CZĄSTKI ELEMENTARNE I ODDZIAŁYWANIA

II RELATYWISTKA, ZDERZENIA, ROZPADY
ŚWIETLNOŚĆ AKCELERATORA

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

http://home.agh.edu.pl/~amucha/
Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek

Cząstki relatywistyczne

- Jaką cząstkę nazywamy relatywistyczną? Jaka energia uważana jest za relatywistyczną?
- Ważne, ponieważ wyniki pomiaru (np. czas życia, droga) będą zależeć od układu odniesienia.
- Każda teoria powinna być niezmiennicza względem transformacji układu.

- Czterowektory (kontawariantne) ($c = 1$):
  - położenia: $x^{\mu} = (t, x, y, z)$
  - energii i pędu: $P^{\mu} = (E, p_x, p_y, p_z)$
  - potencjału: $p^{\mu} = (\varphi, \vec{A})$
  - gęstości prądu: $j^{\mu} = (\rho, j)$

$x_{\mu} = (t, -x, -y, -z)$

kowariantny 4-wektor

$x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu}$

Czterowektor to obiekt, który transformuje się względem transformacji Lorentza jak (*zad: TL w 3D, transf. odwrotna*):

$$\boxed{\begin{aligned} p'_x &= \gamma(p_x - \beta E) \\ E' &= \gamma(E - \beta p_x) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta t) \\ t' &= \gamma(t - \beta x) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\mathcal{X}' = \Lambda\, \mathcal{X}}$$

a kwadrat czterowektora, czyli iloczyn skalarny: $\boldsymbol{P^2 = p_{\mu} p^{\mu}}$ jest niezmiennikiem transformacji Lorentza,
kwadrat czterowektora energii i pędu nazywany jest masą (niezmienniczą): $\boxed{\boldsymbol{m^2 = E^2 - \vec{p}^2}}$

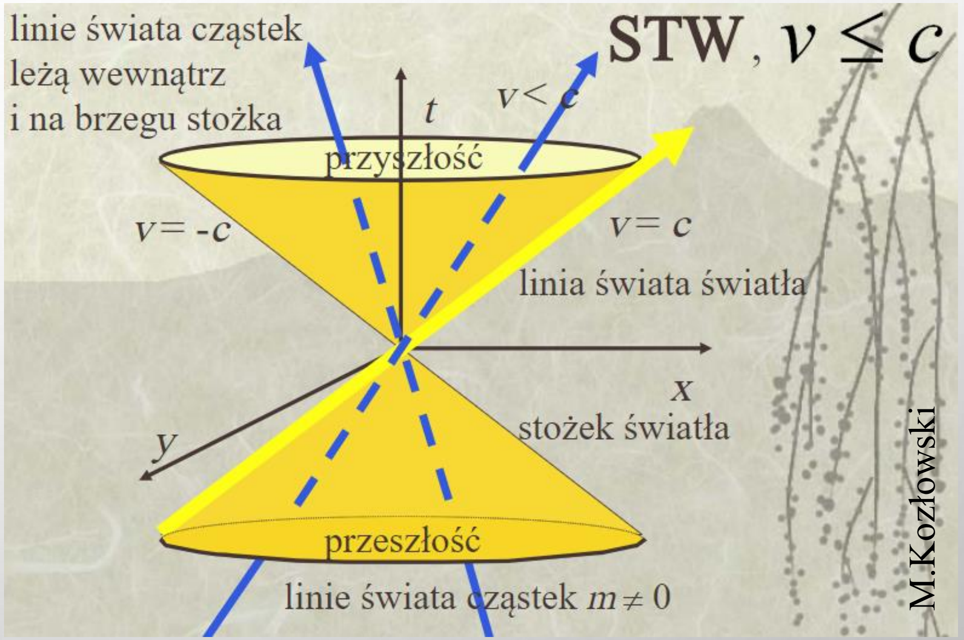
Interwały

$$\boldsymbol{P^2 = p_\mu p^\mu \equiv m^2}$$

$$\boldsymbol{m^2 = E^2 - \vec{p}^2}$$

Jest to definicja masy obiektów swobodnych (nieoddziałujących), zarówno punktowych, jak i złożonych.

