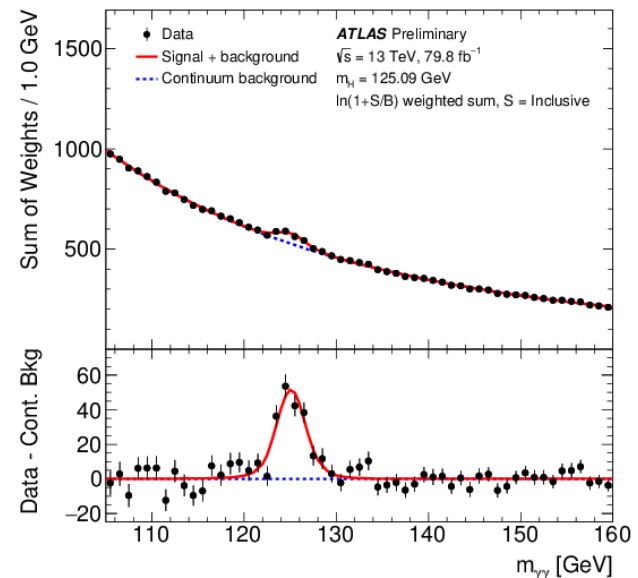
JAK OPISAĆ CZĄSTKĘ? OD SCHRÖDINGERA DO
DIRACA

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

<http://home.agh.edu.pl/~amucha/>
Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek
D11 p. 106

Czy było oddziaływanie?

- Jak można zbadać oddziaływania? Generalnie mamy dwa scenariusze:
- Rozpraszamy (zderzamy) cząstki – szukamy stanów końcowych, ich energii i rozkładów kątowych.
- Badamy rozpady cząstek (czy zaszły, jak szybko, na jakie stany końcowe)
- Wynikiem analizy jest bardzo często histogram masy niezmienniczej szukanego stanu końcowego.
- Jaki jest związek takiego rozkładu z teorią?
 1. Liczba obserwowanych przypadków proporcjonalna jest do przekroju czynnego:
 $R = L\sigma\mathcal{E}$.
 2. Przekrój czynny jest miarą prawdopodobieństwa zajścia procesu, a zatem powinno się go dać obliczyć z teorii.
- Eksperymentalnie mierzymy:
 - szybkość rozpadu cząstek (decay rates)
 - przekroje czynne



Przekrój czynny jest parametrem łączącym doświadczenie i teorię

Experiment and Theory

❑ *It doesn't matter how beautiful your theory is, it doesn't matter how smart you are. If it doesn't agree with experiment, it's wrong.*

Richard P. Feynman

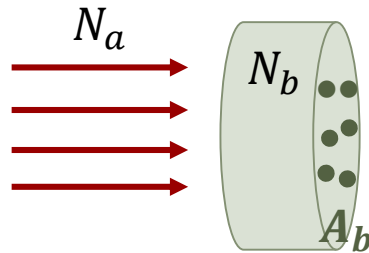
❑ *A theory is something nobody believes except the person who made it,*

An experiment is something everybody believes except the person who made it.

Albert Einstein

Strumień cząstek czyli flux

- Rozważamy zderzenia wiązek cząstek z tarczą.
- Doświadczalnie rejestrujemy liczbę przypadków w jednostce czasu, czyli *rate*: $R = dN/dt$.
- Obliczymy, jaki jest *rate* w stosunku do jednej cząstki z wiązki i tarczy.



Wiązka – cząstki tego samego typu „a” (elektrony, pozytony, protony, jony, ...) poruszające się w tym samym kierunku o zbliżonej energii.

gęstość cząstek: $n_a = N_a/V$

natężenie wiązki I_a to liczba cząstek w jednostce czasu: $I_a = \frac{N_a}{t}$

strumień (właściwie powinno się to nazywać *gęstość strumienia*) cząstek (**flux**) Φ_a to liczba cząstek padających na tarczę w jedn. czasu na jedn. powierzchni (por. świetłość):

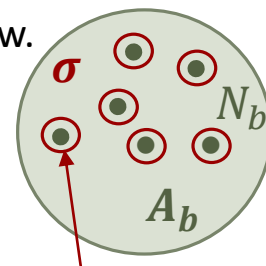
$$\Phi_a = \frac{N_a}{A t}$$

Przekrój czynny na oddziaływanie

- **Tarcza** – kawałek materiału, złożony z jąder, nukleonów, elektronów czy kwarków. Charakteryzowany:

gęstością $n_b = \frac{N_b}{V}$ [cząstek/objętość],

N_b – całkowitą liczbą cząstek- „centrów rozpraszania”

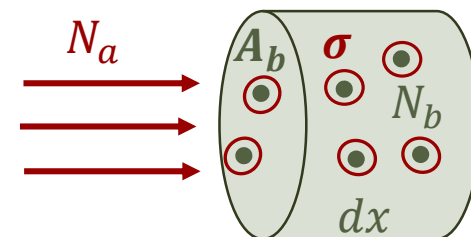


- Przekrój czynny σ - miara prawdopodobieństwa oddziaływania, geometrycznie – powierzchnia „centrów rozpraszania”, jeśli cząstka trafi w tę powierzchnię, to zajdzie oddziaływanie,

