COURS D'ANALYSE 1

2022 - 2023

UTA

Table des matières

Chapitre 1

Nombres réels

1.1 Ensemble des nombres réels

Théorème 1.1.1.
L'ensemble des nombres réels est l'ensemble $\mathbb{R}$ pour lequel sont définies :
- *deux applications $(x; y) \mapsto x + y$ et $(x; y) \mapsto xy$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui prolongent les opérations d'addition et de multiplication définies dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$,*
- *une relation d'ordre totale.*

L'addition et la multiplication satisfont aux propriétés suivantes :

1 *L'addition est associative :* $\forall\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

2 *L'addition possède un élément neutre 0 :* $\forall a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = 0 + a = a$.

3 *Chaque réel possède un opposé :* $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists b \in \mathbb{R}$: $a + b = b + a = 0$. *Le nombre* b *opposé à* a *est noté* $-a$.

4 *L'addition est commutative :* $\forall a,\ b \in \mathbb{R}$, $a + b = b + a$.

5 *La multiplication est associative :* $\forall\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

6 *La multiplication possède un élément neutre 1 :* $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \times 1 = 1 \times a = a$.

7 *Chaque réel non nul possède un inverse :* $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $\exists b \in \mathbb{R}^*$: $a \times b = b \times a = 1$. *Le nombre* b *inverse de* a *est noté* a^{-1} *ou encore* $\frac{1}{a}$.

8 *La multiplication est commutative :* $\forall a,\ b \in \mathbb{R}$, $a \times b = b \times a$.

9 *La multiplication est distributive par rapport à l'addition :* $\forall a,\ b,\ c\ \in \mathbb{R}$,

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \qquad et \qquad (b + c) \times a = b \times a + c \times a;$$

10 $\forall\ a \in \mathbb{R}$, $a \times 0 = 0 \times a = 0$;

11 $\forall\ a \in \mathbb{R}$, $(-1) \times a = -a$;

12 $\forall\ a,\ b \in \mathbb{R}$, $(-a) \times b = -(a \times b)$.

13 $\forall\ a\ b \in \mathbb{R}$, $a \times b = 0 \Rightarrow a = 0$ *ou* $b = 0$

De plus, la relation d'ordre vérifie les propriétés suivantes :

1 *La relation d'ordre* $\leq$ *est totale :* $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ *ou* $y \leq x$ *;*

2 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

3 $\forall x, y \in R$, $0 \leq x$ *et* $0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$.

4 *si* $a \leq b$ *et* $0 \leq c$ *alors* $ac \leq bc$.

Remarque 1.1.1.
$a \times b$ *se note aussi* ab.

Remarque 1.1.2.

1 *A partir de la relation "inférieur ou égal"* $\leq$ *définie précédemment, on peut définir sa relation symétrique "supérieur ou égal"* $\geq$ *pour tous réels a et b par :*

$$a \geq b \quad \textit{si et seulement si} \quad b \leq a.$$

On remarquera que $\geq$ *est également une relation totale.*

2 *On définit également la relation "strictement inférieur" pour tous réels a et b par :*

$$a < b \quad \textit{si et seulement si} \quad a \leq b \quad \textit{et} \quad a \neq b,$$

et la relation "strictement supérieur" pour tous réels a et b par :

$$a > b \quad \textit{si et seulement si} \quad a \geq b \quad \textit{et} \quad a \neq b,$$

1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.2.1.
Une partie I *de* $\mathbb{R}$ *est un intervalle si pour tous* x *et* y *dans* I *et pour tout* z *dans* $\mathbb{R}$,

$$\textit{si} \quad x \leq z \leq y \quad \textit{alors} \quad z \in I.$$

Remarque 1.2.1.

1 *Il existe plusieurs types d'intervalles.*

2 *Le fait de considérer une partie* I *de* $\mathbb{R}$ *se note* $I \subset \mathbb{R}$ *(qui se lit* I *inclus dans* $\mathbb{R}$*).*

3 *Le fait de considérer un élément* a *de* I *se note* $a \in I$ *(qui se lit* a *appartient à* I*). Il ne faut donc pas confondre le symbole* $\subset$ *qui est utilisé pour des parties, et* $\in$ *qui est utilisé pour des éléments.*

Exemple 1.2.1.

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.

Intervalles de $\mathbb{R}$	*Bornés*	*Non Bornés*
Ouverts	$]a;b[$; $\emptyset$	$\mathbb{R}$; $]-\infty;a[$; $]a;+\infty[$
Fermés	$[a;b]$; $\{a\}$; $\emptyset$	$\mathbb{R}$; $]-\infty;a]$; $[a;+\infty[$
Semi-ouverts	$[a;b[$; $]a;b]$	

Remarques 1.2.1.

1. $[a;b] = \{x \in \mathbb{R}; \quad a \leq x \leq b\}$;
2. $]a;b[= \{x \in \mathbb{R}; \quad a < x < b\}$;
3. $]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R}; \quad a < x\}$;
4. $]-\infty;b[= \{x \in \mathbb{R}; \quad x < b\}$;
5. $[a;b[= \{x \in \mathbb{R}; \quad a \leq x < b\}$,
6. $]a;b] = \{x \in \mathbb{R}; \quad a < x \leq b\}$;
7. $[a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R}; \quad x \geq a\}$,
8. $]-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R}; \quad x \leq b\}$;
9. *L'intervalle qui ne contient aucun nombre réel est appelé l'ensemble vide, et il est noté $\emptyset$;*
10. *L'intervalle qui ne contient qu'un seul nombre est appelé singleton. On le note alors entre accolade ; Autrement un singleton contenant le nombre réel a s'écrit $\{a\}$;*
11. *Un singleton $\{a\}$ est considéré comme l'intervalle $[a;a]$ et donc c'est un cas particulier d'intervalle fermé ;*
12. *L'ensemble vide $\emptyset$ est considéré comme l'intervalle $]a;a[$ donc c'est un cas particulier d'intervalle ouvert. Comme c'est le complémentaire de $\mathbb{R}$, on considère $\mathbb{R}$ alors comme un intervalle fermé.*
    Mais, $\mathbb{R}$ peut être également vu comme un intervalle ouvert si on l'écrit $]-\infty;+\infty[$. Et donc son complémentaire $\emptyset$ sera considéré comme fermé. C'est la raison pour laquelle $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont considérés comme des ensembles à la fois ouverts et fermés de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.2.

Soient a et b deux réels, avec $a \leq b$. On appelle segment, l'ensemble noté $[a;b]$ défini par :

- $[a;b] = \{x \in \mathbb{R}, \text{ tels que } \quad a \leq x \leq b\} = \{x = (1-t)a + bt; \quad t \in [0;1]\}$, *si* $a < b$.
- $\{a\}$ *si* $a = b$.

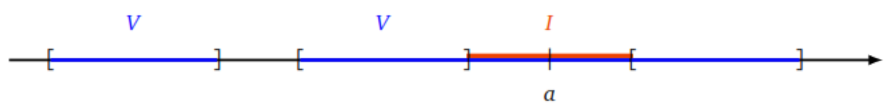
1.3 Voisinage

1.3.1 Voisinage d'un point

Définition 1.3.1.
Soit a un nombre réel. On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de a si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a-\varepsilon; a+\varepsilon] \subset V$.

Remarque 1.3.1.
On peut aussi dire que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de a si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\subset V$.

Exemple 1.3.1.



Exemple 1.3.2.
Soit $V =]0; 1] \cup \{2\}$.

1. *V est un voisinage de tout a élément de $]0; 1[$. En effet $\forall a \in]0; 1[$, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{a; 1-a\}$, on a $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\subset V$;*
2. *V n'est pas un voisinage de 2 ;*
3. *V n'est pas un voisinage de 1 ;*
4. *V n'est pas un voisinage de 0.*

Remarque 1.3.2.
Un voisinage V de a peut s'interpréter donc comme ce qu'il y a autour de a tout en étant très proche de a.

1.3.2 Voisinage de l'infini

Définition 1.3.2.

1. *On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ si et seulement s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $[A; +\infty[\subset V$;*
2. *On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $-\infty$ si et seulement s'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty; B] \subset V$.*

Exemple 1.3.3.
Soit $V =]-10; 1] \cup [2; +\infty[$ et $V_1 =]-\infty; -5] \cup [2; +\infty[$.

1. *V est un voisinage de $+\infty$;*
2. *V n'est pas un voisinage de $-\infty$;*
3. *V_1 est un voisinage de $+\infty$;*
4. *V_1 est un voisinage de $-\infty$;*

1.4 Majorants, minorants, borne supérieure, borne inférieure, maximum et minimum

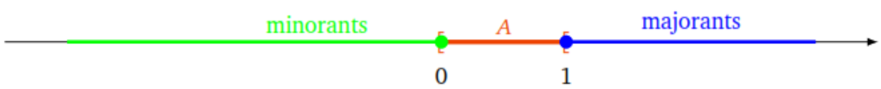
1.4.1 Majorants, minorants

Définition 1.4.1.
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{Q}$) et soit $a \in \mathbb{R}$.

- *a est un majorant de A si et seulement si a est supérieur ou égal à tous les éléments de A.*
  Autrement dit a est un majorant de A si et seulement si $\forall x \in A$, $x \leq a$.
- *a est un minorant de A si et seulement si a est inférieur ou égal à tous les éléments de A.*
  Autrement dit a est un minorant de A si et seulement si $\forall x \in A$, $x \geq a$.
- *Dans le cas où l'ensemble A admet un majorant, on dit que A est majoré.*
- *Dans le cas où l'ensemble A admet un minorant, on dit que A est minoré.*
- *Si A est majoré et minoré, on dit qu'il est borné.*

Remarque 1.4.1.
Un majorant n'est pas unique. Un minorant n'est pas unique.

Exemple 1.4.1.
Soit $A = [0, 1[$.



1. *les majorants de A sont exactement les éléments de $[1, +\infty[$,*
2. *les minorants de A sont exactement les éléments de $]-\infty, 0]$.*

Exemple 1.4.2.