- dla czterowektora położenia interwał czasowy $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ jest niezmiennikiem TL (ma taką samą wartość we wszystkich układach odniesienia).
  - - gdy $P^2 = \boldsymbol{p_\mu p^\mu} > 0$, to 4-wektor nazywamy czasowym (time-like, czasopodobnym), $v < c$, zdarzenia mogą być połączone przyczynowo
  - gdy $P^2 = \boldsymbol{p_\mu p^\mu} < 0$, to 4-wektor nazywamy przestrzennym (space-like, przestrzennopodobnym), $v > c$
  - gdy $P^2 = \boldsymbol{p_\mu p^\mu} = 0, v = c$ (light-like)



Jakie cząstki uważamy za relatywistyczne?

$$E = m$$
$$E = m_0\gamma$$

$$p = mv$$
$$p = m_0\gamma\beta$$
$$p = E\beta$$

$$E - p = E(1-\beta)$$

co z jednostkami? dopiszmy!

cząstka	energia	masa spoczynkowa m_0	γ	β	$E-p$	Relatywistyczna
elektron	1 MeV	511 keV	2			tak
elektron	1 GeV	511 keV	$2 \cdot 10^3$	0,99999999995		tak
proton	1 GeV	1 GeV	1		5 MeV	nie
proton	100 GeV	1 GeV	10^2			tak
foton	1 GeV	0		1	0	tak

Jeżeli różnica pomiędzy energią cząstki a jej masą spoczynkową jest dużo większa od masy spoczynkowej, to taka cząstka uważana jest za relatywistyczną, a do obliczeń przyjmuje się, że jest cząstką bezmasową.

$$\boldsymbol{E = p}$$

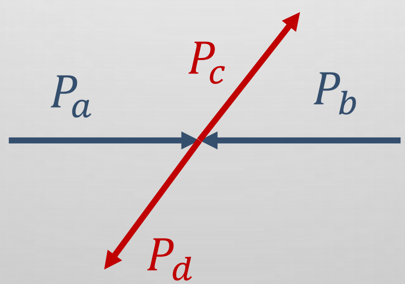
Masa układu cząstek

- Czteropęd układu cząstek: $P^{\mu} = P_1^{\mu} + P_2^{\mu} = (E_1 + E_2, \vec{p}_1 + \vec{p}_2)$

  określamy jako masą (niezmienniczą): $m = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}$
- Masa układu jest równa lub większa od sumy mas poszczególnych cząstek (nawet, gdy nie oddziałują).
- Masa układu jest niezmiennicza – wygodny sposób na obliczenia kinematyki procesu w różnych układach.
- Uwaga na różne pojęcia masy:
  - masa relatywistyczna i masa spoczynkowa: $m = m_0\gamma$,
  - masa kwarków? 1/3 masy protonu? Trudna do określenia bez teorii.

Niezmienniki relatywistyczne (zawsze kombinacja kwadratu 4-pędu):

$$\boxed{\begin{array}{ll} s = (P_a + P_b)^2 & s \geq 0 \\ t = (P_c - P_a)^2 & t \leq 0 \\ u = (P_d - P_a)^2 & u \leq 0 \end{array}}$$



$$\boxed{\begin{array}{c} \text{gdy } E \gg m, \text{to:} \\ s \approx 2P_aP_b \\ t \approx -2P_aP_c \\ u \approx -2P_aP_d \end{array}}$$

