# COURS D'ANALYSE 2
# IGL

# UTA

# Table des matières


**1 Intégrale** **3**
1.1 Définitions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3
1.1.1 Primitives usuelles . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
1.1.2 Exemples . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
1.2 Intégrales définies . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
1.2.1 Méthodes de Calcul de primitives et d'intégrales . . . . . . . . . 8
1.3 Calcul de primitives . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11
1.3.1 Primitives de fonctions rationnelles . . . . . . . . . . . . . . . . 11
1.3.2 Fonction Circulaire . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18
1.3.3 Fonction hyperboliques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21
1.3.4 Intégrale Abélien . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23
1.3.5 Sommes de Riemann . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25
1.3.6 Calcul d'aire . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27
1.4 Intégrales impropres . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27

**2 EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES** **30**
2.1 Introduction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30
2.2 Définitions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30
2.3 Équation différentielle linéaire du premier ordre . . . . . . . . . . . . 31
2.3.1 Définitions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31
2.3.2 Recherche de solutions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31
2.3.3 Principe de superposition . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37
2.4 Equation différentielle linéaire du second ordre . . . . . . . . . . . . 37
2.4.1 Définitions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37
2.4.2 Recherche de solutions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38
2.4.3 Exemples . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39

**3 DEVELOPPEMENTS LIMITES (DL)** **44**
3.1 **Formules de Taylor** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44
3.2 Définitions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45

3.3 Propriétés . . . 46
3.4 Quelques DLs usuels (au voisinage de 0). . . . 46
3.5 DL des fonctions en un point quelconque . . . 47
3.6 Développement limité au voisinage de l'infini . . . 48
3.7 Opérations sur les DL . . . 49
3.7.1 Combinaison linéaire de DL . . . 49
3.7.2 Produit . . . 49
3.7.3 Composée . . . 50
3.7.4 Quotient . . . 51
3.7.5 Dérivation . . . 53
3.7.6 Primitivation . . . 54
3.8 Développements limités généralisés . . . 54
3.9 Utilisations des DL . . . 55
3.9.1 Recherche d'équivalents . . . 55
3.9.2 Calcul de limites . . . 56
3.9.3 Etude de Dérivabilité . . . 56
3.9.4 Étude des branches infinies . . . 57
3.9.5 Position locale par rapport à la tangente . . . 58

**4 Notions sur les fonctions de plusieurs variables 59**
4.1 Normes . . . 59
4.2 Ouverts . . . 60
4.3 Graphe . . . 61
4.4 Applications partielles . . . 62
4.5 Limite - Continuité . . . 63
4.5.1 Limite . . . 63
4.5.2 Continuité . . . 66
4.6 Dérivées partielles . . . 67
4.7 Recherche des extrema . . . 69
4.7.1 Définition . . . 69
4.7.2 Condition nécessaire du premier ordre . . . 70
4.7.3 Conditions du second ordre . . . 72

# Chapitre 1

# Intégrale

## 1.1 Définitions

**Définition 1.1.1** (Primitive)**.**
*Soit une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.*

**1** *On appelle primitive de $f$ sur $I$, toute fonction $F$ définie sur $I$ telle que $F$ est dérivable et*
$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

**2** *On dit que $F(x) + C$ est l'intégrale indéfinie de la fonction $f(x)$ si et seulement si $F'(x) = f(x)$ et l'on note alors :*
$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Exemple 1.1.1.**
*La fonction $x \mapsto \ln(x) + x^3 + x + 1$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x} + 3x^2 + 1$ sur $]0; +\infty[$.*
*La fonction $x \mapsto e^x - 1$ est une primitive de $e^x$ sur $\mathbb{R}$.*

**Théorème 1.1.1** (Existence de primitive)**.**
*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. Alors,*

**1** *$f$ admet une infinité de primitives sur $I$.*

**2** *Si $F_1$ et $F_2$ sont deux primitives de $f$, alors $F_1 - F_2$ est constante.*

**Proposition 1.1.1.**
*Soit $f$ une fonction admettant une primitive $F$ sur un intervalle $I$. Soit $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors il existe une et une seule primitive $G$ telle que $G(a) = b$.*

### 1.1.1 Primitives usuelles

Dans ce tableau ci-dessous, pour chaque fonction $f$, nous donnons une primitive $F$ et un intervalle ou des intervalles sur lequel ou lesquels $f$ est continue.

| Fonction définie par | admet pour primitives les fonctions | Sur l'intervalle $I$ |
|---|---|---|
| $f(x) = a$ où $a \in \mathbb{R}$ | $F(x) = ax + c$ | $I = \mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^r$ où $r \in \mathbb{R}$ et $r \neq -1$ | $F(x) = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$ | $I = \mathbb{R}$ *ou* <br> $I = ]0; +\infty[$ *ou* <br> $I = ]-\infty; 0[$ |
| $f(x) = \sin(x)$ | $F(x) = -\cos(x) + c$ | $I = \mathbb{R}$ |
| $f(x) = \cos(x)$ | $F(x) = \sin(x) + c$ | $I = \mathbb{R}$ |
| $f(x) = 1 + tan^2 x = \frac{1}{cos^2 x}$ | $F(x) = \tan(x) + c$ | $I = \mathbb{R}$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $F(x) = \ln(\|x\|) + c$ | $I = ]0; +\infty[$ *ou* <br> $I = ]-\infty; 0[$ |
| $f(x) = e^x$ | $F(x) = e^x + c$ | $I = \mathbb{R}$ |
| $f(x) = \cos(ax + b)$, $a \neq 0$ | $F(x) = \dfrac{1}{a}\sin(ax + b) + c$ | $I = \mathbb{R}$ |
| $f(x) = \sin(ax + b)$, $a \neq 0$ | $F(x) = -\dfrac{1}{a}\cos(ax + b) + c$ | $I = \mathbb{R}$ |
| $f(x) = e^{ax+b}$, $a \neq 0$ | $F(x) = \dfrac{1}{a}e^{ax+b} + c$ | $I = \mathbb{R}$ |

| Fonction définie par | admet pour primitives les fonctions |
|---|---|
| $f = u' + v'$ | $F = u + v + c$ |
| $f = ku'$ où $k \in \mathbb{R}$ | $F = ku + c$ |
| $f = u'(v'ou)$ | $F = vou + c$ |
| $f = u'u^r$ où $r \in \mathbb{R}$ et $r \neq -1$ | $F = \dfrac{u^{r+1}}{r+1} + c$ |
| $f = u' \cos u$ | $F = \sin u + c$ |
| $f = u' \sin u$ | $F = -\cos u + c$ |
| $f = \dfrac{u'}{u}$ | $F = \ln \|u\| + c$ |
| $f = u'e^u$ | $F = e^u + c$ |

### 1.1.2 Exemples

**Exemple 1.1.2.**

*Déterminons les primitives de la fonction* $f(x) = 4x^2 - 5x + \dfrac{1}{x^2}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
$f$ *est égale à la somme de trois fonctions. Déterminons les primitives de chacune de ces fonctions. On a ainsi les primitives de* $f$*, qui sont de la forme*

$$F(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{x} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

**Exemple 1.1.3.**

*Soit la fonction*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^3+3x^2-5x+\frac{3}{x^3} \end{array}$$

*Déterminons une primitive $F$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f$.*
*$f$ est égale à la somme de quatre fonctions. Déterminons une primitive de chacune de ces fonctions. On a ainsi une primitives de $f$*

$$F(x)=2\left(\frac{1}{4}x^4\right)+3\left(\frac{1}{3}x^3\right)-5\left(\frac{1}{2}x^2\right)-3\left(\frac{1}{2x^2}\right)=\frac{1}{2}x^4+x^3-\frac{5}{2}x^2-\frac{3}{2x^2}.$$

**Exemple 1.1.4.**

*Soit la fonction*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}$$

*Déterminons une primitive $F$ sur $\mathbb{R}$ de $f$.*
*Soit $u(x)=1+x^2$. On a $u'(x)=2x$. On constate que $f(x)=\frac{2}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$, donc $f=\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{2}u'u^{-\frac{1}{2}}$. Par suite,*

$$F=\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=u^{\frac{1}{2}}=\sqrt{u}.$$

$$F(x)=\sqrt{1+x^2}$$

**Exemple 1.1.5.**

*Soit la fonction*

$$\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x(3x^2+1)^4 \end{array}$$

*Déterminons une primitive $G$ sur $\mathbb{R}$ de $g$.*
*Soit $u(x)=3x^2+1$. On a $u'(x)=6x$. On constate que $g(x)=\frac{6}{6}x(3x^2+1)^4=\frac{1}{6}(6x(3x^2+1)^4)$, donc $g=\frac{1}{6}u'u^4$. Par suite,*

$$F=\frac{1}{30}u^5.$$

$$F(x)=\frac{1}{30}(3x^2+1)^5.$$

**Exemple 1.1.6.**

*Soit la fonction*

$$\begin{array}{rcl} h:\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x\ln x} \end{array}$$

*Déterminons une primitive $H$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de $h$.*

*On a* $h(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}$*. Soit* $u(x) = \ln(x)$*. On a* $u'(x) = \dfrac{1}{x}$*. On constate que* $h(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$*,*

*donc* $h = \dfrac{u'}{u}$*. Par suite,*

$$H = \ln(|u|).$$

$$H(x) = \ln(|\ln x|).$$

## 1.2 Intégrales définies

**Théorème 1.2.1.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction*

$$\begin{array}{rcl} F : [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array}$$

*est l'unique primitive de la fonction $f$ qui s'annule en a. Par conséquent pour une primitive $F$ quelconque de $f$ :*

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$$

**Exemple 1.2.1.** *Calculons trois intégrales à l'aide à chaque fois de la primitive de la fonction figurant sous le signe* $\displaystyle\int$

1. $I = \displaystyle\int_1^{10} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^{10} = \ln(10) - \ln(1) = \ln(10)$
2. $J = \displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^5 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{-2+5}{10} = \frac{3}{10}$
3. $K = \displaystyle\int_1^4 (x^2 + 2x + 5)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x\right]_1^4 = \left(\frac{1}{3}(4)^3 + (4)^2 + 5(4)\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 + (1)^2 + 5(1)\right) = 51$

**Propriété 1.2.1.**

*(P1) Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$,*

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \qquad \text{et} \qquad \int_a^a f(x)dx = 0.$$

*(P2)* ***(Linéarité)***

*Pour $f$ et $g$ deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

*(P3)* ***(Intégrale d'une fonction continue positive)***
*Si $f$ est une fonction continue positive sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

*(P4)* *Une fonction continue et positive sur un segment $[a, b]$ est nulle si, et seulement si, son intégrale sur $[a, b]$ est nulle.*

*(P5)* ***(Majoration d'intégrales)***
*Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$.*

**a** *Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

**b** *Si $\exists m, M \in \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a);$$

**c** *$f$ est bornée et*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|;$$

**d** *On a **l'inégalité de la moyenne** :*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_a^b |g(x)|\, dx;$$

**e** *On a **l'inégalité de Cauchy-Schwarz** :*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b (f(x))^2dx}\sqrt{\int_a^b (g(x))^2dx};$$

*(P6)* ***(Relation de Chasles)***
*Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$, si $a < c < b$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

### 1.2.1 Méthodes de Calcul de primitives et d'intégrales

**A) Changement de variables**

**Théorème 1.2.2.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $I$. Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ une fonction de classe $C^1$ sur le segment $[\alpha, \beta]$. Alors*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

**Exemple 1.2.2.** *Calculons la primitive $F = \int \tan t \; dt$.*

$$F = \int \tan t \; dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \; dt \; .$$

*On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u = \cos t$ et $u' = -\sin t$) dont une primitive est $\ln |u|$.*
*Donc $F = \int -\frac{u'}{u} = -\big[\ln |u|\big] = -\ln |u| + c = -\ln |\cos t| + c$.*

*Nous allons reformuler tout cela en terme de changement de variable. Notons $\varphi(t) = \cos t$ alors $\varphi'(t) = -\sin t$, donc*

$$F = \int -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \; dt$$

*Si $f$ désigne la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, qui est bijective tant que $x \neq 0$ ; alors $F = -\int \varphi'(t) f(\varphi(t)) \; dt$. En posant $x = \varphi(t)$ et donc $dx = \varphi'(t)dt$, on reconnaît la formule du changement de variable, par conséquent*

$$F \circ \varphi^{-1} = -\int f(x) \; dx = -\int \frac{1}{x} \; dx = -\ln |x| + c \; .$$

*Comme $x = \varphi(t) = \cos t$, on retrouve bien $F(t) = -\ln |\cos t| + c$.*

*Remarque : pour que l'intégrale soit bien définie il faut que $\tan t$ soit définie, donc $t \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$. La restriction d'une primitive à un intervalle $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ est donc de la forme $-\ln |\cos t| + c$. Mais la constante $c$ peut être différente sur un intervalle différent.*

**Exemple 1.2.3.** *Calcul de $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} \; dx$.*
*Soit le changement de variable $u = \varphi(x) = 1 - x^2$. Alors $du = \varphi'(x) \; dx = -2x \; dx$. Pour $x = 0$ on a $u = \varphi(0) = 1$ et pour $x = \dfrac{1}{2}$ on a $u = \varphi(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Comme $\varphi'(x) = -2x$,*

*$\varphi$ est une bijection de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ sur $\left[1, \frac{3}{4}\right]$. Alors*

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{x\,dx}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int_1^{3/4} \frac{\frac{-du}{2}}{u^{3/2}} = -\frac{1}{2}\int_1^{3/4} u^{-3/2}\,du \\ &= -\frac{1}{2}\big[-2u^{-1/2}\big]_1^{3/4} = \big[\frac{1}{\sqrt{u}}\big]_1^{3/4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.\end{aligned}$$

**Exemple 1.2.4.** *Calcul de $\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.*
*On effectue le changement de variable $x = \varphi(t) = \sin t$ et $dx = \cos t\ dt$. De plus $t = \arcsin x$ donc pour $x = 0$ on a $t = \arcsin(0) = 0$ et pour $x = \frac{1}{2}$ on a $t = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$.*
*Comme $\varphi$ est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$,*

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t\ dt}{(1-\sin^2 t)^{3/2}} = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t\ dt}{(\cos^2 t)^{3/2}} \\ &= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t}{\cos^3 t}\,dt = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos^2 t}\,dt \\ &= \big[\tan t\big]_0^{\pi/6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ .\end{aligned}$$

**B) Intégration par parties**

**Théorème 1.2.3.** *Soient deux fonctions $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur le segment $[a,b]$. Alors*

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

**Remarque 1.2.1.** *Cette relation est souvent utilisée pour diminuer successivement le degré d'un polynôme $g(x)$ qui multiplie une fonction $f'(x)$ que l'on sait intégrer.*
*Elle sert aussi pour l'intégration des expressions faisant intervenir les fonctions trigonometriques, où l'on retombe sur la fonction d'origine après deux intégrations.*

**Remarque 1.2.2** (Cas classiques d'utilisation)**.** *$P$ étant un polynôrne et $\alpha \neq 0$,*

- *pour $\int_a^b P(t)\sin(\alpha t + \beta)dt$, on pose $u(t) = P(t)$ et $v'(t) = \sin(\alpha t + \beta)$.*
- *pour $\int_a^b P(t)\cos(\alpha t + \beta)dt$, on pose $u(t) = P(t)$ et $v'(t) = \cos(\alpha t + \beta)$*
- *pour $\int_a^b P(t)e^{\alpha t + \beta}dt$, on pose $u(t) = P(t)$ et $v'(t) = e^{\alpha t + \beta}$ ;*

- *pour* $\int_a^b P(t)\ln t dt$, *on pose* $u(t) = \ln t$ *et* $v'(t) = P(t)$.

**Exemple 1.2.5.** *Calcul de* $\int_0^1 xe^x \, dx$.
*On pose* $u(x) = x$ *et* $v'(x) = e^x$. *Nous aurons besoin de savoir que* $u'(x) = 1$ *et qu'une primitive de* $v'$ *est simplement* $v(x) = e^x$. *La formule d'intégration par parties donne :*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x \, dx &= \int_0^1 u(x)v'(x) \, dx \\
&= \big[u(x)v(x)\big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) \, dx \\
&= \big[xe^x\big]_0^1 \; - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx \\
&= \big(1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0\big) - \big[e^x\big]_0^1 \\
&= e - (e^1 - e^0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

**Exemple 1.2.6.** *Calcul de* $\int_1^e x \ln x \, dx$.

*On pose cette fois* $u = \ln x$ *et* $v' = x$. *Ainsi* $u' = \dfrac{1}{x}$ *et* $v = \dfrac{x^2}{2}$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln x \cdot x \, dx &= \int_1^e uv' = \big[uv\big]_1^e - \int_1^e u'v \\
&= \Big[\ln x \cdot \frac{x^2}{2}\Big]_1^e - \int_1^e \tfrac{1}{x}\frac{x^2}{2} \, dx \\
&= \big(\ln e \tfrac{e^2}{2} - \ln 1 \tfrac{1^2}{2}\big) - \tfrac{1}{2}\int_1^e x \, dx \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}
\end{aligned}$$

**Exemple 1.2.7.** *Calcul de* $\int x^2 e^x \, dx$.
*On pose* $u = x^2$ *et* $v' = e^x$ *pour obtenir :*

$$\int x^2 e^x \, dx = \big[x^2 e^x\big] - 2\int xe^x \, dx$$

*On refait une deuxième intégration par parties pour calculer*

$$\int xe^x \, dx = \big[xe^x\big] - \int e^x \, dx = (x-1)e^x + c$$

*D'où*

$$\int x^2 e^x \, dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + c.$$

.

**Exemple 1.2.8.** *Calcul de* $\int \sin(2x)e^x\,dx$.
*On pose* $u(x) = \sin(2x)$ *et* $v'(x) = e^x$ *pour obtenir :*

$$\int \sin(2x)e^x\,dx = \left[\sin(2x)e^x\right] - 2\int \cos(2x)e^x\,dx$$

*On refait une deuxième intégration par parties pour calculer* $\int \cos(2x)e^x\,dx$.
*On pose* $u(x) = \cos(2x)$ *et* $v'(x) = e^x$ *pour obtenir :*

$$\int \cos(2x)e^x\,dx = \left[\cos(2x)e^x\right] + 2\int \sin(2x)e^x\,dx.$$

*D'où*

$$\begin{aligned}
\int \sin(2x)e^x\,dx &= \left[\sin(2x)e^x\right] - 2\left(\left[\cos(2x)e^x\right] + 2\int \sin(2x)e^x\,dx\right)\\
&= \left[\sin(2x)e^x - 2\cos(2x)e^x\right] - 4\int \sin(2x)e^x\,dx\\
5\int \sin(2x)e^x\,dx &= \left[\sin(2x)e^x - 2\cos(2x)e^x\right]\\
\int \sin(2x)e^x\,dx &= \frac{1}{5}\left[\sin(2x)e^x - 2\cos(2x)e^x\right]
\end{aligned}$$

**C) Intégrale d'une fonction paire ou impaire**

**Proposition 1.2.1** (Intégrale d'une fonction paire ou impaire)**.**
*Soit* $a > 0$ *et* $f$ *une fonction continue par morceaux sur le segment* $[-a, a]$.

- *Si f est paire, alors* $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx.$
  *En particulier* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$
- *Si f est impaire, alors* $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx.$
  *En particulier* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

# 1.3 Calcul de primitives

## 1.3.1 Primitives de fonctions rationnelles

Soit $F$ une fonction rationnelle $F(X) \in \mathbb{R}[X]$. On cherche une primitive de $F$ c'est-à-dire $\int F(X)dX$.