- *$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas bornés. $\mathbb{N}$ est minoré par 0 mais n'est pas majoré.*
- *La partie $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$ possède par exemple comme majorants 2 et 3 et comme minorants -1 et 0.*
- *La partie $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ admet par exemple 4 comme majorant.*
- *le sous-ensemble $]-\infty; 1]$ de $\mathbb{R}$ est majoré et non minoré.*

1.4.2 Borne supérieure, Borne inférieure

Définition 1.4.2.
Soit $E \subset \mathbb{R}$ non vide. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de E que l'on note $M = \sup(E)$ si et seulement si

1. *M est un majorant de E, c'est à dire que pour tout $x \in E$, $x \leq M$,*
2. *si M' est un majorant de E, alors $M \leq M'$, autrement dit, M est le plus petit des majorants*

De même $m \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de E que l'on note $m = \inf(E)$ si et seulement si

1. *m est un minorant de E, c'est à dire que pour tout $x \in E$, $x \geq m$,*
2. *si m' est un minorant de E, alors $m \geq m'$, autrement dit, m est le plus grand des minorants.*

Proposition 1.4.1 (Caractérisation de la borne supérieure)**.**
Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide. M est la borne supérieure de A si, et seulement si, on a, à la fois :

1. *M est un majorant de A ;*
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ *tel que* $x \in]M - \varepsilon; M]$.

Proposition 1.4.2 (Caractérisation de la borne inférieure)**.**
Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide. m est la borne inférieure de A si, et seulement si, on a, à la fois :

1. *m est un minorant de A ;*
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ *tel que* $x \in [m; m + \varepsilon[$.

Remarque 1.4.2.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide.

1. *M est la borne supérieure de A si, et seulement si, on a, à la fois :*
   - a. *M est un majorant de A ;*
   - b. $\forall \varepsilon > 0$, *$M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A.*
2. *m est la borne inférieure de A si, et seulement si, on a, à la fois :*
   - a. *m est un minorant de A ;*
   - b. $\forall \varepsilon > 0$, *$m + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A.*

Méthode 1.4.1.

1. *Pour montrer qu'un réel M est la borne supérieure d'une partie A, il faut montrer :*
   - a. *que M un majorant de A ;*

  b *que M est inférieur ou égal à n'importe quel majorant de A.*

2 *Pour montrer qu'un réel m est la borne supérieure d'une partie B, il faut montrer :*

  a *que m un minorant de B ;*

  b *que m est supérieur ou égal à n'importe quel minorant de B.*

Exemple 1.4.3.
Montrons que $[0, 1[$ admet 1 pour borne supérieure.
Pour commencer, 1 majore $[0, 1[$, mais il reste à montrer qu'aucun réel strictement inférieur à 1 ne majore $[0, 1[$.
Soit $x < 1$ un tel réel.
- *Si $x < 0$, x ne majore pas $[0, 1[$ car $0 \in [0, 1[$.*
- *Si $x \in [0, 1[$: $x < \dfrac{x+1}{2}$ et pourtant $\dfrac{x+1}{2} \in [0, 1[$, donc x ne majore pas $[0, 1[$.*

Dans les deux cas, x ne majore pas $[0, 1[$.

Exemple 1.4.4.
Montrons que $]0, 1[$ admet 0 pour borne inférieure.

On a $\forall x \in]0, 1[$, $x > 0$. Donc 0 minore $]0, 1[$.
Soit $\varepsilon > 0$.
- *Si $\varepsilon \geq 1$, $x = \dfrac{1}{2}$ vérifie $x \in [0; \varepsilon[$ et $x \in]0; 1[$.*
- *Si $\varepsilon \in]0, 1[$: $x = \dfrac{\varepsilon}{2}$ vérifie $x \in [0; \varepsilon[$ et $x \in]0; 1[$.*

0 minore $[0, 1[$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in]0, 1[$ tel que $x \in [0; \varepsilon[$ donc 0 est la borne inférieure de $]0, 1[$.

Exemple 1.4.5.
Soit $A =]0, 1]$.

1 $\sup A = 1$ *: en effet les majorants de A sont les éléments de $[1, +\infty[$. Donc le plus petit des majorants est 1.*

2 $\inf A = 0$ *: les minorants sont les éléments de $]-\infty, 0]$ donc le plus grand des minorants est 0.*

Exemple 1.4.6.

1 $\sup[a, b] = b$,

2 $\inf[a, b] = a$,

3 $\sup]a, b[= b$,

4 $\inf]a, b] = a$

5 $]0, +\infty[$ *n'admet pas de borne supérieure,*

6 $\inf]0, +\infty[= 0$.

Axiome 1.4.1.

- *Toute partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$ *possède une borne supérieure.*
- *Toute partie non vide et minorée de* $\mathbb{R}$ *possède une borne inférieure.*

1.4.3 Plus grand élément, plus petit élément

Définition 1.4.3.

Soit A *une partie de* $\mathbb{R}$ *(ou de* $\mathbb{Q}$*) et soit* $a \in \mathbb{R}$*. On dit que* a *est*

- *le plus grand élément ou le maximum de* A *si et seulement si* $a \in A$ *et* a *est un majorant de* A*.*
- *le plus petit élément ou le minimum de* A *si et seulement si* $a \in A$ *et* a *est un minorant de* A*.*

S'il existe, le plus grand élément de A *est unique. Nous le noterons* $\max(A)$*. De même, s'il existe, le plus petit élément de* A *est unique et nous le noterons* $\min(A)$*.*

Remarque 1.4.3.

Soit $E \subset \mathbb{R}$*.*

- *Si* $M = \sup(E)$ *et* $M \in E$ *alors* M *est le maximum de* E*.*
- *Si* $m = \inf(E)$ *et* $m \in E$ *alors* m *est le minimum de* E*.*
- *Si* E *possède un plus grand élément, alors* E *possède une borne supérieure et :* $\sup E = \max E$*.*
- *Si* E *possède un plus petit élément, alors* E *possède une borne inférieure et :* $\inf E = \min E$*.*

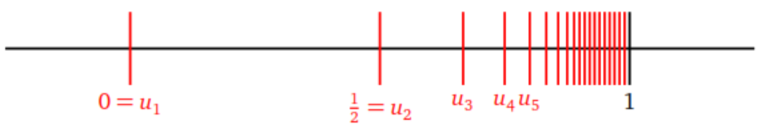
Exemple 1.4.7.

- $\max[a, b] = b, \ \ \min[a, b] = a$*.*
- *L'intervalle* $]a, b[$ *n'a pas de plus grand élément, ni de plus petit élément.*
- *L'intervalle* $[0, 1[$ *a pour plus petit élément* 0 *et n'a pas de plus grand élément.*

Exemple 1.4.8.

Soit $A = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$*.*

Notons $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$*. Alors* $A = \left\{u_n \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$*. Voici une représentation graphique de* A *sur la droite numérique :*



1 *A n'a pas de plus grand élément : Supposons qu'il existe un plus grand élément* $\alpha = \max A$*. On aurait alors* $u_n \leq \alpha$*, pour tout* u_n*. Ainsi* $1 - \frac{1}{n} \leq \alpha$ *donc* $\alpha \geq$

$1 - \frac{1}{n}$. *À la limite lorsque* $n \to +\infty$ *cela implique* $\alpha \geq 1$. *Comme* α *est le plus grand élément de* A *alors* $\alpha \in A$. *Donc il existe* n_0 *tel que* $\alpha = u_{n_0}$. *Mais alors* $\alpha = 1 - \frac{1}{n_0} < 1$. *Ce qui est en contradiction avec* $\alpha \geq 1$. *Donc* A *n'a pas de maximum.*

2 $\min A = 0$ *: Il y a deux choses à vérifier tout d'abord pour* $n = 1$, $u_1 = 0$ *donc* $0 \in A$. *Ensuite pour tout* $n \geq 1$, $u_n \geq 0$. *Ainsi* $\min A = 0$.

Exercice 1.4.1.
Soit A *l'ensemble des inverses des nombres entiers naturels non nuls*

a) Montrer que 1 *est le maximum de* A.

b) Montrer que A *est minoré, mais n'admet pas de minimum.*

Solution guidée.

a) – Montrer que $1 \in A$.
   – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{1}{n} \leq 1$.
   – Conclure

b) • Montrer que 0 est un mminorant de A.
   • Supposer que A possède un minimum m :
     – Justifier l'existence d'un nombre entier naturel non nul n tel que $m = \dfrac{1}{n}$.
     – Justifier que $\dfrac{1}{n+1} \in A$
     – Démontrer que $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$.
     – Conclure

□

Exercice 1.4.2.
Soit A *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$. *Montrer que* A *majoré est équivalent à* $\{-a; a \in A\}$ *minoré.*

Théorème 1.4.1.

1 *Toute partie non vide de* $\mathbb{N}$ *possède un plus petit élément.*

2 *Toute partie non vide majorée de* $\mathbb{N}$ *possède un plus grand élément.*

1.4.4 Propriété d'Archimède

Théorème 1.4.2.
Pour tout couple de réels $(x; y)$ *tel que* $x > 0$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $y \leq nx$.

1.5 Droite réelle achevée

1.5.1 Définition et relation d'ordre

Définition 1.5.1.

On appelle droite réelle achevée ou droite numérique achevée l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ *où :*

1 $-\infty$ *et* $+\infty$ *sont des éléments non réels ;*

2 $\overline{\mathbb{R}}$ *est muni de la relation d'ordre total qui prolonge celle de* $\mathbb{R}$ *telle que*

  a $-\infty$ *est strictement inférieur à tout* $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

  b $+\infty$ *est strictement supérieur à tout* $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

Remarque 1.5.1.

- $\overline{\mathbb{R}}$ *possède un plus grand élément :* $+\infty$ *et un plus petit élément :* $-\infty$.
- *Si* X *est une partie non vide de* $\mathbb{R}$, *par convention, on pose :*
  - $\sup X = +\infty$ *si* X *n'est pas une partie majorée de* $\mathbb{R}$.
  - $\inf X = -\infty$ *si* X *n'est pas une partie minorée de* $\mathbb{R}$.

Théorème 1.5.1.

Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ *possède une borne supérieure et une borne inférieure.*

1.5.2 Opérations

x	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$x + y$	$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$	$x + y$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$

x	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$x \in \mathbb{R}_-^*$	$x \in \mathbb{R}_-^*$	$x \in \mathbb{R}_*^*$	$x \in \mathbb{R}_-^*$	$x \in \mathbb{R}_-^*$
y	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$x \times y$	$+\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$

x	0	0	0	0	0	$x \in \mathbb{R}_+^*$	$x \in \mathbb{R}_+^*$	$x \in \mathbb{R}_+^*$	$x \in \mathbb{R}_+^*$	$x \in \mathbb{R}_+^*$
y	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$x \times y$		0	0	0		$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$

x	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$x \times y$	$-\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$

x	$x \in \mathbb{R}^*$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	0	0	

1.6 Valeur absolue

Définition 1.6.1.
Soit a un nombre réel. La valeur absolue de a est le nombre réel défini par :

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a > 0; \\ -a & si \quad a < 0; \\ 0 & si \quad a = 0. \end{cases}$$

Remarque 1.6.1.
Sur la droite numérique munie du repère $(o; \overrightarrow{i})$, pour tout réel x, il existe un unique point d'abscisse M. La valeur absolue du nombre x est la distance OM, c'est-à-dire la distance entre 0 et x. On a donc $|x| = d(x; 0)$.