1 barn = 10^{-28} m² – powierzchnia jądra o A=100 (uranu)

- Wiązka cząstek „a” o prędkości v_a wpada na tarczę o powierzchni A_b , w czasie dt cząstka a przecina region A_b , w którym jest

$$dN = \frac{N_b}{V} A_b dx = n_b A_b v_a dt \text{ cząstek } b$$



prawdopodobieństwo oddziaływania (geometryczne) procesu jest to efektywne pole powierzchni:

$$P = \frac{\sigma}{A_b} = n_b v_a A_b dt \frac{\sigma}{A_b} = n_b v_a \sigma dt$$

a szybkość reakcji:

$$r_a = \frac{dP}{dt} = n_b v_a \sigma$$

Prawdopodobieństwo reakcji

Dla wiązki N_a cząstek a w objętości V : $R_a = r_a n_a V = n_b v_a \sigma n_a V$

$$\left. \begin{aligned} n_a &= \frac{N_a}{V} = \frac{N_a}{A v_a t} \\ n_b &= \frac{N_b}{V} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} R_a &= \frac{N_a}{A v t} v_a \frac{N_b}{V} \sigma V \\ R_a &= \Phi_a N_b \sigma \end{aligned}$$

$$R_a = \underbrace{\frac{N_a}{A t}} N_b \sigma$$

Φ_a strumień cząstek a

Szybkość (prawdopodobieństwo) reakcji (oddziaływania) zależy od strumienia cząstek początkowych i od przekroju czynnego tej reakcji.

Problem: strumień cząstek (flux) nie jest niezmienniczy lorentzowsko, dla każdego procesu należy go wyznaczać oddzielnie.

W CEiO badamy:

- stany związane
- rozproszenia
- rozpady

równanie Schrodingera

przekrój czynny

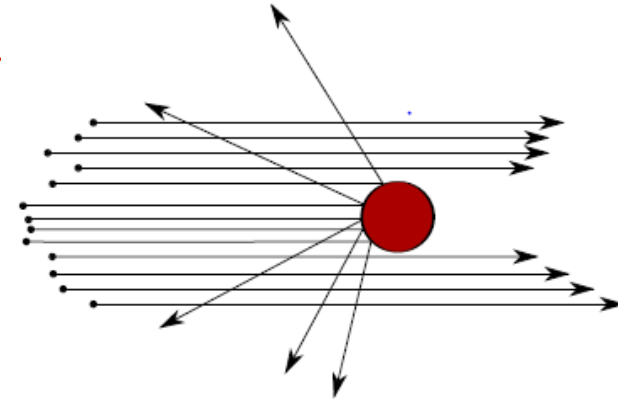
(mean) lifetime,

Przekrój czynny (rozproszenia)

Przekrój czynny jest to zatem:

$$\sigma = \frac{\text{Liczba zdarzeń na liczbę cząstek tarczy/czas}}{\text{strumień cząstek "a"}}$$

$$= \frac{W_{fi}}{\text{strumień wejściowy}}$$



Częstość (rate):

$$R = \frac{dN}{dt} = \text{strumień} \times \text{liczba cząstek tarczy} \times \text{przekrój czynny}$$

strumień = liczba cząstek padających / jednostkę czasu i powierzchni

$$R = \Phi_a \sigma$$

Szybkość reakcji (transition rate, transition probability) na jednostkę czasu: Γ_{if} może być obliczona na podstawie Złotej Reguły Fermiego (następny wykład).

Pamiętamy, że świetlność to liczba cząstek wiązki na jednostkę czasu na powierzchnię, a zatem:

$$R_a = \mathcal{L} \sigma$$

Rozpady

Rozpady są to procesy typu $a \rightarrow b + c + d$

W rozpadach interesuje nas:

- (średni) czas życia,
- sposób rozpadu,
- prawdopodobieństwo rozpadu

czas życia:

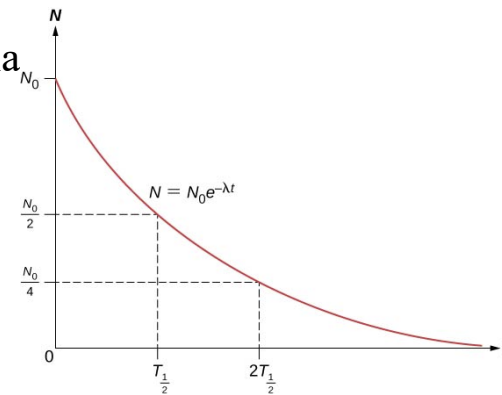
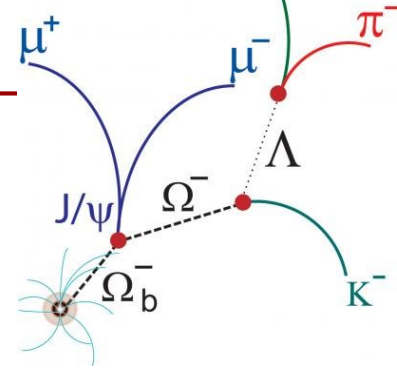
rozpad ma charakter stochastyczny – każdy mion (np.) ma inną długość życia (nawet mion w spoczynku) i p-two rozpadu nie zależy od długości życia (rozpady eksponencjalne nie mają „pamięci”),