### A) Décomposition en fractions simples

**Méthode 1.3.1.**

1. ***S'assurer que le degré de $f$ est strictement inférieur au degré au degré de $g$, si non, faire une division Euclidienne .***
2. ***Factoriser le dénominateur $g$ (les facteurs identiques doivent être regroupés).***
3. ***Déterminer la forme à priori de la décomposition :***
   - ***a*** *si le dénominateur comprend un facteur de la forme $(ax+b)^n$, alors la somme de fractions partielles doit contenir les $n$ termes*

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

   - ***b*** *si le dénominateur comprend un facteur de la forme $(ax^2+bx+c)^n$, alors la somme de fractions partielles doit contenir les $n$ termes*

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\frac{A_3x+B_3}{(ax^2+bx+c)^3}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

4. ***On utilise les symétries pour trouver des relations***
5. ***On détermine les coefficients manquants***

**Exemple 1.3.1.**

*Décomposons les fractions rationnelles* $F(X)=\dfrac{X-4}{(X-1)(X+1)X}$.

*Tous les pôles sont simples.*

*On a* $F(X)=\dfrac{X-4}{(X-1)(X+1)X}=\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X-1}+\dfrac{c}{X+1}$. *Ce qui donne*

$$\begin{aligned} a &= \lim_{X\to 0} XF(X)=\lim_{X\to 0}\frac{X-4}{(X-1)(X+1)}=4\\ b &= \lim_{X\to 1}(X-1)F(X)=\lim_{X\to 1}\frac{X-4}{X(X+1)}=-\frac{3}{2}\\ c &= \lim_{X\to -1}(X+1)F(X)=\lim_{X\to -1}\frac{X-4}{X(X-1)}=-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

*On trouve :*

$$F(X)=\frac{-3/2}{X-1}+\frac{-5/2}{X+1}+\frac{4}{X}.$$

**Exemple 1.3.2.**

*Décomposons les fractions rationnelles* $F(X)=\dfrac{X^3+X-2}{(X+1)^4}$. *On a*

$$F(X)=\frac{X^3+X-2}{(X+1)^4}=\frac{a}{X+1}+\frac{b}{(X+1)^2}+\frac{c}{(X+1)^3}+\frac{d}{(X+1)^4}.$$

***Méthode 1***

*Posons* $G(X) = (X+1)^4 F(X) = X^3 + X - 2$. *On a*

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{(4-1)!}\lim_{X\to -1} G^{(3)}(X) = \frac{1}{6}\lim_{X\to -1} 6 = 1\\
b &= \frac{1}{(4-2)!}\lim_{X\to -1} G^{(2)}(X) = \frac{1}{2!}\lim_{X\to -1} G''(X) = \frac{1}{2}\lim_{X\to -1}(6x) = -3\\
c &= \frac{1}{(4-3)!}\lim_{X\to -1} G^{(1)}(X) = \frac{1}{1!}\lim_{X\to -1} G'(X) = \lim_{X\to -1}(3x^2+1) = 4\\
d &= \frac{1}{(4-4)!}\lim_{X\to -1} G^{(0)}(X) = \frac{1}{0!}\lim_{X\to -1} G(X) = \lim_{X\to -1}(x^3+x-2) = -4
\end{aligned}$$

*On trouve :*

$$F(X) = \frac{1}{X+1} + \frac{-3}{(X+1)^2} + \frac{4}{(X+1)^3} + \frac{-4}{(X+1)^4}.$$

***Méthode 2*** *: Division Euclidienne succéssive*

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & + & X & -\ 2 & X+1\\ \cline{5-5}
-(X^3 & +\ X^2) & & & X^2 - X + 2\\ \cline{1-2}
& -X^2 & +\ X & & \\
& -(-X^2 & -\ X) & & \\ \cline{2-3}
& & 2X & -\ 2 & \\
& & -(2X & +\ 2) & \\ \cline{3-4}
& & & -4 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l}
X^2 & -\ X & +\ 2 & X+1\\ \cline{4-4}
-(X^2 & +\ X) & & X-2\\ \cline{1-2}
& -2X & +\ 2 & \\
& -(-2X & -\ 2) & \\ \cline{2-3}
& & 4 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr|l}
X & -\ 2 & X+1\\ \cline{3-3}
-(X & +\ 1) & 1\\ \cline{1-2}
& -3 &
\end{array}$$

*On trouve :*

$$F(X) = \frac{1}{X+1} + \frac{-3}{(X+1)^2} + \frac{4}{(X+1)^3} + \frac{-4}{(X+1)^4}.$$

a ne pas regarder

**Exemple 1.3.3.**

*Décomposons les fractions rationnelles* $F(X) = \dfrac{X^5+X-2}{X^3(X-1)^4}$. *On a*

$$F(X) = \frac{X^5+X-2}{X^3(X-1)^4} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X^3} + \frac{d}{X-1} + \frac{e}{(X-1)^2} + \frac{f}{(X-1)^3} + \frac{g}{(X-1)^4}.$$

*On a* $(X-1)^4 = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$. *On divise* $X^5 + X - 2$ *par* $(X-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ *suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 ( car on a* $X^3$ *est* *un facteur du déterminant).*

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr|l}
-2 & + & X & & & & & & & + & X^5 & & & & & 1-4X+6X^2-4X^3- \\
-(-2 & + & 8X & - & 12X^2 & + & 8X^3 & - & 2X^4) & & & & & & & \hline -2-7X-16X^2 \\
\hline
& & -7X & + & 12X^2 & - & 8X^3 & + & 2X^4 & + & X^5 & & & & & \\
& - & (-7X & + & 28X^2 & - & 42X^3) & + & 28X^4 & - & 7X^5 & & & & & \\
\hline
& & & - & 16X^2 & + & 34X^3 & - & 26X^4 & + & 8X^5 & & & & & \\
& & & - & (-16X^2 & + & 64X^3 & - & 96X^4) & + & 64X^5 & - & 16X^5 & & & \\
\hline
& & & & & - & 30X^3 & + & 70X^4 & - & 56X^5 & + & 16X^6 & & &
\end{array}
$$

*Donc* $\dfrac{X^5+X-2}{(X-1)^4} = -16X^2-7X-2+\dfrac{X^3(16X^3-56X^2+70X-30)}{(X-1)^4}$*. D'où*

$$F(X) = -\frac{16}{X}-\frac{7}{X^2}-\frac{2}{X^3}+\frac{16X^3-56X^2+70X-30}{(X-1)^4}.$$

*Pour la décomposition de* $G(X) = \dfrac{16X^3-56X^2+70X-30}{(X-1)^4}$*, on peut utiliser une des méthodes de l'exemple précédent.*

**Exemple 1.3.4.**

*Décomposons les fractions rationnelles* $F(X) = \dfrac{1}{(X+1)(X+2)^3}$*. On a*

$$F(X) = \frac{1}{(X+1)(X+2)^3} = \frac{a}{X+1}+\frac{b}{X+2}+\frac{c}{(X+2)^2}+\frac{d}{(X+2)^3}.$$

$a = \lim\limits_{X\to-1}(X+1)F(X) = \lim\limits_{X\to-1}\dfrac{1}{(X+2)^3} = 1.$

*Soit* $G(X) = (X+2)^3F(X) = \dfrac{1}{X+1}$*.*

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{1}{(3-1)!}\lim_{X\to-2}G^{(2)}(X) = \frac{1}{2!}\lim_{X\to-2}G''(X) = \frac{1}{2}\lim_{X\to-2}\left(\frac{2}{(X+1)^3}\right) = -1\\
c &= \frac{1}{(3-2)!}\lim_{X\to-2}G^{(1)}(X) = \frac{1}{1!}\lim_{X\to-2}G'(X) = \lim_{X\to-2}\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = -1\\
d &= \frac{1}{(3-3)!}\lim_{X\to-2}G^{(0)}(X) = \frac{1}{0!}\lim_{X\to-2}G(X) = \lim_{X\to-2}\frac{1}{X+1} = -1
\end{aligned}
$$

$$F(X) = \frac{1}{(X+1)(X+2)^3} = \frac{1}{X+1}-\frac{1}{X+2}-\frac{1}{(X+2)^2}-\frac{1}{(X+2)^3}.$$

**Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$** :

Il faut calculer d'abord la factorisation du dénominateur dans $\mathbb{R}[X]$ : puisque le polynôme $X^2+1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, la factorisation du dénominateur est $X(X^2+1)^2$. Donc, la décomposition de cette fraction rationnelle dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{1}{X(X^2+1)^2} = \frac{a}{X}+\frac{b_1X+b_2}{X^2+1}+\frac{c_1X+c_2}{(X^2+1)^2}. \tag{1.1}$$

avec $a$, $b_1$, $b_2$, $c_1$, $c_2$ des coefficients à déterminer. En multipliant l'identité (1.1) ci-dessus par $X$, et puis en remplaçant $X$ par 0, on obtient $a = 1$. Ensuite, on muitiplie l'identité (1.1) par $X$, on a

$$\frac{1}{(X^2+1)^2} = a + \frac{X(b_1X+b_2)}{X^2+1} + \frac{X(c_1X+c_2)}{(X^2+1)^2}.$$

Donc on trouve

$$0 = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{(X^2+1)^2} = \lim_{X\to\infty} \left(\frac{X(b_1X+b_2)}{X^2+1} + \frac{X(c_1X+c_2)}{(X^2+1)^2}\right) = a + b_1.$$

Donc $b_1 = -a = -1$. De façon similaire, on a

$$0 = \lim_{X\to\infty} \frac{X}{(X^2+1)^2} = \lim_{X\to\infty} \left(\left(a + \frac{X(b_1X+b_2)}{X^2+1} + \frac{X(c_1X+c_2)}{(X^2+1)^2}\right).X\right) = b_2,$$

donc

$$\frac{1}{X(X^2+1)^2} = \frac{1}{X} + \frac{-X}{X^2+1} + \frac{c_1X+c_2}{(X^2+1)^2}.$$

d'où

$$1 = (X^2+1)^2 - X.X(X^2+1) + (c_1X+c_2)X = (1+c_1)X^2 + c_2X + 1.$$

En effet, ici on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} aX + \frac{X^2(b_1X+b_2)}{X^2+1} &= aX + \frac{(X^2+1-1)(b_1X+b_2)}{X^2+1} \\ &= aX + b_1X + b_2 - \frac{b_1X+b_2}{X^2+1} \\ &= b_2 - \frac{b_1X+b_2}{X^2+1}. \end{aligned}$$

Par identification, on a $c_1 = -1$ et $c_2 = 0$. La décompostion en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ cherchée est

$$\frac{1}{X(X^2+1)^2} = \frac{1}{X} + \frac{-X}{X^2+1} + \frac{-X}{(X^2+1)^2}.$$

**B) Intégration de fractions simples**

**1** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$.

- si $n = 1$, alors $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a|$
- si $n \geq 2$, alors $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}$

**2** $\displaystyle\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx \quad$ avec $\quad p^2 - 4q < 0$.

- si $n = 1$, alors

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx &= \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \\ &\quad (b-\frac{ap}{2})\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}} \\ &= \frac{a}{2}\ln(x^2+px+q) + \\ &\quad \frac{2b-ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)\end{aligned}$$

- si $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}&\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx \\ &= \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + (b-\frac{ap}{2})\int \frac{dx}{[(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}]^n} \\ &= \frac{a}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \\ &(b-\frac{ap}{2})(\frac{4}{4q-p^2})^n \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2+1\right]^n}\end{aligned}$$

Dans la dernière intégrale, le changement de variable défini par $t = \dfrac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$ ramène alors au calcul de $\displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

### C) Exemples

**Exemple 1.3.5.**

*Déterminons une primitive de* $f : x \mapsto \dfrac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}$

1) *La fonction $f$ est continue sur $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$. Les calculs effectués concernent l'un ou l'autre de ces deux intervalles.*
2) *La décomposition en éléments simples de $f$ donne*

$$f(x) = 1 - \frac{3}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

3) *Soit $F$ une primitive de $f$ sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$. Il vient alors que*

$$F(x) = x - \frac{3}{2}\ln(|x+1|) - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1).$$

**Exemple 1.3.6.**

*Soit* $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2+x+1}$*. Dans un premier temps on fait apparaître une fraction du type* $\dfrac{u'}{u}$ *(que l'on sait intégrer en* $\ln|u|$*).*

$$f(x) = \frac{(4x+1)\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x+1}{2x^2+x+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2x^2+x+1}$$

*On peut intégrer la fraction* $\dfrac{4x+1}{2x^2+x+1}$ *:*

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln\left|2x^2+x+1\right| + c$$

*Occupons nous de l'autre partie* $\dfrac{1}{2x^2+x+1}$*, nous allons l'écrire sous la forme* $\dfrac{1}{u^2+1}$ *(dont une primitive est* $\arctan u$*).*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2x^2+x+1} &= \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} + 1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2 + \frac{7}{8}} \\
&= \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{\frac{8}{7}2(x+\frac{1}{4})^2 + 1} = \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2 + 1}
\end{aligned}$$

*On pose le changement de variable* $u = \frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})$ *(et donc* $du = \frac{4}{\sqrt{7}}dx$*) pour trouver*

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2x^2+x+1} &= \int \frac{8}{7} \frac{dx}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2 + 1} = \frac{8}{7} \int \frac{du}{u^2+1} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \\
&= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan u + c \\
&= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \left( \frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4}) \right) + c\,.
\end{aligned}$$

*Finalement :*

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{4} \ln\left(2x^2+x+1\right) + \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan\left( \frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4}) \right) + c.$$

### 1.3.2 Fonction Circulaire

Soit $F(X,Y)$ une fonction rationnelle. On cherche une primitive de la fonction $f$ définie par $f(x) = F(\cos x, \sin x)$.

**A) $F$ est un polynôme**

Par linéarité de l'intégrale, on est ramené au calcul de primitive de la forme :

$$I_{n,m} = \int \cos^n x \sin^m x dx$$

où $m$ et $n$ sont des entiers naturels

1) $m$ ou $n$ est impair
   - $n = 2p + 1$, avec $p \in \mathbb{N}$ : $I_{2p+1,m} = \displaystyle\int (1 - \sin^2 x)^p \sin^m x(\cos x)dx.$
     Le changement de variable $t = \sin x$ ramène au calcul de $\displaystyle\int (1 - t^2)^p t^m dt$
   - $m = 2q + 1$, avec $q \in \mathbb{N}$ : $I_{n,2q+1} = \displaystyle\int \cos^n x(1 - \cos^2 x)^q(\sin x)dx.$
     Le changement de variable $t = \cos x$ ramène au calcul de $-\displaystyle\int (1 - t^2)^q t^n dt$
2) $m$ et $n$ sont pairs
   Si $p$ et $q$ sont trop grands pour que la linéarisation soit aisée, on se ramène au calcul de $\int \cos^{2(p+q)} x dx$ au moyen d'une relation de récurrence. En effet, en intégrant par partie, on a :

$$\begin{aligned} I_{2p,2q} &= \int \sin^{2q-1} x(\cos^{2p} x \sin x)dx \\ &= -\frac{1}{2p+1} \cos^{2p+1} x \sin^{2q-1} x + \\ &\quad \frac{2q-1}{2p+1} \int \cos^{2p+2} x \sin^{2q-2} x dx \\ &= -\frac{1}{2p+1} \cos^{2p+1} x \sin^{2q-1} x + \frac{2q-1}{2p+1} I_{2p+2,2q-2} \end{aligned}$$

ou, de même $I_{2p,2q} = \dfrac{1}{2q+1} \cos^{2p-1} x \sin^{2q+1} x + \dfrac{2p-1}{2q+1} I_{2p-2,2q+2}$

**B) Règles de Bioche**

**Règle 1.3.1.**

*On étudie si $f(x)dx$ est invariant quand on remplace $x$ par $-x$ ou par $\pi - x$ ou par $\pi + x$.*

*a) si $f(x)dx$ est invariant quand on remplace $x$ par $-x$, le chagement de variable défini par $x = \arccos t$, donc $t = \cos x$, ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en $t$.*

*b) si $f(x)dx$ est invariant quand on remplace $x$ par $\pi - x$, le chagement de variable défini par $x = \arcsin t$, donc $t = \sin x$, ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en $t$.*

c) *si $f(x)dx$ est invariant quand on remplace $x$ par $\pi + x$, le chagement de variable défini par $x = \arctan t$, donc $t = \tan x$, ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en $t$.*

**Règle 1.3.2.**
*Si deux au moins des changements a) ou b) ou c) laissent invariant $f(x)dx$, le chagement de variable défini par $x = \frac{1}{2}\arccos t$ donc $t = \cos 2x$, ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en $t$.*

**Règle 1.3.3.**
*Dans tous les cas, le changement de variable $x = 2\arctan t$ donc $t = \tan \frac{x}{2}$, ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en $t$.*

**Remarque 1.3.1.**
*Pour avoir les calculs les plus simples possibles, il faut utiliser ces règles dans l'ordre préférentiel 1.3.2, puis 1.3.1 puis 1.3.3.*

**Remarque 1.3.2.**
***Le changement de variable** $t = \tan \dfrac{x}{2}$.*

*Les formules de la « tangente de l'arc moitié » permettent d'exprimer sinus, cosinus et tangente en fonction de $\tan \dfrac{x}{2}$.*

$$\boxed{\begin{array}{c} \textit{Avec} \quad t = \tan \dfrac{x}{2} \quad \textit{on a} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \dfrac{2t}{1-t^2} \\ \textit{et} \qquad dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}. \end{array}}$$

### C) Exemples

**Exemple 1.3.7.**
*Déterminons une primitive de $f : x \mapsto \sin^5(x)$*
$\sin^5(x) = (1-\cos^2(x))^2\sin(x)$ *donne avec le changement de variable défini par* $t = \cos(x)$ *:*

$$\int \sin^5(x)dx = -\int (1-t^2)^2 dt = -\int (t^4 - 2t^2 + 1)dt.$$

*Soit $F$ une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$. On obtient alors* $F(x) = -\frac{1}{5}\cos^5(x) + \frac{2}{3}\cos^3(x) - \cos(x)$.

**Exemple 1.3.8.**
*Déterminons* $\displaystyle\int \cos^4(x)\sin^2(x)dx$
*On a* $\cos^4(x)\sin^2(x) = \cos^4(x) - \cos^6(x)$. *En utilisant les formules d'Euler, on a*

$$\cos^4(x) = \frac{1}{2^4}(e^{ix} + e^{-ix})^4 = \frac{1}{2^3}(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)$$

$$\cos^6(x) = \frac{1}{2^6}(e^{ix} + e^{-ix})^6 = \frac{1}{2^5}(\cos(6x) + 6\cos(4x) + 15\cos(2x) + 10).$$

*Ainsi* $\cos^4(x) - \cos^6(x) = -\frac{1}{32}\cos(6x) - \frac{1}{16}\cos(4x) + \frac{1}{32}\cos(2x) + \frac{1}{16}$*. Par suite,*

$$\int \cos^4(x)\sin^2(x)dx = -\frac{1}{192}\sin(6x) - \frac{1}{64}\sin(4x) + \frac{1}{64}\sin(2x) + \frac{1}{16}x.$$

**Exemple 1.3.9.**

*Calcul de la primitive* $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{2 - \cos^2 x}$

*On note* $\omega(x) = \dfrac{\cos x\, dx}{2 - \cos^2 x}$*. Comme*

$$\omega(\pi - x) = \frac{\cos(\pi - x)\, d(\pi - x)}{2 - \cos^2(\pi - x)} = \frac{(-\cos x)\,(-dx)}{2 - \cos^2 x} = \omega(x)$$

*alors le changement de variable qui convient est* $u = \sin x$ *pour lequel* $du = \cos x\, dx$*. Ainsi :*

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x\, dx}{2 - \cos^2 x} &= \int \frac{\cos x\, dx}{2 - (1 - \sin^2 x)} \\
&= \int \frac{du}{1 + u^2} = [\arctan u] \\
&= \arctan(\sin x) + c\,.
\end{aligned}$$

**Exemple 1.3.10.**

*Calcul de l'intégrale* $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \frac{dx}{1 - \sin x}$.