Proposition 1.6.1 (Propriétés de la valeur absolue.)**.**

1. $|x| = \max\{x, -x\}$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
4. $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $|x - y| \leq r$, $y - r \leq x \leq y + r$,
5. $\sqrt{x^2} = |x|$.
6. $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| = |x||y|$,
7. $|-x| = |x|$,
8. *(1ère inégalité triangulaire)* $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$, $|x + y| \leq |x| + |y|$,
9. *(2ème inégalité triangulaire)* $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$ *;* $||x| - |y|| \leq |x + y|$,

Proposition 1.6.2.
Quels que soient soient les réels x et y,

1. $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ *;*
2. $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

Définition 1.6.2.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle distance de x a y le réel $|x - y|$.

1.7 Partie entière

Définition 1.7.1.
Soit a un nombre réel. Le plus grand entier inférieur ou égal à a s'appelle la partie entière de a. Nous le noterons $E(a)$ ou $\lfloor a \rfloor$.

Exemple 1.7.1.

1 $E(\pi) = 3$,

2 $E(-\pi) = -4$.

Remarque 1.7.1. *Les deux majorations suivantes sont souvent utiles dans les exercices :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E(x) \leq x < E(x) + 1 \quad \textit{et} \quad x - 1 < E(x) \leq x.$$

Proposition 1.7.1. *Soit x un réel. Il existe un unique entier relatif p tel que*

$$p \leq x < p + 1.$$

Remarque 1.7.2.
Nous aurons bientôt régulièrement recours aux raisonnements qui suivent, il faut donc bien les comprendre. Soient $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ fixés. Le mot « rang » désigne ci-dessous uniquement des entiers naturels.

- *À partir de quel rang est-il vrai que $\frac{1}{n} < \varepsilon$?*
  Cette inégalité est vraie si et seulement si $n > \frac{1}{\varepsilon}$, donc à partir du rang $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ car $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{1}{\varepsilon}$;
- *À partir de quel rang est-il vrai que $n^2 > A$? C'est vrai si et seulement si $n > \sqrt{A}$, donc à partir du rang $E(\sqrt{A}) + 1$.*
- *À partir de quel rang est-il vrai que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$? C'est vrai si et seulement si $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$, i.e. : $n > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$, donc à partir du rang $\max\left\{0; E\left(-\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}\right) + 1\right\}$.*
  Pourquoi ce « $\max$ » ? Parce que nous cherchons un entier naturel.

1.8 Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Définition 1.8.1.
Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A \quad \textit{tel que } |x - a| \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.8.1.
Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si on peut approché tout réel aussi près que l'on veut par un élément de A.

Théorème 1.8.1.
L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.8.2.
L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ formé des nombres irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$.

Chapitre 2

Suites de nombres réels

2.1 Suites convergentes, Suites divergentes

Définition 2.1.1.
On dit qu'une suite (u_n) est convergente vers le réel l (ou converge vers l, ou tend vers l) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Le nombre l est appelé la limite de la suite.
Si (u_n) n'est pas convergente, elle est dite divergente.
Si (u_n) converge vers l, on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \qquad ou \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l.$$

Définition 2.1.2.
On dit qu'une suite divergente (u_n) tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \geq A.$$

On note alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \qquad ou \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$

On dit qu'une suite divergente (u_n) tend vers $-\infty$ si :

$$\forall B < 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \leq B.$$

On note alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \qquad ou \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty.$$

Si (u_n) tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, on dit que (u_n) est une suite divergente de première espèce. Sinon, on dit que (u_n) est une suite divergente de deuxième espèce

Remarque 2.1.1. *Une suite divergente (u_n) tend vers $-\infty$ si $-(u_n)$ tend vers $+\infty$.*

Remarque 2.1.2. ***Attention !*** *Converger, ce n'est pas avoir une limite mais avoir une limite **FINIE**.*
*Diverger, ce n'est pas seulement avoir $\pm\infty$ pour limite, mais éventuellement **NE PAS AVOIR DE LIMITE**.*

Limite finie	*Limite $\pm\infty$*	*Pas de limite*
Convergence	*Divergence*	

Théorème 2.1.1 (Unicité de la limite)**.**
La limite d'une suite, si elle existe, est unique.

Théorème 2.1.2 (Condition nécessaire de convergence)**.**
Une suite convergente est bornée.

Remarque 2.1.3. *Une suite bornée n'admet pas forcément de limite. Par exemple $u_n = (-1)^n$.*

Méthode 2.1.1. *Pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, on peut utiliser le plan suivant :*

1 *Soit $\varepsilon > 0$.*

2 *On cherche à partir de quelle valeur N, on a $|u_n - l| \leq \varepsilon$ en sorte de vérifier le point 3 . Cela se ramène la plupart du temps à la résolution d'inéquations. C'est souvent la partie la partie la plus difficile de la preuve*

3 *Posons $N = ...$*

4 *Vérifions : soit $n \geq N$, on a bien $|u_n - l| \leq \varepsilon$.*

5 *Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$*

Exemple 2.1.1.
Montrons que la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 en utilisant le plan ci-dessus.

1 *Soit $\varepsilon > 0$.*

2 *On cherche N tel que $n \geq N \Rightarrow |\dfrac{1}{n} - 0| \leq \varepsilon$.*
On obtient $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

3 *On pose alors $N = E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1$.*

4 *Vérifions. Soit $n \geq N$. On a $n \geq N \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$. ce qui s'écrit aussi $\dfrac{1}{n} \leq \varepsilon$ ou encore $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| \leq \varepsilon$.*

5 *Donc* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Exemple 2.1.2.

En utilisant la définition de la limite, montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2.$
Rappelons la définition de la limite :

$$(\lim_{n\to+\infty} v_n = l) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\,; \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |v_n - l| < \varepsilon).$$

Soit $\varepsilon > 0$ *quelconque, on cherche* N_ε *pour que l'on ait pour* $n \geq N_\varepsilon$, $\left|\frac{2n+1}{n+2} - 2\right| \leq \varepsilon.$
Or

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n+1}{n+2} - 2\right| \leq \varepsilon \ &\Rightarrow \left|\frac{2n+1-2(n+2)}{n+2}\right| \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow \left|\frac{-3}{n+2}\right| \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow \frac{3}{n+2} \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow \frac{n+2}{3} \geq \frac{1}{\varepsilon} \\ &\Rightarrow n \geq \frac{3}{\varepsilon} - 2\end{aligned}$$

Choisissons $N_\varepsilon = \max\left\{0; E(\frac{3}{\varepsilon} - 2) + 1\right\}.$
Vérifions. Soit $n \geq N_\varepsilon$*. On a* $n \geq N_\varepsilon \geq \frac{3}{\varepsilon} - 2$*. Ce qui s'écrit aussi* $\frac{3}{n+3} \leq \varepsilon$ *ou encore* $\left|\frac{2n+1}{n+2} - 2\right| \leq \varepsilon.$

Méthode 2.1.2. *Pour montrer que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$*, on peut utiliser le plan suivant :*

1 *Soit* $M \in \mathbb{R}$.

2 *Posons* $N =$ *... voir méthode 2.1.1*

3 *Vérifions : soit* $n \geq N$*, on a bien* $u_n \geq M$.

Exemple 2.1.3.

En utilisant la définition de la limite montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n^2 + (-1)^n n\right) = +\infty.$$

Nous devons montrer que :

$$\forall A > 0,\ \exists N_A \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_A \Rightarrow n^2 + (-1)^n n > A.$$

Soit $A > 0$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, minorons :* $n^2 + (-1)^n n.$
On minore en simplifiant et en vérifiant que ce par quoi on minore tend toujours vers $+\infty$.

On arrête de minorer quand on se sent capable de trouver le rang N_A cherché.
On obtient

$$n^2 + (-1)^n n \geq n^2 - n = n(n-1) \geq (n-1)^2$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(n-1)^2 > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A} + 1$. Posons donc : $N_A = E(\sqrt{A}+1)+1$.
À partir de N_A, l'inégalité : $(n-1)^2 > A$ est vraie, donc aussi l'inégalité :
$n^2 + (-1)^n n > A$.

Proposition 2.1.1. *Soit (u_n) une suite réelle et l un réel. La suite (u_n) converge vers l si et seulement si la suite $(u_n - l)$ converge vers 0.*

Exemple 2.1.4.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+2} - 2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{-3}{n+2} = 0.$$

Proposition 2.1.2. *Soit (u_n) une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite réelle (α_n) et un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que*

(H_1) : $\forall n \geq N_1, |u_n - l| \leq \alpha_n$,

(H_2) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exemple 2.1.5.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1+\cos(n)}{n+2} = 2$.
On a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2n+1+\cos(n)}{n+2} - 2\right| &= \left|\frac{2n+1-2(n+2)+\cos(n)}{n+2}\right| \\
&= \left|\frac{-3+\cos(n)}{n+2}\right| \\
&\leq \frac{4}{n+2}
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n+2} = 0$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1+\cos(n)}{n+2} = 2$.

Théorème 2.1.3. *Soit (u_n) une suite et $k, k' \in \mathbb{R}$. On suppose que*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$;
2. $k < l < k'$.

Alors, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $k \leq u_n \leq k'$.

Proposition 2.1.3. *Soit (u_n) une suite réelle et $k \in \mathbb{R}$. On suppose que :*

(H_1) : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$,

(H_2) : *A partir d'un certain rang,* $u_n \leq k$.

Alors $l \leq k$.

Proposition 2.1.4. *Soient deux suites* (u_n) *et* (v_n). *On suppose que :*

(H_1) : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$,

(H_2) : $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} l'$,

(H_3) : *A partir d'un certain rang,* $u_n \leq v_n$.

Alors $l \leq l'$.

Théorème 2.1.4 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure)**.** *On considère une partie* X *non vide et majorée de* $\mathbb{R}$. *Elle possède une borne supérieure* $\sup X$. *Soit un réel* $l \in \mathbb{R}$. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

(H_1) : $l = \sup X$.

(H_2) : l *est un majorant de* X *et il existe une suite* (x_n) *d'éléments de* X *qui converge vers* l.