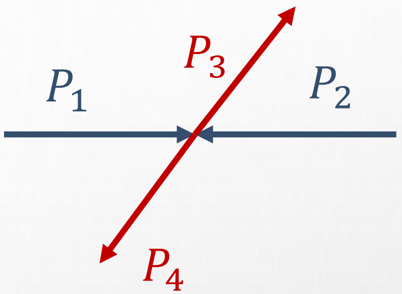
$$s + t + u = ?$$

Zderzenia

- Zderzenia cząstek o czteropędach P_1 i P_1:

  kwadrat czteropędu: $M^2 \equiv s = (P_1 + P_2)^2$

  - jest to niezmiennik s;
  - jest to masa niezmiennicza układu cząstek 1 i 2:



- Liczymy: $s = (P_1 + P_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 =$

$$\ldots$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - |\vec{p}_1|\,|\vec{p}_2| \cos\sphericalangle(\vec{p}_1, \vec{p}_2))$$

- Przy zderzeniach cząstek przeciwbieżnych: $\cos\sphericalangle(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = -1$,

  a dla cząstek relatywistycznych: $E = p$ i mamy:

$$\boxed{s = 4E_1 E_2}$$

Kwadrat sumy czteropędów zderzanych cząstek to niezmiennik s i zarazem masa niezmiennicza tego układu.
Masa układu zależy od kierunku pędów cząstek!

Układ środka masy

Wybieramy teraz pewien układ – środka masy, w którym całkowity pęd cząstek wynosi zero:

$$\boxed{\sum \vec{p} = 0}$$

zatem czteropęd zapiszemy jako:

$$P = (E_1^* + E_2^*, 0)$$

Jeżeli policzymy w nim niezmiennik s, to otrzymamy:

$$s = (P_1 + P_2)^2 = (E_1^* + E_2^*)^2 - \underbrace{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}_{=0} = \left(\sum E_i^*\right)^2$$

$$\boxed{s = \left(\sum E_i^*\right)^2}$$

Kwadrat czteropędu układu jest kwadratem całkowitej energii w układzie środka masy (CMS).

MASA układu jest równa całkowitej energii w CMS (układzie środka masy):

$$m = \sqrt{s} = \sum E_i^*$$

$\sqrt{s}$ jest maksymalną energią w oddziaływaniu, która może być wykorzystana do produkcji nowych stanów.

Skoro s jest niezmiennikiem, to można dokonywać obliczeń w innym układzie, np. laboratoryjnym...

Układ laboratoryjny

Określany jest jako układ, w którym jedna cząstka (tarcza) spoczywa, czyli:

$$\boxed{\vec{p}_2 = 0} \qquad P_1 = (E_1, \vec{p}_1) \qquad P_2 = (m_2, 0)$$

czteropęd układu: $P = (E_1 + m_2, \vec{p}_1)$

a niezmiennik s: $s = (P_1 + P_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 m_2)$

$$\boldsymbol{\sqrt{s} = \sqrt{2E_1 m_2}}$$

Przykłady:

- proton o energii 100 GeV zderza się z tarczą: $\sqrt{s} = \sqrt{2E_p m_p} = 14$ GeV

- dwie wiązki 100 GeV protonów: $\sqrt{s} = 2E = 200$ GeV

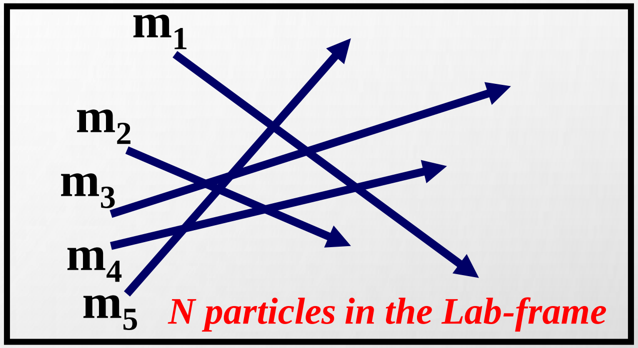
W zderzeniach ze stałą tarczą większość energii protonu jest zmarnowana – unoszona jest jako pęd układu, a nie do produkcji nowych cząstek.