*Le changement de variable* $t = \tan\dfrac{x}{2}$ *définit une bijection de* $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ *vers* $[-1, 0]$ *(pour* $x = -\dfrac{\pi}{2}$*,* $t = -1$ *et pour* $x = 0$*,* $t = 0$*). De plus on a* $\sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ *et* $dx = \dfrac{2\, dt}{1 + t^2}$*.*

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{1 - \sin x} &= \int_{-1}^{0} \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1 - \frac{2t}{1+t^2}} = 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{1 + t^2 - 2t} \\
&= 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{(1 - t)^2} = 2\left[\frac{1}{1 - t}\right]_{-1}^{0} = 2\big(1 - \frac{1}{2}\big) = 1
\end{aligned}$$

### 1.3.3 Fonction hyperboliques

Soit $F(X, Y)$ une fraction rationnelle. On cherche une primitive de la fonction $f$ définie par $f(x) = F(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$.

Chacune des règles suivantes donne un changement de variable qui ramène le calcul de $\displaystyle\int f(x)dx$ à celui d'une primitive de fonction rationnelle.

**Règle 1.3.4.**

*On examine $F(\cos x, \sin x)$ et quel changement de variable permet, le plus efficacement possible (voir les priorités annoncées pour les règle de Bioche) de se ramener à une primitive de fonction rationnelle.*

*a) Si* $\int F(\cos(x), \sin(x))dx$ *se calcule avec* $t = \cos(x)$*, alors* $\int F(\operatorname{ch}(x), \operatorname{sh}(x))dx$ *se calcule avec* $t = \operatorname{ch}(x)$.

*b) Si* $\int F(\cos(x), \sin(x))dx$ *se calcule avec* $t = \sin(x)$*, alors* $\int F(\operatorname{ch}(x), \operatorname{sh}(x))dx$ *se calcule avec* $t = \operatorname{sh}(x)$.

*c) Si* $\int F(\cos(x), \sin(x))dx$ *se calcule avec* $t = \tan(x)$*, alors* $\int F(\operatorname{ch}(x), \operatorname{sh}(x))dx$ *se calcule avec* $t = (x)$.

*d) Si* $\int F(\cos(x), \sin(x))dx$ *se calcule avec* $t = \cos(2x)$*, alors* $\int F(\operatorname{ch}(x), \operatorname{sh}(x))dx$ *se calcule avec* $t = \operatorname{ch}(2x)$.

**Règle 1.3.5.**

*Dans les autres cas, on peut utiliser le changement de variable défini par* $t = \operatorname{th}(\frac{x}{2})$*, mais la il est en général préférable d'utiliser* $t = e^x$.

### Exemples

**Exemple 1.3.11.**

*Calculer* $F(x) = \int \frac{\operatorname{sh}^3(x)}{\operatorname{ch}(x)(2+\operatorname{sh}^2(x))}dx$*. En notant* $\omega(x) = \frac{\sin^3(x)}{\cos(x)(2+\sin^2(x))}dx$*, on a* $\omega(-x) = \omega(x)$*,* $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ *et* $\omega(\pi + x) = \omega(x)$*. On peut utiliser plusieurs changements de variables :*

**1** $t = \operatorname{sh}(x)$ *donne* $G(t) = \int \frac{t^3}{(1+t^2)(2+t^2)}dt$.

**2** $t = \operatorname{ch}(x)$ *donne* $G(t) = \int \frac{t^2-1}{t(1+t^2)}dt$.

**3** $t = \operatorname{th}(x)$ *donne* $G(t) = \int \frac{t^3}{2-t^2}dt$.

**4** $t = e^x$ *donne* $G(t) = \int \frac{(t^2-1)^3}{t(t^2+1)(t^4+6t^2+1)}dt$.

*Les fractions rationnelles à primitiver ne sont pas toutes agréables ! Le mieux ici est d'utiliser le changement de variables* $t = (x)$ *pour calculer*

$$G(t) = \frac{t^2}{2} - \ln|t^2 - 2|$$

*puis*

$$F(x) = -\frac{\operatorname{th}^2(x)}{2} - \ln(2 - \operatorname{th}^2(x)) + C.$$

**Exemple 1.3.12.** *Calculer* $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{5\operatorname{sh}(x) - 4\operatorname{ch}(x)} dx.$
$5\operatorname{sh}(x) - 4\operatorname{ch}(x) = 0$ *lorsque* $5(e^x - e^{-x}) - 4(e^x + e^{-x}) = 0$ *c'est-à-dire* $e^x - 9e^{-x} = 0$ *ou encore* $e^{2x} = 9$*, soit enfin* $x = \ln(3)$*.*
*La fonction* $f : x \mapsto \dfrac{1}{5\operatorname{sh}(x) - 4\operatorname{ch}(x)}$ *est donc continue sur* $[0, \ln(2)]$*.*
*Nous utilisons le changement de variable* $t \mapsto e^t$*, bijectif de* $[0, \ln(2)]$ *sur* $[1, 2]$*. Il vient alors*

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{5\operatorname{sh}(x) - 4\operatorname{ch}(x)} dx = 2\int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{e^x - 9e^{-x}} dx = 2\int_1^2 \frac{dt}{t^2 - 9},$$

*et donc*

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{5\operatorname{sh}(x) - 4\operatorname{ch}(x)} dx = \frac{1}{3}\left[\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\right]_1^2 = \frac{1}{3}\ln(\frac{2}{5}).$$

### 1.3.4 Intégrale Abélien

Soit $F(X, Y)$ une fraction rationnelle. L'objectif de cette partie est de calculer une primitive d'une fonction $f$ de l'une des formes suivantes :

**1** $f(x) = F\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$

**2** $f(x) = F(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

**A)** $\displaystyle\int F\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$**,** $\qquad ad - bc \neq 0$

**Règle 1.3.6.** *Le changement de variable défini par*

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

*ramène le calcul de* $\displaystyle\int F\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ *à celui d'une primitive de fonction rationnelle en* $t$*. Avec*

$$x = \frac{-dt^n + b}{ct^n - a} \quad \text{et} \quad dx = n\frac{ad - bc}{(ct^n - a)^2}t^{n-1}dt.$$

**B)** $\displaystyle\int F(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx \qquad a \neq 0 \qquad b^2 - 4ac \neq 0$

On posera $b^2 - 4ac \neq 0$ sinon $ax^2 + bx + c$ admet une racine double $\alpha$. Alors
- Pour $a > 0$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}|x - \alpha|$.
- Pour $a < 0$, l'ensemble de définition est réduit à un point.

### 1) Se ramener à une primitive de fonction rationnelle

**Règle 1.3.7.** *Avec $a > 0$, le calcul de $\int F(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ se ramène à celui d'une primitive de fonction rationnelle au moyen du changement de variable défini par*

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t.$$

*On a alors*

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}} \quad \text{et} \quad dx = \frac{-2t^2\sqrt{a} + 2bt - 2c\sqrt{a}}{(b - 2t\sqrt{a})^2}dt.$$

**Règle 1.3.8.** *Avec $\triangle > 0$, le polynôme $ax^2+bx+c$ admet des racines $\alpha$ et $\beta$, avec $\alpha \neq \beta$. En écrivant*

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = |x-\alpha|\sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}},$$

*on est face à une primitive de fonction rationnelle de $x$ et de $\sqrt{a\dfrac{x-\beta}{x-\alpha}}$.*

**2) Se ramener à une primitive de fonction rationnelle de fonctions circulaires ou hyperboliques**

**Règle 1.3.9.** *Avec $a > 0$ et $\triangle > 0$, en écrivant $ax^2+bx+c = a\left[(x+\dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{\triangle}{4a^2}\right]$, le changement de variable défini par $t \geq 0$, $\left|x+\dfrac{b}{2a}\right| = \dfrac{\sqrt{\triangle}}{2a}\cosh(t)$ ramène au calcul d'une primitive de fonction rationnelle de fonctions hyperboliques.*

**Règle 1.3.10.** *Avec $a > 0$ et $\triangle < 0$, en écrivant $ax^2+bx+c = a\left[(x+\dfrac{b}{2a})^2 + \dfrac{-\triangle}{4a^2}\right]$, le changement de variable défini par $x+\dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{-\triangle}}{2a}\sinh(t)$ ramène au calcul d'une primitive de fonction rationnelle de fonctions hyperboliques.*

**Règle 1.3.11.** *Avec $a < 0$ et $\triangle > 0$, en écrivant $ax^2+bx+c = (-a)\left[\dfrac{\triangle}{4a^2} - (x+\dfrac{b}{2a})^2\right]$, le changement de variable défini par $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ $x+\dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{\triangle}}{2a}\sin(t)$ ramène au calcul d'une primitive de fonction rationnelle de fonctions trigonométriques.*

**C) Exemples**

**Exemple 1.3.13.** *Calculer $F(x) = \displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{x}$ sur l'intervalle $I = ]0,1[$. On effectue le changement de variables*

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \qquad x = \frac{y^2-1}{y^2+1} \qquad dx = \frac{4y}{(y^2+1)^2}dy$$

*et on se ramène à calculer la primitive*

$$G(y) = 4\int \frac{y^2}{(y^2-1)(y^2+1)}dy.$$

*La décomposition de la fraction rationnelle s'écrit*

$$4\int \frac{x^2dx}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1/4}{x-1} - \frac{1/4}{x+1} + \frac{1/2}{x^2+1},$$

*et on trouve que* $G(y) = \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + 2\arctan(y)$. *Après simplifications :*

$$F(x) = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

*On peut utiliser ensuite les quantités conjuguées pour écrire*

$$F(x) = \ln\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

**Exemple 1.3.14.** *Calculer* $F(x) = \int \sqrt{x^2+x+1}dx$. *On réduit le trinôme à l'intérieur de la racine :*

$$\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{(x+1/2)^2+3/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{[\frac{2x+1}{\sqrt{3}}]^2+1}$$

*et par le premier changement de variables* $y = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, *on se ramène au calcul de* $G(y) = \frac{3}{4}\int\sqrt{y^2+1}dy$. *Ensuite, avec la changement de variables* $y = \operatorname{sh}(z)$, $dy = \operatorname{ch}(z)dz$, *on se ramène à*

$$H(z) = \frac{3}{4}\int \operatorname{ch}(z)dz.$$

*Il suffit de linéariser* $\operatorname{ch}^2(z) = \frac{\operatorname{ch}(2z)+1}{2}$ *pour calculer*

$$H(z) = \frac{3}{16}\operatorname{sh}(2z) + \frac{3}{8}z$$

$$G(y) = \frac{3}{8}\left(y\sqrt{1+y^2} + \operatorname{argsh}(y)\right)$$

$$F(x) = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}{4} + \frac{3}{8}\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}) + C.$$

### 1.3.5 Sommes de Riemann

On peut calculer des limites de sommes à partir d'intégrales.

**Théorème 1.3.1.** *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable, alors*

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

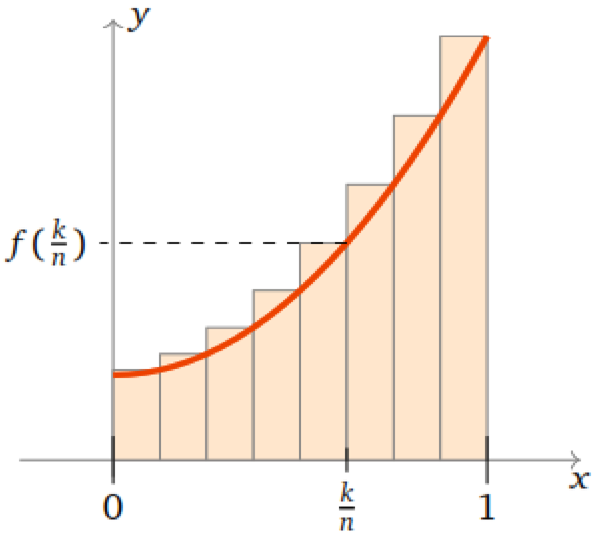
**Définition 1.3.1.** *La somme* $S_n$ *s'appelle la* ***somme de Riemann*** *associée à l'intégrale et correspond à une subdivision régulière de l'intervalle* $[a,b]$ *en* $n$ *petits intervalles. La hauteur de chaque rectangle étant évaluée à son extrémité droite.*

**Remarque 1.3.3.** *Le cas le plus utile est le cas où $a = 0$, $b = 1$ alors $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ et $f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big) = f\big(\frac{k}{n}\big)$ et ainsi*

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big) \qquad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \qquad \int_0^1 f(x)\,dx.$$

**Remarque 1.3.4.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, alors*

$$S'_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big) \qquad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \qquad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$




**Exemple 1.3.15.**

*Calculer la limite de la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.*

*On a $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$, ...*

*La somme $S_n$ s'écrit aussi $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$. En posant $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a = 0$ et $b = 1$, on reconnaît que $S_n$ est une somme de Riemann. Donc*

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(\tfrac{k}{n}\big)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \big[\ln|1+x|\big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

*Ainsi $S_n \to \ln 2$ (lorsque $n \to +\infty$).*

### 1.3.6 Calcul d'aire

- **Fonctions positives** :
  Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[a;b]$. si
  $$D = \{M(x;y) : a \leq x \leq b \quad et \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$
  alors l'aire de $D$ est
  $$\mathcal{A}(D) = \int_a^b f(x)dx\ ua.$$
- **Fonctions négatives** :
  Soit $f$ une fonction continue et négative sur $[a;b]$. si
  $$D = \{M(x;y) : a \leq x \leq b \quad et \quad f(x) \leq y \leq 0\}$$
  alors l'aire de $D$ est
  $$\mathcal{A}(D) = -\int_a^b f(x)dx\ ua.$$
- **Deux fonctions** :
  Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a;b]$, $C_f$ et $C_g$ leurs courbes si $D$ est délimité par $C_f$, $C_g$ et les droites d'équation $x = a$, $x = b$ alors
  $$\mathcal{A}(D) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx\ ua.$$

Dans le repère $(O, I, J)$ l'unité d'aire notée ua en $cm^2$ est $ua = OI \times OJcm^2$.

**Exemple 1.3.16.**
*Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, I, J)$ unité : $2cm$. On donne la fonction $f$ définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{-x} + \dfrac{1}{x}$.*
*Déterminer en $cm^2$ l'aire du domaine limité par $(C_f)$, $(OI)$ et les droites $x = 1$ et $x = 3$.*

$$\int_1^3 \left(e^{-x} + \frac{1}{x}\right) dx = \left[-e^{-x} + \ln x\right]_1^3 = -e^{-3} + e^{-1} + \ln 3 - \ln 1.$$

$$\mathcal{A} = (e^{-1} - e^{-3} + \ln 3) \times 2 \times 2cm^2 = 4(e^{-1} - e^{-3} + \ln 3)cm^2.$$

## 1.4 Intégrales impropres

L'objectif de ce paragraphe est de calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, où $f$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b[$ (c'est-à-dire que $f$ n 'est pas définie en $b$) ou sur l'intcrvalle $]a;b]$ (c'est-à-dire que $f$ n'est pas définie en $a$).

**Exemple 1.4.1.**

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ *où* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *est continue sur* $[1; +\infty[$.

**Exemple 1.4.2.**

$\displaystyle\int_0^1 \ln(x)dx$ *où* $f(x) = \ln(x)$ *est continue sur* $]0; 1]$.

**Méthode 1.4.1.**

**1** *Si* $f$ *est continue sur* $[a; b[$, *alors* $f$ *est continue sur* $[a; x_0]$ *pour* $x_0 < b$. *Dès lors, l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *se calcule en deux étapes :*

- **a** *Calculer* $\Phi(x_0) = \displaystyle\int_a^{x_0} f(x)dx$.
- **b** *Calculer la limite de* $\Phi(x_0)$ *lorsque* $x_0$ *tend vers* $b$.

*Si cette limite existe, on a* $\displaystyle\lim_{x_0 \to b} \int_a^{x_0} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

**2** *Si* $f$ *est continue sur* $]a; b]$, *alors* $f$ *est continue sur* $[x_0; b]$ *pour* $x_0 > a$. *Dès lors, l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *se calcule en deux étapes :*

- **a** *Calculer* $\Phi(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{b} f(x)dx$.
- **b** *Calculer la limite de* $\Phi(x_0)$ *lorsque* $x_0$ *tend vers* $a$.

*Si cette limite existe, on a* $\displaystyle\lim_{x_0 \to a} \int_{x_0}^{b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

**Exemple 1.4.3.**

*Calculons* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ *où* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *est continue sur* $[1; +\infty[$.

**1** $\Phi(x_0) = \displaystyle\int_1^{x_0} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{x_0} = 1 - \frac{1}{x_0}$

**2** $\displaystyle\lim_{x_0 \to +\infty} \Phi(x_0) = \lim_{x_0 \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x_0}\right) = 1 - \lim_{x_0 \to +\infty} \frac{1}{x_0} = 1 - 0 = 1.$

*Donc* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1.$

**Exemple 1.4.4.**

*Calculons* $\displaystyle\int_0^1 -2\ln(x)dx$ *où* $f(x) = -\ln(x)$ *est continue sur* $]0; 1]$. *Une primitive de* $-2\ln(x)$ *est* $F(x) = -2x\ln(x) + 2x$.

**1** $\Phi(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^1 -2\ln(x)dx = -\left[2x\ln(x) - 2x\right]_{x_0}^1 = 2 + (2x_0\ln(x_0) - 2x_0) = 2x_0\ln(x_0) - 2x_0 + 2.$

**2** $\lim\limits_{x_0 \to 0} \Phi(x_0) = \lim\limits_{x_0 \to 0} (2x_0 \ln(x_0) - 2x_0 + 2) = 2 + 2 \lim\limits_{x_0 \to 0} x_0 \ln(x_0) - 2 \lim\limits_{x_0 \to 0} x_0 = 2 + 0 - 0 = 2.$

*Donc* $\displaystyle\int_0^1 -2\ln(x)dx = 2$

# Chapitre 2

# EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

## 2.1 Introduction

Les équations différentielles ordinaires se rencontrent beaucoup de domaines. C'est une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées. **La fonction inconnue ne dépend que d'une seule variable, par exemple** $f(x)$.

**En Economie**, Elles interviennent :

- En macro-économie, les équations linéaires d'ordre $1$ (et aussi $2$) permettent de décrire le principe de I'accélérateur et du multiplicateur dynamiques continus. Ces modèles économiques traitent et lient l'investissement et la consommation.
- En économie, l'effet multiplicateur décrit pour un systeme donne, la constatation qu'une variation initiale d'un élément a l' entrée (du systeme) provoque par le biais d' entrainements successifs, une variation finale en sortie du système plus importante d'un ou plusieurs autres éléments ; à titre d'exemple, la variation d'un montant d'une dépense peut avoir un effet multiplicateur sur le revenu national ou l'activité économique en génerale. L'effet d'accélérateur reposera quant à lui ;sur l'effet d'entrainement réciproque entre la croissance de la demande et celle de l 'investissement productif. Les deux effets cumulés permettent d'analyser le cycle economique plus globalement.