- można mówić p-twie na jedn.czasu, że mion się rozpadnie, czyli o *decay rate* Γ^* ,
- dla wielu obserwowanych mionów: $dN = -\Gamma N dt$

$$N(t) = N(0) e^{-\Gamma t} = N(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- mówimy o **średnim** czasie życia zgodnie z: $\tau = \frac{1}{\Gamma}$

** Γ jest to współcz. proporc. między aktualną liczbą cząstek (jąder, atomów) a szybkością, z którą ta liczba maleje i praktycznie oznacza prawdopodobieństwo procesu*



Rozpady

Jeżeli cząstka rozpada się na i – sposobów, to:

$$dN = -N \Gamma_1 dt - N \Gamma_2 dt - \dots = -N \sum_i \Gamma_i = -N \Gamma dt$$

gdzie całkowita szybkość rozpadu jest sumą wszystkich *rozpadów parcyjnych*:

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i$$

a względna częstość rozpadu (*Branching Ratio, Branching Fraction*): $BR(i) = \frac{\Gamma_i}{\Gamma}$

2019 Review of Particle Physics.

M. Tanabashi *et al.* (Particle Data Group), Phys. Rev. D **98**, 030001 (2018) and 2019 update.

STRANGE MESONS

($S = \pm 1$, $C = B = 0$)

$K^+ = u \bar{s}$, $K^0 = d \bar{s}$, $\bar{K}^0 = \bar{d} s$, $K^- = \bar{u} s$, similarly for K^* 's

K_S^0 $I(J^P) = 1/2(0^-)$

Mode

Fraction (Γ_i / Γ)

▼ Hadronic modes

Γ_1	$\pi^0 \pi^0$	$(30.69 \pm 0.05)\%$
Γ_2	$\pi^+ \pi^-$	$(69.20 \pm 0.05)\%$
Γ_3	$\pi^+ \pi^- \pi^0$	$(3.5^{+1.1}_{-0.9}) \times 10^{-7}$

Zderzenia i rozproszenia

Zderzenia są to procesy typu $a + b \rightarrow c + d$

Obserwable doświadczalne:

- energia, pędy każdej (lub nie każdej) cząstki,
- kierunki lotu, polaryzacje,
- kąty w układzie lab, CMS,
- ...



Przekrój czynny:

- **inkluzywny** - gdy interesuje nas jedynie jedna obserwabl, nie znamy energii i pędów wszystkich cząstek, całkujemy po pozostałych, np. przekrój czynny na produkcję cząstek z dużym pędem poprzecznym, produkcję czarnu, itp.
- **ekskluzywny** – wszystkie parametry są zmierzone.

W wyniku zderzenia mogą powstać różne stany końcowe:

$$a + b \rightarrow \begin{cases} a + b & \text{elastyczne} \\ c_1 + d_1 & \\ c_i + d_i + e_i & \text{nieelastyczne} \end{cases}$$

są to różne kanały reakcji,
na każdy kanał jest określony parcyjny
przekrój czynny: σ_i

$$\sigma_{tot} = \sum \sigma_i$$

Zderzenia i rozproszenia (IRL)

W zderzeniach chodzi przede wszystkim o to, żeby trafić....

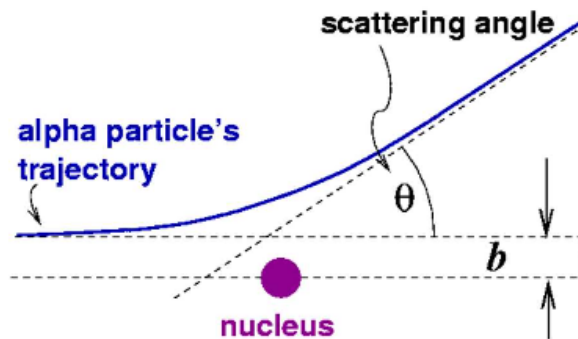
- ✓ czyli najważniejszy jest rozmiar tarczy,
- ✓ ale również prędkość pocisku,
- ✓ liczba pocisków,
- ✓ a także typ oddziaływania (coulombowskie, jądrowe, magnetyczne),
- ✓ czy obecność rezonansów, które są chętnie tworzone (por. fizykę reaktorów)

Zderzenia cząstek i zderzenia z tarczą prowadzą do rozproszeń:

- **elastycznych** – ten sam stan końcowy, co początkowy, zachowana energia (kinetyczna) i pęd;
- **nieelastycznych** – stan końcowy i początkowe różnią się, pęd nie jest zachowany.

Strumień początkowy – liczba cząstek początkowych na jednostkę czasu i powierzchni.

Strumień rozproszony – liczba cząstek rozproszonych w kącie bryłowym $d\Omega$ w jednostce czasu.