Przy projektowaniu eksperymentu należy przeliczyć, co się bardziej „opłaca” ..

Jaki układ wybrać?

Użyteczne zależności: $\vec{v} = \frac{\gamma m c^2 \vec{v}}{\gamma m c^2} = \frac{\vec{p} c^2}{E}, \quad \gamma = \frac{\gamma m c^2}{m c^2} = \frac{E}{m c^2}$

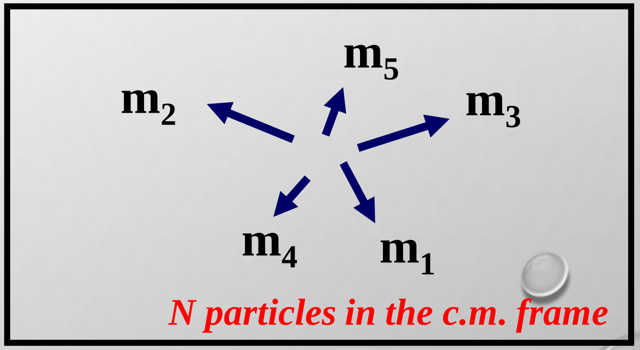
$$\begin{cases} E_{tot} &= \sum \gamma_i m_i c^2 \\ \vec{p}_{tot} &= \sum \gamma_i m_i \vec{v}_i \\ M_{tot}^2 c^4 &= E_{tot}^2 - \vec{p}_{tot}^{\,2} c^2 \end{cases}$$



CMS „boost”:

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{p}_{tot} c}{E_{tot}}, \quad |\vec{\beta}| = \frac{|\sum \gamma_i m_i \vec{v}_i|}{\sum \gamma_i m_i c} \leq \frac{\sum |\gamma_i m_i \vec{v}_i|}{\sum \gamma_i m_i c} \leq 1$$

$$\gamma = \frac{E_{tot}}{M_{tot} c^2}$$



$$\begin{aligned} E'_{tot} &= \gamma(E_{tot} - \vec{\beta} \cdot \vec{p}_{tot} c) = \tfrac{E_{tot}^2 - \vec{p}_{tot}^{\,2} c^2}{M_{tot} c^2} = \tfrac{M_{tot}^2 c^4}{M_{tot} c^2} = M_{tot} c^2 \\ \vec{p}\,'_{tot} &= \gamma(\vec{p}_{tot} - \vec{\beta} E_{tot}/c) = \vec{0} \end{aligned}$$

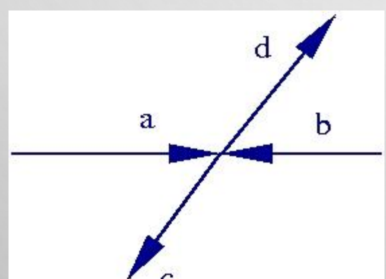
Produkcja cząstek

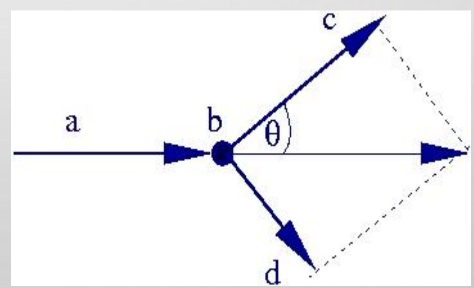
- W eksperymentach chodzi przeważnie o produkcję nowych, ciężkich obiektów.
- Masa jest niezmiennicza – taką samą wartość $\sqrt{\mathbf{s}}$, jaką udało się osiągnąć w zderzeniu – będziemy mieć do dyspozycji po zderzeniu (przy zderzeniach protonów dużo mniej, bo nie są to obiekty punktowe).
- Staramy się zatem o jak największe $\sqrt{s}$ – energię w układzie środka masy.
- Np:

  - obserwacja bozonów $Z^0 \rightarrow \sqrt{s} > 90$ GeV, co można osiągnąć zderzając wiązki elektronów o energii 45GeV

  - obserwacja cząstki Higgsa $\rightarrow \sqrt{s} > 120$ GeV, a najlepiej $\sqrt{s} > 1$TeV

  - do obserwacji pary bozonów naładowanych – potrzeba podwojonej energii.