## 2.2 Définitions

**Définition 2.2.1.** *Une équation différentielle est une relation du type*

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x), \cdots, u^{(n)}(x)) = 0,$$

*entre la variable $x \in \mathbb{R}$ et les dérivées de la fonction inconnue $u$ au point $x$. La fonction $F$ est une fonction de plusieurs variables $(x, y) \mapsto F(x, y)$ où $x$ est dans $\mathbb{R}$ (ou parfois dans un intervalle de $\mathbb{R}$) et $y = (y_0, ..., y_n)$ est dans $\mathbb{R}^{n+1}$.*

**Définition 2.2.2** (Solution.)**.**
*On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle d'ordre $n$ sur un certain intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, toute fonction $y$ définie sur cet intervalle $I$, $n$ fois dérivable en tout point de $I$ et qui vérifie cette équation différentielle sur $I$. On notera en général cette solution $(y; I)$.*

## 2.3 Équation différentielle linéaire du premier ordre

### 2.3.1 Définitions

**Définition 2.3.1.** *Une équation différentielle linéaire du premier ordre est du type :*

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \tag{2.1}$$

*où les fonctions $a$ et $b$ avec $a \neq 0$, sont données et s'appellent les coefficients de l'équation différentielle et la fonction $f$ est donnée et s'appelle le second membre.*

**Définition 2.3.2.** *Une solution de (2.1) sur un intervalle $I$ est une fonction $y$ de classe $C^1$ sur $I$ vérifiant (2.1) pour tout $x \in I$.*

**Définition 2.3.3.** *(2.1) est dite normalisée si $a$ est la fonction constante identiquement égale à 1.*

**Définition 2.3.4** (Condition initiale)**.** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. On dit que la solution $\varphi$ de (2.1) vérifie la condition initiale $(x_0, y_0)$ si et seulement si $\varphi(x_0) = y_0$.*

**Définition 2.3.5.** *On appelle équation différentielle homogène associée à (2.1) l'équation :*

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0. \tag{2.2}$$

### 2.3.2 Recherche de solutions

**Définition 2.3.6.** *Soit $y_p$ une solution particulière de (2.1) ; alors les solutions générales de (2.1) s'écrivent*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

*où $y_h$ est la solution générale de l'équation homogène (2.2).*

| Equation | solution générale de l'équation homogène | une solution particulière |
|---|---|---|
| $a(x)y'(x)+b(x)y(x)=f(x)$ <br> $a\neq 0$ | $y_h(x)=Ce^{G(x)}, \forall x\in I$ <br> où $G$ est une primitive de $g$ définie par $g(x)=\dfrac{-b(x)}{a(x)}$ et $C\in\mathbb{R}$ | $y_p(x)=H(x)e^{G(x)}$ <br> $H$ est une primitive de $h$ définie par $h(x)=\dfrac{f(x)}{a(x)e^{G(x)}}$ |
| $ay'+by=c$ avec $a,b\in\mathbb{R}^*$ et $c\in\mathbb{R}$ | $y_h(x)=Ce^{-\frac{b}{a}x}$, <br> $\forall x\in I, C\in\mathbb{R}$ | $y_p(t)=\dfrac{c}{b}$ |
| $ay'+by=e^{\lambda x}$ <br> avec $a\in\mathbb{R}^*$ | $y_h(x)=Ce^{-\frac{b}{a}x}$, <br> $\forall x\in I, C\in\mathbb{R}$ | $y_p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a\lambda+b}e^{\lambda x} & si \quad \lambda\neq-\dfrac{b}{a}\\ \dfrac{x}{a}e^{\lambda x} & si \quad \lambda=-\dfrac{b}{a}\end{cases}$ |
| $ay'+by=P(x)$ <br> avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $P$ est un polynôme | $y_h(x)=Ce^{-\frac{b}{a}x}$, <br> $\forall x\in I, C\in\mathbb{R}$ | $y_p(x)=\begin{cases}Q(x) & si \quad b\neq 0\\ xQ(x) & si \quad b=0\end{cases}$ <br> où $Q$ est un polynôme de même degré que $P$ |
| $ay'+by=e^{\lambda x}P(x)$ <br> avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $P$ est un polynôme | $y_h(x)=Ce^{-\frac{b}{a}x}$, <br> $\forall x\in I, C\in\mathbb{R}$ | $y_p(x)=\begin{cases}e^{\lambda x}Q(x) & si \quad \lambda\neq-\dfrac{b}{a}\\ xe^{\lambda x}Q(x) & si \quad \lambda=-\dfrac{b}{a}\end{cases}$ <br> où $Q$ est un polynôme de même degré que $P$ |
| $ay'+by=\eta_1\cos(\omega x)+\eta_2\sin(\omega x)$ <br> avec $\eta_1,\eta_2,\omega\in\mathbb{R}$ | $y_h(x)=Ce^{-\frac{b}{a}x}$, <br> $\forall x\in I, C\in\mathbb{R}$ | $y_p(x)=\mu_1\cos(\omega x)+\mu_2\sin(\omega x)$ <br> avec $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$ |

## Exemples

**Exemple 2.3.1.**

*Déterminons une solution particulière de l'équation* $y'+3y=2$.
*On a* $r=-\dfrac{-3}{1}=3$, $\lambda=0$ *et* $p(x)=2$. *Donc* $\lambda\neq r$. *Par suite, une solution est sous la forme* $v_p(x)=\alpha e^{0x}=\alpha$. *On a aussi* $v_p'(x)=0$

$$\begin{aligned} v_p \textit{ est solution} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R},\, v_p'(x)+3v_p(x)=2\\ &\Leftrightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R},\, 0+3\alpha=2\\ &\Leftrightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R},\, \alpha=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

$v_p(x)=\dfrac{2}{3}.$

**Exemple 2.3.2.** *Déterminons une solution particulière de l'équation* $y' + y = e^{2x}$.
*On a* $r = -\frac{1}{1} = -1$, $\lambda = 2$ *et* $p(x) = 1$. *Donc* $\lambda \neq r$. *Par suite, une solution est sous la forme* $v_p(x) = \alpha e^{2x}$. *On a aussi* $v_0'(x) = 2\alpha e^{2x}$

$$\begin{aligned} v_p \text{ est solution} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ v_p'(x) + v_p(x) = e^{2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2\alpha e^{2x} + \alpha e^{2x} = e^{2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 3\alpha e^{2x} = e^{2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 3\alpha = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$v_p(x) = \frac{1}{3}e^{2x}$

**Exemple 2.3.3.** *Déterminons une solution particulière de l'équation* $2y' + 6y = e^{-3x}$.
*On a* $r = -\frac{6}{2} = -3$, $\lambda = -3$ *et* $p(x) = 1$. *Donc* $\lambda = r$. *Par suite, une solution est sous la forme* $v_p(x) = (\alpha x)e^{-3x}$. *On a aussi* $v_0'(x) = \alpha e^{-3x} - 3(\alpha x)e^{-3x}$

$$\begin{aligned} v_0 \text{ est solution} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2v_p'(x) + 6v_p(x) = e^{-3x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2(\alpha e^{-3x} - 3(\alpha x)e^{-3x}) + 6(\alpha x)e^{-3x} = e^{-3x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2\alpha e^{-3x} - 6(\alpha x)e^{-3x} + 6(\alpha x)e^{-3x} = e^{-3x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2\alpha e^{-3x} = e^{3x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2\alpha = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$v_p(x) = \frac{x}{2}e^{-3x}$

**Exemple 2.3.4.**
*Déterminons une solution particulière de l'équation* $y' + 2y = xe^{3x}$.
*On a* $r = -\frac{2}{1} = -2$, $\lambda = 3$ *et* $p_1(x) = x$. *Donc* $\lambda \neq r$. *Par suite, une solution est sous la forme* $v_p(x) = (\alpha x + \beta)e^{3x}$. *On a aussi* $v_p'(x) = \alpha e^{3x} + 3(\alpha x + \beta)e^{3x}$

$$\begin{aligned} v_p \text{ est solution} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ v_p'(x) + 2v_p(x) = xe^{3x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha e^{3x} + 3(\alpha x + \beta)e^{3x} + 2(\alpha x + \beta)e^{3x} = xe^{3x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (\alpha + 3\alpha x + 3\beta + 2\alpha x + 2\beta)e^{3x} = xe^{3x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (5\alpha x + \alpha + 5\beta)e^{3x} = xe^{3x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (5\alpha x + \alpha + 5\beta) = x \end{aligned}$$

*Par identification, on a* $5\alpha = 1$ *et* $\alpha + 5\beta = 0$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5\alpha &=& 1 \\ \alpha + 5\beta &=& 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha &=& \frac{1}{5} \\ \beta &=& -\frac{1}{25} \end{array} \right.$$

$v_p(x) = \left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{25}\right)e^{3x}$.

**Exemple 2.3.5.**
*Une solution particulière de l'équation* $2y' + y = (x^2 + x)e^{-\frac{1}{2}x}$ .
*On a* $r = -\frac{1}{2}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ *et* $p_2(x) = x^2 + x$. *Donc* $\lambda = r$. *Par suite, une solution est sous la forme* $v_p(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)xe^{-\frac{1}{2}x} = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x)xe^{-\frac{1}{2}x}$. *On a aussi* $v_p'(x) = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x)e^{-\frac{1}{2}x}$

$$\begin{aligned}
v_p \textit{ est solution} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ v_p'(x) + 2v_p(x) = xe^{-\frac{1}{2}x}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2((3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)e^{-\frac{1}{2}x} - \tfrac{1}{2}(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x)e^{-\frac{1}{2}x})+\\
&\quad\ (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x)xe^{-\frac{1}{2}x} = (x^2 + x)e^{-\frac{1}{2}x}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (6\alpha x^2 + 4\beta x + 2\gamma - \alpha x^3 - \beta x^2 - \gamma x + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x)e^{-\frac{1}{2}x}\\
&\quad\ = (x^2 + x)e^{-\frac{1}{2}x}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2(3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)e^{-\frac{1}{2}x} = (x^2 + x)e^{-\frac{1}{2}x}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (6\alpha x^2 + 4\beta x + 2\gamma) = (x^2 + x)
\end{aligned}$$

*Par identification, on a* $6\alpha = 1$, $4\beta = 1$ *et* $2\gamma = 0$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 6\alpha &=& 1\\ 4\beta &=& 1\\ 2\gamma &=& 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \alpha &=& \frac{1}{6}\\ \beta &=& \frac{1}{4}\\ \gamma &=& 0 \end{array}\right.$$

$v_p(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2\right)e^{-\frac{1}{2}x}$.

**Exemple 2.3.6.**
*Déterminons une solution particulière de l'équation* $y' + y = 2\cos(4x)$.
*On a* $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 0$ *et* $\omega = 4$. *Par suite, une solution est sous la forme*
$v_p(x) = \mu_1 \cos(4x) + \mu_2 \sin(4x)$. *On a aussi* $v_p'(x) = -4\mu_1 \sin(4x) + 4\mu_2 \cos(4x)$

$$\begin{aligned}
v_p \textit{ est solution} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ -4\mu_1 \sin(4x) + 4\mu_2 \cos(4x) + \mu_1 \cos(4x) + \mu_2 \sin(4x)\\
&\quad\ = 2\cos(4x)\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ (4\mu_2 + \mu_1)\cos(4x) + (\mu_2 - 4\mu_1)\sin(4x)\\
&\quad\ = 2\cos(4x)
\end{aligned}$$

*Par identification, on a* $\mu_1 + 4\mu_2 = 2$ *et* $-4\mu_1 + \mu_2 = 0$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mu_1 + 4\mu_2 &=& 2\\ -4\mu_1 + \mu_2 &=& 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \mu_1 &=& \frac{2}{17}\\ \mu_2 &=& \frac{8}{17} \end{array}\right.$$

$v_p(x) = \frac{2}{17}\cos(4x) + \frac{8}{17}\sin(4x)$.

**Exemple 2.3.7.**
*Résolvons l'équation différentielle* $xy'(x) + y(x) = x$ *pour* $x \in \mathbb{R}_+^*$.

**1** ***Equation homogène***

*L'équation homogène associée est*

$$xy'(x) + y(x) = 0 \qquad x > 0 \tag{2.3}$$

*Les solutions de (2.3) sont de la forme*

$$v_h(x) = Ce^{-\ln(|x|)} = \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**2** ***Recherchons une solution particulière $v_p$ de l'équation (2.3) :***

*Utilisation de la méthode de la variation de la constante :*

*On pose donc* $v_p(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

$$C'(x) = \frac{f(x)}{a(x)e^{-\ln(|x|)}} = \frac{x}{x \times \frac{1}{x}} = x;$$

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

*On en déduit donc*

$$v_p(t) = \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x} = \frac{x}{2}.$$

**3** ***Solution générale***

*La solution générale s'écrit donc*

$$y(x) = \frac{C}{x} + \frac{x}{2}, \qquad C \in \mathbb{R}$$

**Exemple 2.3.8.**

*Soit l'équation* $y' + y = e^x + 1$.

**1** ***Equation homogène***

*L'équation homogène associée est*

$$y'(x) + y(x) = 0 \tag{2.4}$$

*Les solutions de (2.6) sont de la forme* $y_h(t) = Ce^{-x}$.

**2** ***Recherchons une solution particulière $y_p$ de l'équation (2.4) :***

*Utilisation de la méthode de la variation de la constante :*

*On pose donc* $y_p(x) = C(x)e^{-x}$.

$$C'(x) = \frac{f(x)}{a(x)e^{-x}} = \frac{e^x + 1}{1 \times e^{-t}} = e^{2x} + e^x;$$

$$C(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x.$$

*On en déduit donc*

$$y_p(x) = C(x)e^{-x} = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + e^x\right)e^{-x} = \frac{1}{2}e^x + 1.$$

**3** ***Solution générale***

*La solution générale s'écrit donc*

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + 1 + Ce^{-x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

**Exemple 2.3.9.**

*Soit l'équation différentielle suivante :*

$$y'(t) + 2y(t) = 1; \qquad \forall t > 0 \tag{2.5}$$

*sous la condition initiale* $y(0) = 1$.

**1** ***Equation homogène***

*L'équation homogène associée est*

$$y'(t) + 2y(t) = 0 \tag{2.6}$$

*Les solutions de (2.6) sont de la forme* $y_h(t) = Ae^{-2t}$.

**2** ***Recherchons une solution particulière*** $y_p$ ***de l'équation (2.5) :***

**a** *Utilisation de la méthode de la variation de la constante :*

*On pose donc* $y_p(t) = A(t)e^{-2t}$.

$$A'(t) = \frac{f(t)}{a(t)e^{-2t}} = \frac{1}{1 \times e^{-2t}} = e^{2t};$$

$$A(t) = \frac{1}{2}e^{2t}.$$

*On en déduit donc*

$$y_p(t) = \frac{1}{2}e^{2t}e^{-2t} = \frac{1}{2}.$$

**b** *Autre méthode pour la recherche de solution particulière*

*Remarquons que le second membre est une constante. Nous aurions pu deviner la forme de la solution en posant* $y_p(t) = \alpha$. *Il vient alors :* $y_p'(t) + 2y_p(t) = 1$ *;* $2\alpha = 1$ *;* $y_p(t) = \frac{1}{2}$.

**3** ***Solution générale***

*La solution générale s'écrit donc*

$$y(t) = Ae^{-2t} + \frac{1}{2},$$

*qui dépend d'une constante* $A$. *Celle ci est déterminée à l'aide la condition initiale. Si on suppose que* $y(0) = y_0 = 1$, *alors la constante* $A$ *est déterminée par l'équation :*

$$y(0) = A + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}.$$

*La solution de l'équation (2.5) avec la condition initiale* $y(0) = y_0 = 1$ *est donc*

$$y(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t}).$$

**Exemple 2.3.10.** *Résoudre l'équation* $y' + y = e^{2x}$

- *La solution de l'équation homogène est* $y_h(x) = Ce^{-x}$ *avec* $C \in \mathbb{R}$.
- *Une solution particulière est de la forme* $y_p(x) = \frac{1}{3}e^{2x}$.
- *La solution générale est donc* $y(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$.

### 2.3.3 Principe de superposition

**Proposition 2.3.1** (principe de superposition des solutions)**.**
*Soient* $a$, $b_1$ *et* $b_2$ *trois fonctions continues sur un intervalle* $I$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.
*Soient* $\lambda_1$ *et* $\lambda_2$ *deux nombres réels. On suppose que* $f_1$ *est une solution particulière sur* $I$ *de l'équation*

$$y' + ay = b_1$$

*et que* $f_2$ *est une solution particulière sur* $I$ *de l'équation*

$$y' + ay = b_2.$$

*Alors, la fonction* $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ *est une solution particulière de l'équation différentielle*

$$y' + ay = b$$

*où* $b = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

**Exemple 2.3.11.**
*Considérons par exemple l'équation différentielle* $y' - y = \cos x + x$. *La fonction* $x \mapsto \dfrac{-\cos x + \sin x}{2}$ *est solution de* $y' - y = \cos x$ *et la fonction* $x \mapsto -x - 1$ *est solution de* $y' - y = x$ *sur* $\mathbb{R}$. *Donc, une solution particulière de* $y' - y = \cos x + x$ *sur* $\mathbb{R}$ *est la fonction* $x \mapsto \dfrac{-\cos x + \sin x}{2} - x - 1$.

## 2.4 Equation différentielle linéaire du second ordre

### 2.4.1 Définitions

**Définition 2.4.1.** *Une équation différentielle linéaire du second ordre est du type :*

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x) \tag{2.7}$$

*où* $a$, $b$ *et* $c$ *sont des fonctions données avec* $a \neq 0$, *appelées coefficients de l'équation différentielle et* $f$ *une fonction donnée, appelée seoncd membre de l'équation différentielle.*

**Définition 2.4.2.** *Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est du type :*

$$(Ec) \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

*où les réels* $a$, $b$ *et* $c$ *sont donnés dans* $\mathbb{R}$ *avec* $a \neq 0$ *et* $f$ *une fonction donnée.*

**Définition 2.4.3.** *Une solution de (2.7) est une fonction $y$ de classe $C^2$ sur un intervalle $I$ vérifiant (2.7) pour tout $x \in I$.*

**Définition 2.4.4.** *La solution générale de l'EDO de (2.7) s'écrivent :*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

*où $y_h$ est solution de l'équation homogène associée et $y_p$ une solution particulière de (2.7).*

**Remarque 2.4.1.** *Soit :*

$$(E_h): \qquad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0.$$

*Contrairement aux EDO linéaires homogènes du premier ordre, on n'a pas d'expression explicite des solutions lorsque les coefficients sont non constants.*

### 2.4.2 Recherche de solutions

**Définition 2.4.5.** *Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre du type :*

$$(Ec) \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

*où les réels $a$, $b$ et $c$ sont donnés dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On appelle équation caractéristique associée à $(Ec)$ :*