Théorème 2.1.5 (Caractérisation séquentielle de la borne inférieure)**.** *On considère une partie* X *non vide et minorée de* $\mathbb{R}$. *Elle possède une borne inférieure* $\inf X$. *Soit un réel* $l \in \mathbb{R}$. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

(H_1) : $l = \inf X$.

(H_2) : l *est un minorant de* X *et il existe une suite* (x_n) *d'éléments de* X *qui converge vers* l.

Exemple 2.1.6.

On note A *l'ensemble* $\left\{\frac{q}{2^p+q}\right\}_{p,q\in\mathbb{N}^*}$. *Montrons que* $\inf A = 0$ *et* $\sup A = 1$.

Pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq \frac{q}{2^p + q} \leq 1,$$

donc A *est minoré par 0 et majoré par 1. On a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n+1} = 0 \qquad \textit{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2+n} = 1;$$

avec : $\dfrac{1}{2^n+1} \in A$ *et* $\dfrac{n}{2+n} \in A$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Par suite,* $\inf A = 0$ *et* $\sup A = 1$.

Théorème 2.1.6 (Caractérisation séquentielle de la densité)**.** *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$. A *est dense dans* $\mathbb{R}$ *si et seulement si tout réel est la limite d'une suite d'éléments de* A.

2.2 Suite extraite d'une suite

Définition 2.2.1. *[Suite extraite] On dit qu'un suite (v_n) est une suite extraite ou une sous suite d'une suite (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$*

Exemple 2.2.1.
Les suites $\left(\sqrt{2^n + 4n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de la suite de terme général $\sqrt{n}$, associées respectivement aux fonctions $n \mapsto 2^n + 4n$ et $n \mapsto n^2$ strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Lemme 2.2.1. *Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.*

Proposition 2.2.1. *Une suite extraite d'une suite convergente est convergente Toute suite extraite d'une suite (u_n) convergeant vers une limite l est une suite convergeant vers l.*

Corollaire 2.2.1 (Critère de divergence d'une suite)**.** *Soit (u_n) une suite réelle. On suppose qu'il existe deux suites extraites $u_{\varphi(n)}$ et $u_{\widetilde{\varphi}(n)}$ telles que :*

$(H_1) : \lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l_1 \in \mathbb{R}$,

$(H_2) : \lim\limits_{n\to+\infty} u_{\widetilde{\varphi}(n)} = l_2 \in \mathbb{R}$,

$(H_3) : l_1 \neq l_2$.

Alors la suite (u_n) est divergente.

Exemple 2.2.2.
La suite $(u_n) = ((-1)^n)$ est divergente. En effet, la suite extraite (u_{2n}) converge vers 1 alors que la suite extraite (u_{2n+1}) converge vers -1.

Exemple 2.2.3.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{n}{9} - \left(E\left(\dfrac{\sqrt{n}}{3}\right)\right)^2$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite car : $u_{9n^2} = 0 \longrightarrow 0$ alors que : $u_{(3n+1)^2} = \dfrac{(3n+1)^2}{9} - \left(E\left(\dfrac{3n+1}{3}\right)\right)^2 = \left(n^2 + \dfrac{6n+1}{9}\right) - n^2 = \dfrac{6n+1}{9} \longrightarrow +\infty$.

Proposition 2.2.2. *Critère de convergence d'une suite Soit (u_n) une suite et $l \in \mathbb{R}$. On suppose que :*

$(H_1) : \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = l$;

$(H_2) : \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Définition 2.2.2 (valeur d'adhérence)**.** *Un réel l est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) s'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers l.*

Exemple 2.2.4.
Soit $u_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n})$. 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de (u_n).

Proposition 2.2.3. *Si (u_n) converge vers l, alors l est une valeur d'adhérence de (u_n). et c'est la seule.*

Proposition 2.2.4. *Soit (u_n) une suite de nombres réels. Un réel l est une valeur d'adhérence de (u_n) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'indices n tels que $|u_n - l| \leq \varepsilon$.*

2.3 Suites adjacentes

Définition 2.3.1 (Suites adjacentes)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si*

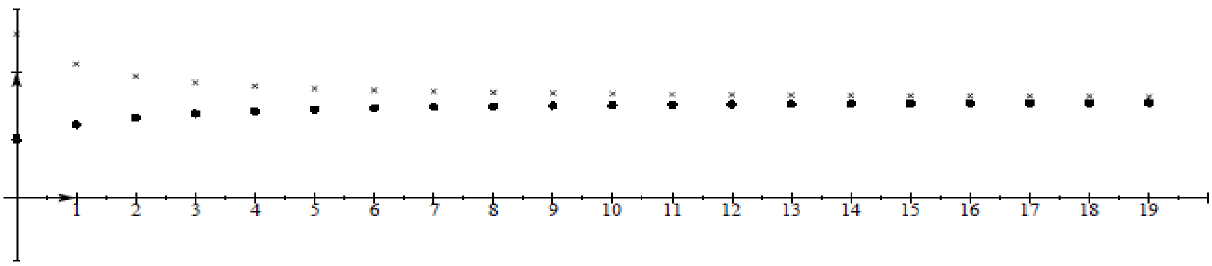
1. *(u_n) est croissante*
2. *(v_n) est décroissante*
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

Exemple 2.3.1.
Les suites de termes généraux $U_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $V_n = 1 + \frac{1}{n^2}$.
sont adjacentes. En effet, (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante puisque pour $n \geq 1$,

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \qquad et \qquad V_{n+1} - Vn = -\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} < 0,$$

et de plus $U_n - V_n = -\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Exemple 2.3.2.



Suites adjacentes

Théorème 2.3.1. *[Théorème de convergence des suites adjacentes] Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.*
Alors ces deux suites sont convergentes et convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l \leq v_n$.

2.4 Approximation décimale des réels

Dans tout ce paragraphe x est un nombre réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$p_n = E(10^n x).$$

Par définition de la partie entière d'un réel, on a $p_n \leq 10^n x < p_n + 1$. Cette inégalité est équivalente à $\frac{E(10^n x)}{10^n} \leq x < \dfrac{E(10^n x) + 1}{10^n}$.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{E(10^n x)}{10^n}$ et $b_n = \dfrac{E(10^n x) + 1}{10^n}$.

Remarque 2.4.1.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = 10^{-n}$.
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont des rationnels : $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$.*

Définition 2.4.1 (Valeur décimale approchée)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Les rationnels a_n et b_n sont appelés respectivement valeurs décimales approchées de x à 10^{-n} près respectivement par défaut et par excès.*

Exemple 2.4.1.

n		a_n	b_n	$erreur = 10^{-n}$
1	$\sqrt{2}$	*1*	*2*	*1*
2	$\sqrt{2}$	*1.4*	*1.5*	*0.1*
3	$\sqrt{2}$	*1.41*	*1.42*	*0.01*
4	$\sqrt{2}$	*1.414*	*1.415*	*0.001*

Théorème 2.4.1.
Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et leur limite commune est x.

2.5 Segments emboités et théorème de Bolzano-Weierstrass

Corollaire 2.5.1 (Théorème des segments emboîtés)**.**
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments, $I_n = [a_n, b_n]$ tels que

(H_1) : *Ils sont emboîtés : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$;*

(H_1) : *Leur diamètre tend vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$.*

Alors il existe un réel $l \in \mathbb{R}$ tel que $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{l\}$.

Théorème 2.5.1 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.**
De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

2.6 Suites récurrentes linéaires

2.6.1 Suites arithmético-géométrique

Définition 2.6.1.
On appelle suite arithmético-géométrique toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe $q, r \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = r + qu_n.$$

Remarque 2.6.1. *Si (u_n) est une suite arithmético-géométrique, avec $r = 0$, alors (u_n) est une suite géométrique.*
Si (u_n) est une suite arithmético-géométrique, avec $q = 1$, alors (u_n) est une suite arithmétique.
Dans le cas général, la méthode la plus rapide pour exprimer u_n en fonction de n et u_0 consiste à déterminer une suite constante (α) vérifiant la relation de récurrence : $\alpha = q\alpha + r$. La suite $(v_n) = (u_n - \alpha)$ vérifie $v_{n+1} = qv_n$ (suite géométrique) et donc $v_n = q^n v_0$. On en déduit que $u_n = \alpha + (u_0 - \alpha)q^n$ où $\alpha = r/(1-q)$.

Exemple 2.6.1.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + 1; \\ u_0 &= 1. \end{cases}$$

Déterminons le terme général u_n en fonction de n.
Soit α tel que $\alpha = 3\alpha + 1$. On a $\alpha = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$. Considérons la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + \frac{1}{2}$. Par suite,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + 1 + \frac{1}{2} = 3u_n + \frac{3}{2} = 3(u_n + \frac{1}{2}) = 3v_n.$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 3, ce qui nous permet d'écrire $v_n = 3^n v_0$ avec $v_0 = u_0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + \frac{1}{2}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - \frac{1}{2}$. Par suite $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$.

2.6.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 2.6.2.
On dit qu'une suite (u_n) est une suite récurrentes linéaires d'ordre 2 si :

$$\exists (b; c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad u_{n+2} = bu_{n+1} + cu_n.$$

Remarque 2.6.2. *Quand (u_n) est une suite récurrentes linéaires d'ordre 2, il faut aussi savoir exprimer le terme général de (u_n) en fonction de a, de b, de u_0 et de u_1. (Nous donnerons la méthode)*

Proposition 2.6.1. **1** *Si l'équation caractéristique* $r^2 - br - c = 0$ *possède 2 solutions réelles distinctes* r_1 *et* r_2*, le terme général de toute suite réelle satisfaisant la formulation de récurrence linéaire d'ordre 2 est de la forme*

$$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$$

avec λ_1 *et* λ_2 *deux réels.*

2 *Si l'équation caractéristique* $r^2 - br - c = 0$ *possède 1 solution réelle* $r_0 \neq 0$*, le terme général de toute suite réelle satisfaisant la formulation de récurrence linéaire d'ordre 2 est de la forme*

$$u_n = \lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^n,$$

avec λ_1 *et* λ_2 *deux réels.*

3 *Si l'équation caractéristique* $r^2 - br - c = 0$ *possède 2 solutions complexes conjuguées* $r = \rho e^{i\theta}$ *et* $\overline{r} = \rho e^{-i\theta}$*, le terme général de toute suite réelle satisfaisant la formulation de récurrence linéaire d'ordre 2 est de la forme*

$$u_n = \lambda_1 \rho^n \cos(n\theta) + \lambda_2 \rho^n \sin(n\theta),$$

avec λ_1 *et* λ_2 *deux réels.*

Exemple 2.6.2.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par*

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n; \\ u_0 & = & 1; \\ u_1 & = & 9. \end{array}\right.$$

Déterminons le terme général u_n *en fonction de* n.
L'équation caractéristique $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$ *possède* $\frac{1}{2}$ *comme seule solution. Le terme général* u_n *est de la forme*

$$u_n = \lambda_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \lambda_2 n \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

avec λ_1 *et* λ_2 *deux réels vérifiant* $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 1 \\ (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{1}{2} & = & 9, \end{array}\right.$
c'est à dire $\lambda_1 = 1$ *et* $\lambda_2 = 17$*. Par suite,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (17n+1)\frac{1}{2^n}.$$

2.7 Suites de cauchy.

Définition 2.7.1.
On dit qu'une suite (u_n) est de cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}; \forall (n;p) \in \mathbb{N}^2; \quad n \geq p \geq N \Rightarrow |u_n - u_p| \leq \varepsilon.$$

Théorème 2.7.1.
Une suite réelle est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

Exemple 2.7.1.
La suite de terme général $u_n = \sum_1^n \frac{1}{k}$ n'est pas convergente car elle n'est pas de Cauchy.
En effet, pour tout $n \geq 1$, on a

$$|u_{2n} - u_n| = \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Exemple 2.7.2.
La suite géométrique (k^n), pour $0 < k < 1$, est une suite de Cauchy.