Zadania!

Energia progowa

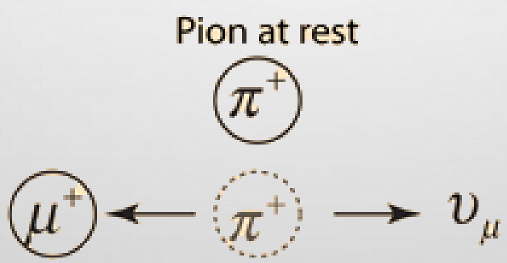
- W zderzeniach wyprodukowano nową cząstkę, ale jak wyznaczyć jej masę, gdy rozpadła się na tyle szybko, że nie udało się jej zarejestrować?

$$A \longrightarrow 1 + 2 + 3 + \ldots + N$$

Korzystamy znowu z niezmiennika:

$$M_A^2 = \left(\sum E_i\right)^2 - \left(\sum \vec{p}\right)^2$$

masa rozpadającej się cząstki jest równa masie niezmienniczej produktów rozpadu



Energia progowa

- Do produkcji stanów wielocząstkowych również potrzeba pewnej energii progowej:

  np. produkcja antyprotonów: $p + p \rightarrow p + \bar{p} + p + p$

  wymaga energii w CMS: $E_{CM} \geq 4\, m_p$

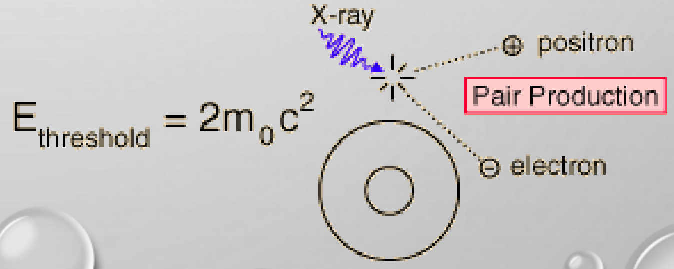
  a przy zderzaniu protonów z tarczą: $E_L \geq 7\, m_p = 6.6$ GeV

  jest to tzw. energia progowa na produkcję antyprotonów.

- Przy obliczaniu energii progowej należy uwzględnić prawa zachowania, np:

$$p + p \rightarrow p + n + \pi^+ \, , E_p = 1.23 \text{ GeV}$$

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^-, E_p = 1.54 \text{ GeV}$$