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{2.8}$$

*Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.*

| Discriminant $\Delta$ de $ax^2 + bx + c$ | Racines de $ax^2 + bx + c$ | Forme des solutions de l'équation homogène |
|---|---|---|
| $\Delta > 0$ | $r_1$ et $r_2$ avec $r_1 \neq r_2$ | $y_h(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$, avec : $A, B \in \mathbb{R}$ |
| $\Delta = 0$ | $r$ | $y_h(x) = (A + Bx)e^{rx}$, avec $A, B \in \mathbb{R}$ |
| $\Delta < 0$ | $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ | $y_h(x) = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$, avec $A, B \in \mathbb{R}$ |

| Equation | Solution particulière |
|---|---|
| $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$<br>avec $a \neq 0$ | $y_p(x) = U(x)y_1(x) + V(x)y_2(x)$. $U$ et $V$ sont respectivement des primitives de $u$ et $v$ définies respectivement par<br>$u(x) = \dfrac{-\left(\dfrac{f(x)}{a}\right) y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}$<br>et $v(x) = \dfrac{\left(\dfrac{f(x)}{a}\right) y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}$.<br>• Si $\Delta > 0$ alors $y_1(x) = e^{r_1 x}$ et $y_2(x) = e^{r_2 x}$<br>• Si $\Delta = 0$ alors $y_1(x) = e^{rx}$ et $y_2(x) = xe^{rx}$<br>• Si $\Delta < 0$ alors $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ |
| $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d$<br>$a, c \in \mathbb{R}^*$ *et* $b, d \in \mathbb{R}$ | $y_p(x) = \dfrac{d}{c}$ |
| $ay'' + by' + cy = Ae^{\lambda x}$<br>$a \in \mathbb{R}^*,\ \lambda \in \mathbb{R}$ | $y_p(x) = \begin{cases} Be^{\lambda x} & si \quad \lambda \textbf{ n'est PAS } \text{solution de } (2.8) \\ Bxe^{\lambda x} & si \quad \lambda \text{ est solution } \textbf{SIMPLE} \text{ de } (2.8) \\ Bx^2e^{\lambda x} & si \quad \lambda \text{ est solution } \textbf{DOUBLE} \text{ de } (2.8) \end{cases}$ |
| $ay'' + by' + cy = P(x)$<br>$a \in \mathbb{R}^*$ *et*<br>$P$ est un polynôme | $y_p(x) = \begin{cases} Q(x) & si \quad c \neq 0 \\ xQ(x) & si \quad c = 0 \quad et \quad b \neq 0 \\ x^2Q(x) & si \quad b = c = 0 \end{cases}$<br>$Q$ est un polynôme de même degrés que $P$ |
| $ay'' + by' + cy = P(x)e^{\lambda x}$<br>$a \in \mathbb{R}^*$ *et*<br>$P$ est un polynôme | $y_p(x) = \begin{cases} Q(x)e^{\lambda x} & si \quad \lambda \textbf{ n'est PAS } \text{racine de } (2.8) \\ xQ(x)e^{\lambda x} & si \quad \lambda \text{ est solution } \textbf{SIMPLE} \text{ de } (2.8) \\ x^2Q(x)e^{\lambda x} & si \quad \lambda \text{ est solution } \textbf{DOUBLE} \text{ de } (2.8) \end{cases}$<br>$Q$ est un polynôme de même degrés que $P$ |
| $ay'' + by' + cy = f(x)$ avec<br>$f(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$<br>$a \in \mathbb{R}^*$ *et* $\alpha, \beta, \omega \in \mathbb{R}$ | $y_p(x) = c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x)$ |



### 2.4.3 Exemples

**Exemple 2.4.1.**

**1** *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - y' - 2y = 0$.*

*L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, qui s'écrit aussi $(r+1)(r-2) = 0$ $(\Delta > 0)$ $(r_1 = -1 \quad et \quad r_2 = 2)$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

**2** *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 4y' + 4y = 0$.*

*L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$, soit $(r-2)^2 = 0$ $(\Delta = 0)$ $(r = 2)$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{2x}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

**3** *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 2y' + 5y = 0$.*

*L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$. Elle admet deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = 1 + 2i$ et $r_2 = 1 - 2i$ ($\Delta < 0$). D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = e^x(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x))$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

**Exemple 2.4.2.**

- *Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = 0$ sont les fonctions de la forme*
$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x},$$
$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *(l'équation caractéristique associée est $r^2 - 4r + 3 = 0$).*
- *Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $4y'' + 4y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme*
$$x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-\frac{x}{2}},$$
$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *(l'équation caractéristique associée est $4r^2 + 4r + 1 = 0$).*
- *Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$ sont les fonctions de la forme*
$$x \mapsto e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x),$$
$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *(l'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 2 = 0$ et a pour solutions $1 + i$ et $1 - i$).*
- *Soit $\omega$ un réel strictement positif. Les solutions reelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions de la forme*
$$x \mapsto \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x),$$
$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *(l'équation caractéristique associée est $r^2 + \omega^2 = 0$ et a pour solutions $i\omega$ et $-i\omega$).*

**Exemple 2.4.3.**
*Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système :*
$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 10 \sin x & (E) \\ y(0) = 0 \quad et \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

- *Equation homogène : $(E_h)$ :* $\qquad y'' + y' - 2y = 0.$
*Donc l'équation caractéristique associée à $(E_h)$ est $r^2 + r - 2 = 0$.*
$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9,$$
$$r_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{-1 - 3}{2} = \frac{-4}{2} = -2, \qquad r_2 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$
*L'équation homogène associée $(E_h)$ a pour solution $y_h(x) = \lambda e^x + \mu e^{-2x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

- *Solution particulière :*
  *Pour trouver une solution particulière à* $(E)$*, comme les dérivées des fonctions sinus et cosinus se répondent, on prendra comme forme de la solution particulière :* $y_p(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$.
  *On dérive* $y_p$ *deux fois :* $y'(x) = -\alpha\sin x + \beta\cos x$ *et* $y''(x) = -\alpha\cos x - \beta\sin x$.
  *On remplace dans l'équation* $(E)$ *:* $-\alpha\cos x - \beta\sin x - \alpha\sin x + \beta\cos x - 2\alpha\cos x - 2\beta\sin x = 10\sin x \Leftrightarrow (-3\alpha+\beta)\cos x + (-\alpha-3\beta)\sin x = \sin x$.
  *en identifiant on obtient :*
  $$\begin{cases} -3\alpha+\beta &= 0 \\ -\alpha-3\beta &= 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= -1 \\ \beta &= -3 \end{cases}$$
  *Une solution particulière est :* $y_p = -\cos x - 3\sin x$.
- *Solution générale :*
  *On obtient les solutions de l'équation (E) :* $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-2x} - \cos x - 3\sin x$. *De la condition initiale, on obtient :*
  $$\begin{cases} \lambda e^0 + \mu e^{-2(0)} - \cos 0 - 3\sin 0 &= 0 \\ \lambda e^0 - 2\mu e^{-2(0)} + \sin 0 - 3\cos 0 &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu &= 1 \\ \lambda - 2\mu &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= -1 \\ \mu &= 2 \end{cases}$$
  *La solution du système est :* $y(x) = -e^x + 2e^{-2x} - \cos x - 3\sin x$.

**Exemple 2.4.4.**
*Résoudre l' équation différentielle :*

$$(E_1)\ y'' - 5y' + 6y = 4xe^x.$$

*Trouver la solution de* $(E_1)$ *vérifiant* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 0$.

- ***Équation homogène*** $(E_0)$.
  $(E_0)\ y'' - 5y' + 6y = 0$. *L'équation caractéristique est* $r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3) = 0$, *avec deux racines distinctes* $r_1 = 2, r_2 = 3$. *Donc l'ensemble des solutions de* $(E_0)$ *est* $\{\eta e^{2x} + \mu e^{3x} \mid \eta, \mu \in \mathbb{R}\}$.
- ***solution particulière***
  *On cherche une solution particulière de* $(E_1)$ *sous la forme* $y_0(x) = (ax+b)e^x$. *Lorsque l'on injecte* $y_0$ *dans l'équation* $(E_1)$*, on obtient :*
  $$\begin{aligned} & (ax+2a+b)e^x - 5(ax+a+b)e^x + 6(ax+b)e^x = 4xe^x \\ \Longleftrightarrow\ & (a-5a+6a)x + 2a + b - 5(a+b) + 6b = 4x \\ \Longleftrightarrow\ & 2a = 4 \ \ et \ \ -3a + 2b = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & a = 2 \ \ et \ \ b = 3 \end{aligned}$$
  *Donc* $y_0(x) = (2x+3)e^x$.
- *L'ensemble des solutions de* $(E_1)$ *est*
  $$\{(2x+3)e^x + \eta e^{2x} + \mu e^{3x} \mid \eta, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

- *On a* $y(x) = (2x+3)e^x + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$. *On cherche* $\lambda$, $\mu$ *tels que* $y(0) = 1, y'(0) = 0$. *C'est-à-dire que* $3 + \eta + \mu = 1$, $5 + 2\eta + 3\mu = 0$. *Donc* $\eta = -1, \mu = -1$, *c'est-à-dire que* $y(x) = (2x+3)e^x - e^{2x} - e^{3x}$.

**Exemple 2.4.5.**
*Résoudre les équations différentielles :*

$$(E_2)\; y'' - 5y' + 6y = 4xe^{2x}$$

***Équation*** $(E_2)$.

- ***Équation homogène*** $(E_0)$.
  $(E_0)\; y'' - 5y' + 6y = 0$. *L'équation caractéristique est* $r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3) = 0$, *avec deux racines distinctes* $r_1 = 2, r_2 = 3$. *Donc l'ensemble des solutions de* $(E_0)$ *est* $\left\{\eta e^{2x} + \mu e^{3x} \mid \eta, \mu \in \mathbb{R}\right\}$.
- ***solution particulière***
  *Comme* $\lambda = 2 = r_1 \neq r_2$, *on cherche une solution particulière de* $(E_2)$ *sous la forme* $y_0(x) = x(ax+b)e^{2x} = (ax^2+bx)e^{2x}$. *Lorsque l'on injecte* $y_0$ *dans l'équation* $(E_1)$, *on obtient :*

$$\begin{aligned}
&2e^{2x}\left(a + 2b + 2ax^2 + 4ax + 2bx\right) - 5e^{2x}\left(b + 2ax^2 + 2ax + 2bx\right) + 6(ax^2+bx)e^{2x} = 4xe^{2x}\\
&\Longleftrightarrow\ -e^{2x}\left(b - 2a + 2ax\right) = 4xe^{2x}\\
&\Longleftrightarrow\ -2ax + 2a - b = 4x\\
&\Longleftrightarrow\ -2a = 4 \;\text{ et }\; 2a - b = 0\\
&\Longleftrightarrow\ a = -2 \;\text{ et }\; b = -4
\end{aligned}$$

  *Donc* $y_0(x) = x(-2x-4)e^{2x} = y_0(x) = (-2x^2 - 4x)e^{2x}$.
- *L'ensemble des solutions de* $(E_2)$ *est*

$$\left\{(-2x^2 - 4x)e^{2x} + \eta e^{2x} + \mu e^{3x} \mid \eta, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

**Exemple 2.4.6.**
*Résolvons l'équation différentielle* $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = x + 1$ *pour* $x \in \mathbb{R}$.
*Solution de l'équation homogène :*$v(x) = C_1e^{3x} + C_2e^x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
*Solution particulière : on cherche donc une solution sous la forme* $v_0(x) = ax + b$,
*cela donne* $v_0(x) = \frac{x}{3} + \frac{7}{9}$.
*Solution gènérale :*$y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^x + \frac{x}{3} + \frac{7}{9}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

**Exemple 2.4.7.**
*Soit l'équation différentielle suivante :*

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = t \tag{2.9}$$

*Le polynôme caractéristique associée est* $r^2 + 3r + 2$, *dont les racines sont* $r = -1$ *;* $r = -2$. *La solution de l'équation sans second membre est donc :*

$$y_h(t) = A_1e^{-t} + A_2e^{-2t}.$$

*Nous recherchons une solution particulière de la forme :*

$$y_p(t) = A_1(t)e^{-t} + A_2(t)e^{-2t}$$

*On a* $y_1(t) = e^{-t}$ *et* $y_2(t) = e^{-2t}$. *Par suite,* $y_1'(t) = -e^{-t}$ *et* $y_2(t) = -2e^{-2t}$. *On a alors*

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^{-t}(-2e^{-2t}) - e^{-2t}(-e^{-t}) = -e^{-3t}.$$

*On a :*

$$\begin{cases} A_2'(t) = \dfrac{\dfrac{t}{1}e^{-t}}{-e^{-3t}} = -te^{2t} \quad \Rightarrow \quad A_2(t) = -\dfrac{1}{2}te^{2t} + \dfrac{1}{4}(e^{2t}-1) + C_2; \\ A_1'(t) = \dfrac{-\dfrac{t}{1}e^{-2t}}{-e^{-3t}} = te^{t} \quad \Rightarrow \quad A_1(t) = te^t - e^t + 1 + C_1, \end{cases}$$

*où* $C_1$ *et* $C_2$ *sont des constantes, respectivement les valeurs des fonctions* $t \mapsto A_1(t)$ *et* $t \mapsto A_2(t)$ *en zéro. En choisissant finalement* $C_1 = -1$ *et* $C_2 = \dfrac{1}{4}$, *on obtient alors*

$$y_p(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}.$$

# Chapitre 3

# DEVELOPPEMENTS LIMITES (DL)

## 3.1 Formules de Taylor

**Théorème 3.1.1 (Formule de Taylor avec reste intégral).** *Soit $f$ de classe $C^{n+1}$ sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. Alors $\forall x \in I$,*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + ... + \\ & \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt. \end{aligned}$$

**Théorème 3.1.2 (Formule de Taylor-Young).** *Soit $f$ de classe $C^n$ sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. Alors $\forall x \in I$,*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + ... + \\ & \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x), \end{aligned}$$

*où* $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

**Théorème 3.1.3 (Formule de Taylor-Lagrange).** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) et soit $a, x \in I$. Il existe un réel $c$ entre $a$ et $x$ tel que :*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots$$
$$\cdots + \tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}.$$

**Corollaire 3.1.1 (Formule de Taylor-Mac Laurin).**
*Soit $f$ de classe $C^{n+1}$ sur un intervalle $[0; x]$ de $\mathbb{R}$. Alors il existe $\theta \in ]0; 1[$ tel que :*

$$\begin{aligned} f(\mathrm{x}) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \\ & \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{(x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \end{aligned}$$

## 3.2 Définitions

**Définition 3.2.1.** *Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $I$ et un point $x_0 \in I$. On dit que la fonction $f$ admet un développement limité ou DL à l'ordre $n$ en $x_0$ s'il existe un polynôme.*

$$F(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n$$

*de degré $\leq n$ et une fonction $h : I \to \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall x \in I;\ f(x) = F(x) + (x - x_0)^n h(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to x_0} h(x) = 0.$$

*Le polynôme $F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$ est la partie régulière ou partie principale du DL tandis que $(x - x_0)^n h(x)$ noté encore $o((x - x_0)^n)$ est le reste du DL.*

**Définition 3.2.2.** *On dit qu'une fonction réelle $f$ admet au voisinage de 0 un $DL$ d'ordre $n$ s'il existe des constantes $a_0$, $a_1$, $\cdots$, $a_n$ telles que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n h(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to 0} h(x) = 0.$$

*Le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est la partie régulière du DL tandis que $x^n h(x)$ noté encore $o(x^n)$ est le reste du DL.*

**Définition 3.2.3.** *On dit qu'une fonction $f$ admet un développement limité à droite (respectivement à gauche) à l'ordre $n$ au voisinage de $x_0$ si la restriction de $f$ à $D_f \cap [x_0, +\infty[$ (respectivement à $D_f \cap ] - \infty, x_0])$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $x_0$.*

**Proposition 3.2.1.** *Si Df est tel que :*

$$\exists h > 0 : \quad [x_0 - h, x_0 + h] \backslash \{x_0\} \subset D_f,$$

*il est équivalent de dire :*

*(i) la fonction $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $x_0$,*

*(ii) la fonction $f$ admet des développements limités à droite et à gauche à l'ordre $n$ en $x_0$ et les coefficients de ces derniers développements limités sont égaux.*

**Définition 3.2.4.** *La fonction $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$) si la fonction $g : h \mapsto g(h) = f\left(\frac{1}{h}\right)$ possède un développement limité à l'ordre $n$ en 0 à droite (respectivement à gauche), c'est-à-dire s'il existe une $(n + 1)-$listes de réels $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ telle que l'on ait, au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$) :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

**Remarque 3.2.1.** *Par un changement de variable $h = x - x_0$ si $x_0 \in \mathbb{R}$, ou $h = \frac{1}{x}$ si $x_0 = \pm\infty$, on peut toujours se ramener au cas où $x_0 = 0$. Dorénavant, nous parlerons plus de DL en 0.*

## 3.3 Propriétés

**Propriété 3.3.1.** *Toute fonction continue en 0 et admettant un DL d'ordre 1 au voisinage de 0 est dérivable en 0.*

**Propriété 3.3.2.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $f^{(n)}$ existe et est continue, dans $I$, alors $f$ admet le DL d'ordre $n$ suivant :*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(x^n).$$

**Propriété 3.3.3.** *Si $f$ admet un DL d'ordre $n$, au voisinage de 0, alors ce DL est unique.*

**Propriété 3.3.4.** *Soit $f$ une fonction admettant pour DL au voisinage de 0*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n h(x)$$

1. *Si $f$ est paire, alors $a_k = 0$, pour tout $k$ impair.*
2. *Si $f$ est impaire, alors $a_k = 0$, pour tout $k$ pair.*

**Propriété 3.3.5.** *Si $f$ admet un DL d'ordre $n$, au voisinage de 0, alors $f$ admet au voisinage de 0 un DL d'ordre $p$ $(p \leq n)$.*

## 3.4 Quelques DLs usuels (au voisinage de 0).

$$\begin{array}{rcl}
e^x & = & 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x & = & x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x & = & 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\operatorname{sh} x & = & x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\operatorname{ch} x & = & 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\ln(1+x) & = & x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\ln(1-x) &= -(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+...+\frac{x^n}{n})+o(x^n)\\
\arctan x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})\\
\arcsin x &= x+\frac{x^3}{6}+...+\frac{1.3...(2n-1)}{n!2^n(2n+1)}x^{2n+1}+o(x^{2n+2})\\
\arccos x &= \frac{\pi}{2}-\arcsin x\\
&= \frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{6}-...-\frac{1.3...(2n-1)}{n!2^n(2n+1)}x^{2n+1}+o(x^{2n+2})
\end{aligned}$$

Pour $x\in]-1;+\infty[$ et $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+...+ \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

En particulier : Pour $\alpha=\frac{1}{2}$,

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+...+\frac{(-1)^{n-1}1.3....(2n-3)}{2.4.6.....2n}x^n+o(x^n)$$

Pour $\alpha=-\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+...+\frac{(-1)^n1.3....(2n-1)}{2.4.6.....2n}x^n+o(x^n)$$

Pour $\alpha=-1$,

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+...+(-1)^nx^n+o(x^n)$$

et

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+o(x^n).$$

## 3.5 DL des fonctions en un point quelconque

La fonction $f$ admet un DL au voisinage d'un point $a$ si et seulement si la fonction $x\mapsto f(x+a)$ admet un DL au voisinage de 0. Souvent on ramène donc le problème en 0 en faisant le changement de variables $h=x-a$.

**Exemple 3.5.1.** *DL de $f(x)=\exp x$ en 1.*

*On pose $h=x-1$. Si $x$ est proche de 1 alors $h$ est proche de 0. Nous allons nous ramener à un DL en 0 de $\exp h$ en $h=0$. On note $e=\exp 1$.*

$$\begin{aligned}
\exp x &= \exp(1+(x-1))=\exp(1)\exp(x-1)=e\exp h\\
&= e\left(1+h+\frac{h^2}{2!}+\cdots+\frac{h^n}{n!}+h^n\epsilon(h)\right)\\
&= e\left(1+(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{n!}+(x-1)^n\epsilon(x-1)\right)
\end{aligned}$$

*où* $\lim_{x\to1}\epsilon(x-1)=0$.

**Exemple 3.5.2.** *DL de $g(x) = \sin x$ en $\pi/2$.*

*Sachant $\sin x = \sin(\frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{2}) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ on se ramène au DL en 0 de $\cos h$ quand $h = x - \frac{\pi}{2} \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$. On a donc*

$$\sin x = 1 - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{(x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!} + (x - \frac{\pi}{2})^{2n+1} \epsilon(x - \frac{\pi}{2}),$$

*où $\lim\limits_{x \to \pi/2} \epsilon(x - \frac{\pi}{2}) = 0$.*

**Exemple 3.5.3.** *DL de $\ell(x) = \ln(1+3x)$ en 1 à l'ordre 3.*

*Il faut se ramener à un DL en p du type $\ln(1+h)$ en $h = 0$. On pose $h = x - 1$ (et donc $x = 1 + h$). On a*

$$\begin{aligned}
\ell(x) &= \ln(1+3x) = \ln\left(1 + 3(1+h)\right) = \ln(4+3h) = \ln\left(4 \cdot (1 + \frac{3h}{4})\right) \\
&= \ln 4 + \ln\left(1 + \frac{3h}{4}\right) = \ln 4 + \frac{3h}{4} - \frac{1}{2}(\frac{3h}{4})^2 + \frac{1}{3}(\frac{3h}{4})^3 + h^3 \epsilon(h) \\
&= \ln 4 + \frac{3(x-1)}{4} - \frac{9}{32}(x-1)^2 + \frac{9}{64}(x-1)^3 + (x-1)^3 \epsilon(x-1)
\end{aligned}$$

*où $\lim\limits_{x \to 1} \epsilon(x-1) = 0$.*

## 3.6 Développement limité au voisinage de l'infini

Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$. On pose :

$$\Delta = \left\{ \frac{1}{x} | \quad x \in Df \cap \mathbb{R}^* \right\}$$

et on note $g$ la fonction définie sur $\Delta$ par $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$.
On dit que $f$ admet un développement limité à l'infini si g possède un développement limité en 0. Elle est alors définie au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$ (ou au voisinage des deux) et y admet un développement limité.