On considère la suite numérique dont le terme général est défini par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}.$$

Montrons que $(u_n)_{n\geq 2}$ est une suite de cauchy.

On a

$$u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $p, q \in \mathbb{N}$. Supposons par exemple que $q > p$. Donc $u_p = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{p^2}$
$u_q = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} + ... + \frac{1}{q^2}$
Alors

$$\begin{aligned}
|u_p - u_q| &= \left|\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{p^2} - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} + ... + \frac{1}{q^2}\right)\right| \\
&= \left|-\left(\frac{1}{(p+1)^2} + ... + \frac{1}{q^2}\right)\right| \\
&= \frac{1}{(p+1)^2} + ... + \frac{1}{q^2}
\end{aligned}$$

Comme

$$p + 1 \geq p \Longrightarrow (p+1)^2 \geq p(p+1) \Longrightarrow \frac{1}{(p+1)^2} \leq \frac{1}{p\,(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$

$$p+2 \geq p+1 \Longrightarrow (p+2)^2 \geq (p+1)(p+2) \Longrightarrow \frac{1}{(p+2)^2} \leq \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

$$q \geq q-1 \Longrightarrow q^2 \geq q(q-1) \Longrightarrow \frac{1}{q^2} \leq \frac{1}{q(q-1)} = \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q}.$$

Alors

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &= \frac{1}{(p+1)^2} + \ldots + \frac{1}{q^2} \\ &\leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} + \ldots + \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Remarquons $\lim\limits_{p \longrightarrow +\infty} \frac{1}{p} = 0$. C'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists p_0 \in \mathbb{N}; \ \forall p \geq p_0, \frac{1}{p} < \varepsilon.$$

Donc pour $\varepsilon > 0$ qu'on va fixé d'avance, il existe un rang $n_0 = p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq n_0$,

$$p \geq n_0 \Longrightarrow |u_p - u_q| < \frac{1}{p} < \varepsilon.$$

Ce qui signifi que (u_n) est de cauchy.

2.8 Relations de comparaison

2.8.1 Suite dominée par une autre

Définition 2.8.1 (Suite dominée par une autre)**.**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est dominée par (v_n) si et seulement si il existe une suite (B_n) et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que :

1. *(B_n) est une suite bornée.*
2. *$\forall n \geq N, \, u_n = B_n v_n$*

On note alors :$u_n = \underset{n \to +\infty}{O}(v_n)$

Proposition 2.8.1 (Transitivité de la relation O)**.**
Le relation O est transitive, ce qui signifie que si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites, alors :

$$[u_n = \underset{n \to +\infty}{O}(v_n) \quad et \quad v_n = \underset{n \to +\infty}{O}(w_n)] \Rightarrow u_n = \underset{n \to +\infty}{O}(w_n).$$

Théorème 2.8.1.
Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Si à partir d'un certain rang (v_n) ne s'annule pas alors : $u_n = \underset{n \to +\infty}{O}(v_n) \Leftrightarrow (\frac{u_n}{v_n})$ est bornée

2.8.2 Suite négligeable devant une autre

Définition 2.8.2 (Suite négligeable devant une autre)**.**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement si il existe une suite (ε_n) et un rang N tels que

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$;
2. $\forall n \geq N, u_n = \varepsilon_n v_n$.

On note alors : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

Remarque 2.8.1. *Écrire que* $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ *revient à dire que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Proposition 2.8.2 (Transitivité de la relation o)**.**
La relation o est transitive, ce qui signifie que si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites réelles, alors :

$$[u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \quad et \quad v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)] \Rightarrow u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$$

Théorème 2.8.2.
Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si à partir d'un certain rang (v_n) ne s'annule pas alors :

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Remarque 2.8.2. *Vous rencontrerez deux façons d'utiliser la notation o.*

- *La première est celle de la définition. Par exemple, on peut écrire* $ln(n) = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$*, ce qui signifie que* $\frac{ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- *Mais vous rencontrerez aussi des écritures comme :* $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}(\frac{1}{n^3})$ *qui signifie que* $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$ *est négligeable devant* $\frac{1}{n^3}$ *quand* $n \to +\infty$. *Autrement dit* $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$ *est une approximation de* $\frac{1}{n-1}$ *quand* $n \to +\infty$ *et l'erreur commise est un* $\underset{n\to+\infty}{o}(\frac{1}{n^3})$. *c'est-à-dire est négligeable devant* $\frac{1}{n^3}$ *quand* $n \to +\infty$.

2.8.3 Suites équivalentes

Définition 2.8.3 (Suite équivalentes)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si et seulement si :*

$$u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n).$$

On note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Proposition 2.8.3.
La relation "est équivalente à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites. Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles. On a :

- $\sim$ *est réflexive :* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
- $\sim$ *est symétrique :* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
- $\sim$ *est transitive :* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

Théorème 2.8.3.
Soient (u_n) *et* (v_n) *deux suites réelles. Si* (v_n) *ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Méthode 2.8.1. *Pour montrer que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *on peut au choix, montrer que*

1. $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$;
2. *À partir d'un certain rang,* $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$ *avec* $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$;
3. *À partir d'un certain rang,* $u_n = v_n + \varepsilon_n$ *avec* $\varepsilon_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

Théorème 2.8.4 (Équivalents et limites).
Soit (u_n) *et* (u_n) *deux suites réelles . Alors :*

- *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *et si* $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$ *alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
- *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$ *avec* $l \neq 0$, *alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} l$.

Remarque 2.8.3. *Écrire* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ *revient à dire qu'à partir d'un certain rang, les termes de la suite* (u_n) *sont tous nuls.*

Proposition 2.8.4. *Un équivalent simple permet de connaître le signe d'une suite Si* (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites réelles équivalentes alors, il existe un rang à partir duquel elles sont de même signe*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow [\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, u_n v_n \geq 0].$$

Théorème 2.8.5 (Produits, quotients, puissances d'équivalents). *Soit* (a_n), (B_n), (u_n), (v_n) *des suites vérifiant :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n \qquad \text{et} \qquad v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n.$$

Alors :

1. $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n b_n$
2. *Si* (v_n) *et* (b_n) *ne s'annulent pas à partir d'un certain rang :* $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_n}{b_n}$.
3. *Si* (u_n) *et* (a_n) *sont strictement positives à partir d'un certain rang :* $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n^\alpha$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.8.1.

Calculons la limite de la suite (u_n) *définie par* $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\sqrt{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n \qquad et \qquad 2n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n,$$

d'où

$$\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2n}.$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

Exemple 2.8.2.

Calculons la limite de la suite (x_n) *définie par* $x_n = n \ln \sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\forall n > 1, \qquad x_n = \frac{n}{2} \ln \frac{n+1}{n-1} = \frac{n}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$$

Comme $\dfrac{2}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *on a*

$$\ln \left(1 + \frac{2}{n-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n-1}$$

car

$$\frac{\ln(x+1)}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1.$$

On a $\ln \left(1 + \dfrac{2}{n-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n-1}$, $\quad \dfrac{n}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2} \quad$ *et* $\quad \dfrac{n}{2} \times \dfrac{2}{n-1} = \dfrac{n}{n-1}$.
Donc ,

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.$$

Par suite

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 1.$$

Remarque 2.8.4. *Il faut faire attention lorsqu'il faut*

1. *Sommer des équivalents.*
2. *Composer des équivalents. En particulier,*
   - *Prendre des logarithmes d'équivalents.*
   - *Prendre des exponentielles d'équivalents.*

Exemple 2.8.3.

• $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ *et* $-n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n+2$ *mais cela n'a pas de sens d'écrire :* $1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$.
• $2n+n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$ *mais par contre* e^{2^n+n} *n'est pas équivalent à* e^{2^n} .

2.9 Comparaison des suites de référence

Proposition 2.9.1.

1 *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes strictement positifs et si, à partir d'un certain rang,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

alors $u_n = \underset{n \to +\infty}{o}(v_n)$.

2 *Soit (u_n)est une suite à termes strictement positifs . On a :*

(a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l < 1 \Rightarrow u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$

(b) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l > 1 \Rightarrow u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

Théorème 2.9.1 (Comparaison des suites de référence)**.**
Soient $a > 1$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

$$(\ln n)^\beta = \underset{n \to +\infty}{o}(n^\alpha) \qquad n^\alpha = \underset{n \to +\infty}{o}(a^n) \qquad a^n = \underset{n \to +\infty}{o}(n!) \qquad n! = \underset{n \to +\infty}{o}(n^n).$$

Théorème 2.9.2 (Équivalents usuels)**.**
Soit (u_n) une suite telle que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

1 $\sin u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$;

2 $\tan u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$;

3 $\ln(1 + u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$;

4 $[1 - \cos u_n] \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$;

5 $[e^{u_n} - 1] \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$;

6 $\sinh u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$;

7 $[(1 + u_n)^\alpha - 1] \underset{n \to +\infty}{\sim} \alpha u_n (\alpha \in \mathbb{R}^*)$.

2.10 Suites complexes

Définition 2.10.1.
Une suite complexe est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 2.10.2.
On dit qu'une suite de nombres complexes (z_n) converge vers un nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ si et seulement si la suite réelle $|z_n - a|$ converge vers 0.
On dit que la suite (z_n) diverge vers l'infini lorsque la suite réelle $|z_n|$ diverge vers $+\infty$.