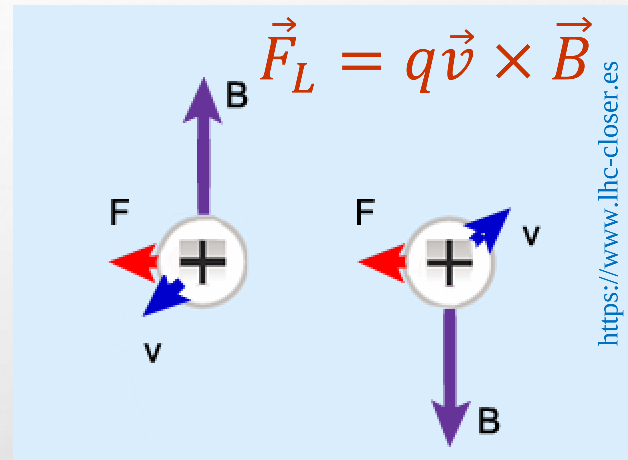


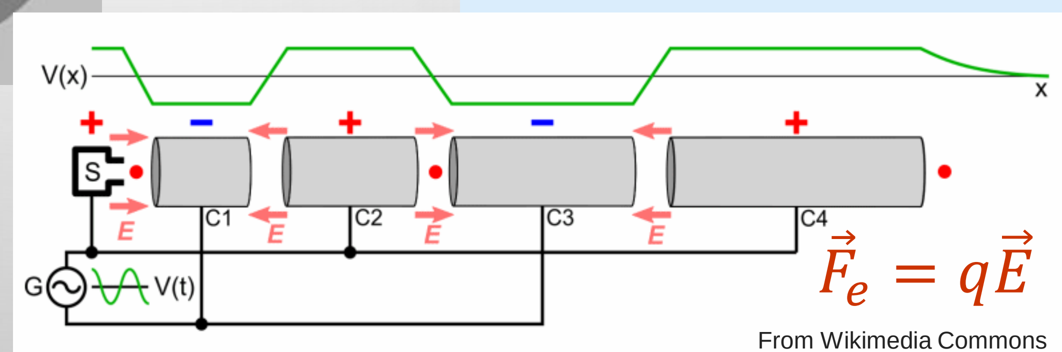
Fizyka akceleratorów w pigułce

- Akceleratory to urządzenia do przyspieszania cząstek, głównie naładowanych.
- Najefektywniej jest przyspieszać je wielokrotnie w tych samych elementach.
- Musimy zatem mieć:

  pole magnetyczne do zakrzywiania toru i ogniskowania cząstek,

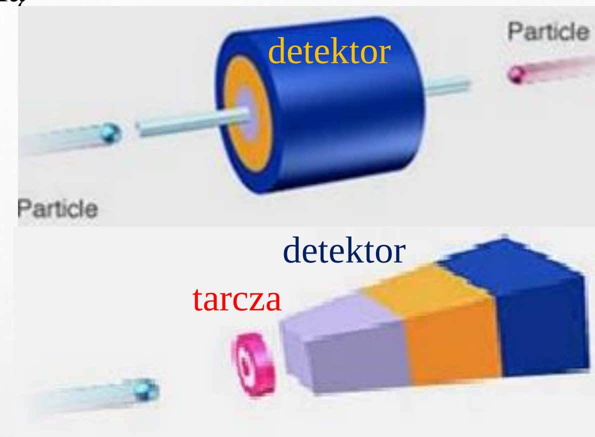
  pole elektryczne do przyspieszania





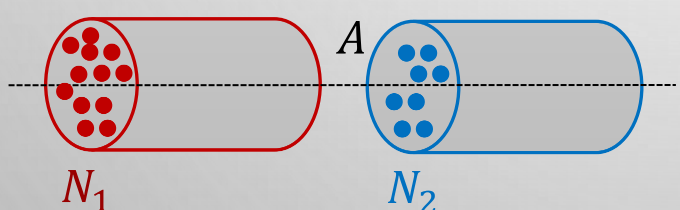
Akceleratory – parametry

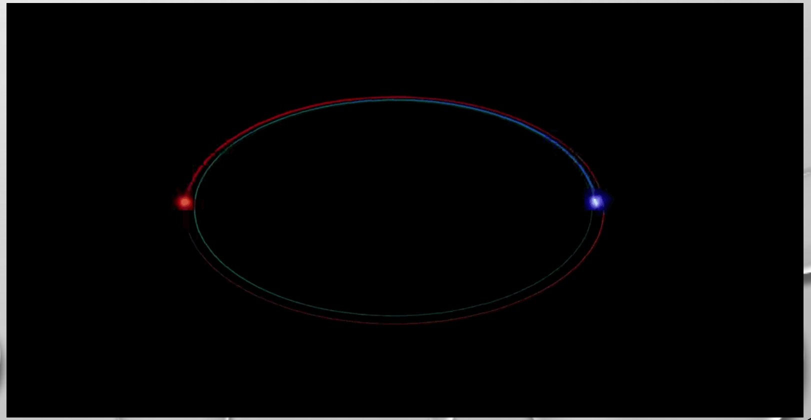
- Przyspieszać możemy wiązki przeciwbieżne cząstek lub jedną wiązkę i zderzać ją z tarczą.