**Exemple 3.6.1.** *Développement limité à l'ordre 2 au voisinage de l'infini de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x}{x-1}$ Si pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $u = \frac{1}{x}$, on a :*

$$f(x) = \frac{\frac{1}{u}}{\frac{1}{u} - 1} = \frac{1}{1-u}.$$

*La fonction $u \mapsto \frac{1}{1-u}$ a pour développement limité à l'ordre 2 en 0*

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2)$$

*ce qui, en revenant à la variable x, donne :*

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}).$$

## 3.7 Opérations sur les DL

### 3.7.1 Combinaison linéaire de DL

**Théorème 3.7.1.** *Soit $I$ une partie de $\mathbb{R}$. Soient deux fonctions $f$ et $g$ de $I$ dans $\mathbb{R}$ qui admettent des DL d'ordre $n$ au voisinage de 0, de parties régulières respectives $F(x)$ et $G(x)$. Soient deux scalaires $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$.*
*Alors la fonction*

$$\lambda f + \mu g$$

*admet un DL d'ordre n au voisinage de 0, de partie régulière*

$$\lambda F(x) + \mu G(x).$$

**Exemple 3.7.1.** *Trouver un developpement limité de $x \mapsto e^x - \ln(1+x)$ à l'ordre 3 en 0. On a*

$$e^x = 1 + x + (1/2)x^2 + (1/6)x^3 + o(x^3)$$

*et*

$$\ln(1+x) = x - (1/2)x^2 + (1/3)x^3 + o(x^3).$$

*Donc*

$$\begin{aligned} e^x - \ln(1+x) &= (1 + x + (1/2)x^2 + (1/6)x^3) - \\ &\quad (x - (1/2)x^2 + (1/3)x^3) + o(x^3) \\ &= 1 + x^2 - (1/6)x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

**Exemple 3.7.2.** *Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{1-x} - e^x$. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto e^x$ admettent pour développements limités à l'ordre 3 en 0 :*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

*ce qui donne le développement limité de $f$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :*

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^3).$$

**Exemple 3.7.3.** *A partir des développement limités à l'ordre 5 en 0 de $e^x$ et de $e^{-x}$, déterminer le développement limité à l'ordre 5 en $ch(x)$ et celui de $sh(x)$.*

### 3.7.2 Produit

**Théorème 3.7.2.** *Soient $I$ une partie de $\mathbb{R}$, ainsi que $f$ et $g$ deux applications de $I$ dans $\mathbb{R}$ admettant en 0 des développements limités à l'ordre n, alors $fg$ admet un DL d'ordre $n$ au voisinage de 0 dont la partie régulière s'obtient en prenant dans le produit des parties régulières de $f$ et $g$ les monômes de degré inférieur ou égal à $n$.*

**Exemple 3.7.4.** *Trouver un developpement limité de* $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1-x}$ *à l'ordre 4 en 0. On a*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

*et*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4).$$

$$(x - \frac{x^3}{6})(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 x + \frac{5}{6}x^4 + \frac{5}{6}x^5 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{6}x^7$$

*Donc*

$$\frac{\sin(x)}{1-x} = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$$

**Exemple 3.7.5.** *Montrer que Le DL d'ordre 3 de* $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$*, au voisinage de 0 est*

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}} = 1 + (1/2)x + (3/8)x^2 - (1/48)x^3 + o(x^3).$$

**Exemple 3.7.6.**

$$\begin{aligned}
\cos x \times \sqrt{1+x} &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + o(x^2) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

**Remarque 3.7.1.** *Le théorème 3.7.2 permet de calculer les développement limités des puissances des fonctions*

**Exemple 3.7.7.** *Au voisinage de 0, on a*

$$\cos^3 x = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 + o\left(x^4\right)\right)^3 = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o\left(x^4\right)$$

$$\sin^3 x = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^4\right)\right)^3 = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^6)$$

### 3.7.3 Composée

**Théorème 3.7.3.** *Si $f$ et $g$ admettent des DL d'ordre $n$ au voisinage de 0, de parties régulières respectives $F(x)$ et $G(x)$, et si $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, alors la fonction $gof$ admet un DL d'ordre $n$ au voisinage de 0 de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur à $n$ dans le polynôme $(GoF)(x)$.*

**Exemple 3.7.8.** *Cherchons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de* $h(x) = \dfrac{1}{1-\sin x}$. *Posons* $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ *et* $f(x) = \sin(x)$ *de sorte que* $h(x) = g(f(x))$. *On a* $\sin 0 = 0$. *De plus,*
$g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $f(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
*et* $G(x) = 1 + x + x^2 + x^3$, $\quad F(x) = x - \frac{x^3}{6}$ .

$$\begin{aligned}(GoF)(x) &= 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + (x - \frac{x^3}{6})^2 + (x - \frac{x^3}{6})^3 \\ &= -\frac{1}{216}x^9 + \frac{1}{12}x^7 + \frac{1}{36}x^6 - \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + x^2 + x + 1.\end{aligned}$$

*Par suite,*

$$\frac{1}{1-\sin x} = 1 + x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + o(x^3).$$

**Exemple 3.7.9.** *Calcul du DL de* $h(x) = \sin\big(\ln(1+x)\big)$ *en* $0$ *à l'ordre* $3$.

- *On pose ici* $f(u) = \sin u$ *et* $g(x) = \ln(1+x)$ *(pour plus de clarté il est préférable de donner des noms différents aux variables des deux fonctions, ici* $x$ *et* $u$*). On a bien* $(f \circ g)(x) = \sin\big(\ln(1+x)\big)$ *et* $g(0) = 0$.
- *On écrit le DL à l'ordre 3 de* $f(u) = \sin u = u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u)$ *pour* $u$ *proche de* $0$.
- *Et on pose* $u = g(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)$ *pour* $x$ *proche de* $0$.
- *On aura besoin de calculer un DL à l'ordre 3 de* $u^2$ *(qui est bien sûr le produit* $u \times u$*) :* $u^2 = \big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)\big)^2 = x^2 - x^3 + x^3\epsilon_3(x)$ *et aussi* $u^3$ *qui est* $u \times u^2$, $u^3 = x^3 + x^3\epsilon_4(x)$.
- *Donc* $h(x) = (f\circ g)(x) = f(u) = u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u) = \big(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\big) - \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x)$.

**Exemple 3.7.10.** *Soit* $h(x) = \sqrt{\cos x}$. *On cherche le DL de* $h$ *en* $0$ *à l'ordre* $4$.

*On utilise cette fois la notation « petit o ». On connaît le DL de* $f(u) = \sqrt{1+u}$ *en* $u = 0$ *à l'ordre 2 :* $f(u) = \sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$.

*Et si on pose* $u(x) = \cos x - 1$ *alors on a* $h(x) = f\big(u(x)\big)$ *et* $u(0) = 0$. *D'autre part le DL de* $u(x)$ *en* $x = 0$ *à l'ordre* $4$ *est :* $u = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$. *On trouve alors* $u^2 = \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$.

*Et ainsi*

$$\begin{aligned}h(x) = f\big(u\big) &= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\big(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\big) - \frac{1}{8}\big(\frac{1}{4}x^4\big) + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{32}x^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

### 3.7.4 Quotient

**Théorème 3.7.4.** *Soit une fonction* $u$ *telle que* $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$. *Si* $u$ *admet un développement limité à l'ordre* $n$ *au voisinage de 0 de partie régulière un polynôme P.*

*Alors la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{1-u(x)}$ *admet un développement limité à l'ordre* $n$ *au voisinage de 0 de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur à* $n$ *dans le polynôme* $1+P+P^2+...+P^n$.

**Théorème 3.7.5.** *Soit* $I$ *une partie de* $\mathbb{R}$ *ainsi que* $f$ *et* $g$ *deux applications de* $I$ *dans* $\mathbb{R}$ *admettant des développements limités à l'ordre* $n$ *en* $0$. *Si* $g$ *a une limite non nulle en* $0$, *alors la fonction* $f/g$ *admet un développement limité à l'ordre* $n$ *en* $0$.

**Remarque 3.7.2.** *Une méthode de calcul du DL d'un quotient* $f/g$. *Soient*

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + x^n\epsilon_1(x) \qquad g(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n + x^n\epsilon_2(x)$$

*Nous allons utiliser le DL de* $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$.

**1** *Si* $d_0 = 1$ *on pose* $u = d_1x + \cdots + d_nx^n + x^n\epsilon_2(x)$ *et le quotient s'écrit* $f/g = f \times \frac{1}{1+u}$.

**2** *Si* $d_0$ *est quelconque avec* $d_0 \neq 0$ *alors on se ramène au cas précédent en écrivant*

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_0}\frac{1}{1 + \frac{d_1}{d_0}x + \cdots + \frac{d_n}{d_0}x^n + \frac{x^n\epsilon_2(x)}{d_0}}.$$

**3** *Si* $d_0 = 0$ *alors on factorise par* $x^k$ *(pour un certain* $k$*) afin de se ramener aux cas précédents.*

**Remarque 3.7.3.** *Si* $f$ *et* $g$ *admettent des DL d'ordre* $n$ *au voisinage de 0, alors* $f/g$ *admet un DL d'ordre* $n$ *au voisinage de 0 dont la partie régulière est le quotient de degré* $n$ *de la division d'ordre* $n$ *suivant les puissances croissantes de la partie régulière de* $f$ *par la partie régulière de* $g$.

**Exemple 3.7.11.** *Calculer le DL d'ordre 5 de* $\tan x$ *au voisinage de 0.*
***1) Méthode 1 :***

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o\left(x^5\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^5 + o\left(x^4\right)\right)^{-1} \\
&= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o\left(x^5\right)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4)^2 + o\left(x^5\right)\right) \\
&= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o\left(x^5\right)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o\left(x^5\right)\right) \\
&= x + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

***2) Méthode 2 :*** *Effectuons la division suivant les puissances croissantes sans écrire les termes* *de degré supérieur à 6.*

$$
\begin{array}{ccccc|c}
 & x & - & \frac{1}{6}x^3 & + \ \frac{1}{120}x^5 & 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4 \\ \cline{6-6}
-( & x & - & \frac{x^3}{2} & + \ \frac{x^5}{24}) & x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5 \\ \cline{1-5}
 & & & \frac{1}{3}x^3 & - \ \frac{1}{30}x^5 & \\
 & & - & (\frac{1}{3}x^3 & - \ \frac{1}{6}x^5) & \\ \cline{3-5}
 & & & & \frac{2}{15}x^5 &
\end{array}
$$

*On a donc* $\tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x} = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right)$.

**Remarque 3.7.4.** *L'hypothèse $g$ a une limite non nulle en $0$ dans le théorème 3.7.5 n'est pas indispensable, il suffit de supposer que la fonctiion $\dfrac{f}{g}$ possède une limite quand x tend vers 0.*

**Exemple 3.7.12.** *Si l'on souhaite calculer le DL de* $\dfrac{\sin x}{\operatorname{sh} x}$ *en* $0$ *à l'ordre* $4$ *alors on écrit*

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} = \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)}{x\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)} \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right) \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)} \\
&= 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{18} + o(x^4)
\end{aligned}
$$

## 3.7.5 Dérivation

**Théorème 3.7.6.** *Si $f$ admet un DL d'ordre $n$ au voisinage de 0, et si $f$ est indéfiniment dérivable au voisinage de 0, alors $f'$ admet un DL d'ordre $(n-1)$ obtenu (à l'exception du terme constant) en dérivant terme à terme le DL d'ordre $n$ de $f$.*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_n x^n + o(x^n)$$

*Alors*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \ldots + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

**Exemple 3.7.13.** *Au voisinage de 0, on a*

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^n\right) \qquad \textit{donc} \\
\cos x &= \sin'(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^n\right)
\end{aligned}
$$

### 3.7.6 Primitivation

**Théorème 3.7.7.** *Soit un intervalle $I$ contenant 0 et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $I$. On suppose que la fonction $f'$ admet un DL d'ordre $n$ au voisinage de 0 de la forme*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$$

*Alors f admet un DL d'ordre $n+1$ au voisinage de 0 obtenu en primitivant la partie régulière et en ajoutant f(0) :*

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + ... + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

**Exemple 3.7.14.** *Calcul du DL de $\arctan x$ au voisinage de 0.*

*On sait que $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$. En posant $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $f(x) = \arctan x$, on écrit*

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + x^{2n}\epsilon(x).$$

*Et comme $\arctan(0) = 0$ alors $\arctan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + x^{2n+1}\epsilon(x)$.*

**Exemple 3.7.15.** *Calcul du DL de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0.*

*Soit $f(x) = \ln(1+x)$. On a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$. On écrit*

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

*Par suite, $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$.*

## 3.8 Développements limités généralisés

**Définition 3.8.1.** *Soit $f$ une fonction réelle définie au voisinage de 0. Etant donné $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que $f$ admet un développement limité généralisé à l'ordre $n+p$ en 0 lorsque la fonction $x \mapsto x^p f(x)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. Il existe dans ce cas un polynôme $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ tel que $x^p f(x) = P(x) + o(x^n)$.*
*On peut donc écrire $f(x) = \dfrac{1}{x^p}\Big(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)\Big)$*

**Remarque 3.8.1.** *Certaines fonctions n'admettent pas de développement limité généralisé. C'est le cas de $\ln x$ en 0 ou en $+\infty$, $|x|$ en 0, $e^x$ en $+\infty$.*

**Exemple 3.8.1.** *Déterminer le développement limité généralisé à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{\tan x}$.*
*En formant*

$$x\frac{1}{\tan x} = \frac{x\cos x}{\sin x},$$

*nous pouvons utiliser les développements limités à l'ordre 4 en 0 de $x\cos x$ et $\sin x$.*

$$\begin{aligned} x\frac{1}{\tan x} = \frac{x\cos x}{\sin x} &= \frac{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)}{1-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}+o(x^4)} \\ &= 1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{45}+o(x^4). \end{aligned}$$

*Donc*

$$\frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+o(x^3).$$

## 3.9 Utilisations des DL

### 3.9.1 Recherche d'équivalents

Quand une fonction $f$ admet en $x_0$ un développement limité d'ordre $n$ dont la partie régulière est :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k(x-x_0)^k \quad avec \quad a_p \neq 0.$$

alors :

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} a_p(x-x_0)^P.$$

**Exemple 3.9.1.** *Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = x(1+\cos x) - 2\tan x.$$

*L'utilisation directe des équivalents :*

$$x(l+cosx) \underset{0}{\sim} 2x \qquad et \qquad 2\tan x \underset{0}{\sim} 2x$$

*ne permettant pas de conclure, le recours à un développement limité s'impose. On constate que $f$ est impaire et que le coefficient de $x$ dans le développement limité de $f$ est nul, ce qui oblige à chercher un développement limité à un ordre au moins égal à 3.*
*On a :*

$$x(1+\cos x) = x\Big(2-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\Big) = 2x-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$$

$$-2\tan x = -2x-\frac{2}{3}x^3+o(x^3).$$

*ce qui donne $f(x) = -\dfrac{7}{6}x^3+o(x^3)$, et donc :*

$$f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{7}{6}x^3.$$

### 3.9.2 Calcul de limites

**Théorème 3.9.1.** *Limite Soit un intervalle $I$ contenant 0 et une fonction $f : I\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$. Supposons que $f$ admet un DL d'ordre $n$ au voisinage de 0 avec $n \geq 0$.*
*Soit*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

*sa partie régulière. Alors*

1. *$f$ admet $a_0$ pour limite en 0 ;*
2. *La fonction $f$ est prolongeable par continuité en 0.*

**Exemple 3.9.2.** *Cherchons $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{e^x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{e^x}{\sin^2 x}) = +\infty$, cette fonction n'admet pas de développement limité au voisinage de 0.*
*On remarque que l'on a $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x^2 e^x}{\sin^2 x}) = 1$. Le développement limité au voisinage de 0 de $\frac{x^2e^x}{\sin^2 x}$ donne*

$$\begin{aligned}\frac{x^2 e^x}{\sin^2 x} &= \frac{x^2(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))^2} = \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{(1-\frac{x^2}{6}+o(x^3))^2} \\ &= 1 + x + \frac{5x^2}{6} + o(x^2)\end{aligned}$$

*On a donc $\frac{e^x}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{5}{6} + o(1)$ et la limite cherchée est $\frac{5}{6}$.*

### 3.9.3 Etude de Dérivabilité

**Théorème 3.9.2.** *Dérivabilité Soit un intervalle $I$ contenant 0 et une fonction $f : I\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$. Supposons que $f$ admet un DL d'ordre $n$ au voisinage de 0 avec $n \geq 1$.*
*Soit*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

*sa partie régulière et $g$ le prolongement par continuité de $f$ en 0. Alors $g$ est dérivable en 0 et $g'(0) = a_1$.*

**Exemple 3.9.3.** *Montrer que la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction dérivable en 0.*
*Le DL d'ordre 3 au voisinage de 0 de $f$ est*

$$f(x) = 1 - (1/6)x^2 + o(x^3).$$

*La fonction $f$ est prolongeable par continuité en 0. $g$ le prolongement par continuité de $f$ en 0 est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.*

**Remarque 3.9.1.** *Le théorème précédent ne se généralise pas aux dérivées d'ordre supérieurs comme le montre l'exemple suivant.*

**Exemple 3.9.4.** *Soit $f : x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$. $f$ admet en 0 un DL d'ordre 2. sa partie régulière d'ordre 2 est le polynôme nul.*
*$f$ admet donc un prolongement par continuité en 0 que nous notons $g$. On a $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$.*

$$\forall x \neq 0, \quad g'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}.$$

*Ainsi $g'$ admet un DL d'ordre 0 au voisinage de 0 de partie régulière 0 à l'ordre 0.*
*Mais*

$$\frac{g'(x) - g'(0)}{x} = 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

*n'admet pas de limite en 0. Il s'en suit que $g$ admet un DL à ordre 2 en 0 mais qu'elle n'admet pas de dérivée d'ordre 2 en 0.*

### 3.9.4 Étude des branches infinies

On se place dans le cas où $f$ est définie au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.