Remarque 2.10.1. *Une autre façon de dire que* $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ *est*

$$\forall r > 0; \quad \exists N \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \forall n \geq N; \quad z_n \in D(a; r).$$

Remarque 2.10.2. *Toutes les propriétés démontrées sur les suites réelles ne faisant pas intervenir d'inégalités sont encore valables pour les suites complexes (les démonstrations n'utilisent que l'inégalité triangulaire). En particulier, on a les théorèmes généraux sur les sommes, produits, quotients, l'unicité de la limite, une suite convergente est bornée. On ne dispose plus par contre du passage à la limite dans les inégalités, du théorème de la limite monotone, ni du théorème des gendarmes. Le théorème suivant permet de montrer qu'une suite de complexes converge vers une limite.*

Proposition 2.10.1. *Soit* (z_n) *une suite complexe et* $a \in \mathbb{C}$*. On suppose qu'il existe une suite réelle* (α_n) *et un rang* $N_1 \in \mathbb{N}$ *tel que*

1. $\forall n \geq N_1, |z_n - a| \leq \alpha_n$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$.

Théorème 2.10.1.

$$(z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} Re(z_n) & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & Re(a) \\ Im(z_n) & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & Im(a) \end{cases} \right).$$

Exemple 2.10.1.

$$\lim_{n\to+\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2} \textit{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \textit{ donc : } \lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{n} + i \arctan n) = i\frac{\pi}{2}.$$

Théorème 2.10.2.

Soit un nombre complexe $k \in \mathbb{C}$*. On appelle suite géométrique de raison* k*, la suite définie par* $z_n = k^n$*. Elle vérifie la relation de récurrence* $z_{n+1} = kz_n$*.*

1. $|k| < 1 \Rightarrow (z_n)$ *converge vers 0.*
2. $|k| \geq 1$ *et* $k \neq 1 \Rightarrow (z_n)$ *diverge.*
3. $k = 1 \Rightarrow (z_n)$ *est constante et vaut* z_0*.*

Théorème 2.10.3.

On appelle série géométrique de raison k*, la suite complexe définie par :*

$$S_n = 1 + k + \ldots + k^n = \sum_{i=0}^{n} k^i.$$

1. $|k| < 1 \Rightarrow S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-k}$.
2. $|k| \geq 1 \Rightarrow (S_n)$ *diverge.*

Chapitre 3

Fonctions

3.1 Généralités sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

3.1.1 Fonctions Lipschitziennes

Définition 3.1.1 (Fonctions lipschitziennes)**.** *Soit un réel $k \geq 0$.*

– *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est $k-$lipschitzienne sur l'intervalle I si et seulement si*

$$\forall (x, y) \in I^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|;$$

– *On dit qu'une fonction est lipschitzienne sur l'intervalle I s'il existe $k \geq 0$ telle que f soit $k-$lipschitzienne ;*

– *Lorsque $k < 1$, f est dite contractante.*

Remarque 3.1.1. *On comprend mieux cette définition en écrivant la propriété équivalente,*

$$\exists k > 0,\ \forall (x, y) \in I^2,\ x \neq y, \quad \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq k.$$

Une fonction est lipschitzienne sur l'intervalle I si et seulement si l'ensemble des pentes de toutes ses cordes est borné.

Proposition 3.1.1 (Opérations sur les fonctions lipschitziennes)**.**

1 *Une combinaison linéaire de deux fonctions lipschitzienne est encore lipschitzienne.*

2 *La composée de deux fonctions lipschitziennes est encore lipschitzienne.*

3 *Soit $c \in I$, on note $I_1 = I \cap]-\infty, c]$ et $I_2 = I \cap [c, +\infty[$. Si f est lipschitzienne sur I_1 et sur I_2, alors elle est lipschitzienne sur I.*

Exemple 3.1.1.
La fonction $x \mapsto |x|$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
L'inégalité triangulaire donne $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Exemple 3.1.2.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est 1-lipschitzienne sur $[1, +\infty[$ mais pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+^*$
Pour tous $x, y \in [1, +\infty[$,

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{x-y}{xy}\right| = \frac{|x-y|}{|xy|} \leq |x - y|.$$

En revanche

$$\frac{\frac{1}{2x} - \frac{1}{x}}{2x - x} = -\frac{1}{2x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty.$$

Donc l'ensemble des $\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ avec $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \neq y$ n'est pas bornée, donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ mais pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.2 Limites

3.2.1 Notion de limite

Définition 3.2.1.
Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- *Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in D$.*

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D, \qquad |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- *Cas où $\ell = +\infty$ et $a = +\infty$.*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall B > 0, \quad \exists A > 0, \quad \forall x \in D, \qquad x > A \Longrightarrow f(x) > B.$$

- *Cas où $\ell = -\infty$ et $a = +\infty$.*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall B < 0, \quad \exists A > 0, \quad \forall x \in D, \qquad x > A \Longrightarrow f(x) < B.$$

- *Cas où $\ell = +\infty$ et $a = -\infty$.*

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall B > 0, \quad \exists A < 0, \quad \forall x \in D, \qquad x < A \Longrightarrow f(x) > B.$$

- *Cas où $\ell = -\infty$ et $a = -\infty$.*

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall B < 0, \quad \exists A < 0, \quad \forall x \in D, \qquad x < A \Longrightarrow f(x) < B.$$

- *Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a = +\infty$.*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \quad \forall x \in D, \qquad x > A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- *Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a = -\infty$.*

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \quad \exists A < 0, \quad \forall x \in D, \qquad x < A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- *Cas où $\ell = +\infty$ et $a \in \mathbb{R} \diagdown D$.*

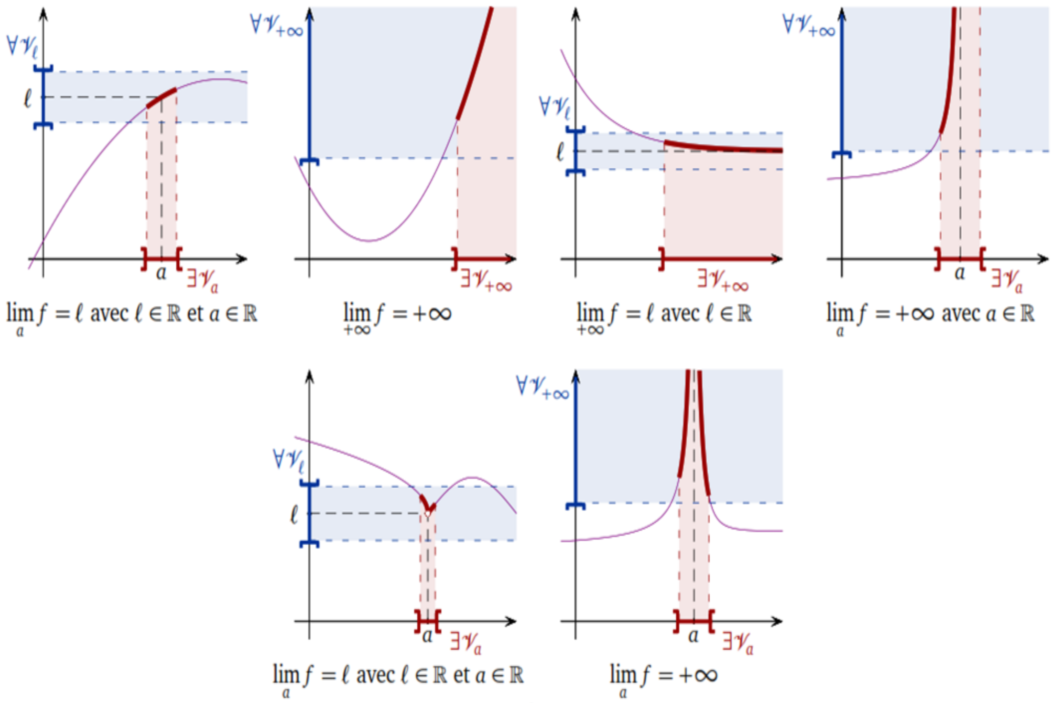
$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D, \qquad |x - a| < \alpha \Longrightarrow f(x) > A.$$

- *Cas où $\ell = -\infty$ et $a \in \mathbb{R} \diagdown D$.*

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty \iff \forall A < 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D, \qquad |x - a| < \alpha \Longrightarrow f(x) < A.$$

Remarque 3.2.1. *Comme pour les suites, on peut utiliser des inégalités larges $|f(x) - l| \leq \varepsilon$, $|x - a| \leq \delta$, $x \geq M \cdots$ dans la définition.*

Exemple 3.2.1.



Exemple 3.2.2.

- $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ *pour tout $x_0 \geq 0$,*
- *la fonction partie entière E n'a pas de limite aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$.*

Exemple 3.2.3.
Montrons que $\lim_{x\to 1} \dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}} = +\infty$ *en utilisant la définition. Nous devons montrer que*

$$\forall A > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall x \in]1, +\infty[, \quad |x-1| < \alpha \Rightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} > A.$$

Soit $A > 0$*. Pour tout* $x \in]1, +\infty[$*, minorons :* $\dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}}$.
On minore en simplifiant et en vérifiant que ce par quoi on minore tend toujours vers $+\infty$ *lorsque* x *tend vers 1. On arrête de minorer quand on se sent capable de trouver* α.
On obtient

$$\frac{x+2}{\sqrt{x-1}} \geq \frac{3}{\sqrt{x-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

Résolvons l'inéquation $x \in]1, +\infty[$, $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} > A$.