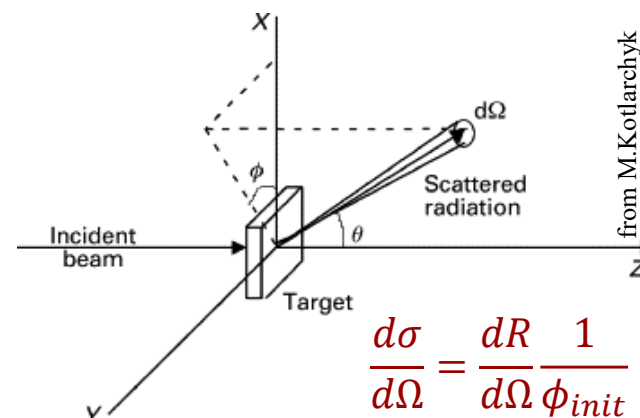
Rozproszenia

A jeśli interesuje nas (lub możemy tyle zmierzyć) różniczkowy przekrój czynny:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{\phi_{scatt}}{\phi_{init}}$$

to całkowity przekrój czynny (LI):

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dR}{d\Omega} \frac{1}{\phi_{init}}$$

Zadania CEiD:

- zmierzyć i obliczyć:

przekrój czynny

decay rates

- pamiętając o zasadach zachowania (en i pędu, innych l.kwantowych)

Złota Reguła Fermiego

Złota reguła Fermiego podaje przepis na prawd-two przejścia dla reakcji na jednostkę czasu (w odniesieniu do 1. cząstki tarczy), czyli na W :

$$W = \Gamma_{fi} = 2\pi |T_{fi}|^2 \varrho(E_i)$$

$$T_{fi} = \langle f | \widehat{H}' | i \rangle$$

T_{fi} - element macierzowy amplitudy przejścia $i \rightarrow f$,
 \widehat{H}' - hamiltonian oddziaływania (fizyka!)

} przewidywania, teoria!

Szybkość przejścia zależy zatem od:

- macierzy przejścia (teoria oddziaływań, dynamika procesu) T_{fi} ,
- liczby dostępnych stanów (zasady zachowania), która zależy od kinematyki $\varrho(E_i)$
- postaci stanów $|i\rangle$ i $|f\rangle$

Złota Reguła Fermiego (FGR)

Alternatywna postać reguły:

$$\Gamma_{fi} = 2\pi \int |T_{fi}|^2 \delta(E_i - E) dn$$

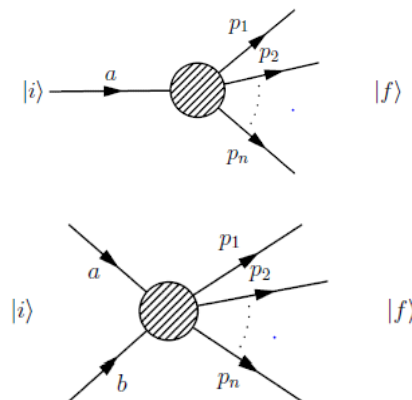
$$\Gamma_{fi} = 2\pi |T_{fi}|^2 \times (\textit{phase space})$$

FGR można wyprowadzić z równań relatywistycznych i nierelatywistycznych, dla zainteresowanych [1]:

ale lepiej rozważyć „nasze” (tzn. CEiO) problemy:

- rozpad
- rozproszenia

od strony doświadczalnej i teoretycznej



[1] <https://web2.ph.utexas.edu/~schwitte/PHY362L/QMnote.pdf>

M. Thomson, *Modern Particle Physics*

D.J.Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley @ Sons 1987, p. 198

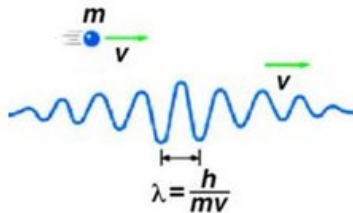
Równanie Schrödingera – funkcja falowa

- Stan układu określa funkcja falowa (zespólona): $\Psi(\vec{x}, t) \equiv |\Psi\rangle$
- Cząstka swobodna opisywana jako pakiet falowy:

$$\Psi(\vec{x}, t) = Ne^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)} \text{ lub } \Psi(\vec{x}, t) = Ne^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$$

$$E = \hbar\omega$$



- W funkcji falowej „zaszyte” są informacje o energii i pędzie stanu.
- Interpretacja fizyczna funkcji falowej: $\rho(\vec{x}, t) = \Psi^* \Psi d^3 \vec{x}$ jest gęstością p-twa znalezienia cząstki w $d^3 \vec{x}$.
- W przypadku nieoddziałujących cząstek opisanych jako fala płaska $\Psi(\vec{x}, t) = Ne^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)}$, p-two jest stałe:

$$\Psi^* \Psi = |N|^2$$

Równanie Schrödingera – funkcja falowa

- Energia i pęd stają się operatorami działającymi na funkcję falową $\vec{p} \rightarrow -i\nabla, E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}$

Operator – obiekt przyporządkowujący jednej funkcji inną funkcję: $\hat{A} \Psi = a \Psi$

Rezultatem pomiaru jest wartość własna operatora, czyli np. obserwabla opisana operatorem \hat{A} daje pomiar a .