**Règle 3.9.1** (Asymtote oblique ou horizontale)**.** *Si $f(x) = ax + b + \frac{a_p}{x^p} + o(\frac{1}{x^p})$, avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_p \neq 0$, la droite $\Delta$ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $(Cf)$ en $+\infty$ ou $-\infty$.*

- *En $+\infty$, $(Cf)$ est au dessus de $\Delta$ lorsque $a_p > 0$, et en dessous lorsque $a_p < 0$.*
- *En $-\infty$, $(Cf)$ est au dessus ou en dessous de $\Delta$ selon que $\frac{a_p}{x^p}$ est positif ou négatif; cela dépend du signe de $a_p$ et de la parité de $p$.*
- *Si $f(x) = b + \frac{a_p}{x^p} + o(\frac{1}{x^p}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_p \neq 0$, la droite $\Delta$' d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à $(Cf)$ en $+\infty$ ou $-\infty$.*

**Règle 3.9.2.** *Si*

$$f(x) = g(x) + \frac{a_p}{x^p} + o(\frac{1}{x^p}),$$

*avec $p \in \mathbb{N}^*$, $a_p \neq 0$ et $g$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, alors $(Cg)$ est asymptote à $(Cf)$ en $+\infty$ ou $-\infty$.*

**Exemple 3.9.5.** *Etudier les branches infinies de la courbe représentative de $f(x) = x^2 e^{x/(x^2-1)}$.*
*Posons $x = \frac{1}{u}$. On a*

$$f(x) = f(\frac{1}{u}) = (\frac{1}{u})^2 e^{\frac{(\frac{1}{u})}{(\frac{1}{u})^2 - 1}}$$

*Le développement limité à l'ordre 3 de $u^2 f(\frac{1}{u})$ au voisinage de 0 donne*

$$u^2 f(\frac{1}{u}) = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{7}{6}u^3 + o(u^3).$$

*Par suite au voisinage de 0 on a*

$$f(\frac{1}{u}) = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + \frac{1}{2} + \frac{7}{6}u + o(u).$$

*Ce qui donne*

$$f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2} + \frac{7}{6}\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$$

*au voisinage de $\pm\infty$. Soit $g(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$. $(Cg)$ est asymptote à $(Cf)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.*

### 3.9.5 Position locale par rapport à la tangente

**Théorème 3.9.3.** *Si une fonction $f$ admet un DL en $x_0$ de la forme*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k), \quad a_k \neq 0.$$

*Alors*

**1** *l'équation de la tangente en $x_0$ est $Y = a_0 + a_1(X - x_0)$ ;*

**2** *$f(x) - [a_0 + a_1(x - x_0)] = a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$, et en fonction du signe de $a_k$ et de la parité de $k$, on en déduit la position locale de la courbe par rapport à sa tangente.*

**Exemple 3.9.6.** *Soit $f(x) = \ln(\tan x)$. Déterminer une équation de la tangente $T$ à $(Cf)$ en $\frac{\pi}{4}$ et donner les positions relatives de $T$ et $(Cf)$.*
*Posons $x = \frac{\pi}{4} + h$. Nous avons*

$$\tan(x) = \tan(\frac{\pi}{4} + h) = \frac{1 + \tan h}{1 - \tan h} = \frac{2}{1 - \tan h} - 1.$$

*Avec $\tan h = h + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$, on a $\frac{2}{1-\tan h} = 1 + h + h^2 + \frac{4h^3}{3} + o(h^3)$. Par suite,*

$$\tan(\frac{\pi}{4} + h) = 1 + 2h + 2h^2 + \frac{8h^3}{3} + o(h^3).$$

*Ce qui donne*

$$\ln\tan(\frac{\pi}{4} + h) = 2h + \frac{4h^3}{3} + o(h^3),$$

*et donc*

$$f(x) = 2(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{4(x - \frac{\pi}{4})^3}{3} + o((x - \frac{\pi}{4})^3),$$

*$T$ a pour équation $y = 2x - \frac{\pi}{2}$. A gauche de $\frac{\pi}{4}$, la courbe $(Cf)$ est en dessous de $T$, a droite de $\frac{\pi}{4}$, la courbe $(Cf)$ est au dessus de $T$.*

# Chapitre 4

# Notions sur les fonctions de plusieurs variables

Ce chapitre est conscré aux fonctions de plusieurs variables, c'est-à-dire définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$, qu'on appellera son domaine de définition. On se limitera essentiellement aux fonctions de 2 ou 3 variables.
Les fonctions de plusieurs variables constituent la matière Mathématique de prédilection pour la formalisation des problèmes de la gestion. Qu'il s'agisse de traiter des questions relatives à la production, la consommation ou encore l'environnement et la gestion publique, une modélisation adéquate s'exprime le plus souvent à l'aide de fonctions de plusieurs variables. Les restrictions exigées par ce cadre conceptuel impose toutefois, d'une part, la quantification des facteurs pris en compte (les valeurs des variables sont des nombres réels) et, d'autre part, la représentation des relations sous forme déterministe.

## 4.1 Normes

**Définition 4.1.1.** *Une application $N$ de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ dans $\mathbb{R}$ est une norme si*
- $\forall u \in \mathbb{R}^n,\ N(u) \geq 0$ ;
- $\forall u \in \mathbb{R}^n,\ N(u) = 0 \Rightarrow u = 0$ ;
- $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ ;
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^n,\ N(\lambda u) = \lambda N(u)$.

**Exemple 4.1.1.**
- *la valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$, le module une norme sur $\mathbb{C}$.*
- *Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ , $n \in \mathbb{N}^*$ ; soit $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ; on pose*

$$\nu_2(x) = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2)^{1/2}, \quad \nu_\infty(x) = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \quad \textit{et} \quad \nu_1(x) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

  *$\nu_2$ s'appelle la norme euclidienne, $\nu_\infty$ la norme* sup.
- *Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le module de $z$ est égal à la norme euclidienne de $(x, y)$.*

– *L'application* $u = (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$
– *L'application* $u = (x, y) \mapsto |x| + |y|$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$
– *L'application* $u = (x, y) \mapsto \sup\{|x|; |y|\}$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$

**Notation 4.1.1.** *Etant donné* $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$*, on pose*

**1** $\|u\| = \|u\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;

**2** $\|u\|_1 = |x| + |y|$ ;

**3** $\|u\|_\infty = \sup\{|x|; |y|\}$.

**Définition 4.1.2.** *Soit* $(\mathbb{R}^n, ||.||)$ *un e.v.n.*
*L'application* $d : (x, y) \in E \times E \mapsto d(x, y) = ||x - y||$ *est une distance sur* $\mathbb{R}^n$*, appelée distance associée à la norme* $||.||$*. En pratique, on suppose toujours qu'un e.v.n. est muni de la distance associée à la norme.*

**Exemple 4.1.2.**
*Les distances usuelles sur* $\mathbb{R}^n$*,* $n \geq 1$*, sont associées aux trois normes rappelées plus haut : pour* $x = (x_1, \cdots, x_n),\ y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *:*

$$d_2(x, y) = [(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2]^{1/2} \qquad \text{(distance euclidienne)}$$

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$$

$$d_\infty(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|).$$

**Exemple 4.1.3.**
*Dans* $\mathbb{R}^2$*, si* $u = (2; 3)$*, on aura :*
$N_1(u) = 2 + |3| = 5$ ; $N_2(u) = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$ ; $N_\infty(u) = \max\{2; 3\} = 3$.

## 4.2 Ouverts

**Définition 4.2.1** (Boules ouvertes - Boules fermées - Sphères)**.** *Soit* $a \in \mathbb{R}^2$ *et* $r > 0$*. On appelle :*

**1** *boule ouverte de centre* $a$ *et de rayon* $r$*,*

$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^2 /\ \|x - a\| < r\}.$$

$B(a, r)$ *est tout simplement le disque de centre* $a$ *et de rayon* $r$*, cercle non compris.*

**2** *boule fermée de centre* $a$ *et de rayon* $r$*, l'ensemble :*

$$\overline{B}(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^2 /\ \|x - a\| \leq r\}.$$

$B(a, r)$ *est tout simplement le disque de centre* $a$ *et de rayon* $r$*, cercle y compris.*

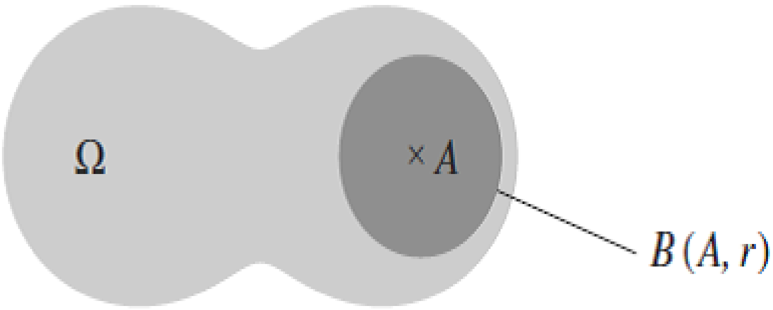
**3** *sphère de centre* $a$ *et de rayon* $r$*, l'ensemble :*

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 | \|x - a\| = r\}.$$

$S(a, r)$ *est tout simplement le cercle de centre* $a$ *et de rayon* $r$*.*

**Définition 4.2.2** (Parties ouvertes). *Soit $U \subset \mathbb{R}^2$. On dit que $U$ est une partie ouverte si $\forall a \in U$, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r$ soit incluse dans $U$.*

**Exemple 4.2.1.**




**Définition 4.2.3** (Voisinage).
*Soit $a \in \mathbb{R}^2$. L'ensemble $V \subset \mathbb{R}^2$ est un voisinage de $a$ si $\exists r > 0$ tel que $B(a; r) \subset V$.*

**Remarque 4.2.1.**
*$V \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert $\Leftrightarrow$ $U$ est un voisinage de chacun de ses points.*

## 4.3 Graphe

**Définition 4.3.1.** *On appelle fonction reèlle de $n$ variables $(n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\})$ toute fonction $f$ : $D \to \mathbb{R}$ ou $D \subset \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire toute fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

**Exemple 4.3.1.**

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x; y) & \mapsto & \frac{3}{2}\sin(\frac{1}{2}x^2 - y) \end{array}$$

**Exemple 4.3.2.**

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x; y, z) & \mapsto & x^3 + x^2y^3 - 2xyz \end{array}$$

**Définition 4.3.2** (Graphe d'une fonction de deux variables). *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ ou $D \subset \mathbb{R}^2$. On appelle graphe de $f$ l'ensemble :*

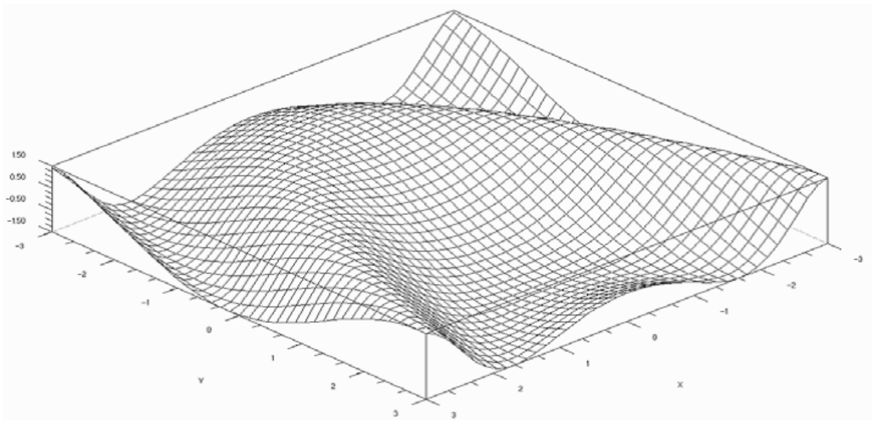
$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ (x, y) \in U,\ z = f(x, y)\}.$$

**Définition 4.3.3** (Graphe d'une fonction de trois variables). *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ ou $D \subset \mathbb{R}^3$. On appelle graphe de $f$ l'ensemble :*

$$G = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 |\ (w, x, y) \in U,\ z = f(w, x, y)\}.$$

**Remarque 4.3.1.** *Le graphe d'une fonction d'une variable est une courbe dans $\mathbb{R}^2$ ; celui d'une fonction de deux variables est une surface dans $\mathbb{R}^3$.*

**Exemple 4.3.3.**



*Graphe de* $(x; y) \mapsto \frac{3}{2}\sin(\frac{1}{2}x^2 - y)$.

## 4.4 Applications partielles

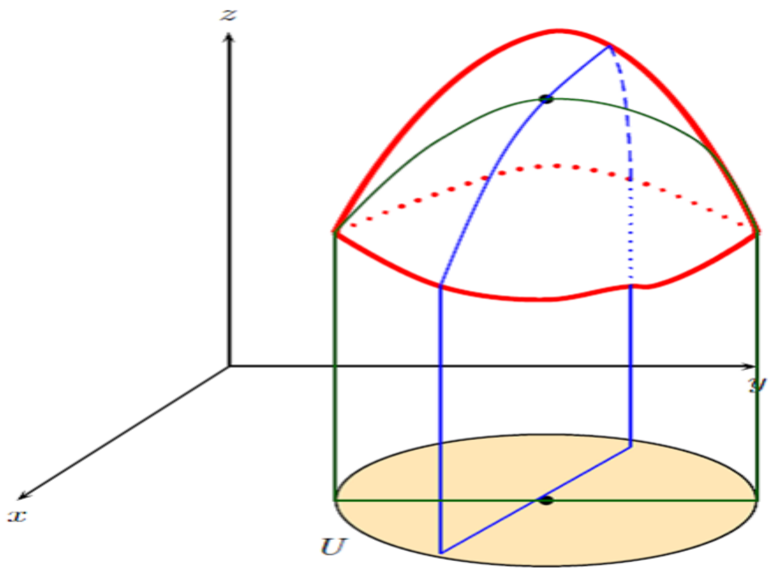
**Définition 4.4.1.**
*Soit une fonction* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et un point* $a = (a_1; a_2; \cdots; a_n) \in \mathbb{R}^n$. *On définit les fonctions d'une variable (applications partielles au point a) par :*

$$\begin{array}{cccc} f_{ia} & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(a_1; \cdots; a_{i-1}; t; a_{i+1}; \cdots; a_n) \end{array}$$

**Exemple 4.4.1.**
*Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x, y) = x^2 + x + y^2$. *Soit* $a = (0; 1)$. *les deux applications partielles au point* $a$ *sont :*

$$f_{1a}(t) = t^2 + t + 1 \qquad \text{et} \qquad f_{2a}(t) = t^2.$$

**Exemple 4.4.2** (Graphique)**.**




Applications partielles

## 4.5 Limite - Continuité

On considère maintenant une partie $U \in \mathbb{R}^2$ (resp $U \in \mathbb{R}^3$) ouverte et une fonction de deux (resp trois) variables :

$$f: \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x;y) & \mapsto & f(x;y) \end{array} \qquad \left( resp \quad f: \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x;y;z) & \mapsto & f(x;y;z) \end{array} \right)$$

En dimension 1, on a vu que la notion de continuité est associée à celle de limite. Une fonction est continue en $x_0$ si $f(x)$ s'approche de $f(x_0)$ lorsque $x$ s'approche de $x_0$, c'est-à-dire lorsque $|x - x_0|$ devient petit. En dimension supérieure, pour définir les notions de limite et de continuité, il est tout d'abord nécessaire de définir une notion de proximité, et c'est-à-dire de définir la distance entre deux points de $\mathbb{R}^n$. Il y a de nombreux choix possibles, mais ils conduisent tous aux mêmes notions de limite et de continuité. Nous en considérerons un seul, pour sa simplicité.

### 4.5.1 Limite

**Définition 4.5.1** (Limite)**.**
*On dit que la fonction $f$ définie sur un domaine $D$ de $\mathbb{R}^n$ admet la limite $\ell$ en $u_0$ si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que si $d(u, u_0) < \delta_0$, alors $|f(u) - \ell| < \varepsilon$. On note $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = \ell$.*

**Interprétation :** Le fait que $f$ admette la limite $\ell$ en $u_0$ signifie d'une part que si $u$ est proche de $u_0$, alors $f(u)$ est proche de $\ell$, et surtout que l'on peut obtenir une approximation arbitraire de $\ell$ par une évaluation de $f$ en un point $u$, à condition que $u$ soit assez proche de $u_0$.

**Remarque 4.5.1.**

– *Si elle existe, la limite d'une fonction est unique.*

- *Pour prouver qu'une fonction de deux variables n'admet pas de limite en $a$, il suffit d'expliciter une restriction à une courbe continue passant par $a$ qui n'admette pas de limite, ou deux restrictions qui conduisent à des limites différentes.*
- *Pour prouver l'existence d'une limite, il faut considérer le cas général. Dans le cas de deux variables, lorsque $(x, y)$ tend vers (0, 0) , il peut être intéressant de passer en coordonnées polaires.*
- *Lorsque l'on dit que u s'approche de $u_0$ au sens de la distance $d$ définie ci-dessus, le chemin par lequel $u$ s'approche de $u_0$ n'est pas pris en compte. Donc lorsque $f$ admet une limite $\ell$ en $u_0$, $f(u)$ s'approche de $\ell$ quelle que soit la façon dont $u$ s'approche de $u_0$. Par exemple, en dimension 2, un point $(x, y)$ peut s'approcher de $o = (0; 0)$ d'une infinité de façon, par exemple :*
  - *le long de l'axe horizontal, c'est-à-dire que $y = 0$ et $x$ tend vers $0$,*
  - *le long de l'axe vertical, i.e. $x = 0$ et $y$ tend vers $0$,*
  - *le long de la diagonale, i.e. $x = y$ et tend vers $0$,*
  - *le long d'une courbe quelconque, par exemple la parabole $y = x^2$.*

  *Si $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = \ell$, alors quel que soit le chemin que $u$ prend pour aller à $u_0$, $f(u)$ va à $\ell$.*

On peut utiliser cette remarque pour montrer a contrario qu'une fonction n'admet pas de limite en un point donné.

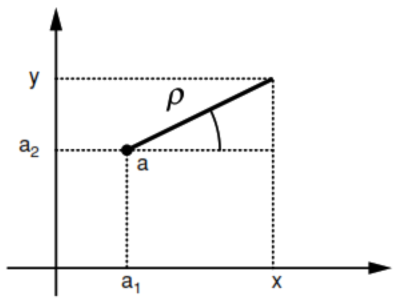
**Exemple 4.5.1.**
*Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$ par*

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

*Alors $f$ n'admet pas de limite en $(0, 0)$. En effet, le long d'un axe, par exemple le long de l'axe horizontal, on a $f(x, 0) = 0$ pour tout $x \neq 0$, et donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x, 0) = 0$ (la limite est ici considérée pour une fonction de la seule variable $x$). De même, $f(0, y) = 0$ pour tout $y \neq 0$, et donc $\lim\limits_{y\to 0} f(0, y) = 0$. Le long de la diagonale $x = y$, on a $f(x, x) = 1/2$ pour tout $x \neq 0$, et donc $\lim\limits_{y\to 0} f(x, x) = 1/2$. La fonction $f$ n'admet donc pas de limite en $0$ au sens de la définition 4.5.1.*

**Remarque 4.5.2.**
*En pratique, lorsque $n = 2$, il est souvent utile de passer aux coordonnées polaires pour ramener le calcul de la limite d'une fonction de deux variables à celui de la limite d'une fonction d'une seule variable. En effet, tout point $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ peut être représenté par ses coordonnées polaires centrées autour du point $a = (a_1, a_2)$ vers lequel il est appelé à tendre*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a_1 + \rho\cos\theta \\ x & = & a_2 + \rho\cos\theta \end{array}\right.$$




**Exemple 4.5.2.**

*Calculer* $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2}$.
*Introduisons des coordonnées polaires* $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

$$\left|\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right| = r^2\cos^2\theta|\cos\theta||\sin\theta| \leq r^2$$

$r^2 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$, *par conséquent,* $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2} = 0$.

**Exemple 4.5.3.**

Montrons de deux manières que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ n'existe pas. La première résulte directement de la définition. En effet, le long de l'axe horizontal $X \equiv y = 0$, on a :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in X}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1$$

tandis que, le long de l'axe vertical $Y \equiv x = 0$, on a :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in Y}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = -1 \neq 1$$

de sorte que les deux limites ne coïncident pas.

La seconde manière est basée sur les coordonnées polaires. En posant : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, on a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}$$
$$= \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)}{\rho^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)} = \cos(2\theta).$$

Le résultat varie selon la direction $\theta$, donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

**Proposition 4.5.1.** *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = l$, *alors* $\forall a_n = (x_n, y_n) \to a = (x_0, y_0)$, *on a* $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = l$.