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} > A \Leftrightarrow \sqrt{x-1} < \frac{1}{A} \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{A^2}$$

Posons $\alpha = \dfrac{1}{A^2}$.
Vérifions : $\forall x \in]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} |x-1| < \frac{1}{A^2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x-1}} > A \\ &\Rightarrow \quad \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} > A. \end{aligned}$$

Exemple 3.2.4.
Montrons que $\lim_{x\to +\infty}(x^2 - x) = +\infty$ *en utilisant la définition. Nous devons montrer que*

$$\forall A > 0, \quad \exists B > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x > B \Rightarrow x^2 - x > A.$$

Soit $A > 0$*. Pour tout* $x \geq 2$*, minorons :* $x^2 - x$.
On minore en simplifiant et en vérifiant que ce par quoi on minore tend toujours vers $+\infty$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$*. On arrête de minorer quand on se sent capable de trouver le rang* B.
On obtient

$$x^2 - x = x(x-1) \geq x.$$

Posons $B = \max\{A, 2\}$.
Vérifions : $\forall x \in [2, +\infty[$,

$$\begin{aligned} x > \max\{A, 2\} \quad &\Rightarrow \quad x > A \\ &\Rightarrow \quad x^2 - x > A. \end{aligned}$$

Exemple 3.2.5.
On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$ *:*

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0.$

Exemple 3.2.6.
Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *avec* $a_n > 0$ *et* $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ *avec* $b_m > 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

Proposition 3.2.1 (Limite finie $\Rightarrow$ localement bornée)**.** *Soit* $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *une fonction admettant une limite finie en* $a \in I$*. Alors il existe un voisinage* V *du point* a *sur lequel la fonction* f *est bornée. a.*

Proposition 3.2.2 (Transformation de limite en inégalité)**.** *Soit* $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *une fonction,* $a \in I$ *et* $l \in \mathbb{R}$ *et deux réels* $k, k' \in \mathbb{R}$*. On suppose que*

$(H_1): \ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$

$(H_2): \ k < l < k'$

Alors il existe un voisinage V *du point* a *tel que* $\forall x \in V \ I$*,* $k \leq f(x) \leq k'$*.*

Pour montrer qu'une fonction tend vers l lorsque x tend vers a, on majore en pratique $|f(x) - l|$ par une fonction qui tend vers zéro.

Proposition 3.2.3 (Théorème de majoration)**.** *Soient*

- *une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$*,* $a \in \overline{I}$ *et* $l \in \mathbb{R}$ *;*
- θ *une fonction définie sur un voisinage* V *de* a*.*

On suppose que

$(H_1): \ \forall x \in V, |f(x) - l| \leq \theta(x)$ *;*

$(H_2): \ \theta(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$

alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ *.*

3.2.2 Limite à gauche et à droite

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition 3.2.2.

- *On appelle limite à droite en x_0 de f la limite de la fonction $f\big|_{]x_0,b[}$ en x_0 et on la note* $\lim\limits_{x_0^+} f$.
- *On définit de même la limite à gauche en x_0 de f : la limite de la fonction $f\big|_{]a,x_0[}$ en x_0 et on la note* $\lim\limits_{x_0^-} f$.
- *On note aussi $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ pour la limite à droite et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ pour la limite à gauche.*

Remarque 3.2.2.

- *Dire que $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ à droite en x_0 signifie donc :*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

- *Dire que $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ à gauche en x_0 signifie donc :*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Proposition 3.2.4. *Soient x_0 et l deux nombres réels. f est une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en x_0 sauf éventuellement en x_0.*

- *f n'est pas définie en x_0.*
  La fonction f admet une limite l en x_0 si et seulement si f admet en x_0, une limite à gauche et une limite à droite égales à l. c'est-à-dire

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l.$$

- *f est définie en a.*
  La fonction f admet une limite l en x_0 si et seulement si f admet en x_0, une limite à gauche et une limite à droite égales à $f(x_0)$. c'est-à-dire

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Exemple 3.2.7.

Considérons la fonction partie entière au point $x = 2$:

- *comme pour tout $x \in]2, 3[$ on a $E(x) = 2$, on a $\lim\limits_{2^+} E = 2$,*
- *comme pour tout $x \in [1, 2[$ on a $E(x) = 1$, on a $\lim\limits_{2^-} E = 1$.*

Ces deux limites étant différentes, on en déduit que E n'a pas de limite en 2.

3.2.3 Comparaison au voisinage d'un point

a) Définitions

Soit f et g deux fonctions définies sur I, et x_0 un point, fini ou infini, appartenant à I, ou extrémité de I.

Définition 3.2.3.
On dit que f est dominée par g au voisinage de x_0 s'il existe $A > O$ tel que $|f(x)| \leq A|g(x)|$ pour tout x d'un voisinage J de x_0.
On note : $f = \underset{x \to x_0}{O}(g)$.
Si g ne s'annule pas sur J, cela signifie que $\dfrac{f}{g}$ est bornée sur J.

Définition 3.2.4.
On dit que f est négligeable devant g, ou que g est prépondérante devant f, au voisinage de x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage J de x_0 tel que l'on ait $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ pour tout x de J.
On note : $f = \underset{x \to x_0}{o}(g)$.
Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, cela signifie : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Définition 3.2.5.
On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0, si on a $f - g = o(g)$.
On note : $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou $f \underset{x_0}{\sim} g$.
Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, cela signifie : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Remarque 3.2.3.
La relation $\underset{x_0}{\sim}$ est transitive. Si l'on sait que $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$, on en déduit que $f \underset{x_0}{\sim} h$.

b) Exemples fondamentaux

Proposition 3.2.5 (Comparaison des fonctions usuelles)**.** *Soient α, β et γ des réels strictement positifs.*

- *En $+\infty$:*

$$(\ln x)^\gamma = \underset{x \to +\infty}{o}(x^\alpha) \qquad et \qquad x^\alpha = \underset{x \to +\infty}{o}(e^{\beta x})$$

- *En 0 et en $-\infty$:*

$$|lnx|^\gamma = \underset{x \to 0}{o} \frac{1}{x^\alpha} \qquad et \qquad e^{\beta x} = \underset{x \to a}{o} \frac{1}{x^\alpha}$$

Autrement dit :
Aux bornes de l'intervalle de définition,

- *<< l'exponentielle l'emporte sur la puissance >>,*
- *<< la puissance l'emporte sur le logarithme >>.*

c) Propriétés des fonctions équivalentes

Proposition 3.2.6.

1 *Si* $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$, *alors*

$$f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2 \qquad et \qquad \frac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \frac{g_1}{g_2}.$$

2 *Si* $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ *et si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, *alors*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Remarque 3.2.4. *Des propriétés précédents, il résulte que, lorsque l'on a à chercher la limite d'un produit ou d'un quotient, on peut remplacer chacune des fonctions par une fonction équivalente, choisie pour simplifier le calcul. Mais attention à ne pas effectuer un tel remplacement dans une somme, ni dans une fonction composée.*

d) Équivalents classiques

Proposition 3.2.7 (Équivalents classiques en 0)**.**

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\sinh x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \tanh x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad arctan x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$argshx \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad argthx \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \qquad \cosh x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$\arccos x - \frac{\pi}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -x \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Exemple 3.2.8.

1 $\ln(1+\sqrt{x}) \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$ *car* $\sqrt{x} \underset{x\to 0}{\to} 0$;

2 $e^{\frac{1}{x^2}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ *car* $\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$

3.3 Continuité

3.3.1 Continuité uniforme

Définition 3.3.1.
Une fonction f *est uniformément continue sur* D *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \forall y \in D, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Remarque 3.3.1.
Dans cette écriture logique, δ dépend de ε, mais pas de x ; d'où l'origine du mot uniforme.

Exemple 3.3.1.
La fonction $\sqrt{}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
Soit x et x' des réels positifs. On peut supposer que $x \leq x'$. Montrons que $|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \leq \sqrt{x' - x}$. Cette inégalité équivaut à $x' + x - 2\sqrt{xx'} \leq x' - x$, c'est-à-dire $x \leq \sqrt{xx'}$, qui est manifestement vraie avec $0 \leq x \leq x'$. Etant donné $\varepsilon > 0$, pour que x et x' positifs vérifient $|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \leq \varepsilon$ il suffit que $|x - x'| = \varepsilon^2$.

Proposition 3.3.1.
La continuité uniforme sur D entraîne la continuité sur D.

Théorème 3.3.1 (Théorème de Heine)**.** *Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.*

Proposition 3.3.2.
Si f est lipschizienne sur D, alors elle est uniformément continue sur D.

3.4 Fonctions dérivables

3.4.1 Inégalité des accroissements finis

Théorème 3.4.1.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Si $m \leq f' \leq M$, alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

En particulier, si $|f'| \leq M$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$.

Exemple 3.4.1.
Montrons que : $\dfrac{1}{\sqrt{19}} \leq \sqrt{19} - \sqrt{17} \leq \dfrac{1}{\sqrt{17}}$.
On pose $f(x) = \sqrt{x}$.
f est dérivable sur $[17; 19]$ et $\forall x \in [17; 19]$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
$\forall x \in [17; 19]$, $\sqrt{17} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{19}$, donc $\dfrac{1}{2\sqrt{19}} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{17}}$.
D'après l'inégalité des accroissements finis, on a : $\dfrac{1}{2\sqrt{19}}(19 - 17) \leq f(19) - f(17)) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{17}}(19 - 17)$; Donc $\dfrac{1}{\sqrt{19}} \leq \sqrt{19} - \sqrt{17} \leq \dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

Exemple 3.4.2.
Montrons que, pour tous nombres réels x et y, on a : $|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \cos(t)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = -\sin(t)$.
On a $|f'(t)| \leq 1$ pour tout nombre réel t.
Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous nombres réels x et y, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq 1.|x - y|.$$

3.4.2 Formule de Leibniz

Si f et g admettent des dérivées d'ordre n en x_0, alors il en est de même de fg ; et on a :

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

Exemple 3.4.3.

- *Pour $n = 1$ on retrouve* $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.
- *Pour $n = 2$, on a* $(f \cdot g)'' = \binom{2}{0} f''g + \binom{2}{1} f'g' + \binom{2}{2} fg'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

Exemple 3.4.4.
Calculons les dérivées n-ième de $\exp(x) \cdot (x^2 + 1)$ pour tout $n \geq 3$. Notons $f(x) = \exp(x)$ alors $f'(x) = \exp(x)$, $f''(x) = \exp(x)$,..., $f^{(k)}(x) = \exp(x)$. Notons $g(x) = x^2 + 1$ alors $g'(x) = 2x$, $g''(x) = 2$ et pour $k \geq 3$, $g^{(k)}(x) = 0$.

Appliquons la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}(f \cdot g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \cdot g(x) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x) \cdot g^{(1)}(x) + \\ + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x) \cdot g^{(2)}(x) + \binom{n}{3} f^{(n-3)}(x) \cdot g^{(3)}(x) + \cdots\end{aligned}$$

On remplace $f^{(k)}(x) = \exp(x)$ et on sait que $g^{(3)}(x) = 0$, $g^{(4)}(x) = 0$,... Donc cette somme ne contient que les trois premiers termes :

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \exp(x) \cdot (x^2 + 1) + \binom{n}{1} \exp(x) \cdot 2x + \binom{n}{2} \exp(x) \cdot 2.$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \exp(x) \cdot \Big(x^2 + 2nx + n(n-1) + 1\Big).$$

3.4.3 Condition nécessaire et condition suffisante d'extrémum local

A) Condition nécessaire d'extrémum local

Proposition 3.4.1.
Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Si f admet un extremum local en x_0 et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

B) Condition suffisante d'extrémum local

Proposition 3.4.2.
Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. f, f' et f'' étant continues sur $]a, b[$, si en $x_0 \in]a, b[$, on a $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$, la fonction f presente un extremum local en x_0.
C'est un maximum si $f''(x_0) < 0$, un minimum si $f''(x_0) > 0$.