- Jeśli pomiar ma dać wielkość fizyczną, to:
 - wartość własna musi być rzeczywista
 - operator musi być hermitowski: $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$
- Równania własne dla operatora pędu i energii:

$$\hat{p} \Psi = p \Psi$$

$$\hat{E} \Psi = E \Psi$$

$$-i \nabla \Psi = p \Psi$$

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \Psi$$

p i E to wartości własne operatorów \hat{p} oraz \hat{E}

Równanie Schrödingera

- W mechanice klasycznej energia całkowita: $E = H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V$

- Odpowiednio w mechanice kwantowej:

$$i \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t)$$

Równanie Schrödingera
(zależne od czasu)

Hamiltonian (nierelatywistyczny): $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} = -\frac{1}{2m} \nabla^2 + \hat{V}$

- 1-wymiarowe równanie Schrödingera:

$$i \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(\vec{x}, t)}{\partial x^2} + \hat{V}(\vec{x}, t)$$

Równanie Schrödingera

- Ewolucja czasowa stanów w MK jest opisana zależnym od czasu r. Schrödingera.
- Dla stanów własnych Hamiltonianu ψ_i z wrt. własną energii E_i mamy:

$$\hat{H} \psi_i(\vec{x}, t) = E_i \psi_i(\vec{x}, t)$$
$$i \frac{\partial \psi_i(\vec{x}, t)}{\partial t} = E_i \psi_i(\vec{x}, t)$$

- Zatem można zapisać ewolucję czasową stanów własnych Hamiltonianu jako:

$$\psi_i(\vec{x}, t) = \phi_i(\vec{x}) e^{-iE_i t}$$

Równanie Schrödingera

- Każdy stan $|\varphi\rangle$ może być zapisany jako kombinacja stanów własnych \hat{H} , jako:

$$|\varphi\rangle = \sum_i c_i |\psi_i\rangle$$

- A jego ewolucja czasowa jako: $|\varphi(\vec{x}, t)\rangle = \sum_i c_i \phi_i(\vec{x}) e^{-iE_i t}$

Oscylacje zapachu (flavouru)
w neutrinach i kwarkach

- Wartość własna operatora dla układu w stanie $|\Psi\rangle$ to: $\langle\hat{A}\rangle = \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle$

- Wartość własna dowolnego operatora \hat{A} , który komutuje z Hamiltonianem \hat{H} jest stała (nie zależy od czasu, jest zachowana).

SYMETRIE !

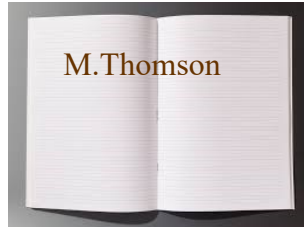
- Jeżeli układ jest w stanie własnym \hat{H} , to wartość oczekiwana każdego operatora jest stała. Mówimy, że stany własne Hamiltonianu $\phi_i(\vec{x})$ są **stanami stacjonarnymi**.

FGR – przykład

Rozpady $a \rightarrow 1 + 2$:

W pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń amplituda przejścia:

$$T_{fi} = \langle \psi_1 \psi_2 | \widehat{H}' | \psi_a \rangle = \int \psi_1^* \psi_2^* \widehat{H}' \psi_a d^3x \quad \int \psi^* \psi d^3x = 1$$



A w przybliżeniu Borna stan początkowy i końcowy reprezentowany jest przez falę:

$$\psi(\vec{x}, t) = A e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)}$$

Niezmiennicza lorentzowsko postać ZRF jest nieco inna, funkcja falowa jest znormalizowana do całkowitej energii:

$$\int \psi'^* \psi' d^3x = 2E \quad \text{czyli:} \quad \psi' = \sqrt{2E} \psi$$

Ogólnie dla procesu typu: $a + b + \dots \rightarrow 1 + 2 + \dots$

Niezmienniczy lorentzowsko element macierzowy liczony dla niezmienniczej fcy falowej ma postać:

$$M_{fi} = \langle \psi'_1 \psi'_2 \dots | \widehat{H}' | \psi'_a \psi'_b \dots \rangle = (2E_1 \cdot 2E_2 \cdot \dots \cdot 2E_a \cdot 2E_b \cdot \dots)^{1/2} T_{fi}$$

element przestrzeni transformuje się jak:

$$dV \rightarrow dV' = \gamma dV$$

TL energii:

$$E \rightarrow E' = \gamma E$$

gęstość pr-twa:

$$|\psi(x)|^2 \rightarrow |\psi'(x)|^2 = |\psi(x)|^2 / \gamma$$

czyli: $|\psi'(x)|^2 = (2E)^{-1/2} |\psi(x)|^2$

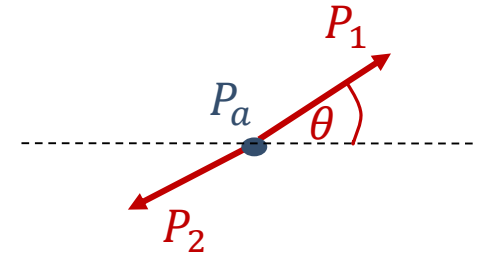
FGR dla rozpadu

Dla rozpadu dwuciałowego $a \rightarrow 1 + 2$ Złota Reguła Fermiego jest w postaci:

$$\Gamma_{fi} = 2\pi \int |T_{fi}|^2 \delta(E_a - E_1 - E_2) dn$$

Liczba dozwolonych stanów:

$$dn = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}_a - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3}$$