**Remarque 4.5.3.** *On se sert souvent de cette propriété séquentielle pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite.*

**Exemple 4.5.4.** *Etudier l'existence de* $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

*Supposons qu'il existe* $l \in \mathbb{R}$ *tel que* $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = l$. *Considérons les suites* $X_n = (1/n, 0)$ *et* $Y_n = (1/n, 1/n)$. *Comme* $X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ *et* $Y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0)$, *on a* $f(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ *et* $f(Y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. *Or* $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(X_n) = 0$ *et* $f(Y_n) = 1/2$. *On aboutit à l'absurdité* $l = 0 = 1/2$. *Par suite* $f$ *n'admet pas de limite en* $(0,0)$.

**Proposition 4.5.2.** *Soit* $f$ *une fonction définie sur* $U$. *Si* $f$ *admet une limite en* $a \in U$, *alors cette limite est* $f(a)$.

## 4.5.2 Continuité

**Définition 4.5.2** (Continuité).

- *On dit que la fonction* $f$ *définie sur un domaine* $D$ *de* $\mathbb{R}^n$ *est continue au point* $a \in D$ *si et seulement si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ *;*
- *On dit que la fonction* $f$ *est continue sur* $D$ *si et seulement si elle est continue en tout point de* $D$.

**Remarque 4.5.4.** *Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition. Notamment, les polynômes, les fractions rationnelles aux points où le dénominateur en s'annule pas. Les régles de la continuité des fonctions d'une seule variable s'appliquent : la somme, le produit de fonctions continues sont des fonctions continues. La composée de deux fonctions continues est continue.*

**Exemple 4.5.5.**

**1** $f(x;y) = x^2+y^2-xy+y$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$ *(Polynôme du second degré à deux variables)*

**2** $f(x;y;z) = e^z + xy^2 - z$ *est continue sur* $\mathbb{R}^3$ *( somme d'une fonction exponentielle et d'un polynôme).*

**3** $f(x;y) = \ln(x+y^2) - 3$ *est continue sur* $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 ;:; x+y^2 > 0\}$ *comme somme du logarithme d'un polynôme et d'une constante.*

**Proposition 4.5.3.** *Si une fonction* $f : U \to \mathbb{R}$ *est continue en* $a = (x_0, y_0)$, *alors les fonctions* $f_{1a}$ *définie par* $f_{1a}(x) = f(x; y_0)$ *et* $f_{2a})$ *définie par* $f_{2a}(y) = f(x_0; y)$ *sont respectivement continues en* $x_0$ *et* $y_0$.

**Remarque 4.5.5.** *La réciproque de la Proposition 4.5.3 est fausse en général.*

**Exemple 4.5.6.** *Soit la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x;y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad pour \quad (x;y) \neq (0;0) et f(0;0) = (0;0).$$

*Les deux applications partielles en* $a = (0;0)$ *définies par :* $f_{1a}(x) = f(x;0) = 0$ *et* $f_{2a}(y) = f(0;y) = 0$ *sont continues mais* $f$ *n'admet pas de limite en (0 ;0) donc n'est pas continue en (0 ;0).*

## 4.6 Dérivées partielles

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction défine sur un domaine $D$ de $\mathbb{R}^n$. On appelle i-ème fonction partielle au point $a = (a_1, \cdots, a_n) \in D$ la fonction fi, définie sur le domaine $D_{ia} = \{x \in \mathbb{R} \mid (a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_n) \in D\}$, par

$$\forall x \in D_{ia}, \quad f_{ia}(x) = f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_n).$$

**Exemple 4.6.1.** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + x + y^2$. Soit $a = (0; 1)$. les deux applications partielles au point $a$ sont :*

$$f_{1a}(t) = t^2 + t + 1 \qquad \textit{et} \qquad f_{2a}(t) = t^2.$$

**Exemple 4.6.2.** *Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par*

$$f(x, y, z) = xy^2z^3.$$

*Soit $a = (1, -1, 2)$. Les fonctions partielles de $f$ en $a$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par*

$$f_{la}(x) = f(x, -1, 2) = 8x, \qquad f_{2a}(y) = f(1, y, 2) = 8y, \qquad f_3(z) = f(1, -1, z) = z.$$

**Exemple 4.6.3.** *Soit $f$ définie sur le disque $D$ de centre $0$ et de rayon $2$ par*

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

*Soit $a = (1/2, 1)$. Les deux fonctions partielles de $f$ en $a$ sont*

$$f_{la} : [-\sqrt{3}; \sqrt{3}] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{3 - x^2};$$

$$f_{2a} : \left[-\frac{\sqrt{15}}{2}; \frac{\sqrt{15}}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \sqrt{\frac{15}{4} - y^2};$$

**Définition 4.6.1** (Dérivées partielles)**.** *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine $D$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in D$. Si la i-ème fonction partielle de $f$ en $a$ est dérivable en $a_i$, alors sa dérivée (par rapport à la variable $x_i$) est appelée i-ème d´erivée partielle de $f$ en $a$, et notée*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

**Exemple 4.6.4.** *Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3y^4$. Alors $f$ admet deux dérivées partielles en tout point $a = (a_1, a_2)$ de $\mathbb{R}^2$ :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = 3(a_1)^2(a_2)^4,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = 4(a_1)^3(a_2)^3.$$

**Exemple 4.6.5.** *Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$. Alors $f$ admet deux dérivées partielles en tout point $a=(a_1,a_2)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $a \neq b$ :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) = -\frac{2a_1}{a_1-a_2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2) = \frac{2a_2}{a_1-a_2}.$$

**Définition 4.6.2** (Dérivées partielles d'ordre supérieur)**.** *Soit $f$ une fonction définie sur un domaine $D$ de $\mathbb{R}^n$. Si ses dérivées partielles d'ordre $1$ sont encore dérivable par rapport à chaque variable, leurs dérivées partielles sont appelées dérivées partielles secondes. Par récurrence, on définit les dérivées partielles d'ordre $n$ comme les dérivées partielles des dérivées d'ordre $n-1$.*

**Remarque 4.6.1.** *Une dérivée partielle d'ordre $n$ est donc obtenue en d'rivant partiellement successivement par rapport à une des variables, $n$ fois. Par exemple, on obtient une dérivée d'ordre $4$ d'une fonction de trois variables $x$, $y$, $z$ en dérivant d'abord en $x$, puis en $y$, puis à nouveau en $x$, puis en $z$ ; ou bien en dérivant en $y$ puis en $z$, puis deux fois en $x$.*

**Notation 4.6.1.** *La dérivée partielle d'ordre $p$ d'une fonction de $n$ variables $x_1,\cdots,x_n$ obtenue en dérivant $p_1$ fois par rapport à $x_1$, $p_2$ fois par rapport à $x_2$ $\cdots$ $p_n$ fois par rapport à $x_n$, où $p_1,\cdots,p_n$ sont des entiers positifs ou nuls tels que $p_1+\cdots+p_n = p$ est notée*

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}.$$

**Remarque 4.6.2.**

- ⋆ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M)$ *se note aussi* $f_{xx}(M)$ ;
- ⋆ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(M)$ *se note aussi* $f_{xy}(M)$ ;
- ⋆ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M)$ *se note aussi* $f_{yx}(M)$ ;
- ⋆ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M)$ *se note aussi* $f_{yy}(M)$.

**Exemple 4.6.6.** *Reprenons l'exemple 4.6.2 et calculons quelques dériv´ees partielles successives de $f(x,y,z) = xy^2z^3$.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y^2z^3,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 0; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) = 2yz^3,$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y,z) = 2z^3; \qquad \frac{\partial^2 3}{\partial x\partial y\partial z}(x,y,z) = 6yz^2,$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}(x,y,z) = 0.$$

Il est naturel de se demander si dans les dérivées partielles d'ordre au moins 2, l'ordre des dérivations importe. Pour les fonctions usuelles dont toutes les dérivées existent et sont continues sur leur domaine de définition, l'ordre n'importe pas. Plus précisément, on a le résultat suivant.

**Proposition 4.6.1** (Lemme de Schwarz)**.** *Soit $f$ une fonction définie sur un domaine $D$ de $\mathbb{R}^n$. Soient $i \neq j$ deux entiers compris entre 1 et $n$. Si les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent et sont continues, alors elles sont égales.*

**Remarque 4.6.3.** *Ce résultat sera admis et on admettra aussi qu'il existe des exemples de fonctions pour lesquels les deux dérivées existent en un point mais ne sont pas égales. On ne donnera pas de tels exemples car ils ne seront pas rencontrés en pratique.*

**Exemple 4.6.7.** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x, y) = 2x^2y + y^2 - x^3y^4.$$

*On obtient*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x; y) = 4xy - 3x^2y^4; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x; y) = 2x^2 + 2y - 4x^3y^3;$$

*puis*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x; y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x; y) = 4x - 12x^2y^3.$$

**Exemple 4.6.8.** *Soit $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sqrt{x^3y}$. Alors, pour $x, y > 0$, on a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3}{2}\sqrt{xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3}{y}};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{y}{x}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^3}{y^3}};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{3}{2}\sqrt{xy}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{x}{y}};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3}{y}}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{x}{y}}.$$

# 4.7 Recherche des extrema

## 4.7.1 Définition

**Définition 4.7.1.** *Soit $M_0 \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$.*

**1** *$f$ admet un maximum local en $M_0$ si et seulement si*

$$\exists V \in v(M_0) \subseteq \mathbb{R}^2 / \ f(M) \leq f(M_0), \quad \forall M \in V \cap U.$$

**2** *$f$ admet un minimum local en $M_0$ si et seulement si si*

$$\exists V \in v(M_0) \subseteq \mathbb{R}^2 / \ f(M) \geq f(M_0), \quad \forall M \in V \cap U.$$

**3** *$f$ admet un extrémum local en $M_0$ si et seulement si*
*$f$ admet un maximum local en $M_0$ ou un minimum local en $M_0$.*

**4** *$f$ admet un maximum global en $M_0$ si et seulement si*

$$\forall M \in U, \qquad f(M) \leq f(M_0).$$

**5** *$f$ admet un minimum global en $M_0$ si et seulement si*

$$\forall M \in U, \qquad f(M) \geq f(M_0).$$

**6** *$f$ admet un extrémum global en $M_0$ si et seulement si*
*$f$ admet un maximum global en $M_0$ ou un minimum global en $M_0$.*

### 4.7.2 Condition nécessaire du premier ordre

**Théorème 4.7.1** (La différentielle est nulle en un extremum local)**.** *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $U$ et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Alors*

$$M_0 \text{ est un extrémum local } \Rightarrow df_{M_0} = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) = 0 \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) = 0\right].$$

**Remarque 4.7.1.** *Un point vérifiant la condition ci-dessus i.e*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) = 0 \qquad et \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) = 0.$$

*est appelé point stationnaire ou point critique de $f$.*

**Exemple 4.7.1.** *La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 3.$$

*a pour dérivées partielles*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y + 1 \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y - 1.$$

*- Le seul point critique est $(-1, 1)$. En faisant un changement d'origine, on étudie, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$,*

$$f(-1 + h, 1 + k) = h^2 + hk + k^2 + 2.$$

*Comme $h + hk + k^2 = \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k2}{4} \geq 0$, on a $f(-1 + h, 1 + k) \geq 2$,*
*i.e. $f(-1 + h, 1 + k) \geq f(-1, 1)$, ce qui montre que $f$ admet un minimum global en (-1, 1).*

**Exemple 4.7.2.** *La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 - 3y^2.$$

*a pour dérivées partielles*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 6x \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3y^2 - 6y.$$

*Ses points critiques sont $(0, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, -2)$ et $(-2, -2)$.*

- *On a $f(0,0) = 0$ et au voisinage de 0,*

$$f(h,0) = h^3 + 3h^2 \sim 3h^2 \qquad \textit{et} \qquad f(0,k) = -k^3 - 3k^2 \sim -3k^2.$$

*Pour $h$ et $k$ assez petits et non nuls, on obtient $f(h,0) > 0$ et $f(0,k) < 0$ : la fonction n'admet pas d'extremum en (0, 0).*

- On obtient de même $f(-2,-2) = 0$ et, pour $h$ et $k$ assez petit non nuls,

$$f(-2+h,-2) = -3h^2 + h^3 < 0 \qquad \textit{et} \qquad f(-2,-2+k) = 3k^2 - k^3 > 0.$$

La fonction $f$ n'admet pas d'extremum en (-2, -2).

- En $A = (-2, 0)$, on étudie

$$f(-2+h,k) = 4 - 3h^2 - 3k^2 + h^3 - k^3 = 4 - h^2(3-h) - k^2(3+k).$$

Si $(h,k) < 3$, on a $3 - h > 0$ et $3 + k > 0$ et donc $f(-2+h,k) \leq 4$. Autrement dit, pour $(x,y) \in B(A,3)$, on a $f(x,y) \leq f(-2,0)$. La fonction $f$ présente un maximum local en (-2, 0).

- En $A = (0,-2)$, on étudie

$$f(h,-2+k) = -4 + 3h^2 + 3k^2 + h^3 - k^3 = -4 + h^2(3+h) + k^2(3-k).$$

On obtient de même que, pour tout $(x,y) \in B(B,3)$, on a $f(x,y) \geq f(0,-2)$. La fonction $f$ présente un minimum local en (0, -2).

**Remarque 4.7.2.** *Si $f$ est définie sur un ensemble fermé borné $\Omega$, on sait que $f$ possède un maximum et un minimum sur $\Omega$. Mais, comme $\Omega$ n'est pas ouvert, on ne peut pas dire que ces extremums sont atteints en des points critiques de $f$. On peut alors considérer l'ensemble des points $X$ de $\Omega$ pour lesquels il existe une boule ouverte de centre $X$ incluse dans $\Omega$. C'est un ouvert appelé intérieur de $\Omega$, sur lequel ce qui précède s'applique.*

*Un extremum de $f$ est donc obtenu*

- *soit en un point critique de l'intérieur de $\Omega$ ;*
- *soit en un point de $\Omega$ qui n'appartient pas à l'intérieur de $\Omega$ (on dit qu'il appartient à la frontière de $\Omega$).*

*Dans le cas où $\Omega$ est la boule fermé $\overline{B}(A,r)$, l'intérieur de $\Omega$ est la boule ouverte $B(A,r)$.*

**Exemple 4.7.3.** *Soit f la fonction définie sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; x^2 + y^2 \leq 1\}$ par*

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2.$$

Comme elle est continue, $f$ possède un maximum et un minimum sur le fermé borné $\Omega$ (c'est le disque fermé de centre (0, 0) et de rayon 1).

- Sur le disque ouvert, $f$ possède des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y + 1 \quad \textit{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + 2y.$$

et un seul point critique (0, 0). On obtient f (0, 0) = 0.

– Sur le cercle, on peut poser $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. On obtient

$$f(\cos\theta, \sin\theta) = 1 - \sin\theta\cos\theta = 1 - 2\sin 2\theta.$$

Sur ce cercle, $f$ possède un maximum $\frac{3}{2}$ et un minimum $\frac{1}{2}$ Le minimum de $f$ sur $\Omega$ vaut donc 0 est atteint en (0, 0). Le maximum est $\frac{3}{2}$ et est atteint pour $\sin 2\theta = -1$, ce qui donne $\theta = \frac{-\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ; le maximum est donc atteint aux points $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

### 4.7.3 Conditions du second ordre

**Théorème 4.7.2.** *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$ sur $U$ et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Posons :*

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad et \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

*Si $M_0$ un point critique de $f$ tel que $s^2 - rt \neq 0$.*

- *Si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$, alors $f$ présente un minimum en $M_0$.*
- *Si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$, alors $f$ présente un maximum en $M_0$.*
- *Si $s^2 - rt > 0$, alors $f$ ne présente en $M_0$ ni minimum ni maximum.*

**Méthode 4.7.1.** *Pour déterminer les extremums locaux d 'une application $f : U \to \mathbb{R}$. de classe $C^2$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$, commencer par déterminer le ou les points critiques de $f$, c'est-à-dire les points $(x, y)$ de $U$ tels que :*

$$\begin{cases} f'_x(x, y) &= 0 \\ f'_y(x, y) &= 0 \end{cases}$$

*Si $f$ admet un extremum local, ce ne peut être qu'en un point critique de $f$.*

*En un point critique $(x_0, y_0)$ de $f$, calculer $r$, $s$, $t$ :*

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad et \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

*Puis calculer $s^2 - rt$.*

- *Si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$, alors $f$ admet un minimum local en $(x_0, y_0)$.*
- *Si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$, alors $f$ admet un maximum local en $(x_0, y_0)$.*
- *Si $s^2 - rt > 0$ alors $f$ n'admet pas d'extremum local en $(x_0, y_0)$ ; on dit que $f$ admet un point-col en $(x_0, y_0)$.*
- *Si $s^2 - rt = 0$, essayer :*
  - *ou bien de montrer que $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ n'est pas de signe fixe lorsque $(h, k)$ est voisin de (0,0) en envisageant, par exemple, de lier les variables $(h, k)$, et alors $f$ n'admet pas d'extremum local en $(x_0, y_0)$.*
  - *ou bien de montrer que $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ est de signe fixe lorsque $(h, k)$ est dans un voisinage de (0,0), et alors $f$ admet un extremum local en $(x_0, y_0)$.*

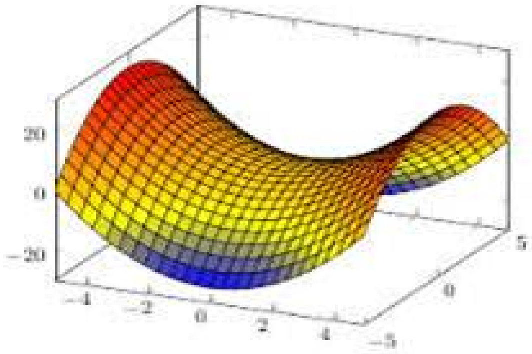
**Méthode 4.7.2.** *Pour montrer qu'une fonction $f$ de deux variables réelles $x, y$ n'a pas d'extremum global, on peut essayer de construire une fonction composée, par exemple $x \mapsto f(x, x)$, $x \mapsto f(x, x^2)$, ... de limite $+\infty$ ou $-\infty$.*

**Méthode 4.7.3.** *Pour trouver les extremums globaux d'une fonction $f$ de deux variables réelles, on peut commencer par rechercher les extremums locaux de $f$, car, si $f$ admet un extremum global en $(x_0, y_0)$. Pour montrer que $f$ admet, par exemple, un minimum global en un point $(x_0, y_0)$, former $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ et montrer que cette expression est $\geq 0$ pour tout $(h, k)$.*

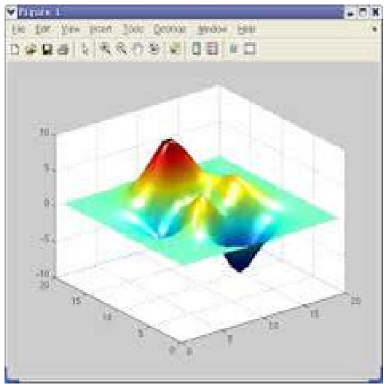
**Exemple 4.7.4.** *$f(x; y) = x^2 + y^2$. Le point stationnaire est (0 ;0) et $r = 2$ ; $s = 0$ ; $t = 2$ c'est-à-dire $s^2 - rt = -4 < 0$ et $r > 0$, donc $f$ présente un minimum en (0,0).*

**Exemple 4.7.5.** *$f(x; y) = xy$. Le point stationnaire est (0 ;0) et $r = 0$ ; $s = 1$ ; $t = 0$ c'est-à-dire $s^2 - rt = 1 > 0$, donc $f$ présente un point-selle en (0 ;0).*

**Exemple 4.7.6.**




*Point-selle*



*Maximum et minimum*