- W akceleratorach zależy nam na uzyskaniu odpowiedniej energii:
  - największej, gdy chodzi o produkcję nowych cząstek,
  - dokładnie określonej, gdy celem jest zbadanie konkretnych stanów, np. produkcja Z^0 czy mezonów B.

- Ważne również jest, aby było możliwie dużo zderzeń – dlatego zderza się wiązki z pęczkami cząstek , np. o liczności rzędu 10^{11}.
- Zderzenia będą częstsze, gdy wiązki mają małe przekroje poprzeczne, np. 10 μm.





Świetlność akceleratora

- O jakości akceleratora świadczy parametr nazywany świetlnością (luminosity).
- Jest to liczba decydująca o tym ile i jak częstych zderzeń możemy oczekiwać.
- Jeżeli świetlność będzie za mała, to np. rzadkich procesów możemy się nie doczekać.

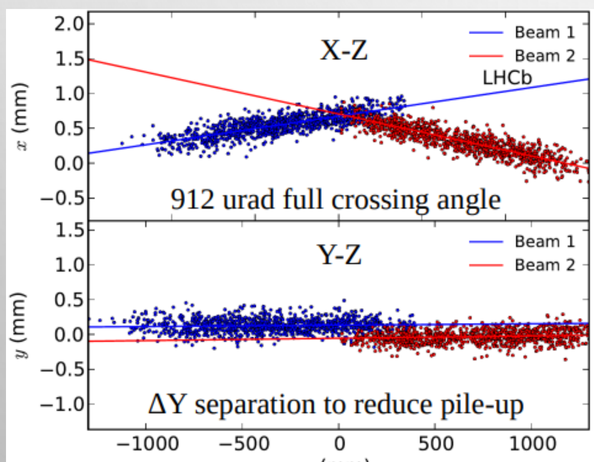
$$\boxed{\mathcal{L} = n_b \frac{N_1 N_2}{\sigma_x \sigma_y} f}$$

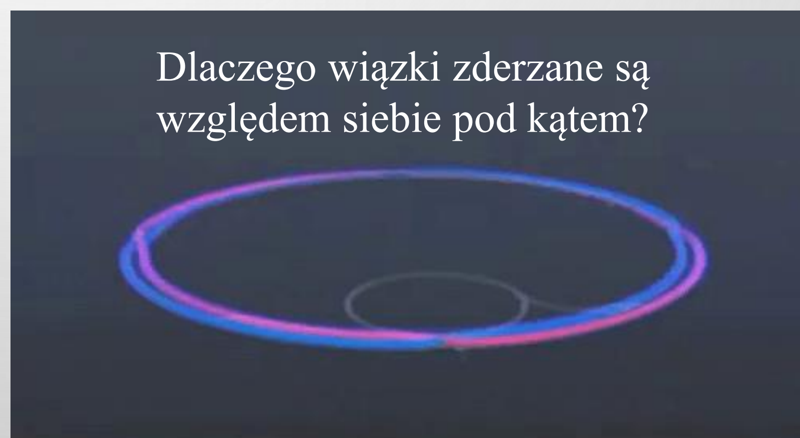
$$[\mathcal{L}] = \frac{1}{cm\, cm} \frac{1}{s} = cm^{-2} s^{-1}$$

Świetlność podawana jest w pewnym okresie zbierania danych, jako „scałkowana” świetlność:

$$\int \mathcal{L}\, dt = L$$

$$[L] = cm^{-2} \qquad [L] = GeV^{-2}$$





Yield, czyli o uzysk przede wszystkim chodzi….

- Świetlność LHC w latach 2015-18 wynosiła (proszę obliczyć):

  - zderzano wiązki $1.6 \cdot 10^{11}$ protonów o przekrojach poprzecznych 40 μm z częstością 25 ns.