A w postaci niezmienniczej:

$$\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{2E_a} \int |M_{fi}|^2 \delta^3(\vec{p}_a - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}$$

Gdzie:

$$|M_{fi}|^2 = (2E_a 2E_1 2E_2) |T_{fi}|^2$$

... co daje:

$$\Gamma_{fi} = \frac{p^*}{32\pi^2 m_1^2} \int |M_{fi}|^2 d\Omega$$

p-two rozpadu jest odwrotnie prop. do energii:

$$\Gamma_{fi} \propto \frac{1}{E_a},$$

FGR dla rozproszenia

Dla rozproszenia $a + b \rightarrow c + d$ Złota Reguła Fermiego jest w postaci:

$$\sigma = \frac{(2\pi)^4}{2E_a 2E_b (v_a + v_b)} \int |M_{fi}|^2 \delta(E_a + E_b - E_c - E_d) \delta^3(\vec{p}_a + \vec{p}_b - \vec{p}_c - \vec{p}_d) \frac{d^3\vec{p}_c}{(2\pi)^3 2E_c} \frac{d^3\vec{p}_d}{(2\pi)^3 2E_d}$$

$$E_a + E_b = \sqrt{s}$$

$$\vec{p}_a + \vec{p}_b = 0 \text{ (w CMS)}$$

... co daje:

$$\sigma = \frac{(2\pi)^{-2}}{p_i^* \sqrt{s}} \int |M_{fi}|^2 \delta(\sqrt{s} - E_c - E_d) \delta^3(\vec{p}_c + \vec{p}_d) \frac{d^3\vec{p}_c}{2E_c} \frac{d^3\vec{p}_d}{2E_d}$$

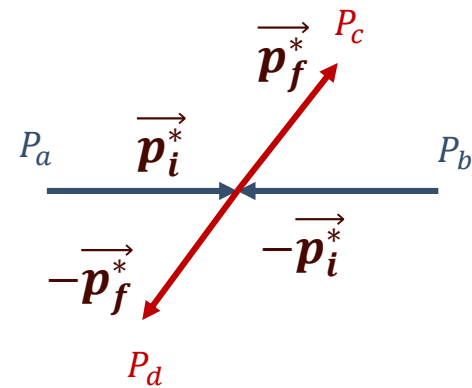
.....

$$\sigma = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{p_f^*}{p_i^*} \int |M_{fi}|^2 d\Omega^*$$

a dla rozprożeń elastycznych $\vec{p}_i^* = \vec{p}_f^*$ mamy:

$$\sigma = \frac{1}{64\pi^2 s} \int |M_{fi}|^2 d\Omega^*$$

uwaga!



Business plan

Mamy już zatem zakreślony (prosty) plan działania w FWE:

1. Formujemy teorię (hamiltonian)
2. Określamy zasady zachowania
3. Liczymy elementy macierzy przejścia M_{fi} i szerokość rozpadu Γ_{fi} (szybkość reakcji).
4. Budujemy eksperyment i mierzymy przekrój czynny σ .
5. Porównujemy nasze przewidywanie z doświadczeniem.



Prawdopodobieństwo reakcji

DOŚWIADCZENIE

akcelerator:

wiązka cząstek (energia, światłość), **strumień**

detektory: pomiar pędu i energii, identyfikacja, topologia przypadku (wierzchołki produkcji i rozpadu), **zasady zachowania**

Złota Reguła Fermiego

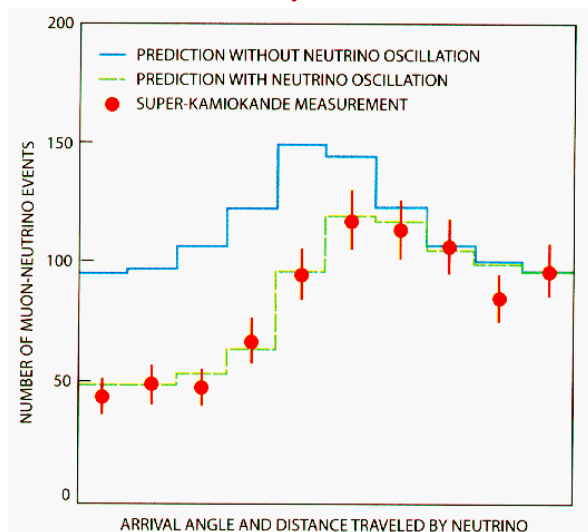
$$\Gamma_{fi} = 2\pi |T_{fi}|^2 \rho(E_i)$$

$$T_{fi} = \langle f | \hat{H}' | i \rangle$$

szybkość rozpadu Γ , przekrój czynny σ , stosunki rozgałęzień **BR**

Przewidywania teoretyczne

hamiltonian, symetrie



Podsumowanie FGR

1. Strumień cząstek
2. Przekrój czynny
3. Złota reguła Fermiego
 - prawdopodobieństwo przejścia,
 - amplituda przejścia,
 - gęstość stanów.
4. Szerokość rozpadu, branching fraction (stosunek rozgałęzień).

Równanie Kleina-Gordona

- Równanie Schrödingera nie jest relatywistyczne (niezmiennicze lorentzowsko), ma pochodne czasowe i przestrzenne różnych rzędów.
- Wykorzystamy: $E^2 - p^2 = m^2$ lub: $p^\mu p_\mu - m^2 = 0$
- Podstawimy operatory energii i pędu: $-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi + \nabla^2\Psi = m^2\Psi$ lub: $(-\partial^\mu\partial_\mu - m^2)\psi = 0$
- Dostajemy **równanie Kleina-Gordona**
- Jego rozwiązaniem jest również fala płaska: $\Psi(\vec{x}, t) = Ne^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)}$

Ale są dodatnie i ujemne energie: $E = \pm\sqrt{p^2 - m^2}$

- Równanie K-G jest niezmiennicze, ale daje нефizyczne rozwiązania (ujemne energie i gęstości p-twa)
- Jak podstawimy $m \rightarrow 0$, to mamy „zwykłe” równanie falowe.
- Dla części przestrzennej – rozwiązaniem jest potencjał Yukawy.
- R. K-G opisuje propagację relatywistycznych bozonów.
 - ✓ Wykorzystane jest do opisu oddziaływania jako wymiany bozonów
 - ✓ Zasięg tego oddziaływania zależy od masy wymienianego bozonu.

Wstawimy jako stan stacjonarny potencjał Yukawy:

$$\varphi(x) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}.$$

Rozwiążemy r. KG, w współrzędnych sferycznych $\nabla^2 = \dots$

Równanie Diraca

- Równanie Diraca (1928) opisuje ewolucję czasową funkcji falowej, jak w równaniu Schrödingera:
 - z opisem ujemnej energii,
 - z zachowaniem niezmienniczości wzgl. transformacji Lorentza,
 - z rozwiązaniami dla fermionów.

- R.D. jest „pierwiastkiem” z R.K-G..... $-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi + \nabla^2\Psi = m^2\Psi$

$$\left(i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\gamma} \cdot \nabla - m\right)\psi = 0$$

czyli zgrabniej: $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$

- Czynniki (macierze) $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ są nieznane, ale należy je wyznaczyć tak, aby spełniły warunki niezmienniczości, a RD stało się r. K-G.

$$\psi^\dagger \left(-i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} - i\vec{\gamma} \cdot \nabla - m\right) \left(i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\gamma} \cdot \nabla - m\right) \psi = 0$$

σ^μ - (spinowe) macierze Pauliego

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ -\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

Równanie Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

- Pełna postać równania Diraca:
$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\gamma} \cdot \nabla - m\right)\psi = 0$$

$$\begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial t} - m & 0 & i\frac{\partial}{\partial z} & i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & i\frac{\partial}{\partial t} - m & i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} & -i\frac{\partial}{\partial z} \\ -i\frac{\partial}{\partial z} & -i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} & -i\frac{\partial}{\partial t} - m & 0 \\ -i\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} & i\frac{\partial}{\partial z} & 0 & -i\frac{\partial}{\partial t} - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Rozwiązania RD są w postaci funkcji falowej przemnożonej przez funkcję zależną od energii i pędu:

$$\psi(x^\mu) = u(p^\mu) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

Rozwiązania równania Diraca

... where:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

electron with energy

$$E = +\sqrt{m^2 + p^2}$$

$$\psi = u_{1,2}(p^\mu) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

positron with energy

$$E = -\sqrt{m^2 + p^2}$$

$$\psi = u_{3,4}(p^\mu) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad p^\mu = (E, \vec{p})$$

Now we can take F-S interpretation of antiparticles as particles with positive energy (propagating backwards in time), and change the negative energy solutions $u_{3,4}$ to represent positive antiparticle (positron) spinors $v_{1,2}$:

$$v_1(E, \vec{p}) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \equiv u_4(-E, -\vec{p}) e^{-i(-Et + \vec{p} \cdot \vec{x})} = u_4(-E, -\vec{p}) e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

$$v_2(E, \vec{p}) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \equiv u_3(-E, -\vec{p}) e^{-i(-Et + \vec{p} \cdot \vec{x})} = u_3(-E, -\vec{p}) e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

reversing
the sign of
 E and \vec{p}

The u and v are solutions of:

$$E = +\sqrt{m^2 + p^2}$$

$$(i\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0 \quad \text{and} \quad (i\gamma^\mu p_\mu + m)v = 0$$