  - znając rozmiar protonów, można oszacować, ile pustej przestrzeni było pomiędzy protonami (długość pęczku to ok. 4 cm) oraz prawdopodobieństwo zderzenia.

- Jeżeli eksperyment trwa 3 miesiące, to ile wynosi scałkowana świetlność?
- Liczba obserwowanych przypadków zależy od:
  - przekroju czynnego,
  - świetlności akceleratora,
  - wydajności (detekcji, rekonstrukcji, identyfikacji, itp.)

- liczba przypadków/czas (*rate*)

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = \mathcal{L}\,\sigma\,\mathcal{E}}$$

$$\left[\frac{1}{s} = \frac{1}{cm^2}\frac{1}{s}\,cm^2\right]$$

- liczba przypadków/rok (*yield*)

$$\mathcal{Y} = \int \frac{dN}{dt}dt = \int \mathcal{L}\,\sigma\,\mathcal{E}\,dt = L\,\sigma\,\mathcal{E}$$

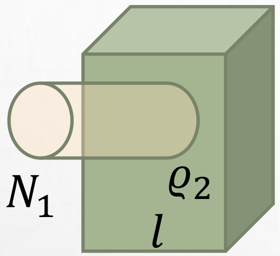
$$[cm^{-2}\,cm^2]$$

$$[fb^{-1}\,fb^1]$$

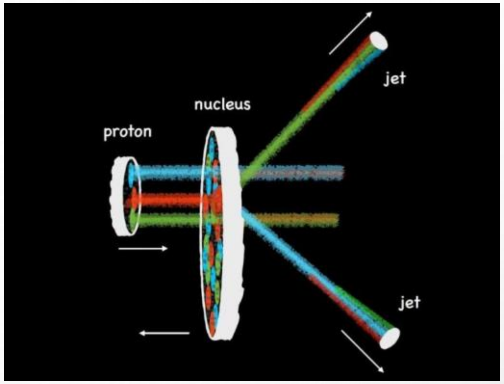
Przykład: Eksperyment zebrał 100 fb^{-1} danych, a przekrój czynny na produkcję cząstki Higgsa wynosi 1 fb^1. Ile cząstek Higgsa zaobserwowano przy wydajności 1%?

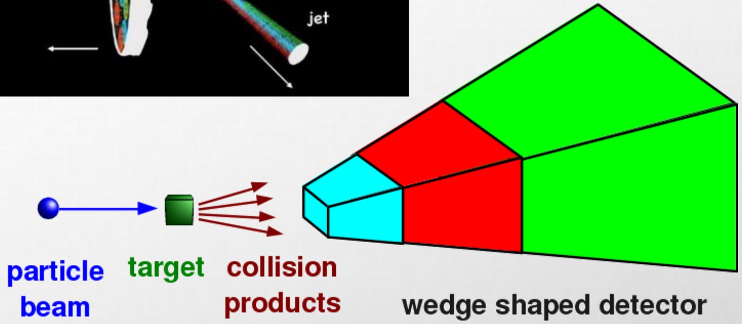
Zderzenia z tarczą

Dla zderzeń z tarczą:



$$\boxed{\mathcal{L} = N_1 \varrho_2 l}$$





Wiązka 10^{13} protonów zderzana z tarczą wodorową o grubości 1m:

$$\mathcal{L} = 10^{38}\ \mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}$$

po zderzeniu wiązka jest tracona.

IFJ PAN, P. Kotko

http://pages.iu.edu/~hgevans/classes/graphics/detectors/types/fix_coll.html

Podsumowanie

- Dlaczego wysokie energie?
- Koniecznie mechanika relatywistyczna. Masa niezmiennicza i czteropędy.
- Układ środka masy i laboratoryjny.
- Zderzenia wiązek przeciwbieżnych i zderzenia wiązki z tarczą.
- Świetlność, przekrój czynny i spodziewana liczba przypadków.