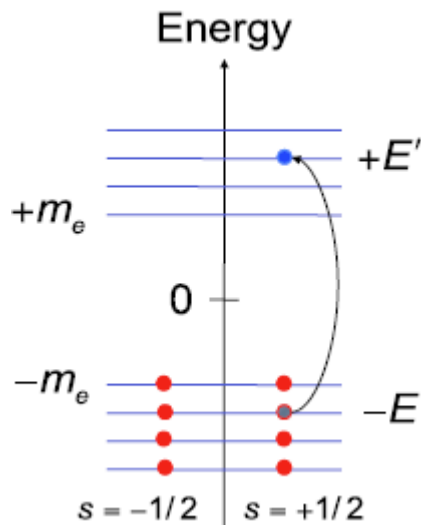
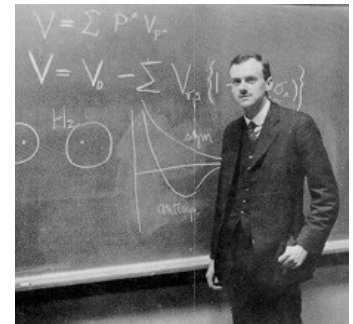
CP Violation in Heavy Flavour Physics @AGH

Dirac's interpretation of negative solutions

Four solutions of the Dirac equation for a particle **at rest**:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \quad \psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+imt} \quad \psi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+imt}$$

describe two different state of a **fermion** ($\uparrow\downarrow$) with $E = m$ and $E = -m$



Dirac's Interpretation:

- Vacuum (fully filled) represents a „sea” of negative energy particles.
- According to Dirac: holes in this „sea” represent antiparticles.
- If energy $2E$ is provided to the vacuum:
one electron (negative charge, positive energy) and one hole (positive charge, negative energy) are created.
- This picture fails for bosons!

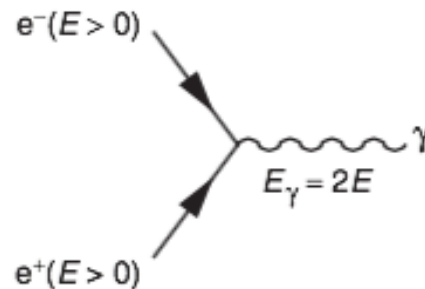
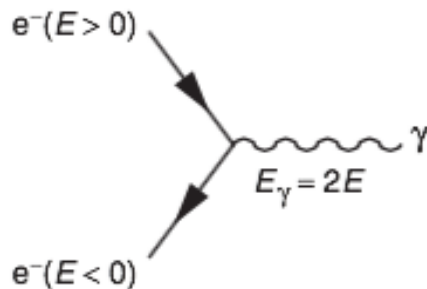
Stuckelberg-Feynman interpretation

Stückelberg (1941)-Feynman (1948) interpretation of antiparticles*:

- consider the negative energy solution as *running backwards in time* and re-label it as *antiparticle*, with *positive energy*, going *forward in time*

$$e^{-i[(-E)(-t)-(-\vec{p})\cdot(-\vec{x})]} = e^{-i[Et-\vec{p}\cdot\vec{x}]}$$

- emission of $E > 0$ antiparticle = absorption of particle $E < 0$



*Feynman–Stueckelberg interpretation [Wikipedia]

By considering the propagation of the negative energy modes of the electron field backward in time, [Ernst Stueckelberg](#) reached a pictorial understanding of the fact that the particle and antiparticle have equal mass m and spin J but opposite charges q . This allowed him to rewrite [perturbation theory](#) precisely in the form of diagrams. [Richard Feynman](#) later gave an independent systematic derivation of these diagrams from a particle formalism, and they are now called [Feynman diagrams](#). Each line of a diagram represents a particle propagating either backward or forward in time. This technique is the most widespread method of computing amplitudes in quantum field theory today.

Since this picture was first developed by Stueckelberg,^[5] and acquired its modern form in Feynman's work,^[6] it is called the **Feynman–Stueckelberg interpretation** of antiparticles to honor both scientists.

Podsumowanie I:

zadaniem teoretyka jest opisanie cząstek i oddziaływań.

I. Do opisu mikroświata stosujemy zasady **mechaniki kwantowej**.

II. W mechanice kwantowej cząstka opisywana jest jako fala, a jej ewolucja czasowa poprzez **równanie Schrödingera**.

III. Przeważnie jednak cząstki są relatywistyczne i takie podejście nie wystarcza.

Równanie Kleina-Gordona jako relatywistyczna wersja r. Schrödingera:

- opisuje cząstki **relatywistyczne**,
- nadaje się tylko do **bozonów**,
- nie interpretuje stanów z ujemnymi energiami,
- ale za to wnioski płynące z tego równania pozwalają na utożsamienie bozonów (np. fotonu, czy cząstki masywnej) z potencjałem wytworzonym przez cząstki (i to zarówno kulombowski, jak i Yukawy).

Równanie Diraca:

- wyprowadzone zostało jako „matematycznie bardziej poprawne” równanie Schrödingera:
- jest lorentzowsko **niezmiennicze**,
- opisuje cząstki relatywistyczne,
- w rozwiązaniach widać stany o **niezerowych spinach** i ich różne ustawienia.
- teoretycznie przewidziane zostały **antycząstki**,

Rola Feynmana:

- interpretacja stanów z **ujemną energią** w r. Diraca,
- wprowadzenie **graficznej reprezentacji procesów** (najpierw elektromagnetycznych),
- był jednym z twórców **Elektrodynamiki Kwantowej** (QFT).