Remarque 3.4.1. *Le critère utilisant la dérivée seconde pour déterminer s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum relatif ne s'applique pas lorsque $f"(x_0) = 0$. Il existe cependant un critère fondé sur les dérivées d'ordre supérieur permettant de conclure quant à l'existence d'un extremum dans les cas suivants : Si $f'(x_0) = f"(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-l)}(x_0) = 0$ et $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, alors :*

1. *Pour n pair :*
   - a. $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ *minimum relatif en $x = x_0$.*
   - b. $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ *maximum relatif en $x = x_0$.*
2. *Pour n impair : ni minimum ni maximum relatif en $x = x_0$.*

Exemple 3.4.5.
Soit la fonction $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 1$. Cherchons les minima et maxima de eette fonetion :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 12x^3 - 6x^2 = 6x^2(2x-1) \\
f'(x) &= 0 \Leftrightarrow 6x^2(2x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \\
f''(x) &= 36x^2 - 12x \\
f''\left(\frac{1}{2}\right) &= 3 > 0 \Rightarrow \texttt{minimum (absolu) en } x = \frac{1}{2} \\
f''(0) &= 0 : \texttt{on ne peut pas conclure. Calculons} \\
f'''(x) &= 72x - 12 \\
f'''(0) &= -12 \neq 0.
\end{aligned}$$

D'après le critère ci-dessus, comme $n = 3$ est impair, on peut en conclure qu'en $x = 0$, il n'y a ni minimum ni maximum. relatif.

3.4.4 Théorème de Rolle et des accroissements finis

A) Théorème de Rolle

Théorème 3.4.2.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Autre énoncé

Si f est dérivable sur un intervalle I, entre deux valeurs de I qui annulent f, il existe au moins une valeur de I qui annule f'.

Interpretation graphique

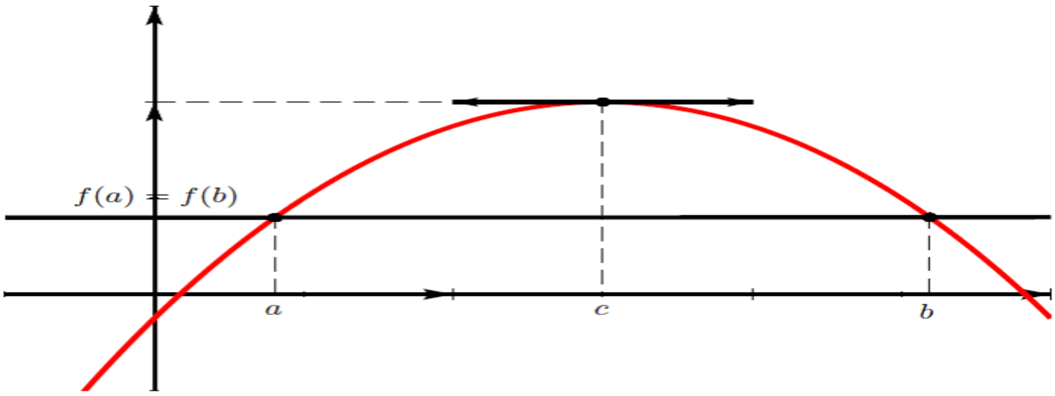


FIGURE Théorème de Rolle

Interpretation cinematique Un point mobile sur un axe qui revient a sa position de depart a vu sa vitesse s'annuler a un instant donne.

Exemple 3.4.6.
Montrons en utilisant le Theoreme de Rolle que pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, le polynôme

$$P = 4\alpha X^3 + 3\beta X^2 + 2\gamma X - (\alpha + \beta + \gamma)$$

possède une racine dans $]0, 1[$.
Fixons $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.Posons :

$$Q = \alpha X^4 + \beta X^3 + \gamma X^2 - (\alpha + \beta + \gamma)X.$$

Ce polynôme Q est une primitive de P et on a $Q(0) = Q(1) = 0$. D'après le Théorème de Rolle, $P = Q'$ s'annule donc au moins une fois entre 0 et 1.

B) Égalité des accroissements finis

Théorème 3.4.3.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Remarque 3.4.2. *Cette egalite et le theorème de Rolle, valables pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ne se généralisent pas au cas des fonctions de R dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$.*

3.4.5 Limite de la dérivée

Proposition 3.4.3.
Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et si f' a une limite finie l en a, alors f est dérivable a droite en a et $f'(a) = l$.
Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et si f' a une limite finie l en b, alors f est dérivable a gauche en b et $f'(b) = l$.

Remarque 3.4.3. *Il s'agit d'une condition suffisante de dérivabiIité, mais eIle n'est pas nécessaire. Il peut arriver que $f'(a)$ existe sans que f' ait une Iimite en a.*

3.4.6 Règle de l'Hospital

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si α est dans I, on notera $V(\alpha)$ un voisinage de α dans I, et $V'(\alpha) = V(\alpha) \setminus \{\alpha\}$.
le voisinage épointé correspondant. (Si α est infini on a $V(\alpha) = V'(\alpha)$).

Théorème 3.4.4 (Règle de l'Hospital). *Soit f et g dérivables dans un voisinage épointé de α. Supposons que :*

(1) $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$ *ou* $\lim_{x\to\alpha} |f(x)| = \lim_{x\to\alpha} |g(x)| = +\infty$ *;*

(2) $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *possède une limite l en α.*

Alors,

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Remarquons que l'existence de la limite de $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ suppose qu'il existe un voisinage épointé de α dans lequel g' ne s'annule pas. Soit donc $V'(\alpha)$ un tel voisinage.

Exemple 3.4.7.
Calculer la limite $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$.

On a ici $f(x) = x - 1$ *et* $g(x) = x^2 + x - 2$. *Ces deux fonctions s'annulent en* $x = 1$. *On calcule leurs dérivées* $f'(x) = 1$ *et* $g'(x) = 2x + 1$. *Ces dérivées sont continues donc la limite du quotient est*

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{1}{3}.$$

Par suite $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{3}$.

Exemple 3.4.8.

Calculer la limite $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$.

On a ici $f(x) = \sin(x)$ *et* $g(x) = x$. *Ces deux fonctions s'annulent en* $x = 0$. *On calcule leurs dérivées* $f'(x) = \cos(x)$ *et* $g'(x) = 1$. *Ces dérivées sont continues donc la limite du quotient est*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{\cos(0)}{1} = 1.$$

Par suite $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Exemple 3.4.9.

Calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(\frac{x}{2})}{1 - \cos(x)}$.

En posant $f(x) = 1 - \cos(\frac{x}{2})$ *et* $g(x) = 1 - \cos(x)$ *on a* $f(0) = g(0) = 0$ *et* f *et* g *sont dérivable en 0 avec* $f'(0) = 0$ *et* $g'(0) = 0$ *car* $f'(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2})$ *et* $g'(x) = \sin(x)$. *Les fonctions dérivées étant aussi dérivables en 0 on passe à la dérivée seconde.* $f"(x) = \frac{1}{4}\cos(\frac{x}{2})$ *et* $g"(x) = \cos(x)$. *D'où*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(\frac{x}{2})}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2})}{\sin(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{4}\cos(\frac{x}{2})}{\cos(x)} = \frac{1}{4}.$$

Exemple 3.4.10.

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Remarque 3.4.4. *Pour les autres formes indéterminées, on peut aussi utiliser la règle de l'Hospital, mais il faut avant tout les réduire à une expression* $\dfrac{0}{0}$ *ou* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

- **Forme indéterminée $\infty - \infty$:**

Méthode 3.4.1.
Si $\lim\limits_{x\to c}[f(x)-g(x)]$ *est de la forme* $+\infty-\infty$ *ou* $-\infty+\infty$, *c'est-à-dire* $\lim\limits_{x\to c} f(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to c} g(x)=+\infty$, *ou* $\lim\limits_{x\to c} f(x)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to c} g(x)=-\infty$, *alors :*

$$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to c}\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{g(x)}\cdot\dfrac{1}{f(x)}}$$

est de la forme $\dfrac{0}{0}$, *forme indéterminée que l'on résoudra par la regle de l'Hospital.*

Exemple 3.4.11.
Calculons la limite $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{e^x-1}\right)$. *Cette limite est du type* $\infty-\infty$. *Avec* $f(x)=\dfrac{2}{x}$ *et* $g(x)=\dfrac{2}{e^x-1}$, *on obtient :*

$$\lim_{x\to 0}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\frac{2}{e^x-1}}-\dfrac{1}{\frac{2}{x}}}{\dfrac{1}{\frac{2}{e^x-1}}\cdot\dfrac{1}{\frac{2}{x}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\frac{2}{e^x-1}}-\dfrac{1}{\frac{2}{x}}}{\dfrac{e^x-1}{2}\cdot\dfrac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{\frac{1}{2}x(e^x-1)}$$

qui est une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. *Par la règle de l'Hospital :*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{\frac{1}{2}x(e^x-1)} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\frac{1}{2}\left(xe^x+e^x-1\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\frac{1}{2}\left(xe^x+2e^x\right)}\\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 2}=1\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{e^x-1}\right)=1.$

- **Forme indeterrninee $0\cdot\infty$:**

Méthode 3.4.2.
Si $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)]=0\cdot\infty$, *c'est-à-dire* $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ *et* $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\infty$, *alors* $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{1/g(x)}$ *est de la forne* $\dfrac{0}{0}$.
Alternativement, $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{g(x)}{1/f(x)}$ *est de la forne* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Exemple 3.4.12.

Calculons la limite $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2 \cdot \ln x)$.

It s'agit d'une forme indeierrninee $0 \cdot \infty$. *Avec* $f(x) = x^2$ *et* $g(x) = \ln x$, *on obtient :*

$$\lim_{x\to 0^+}(x^2 \cdot \ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$$

qui est une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$. *Par la règle de l 'Hospital :*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^3}{2x} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2} = 0.$$

- **Formes indéterrninées 0^0, 1^∞ et ∞^0 :**

Méthode 3.4.3.

Si $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^{g(x)}$ *est l'une de ces formes, alors on pose :*

$$y = [f(x)]^{g(x)}.$$

Si $\lim\limits_{x\to c}\ln y = b$, *alors* $\lim\limits_{x\to c} y = e^b$. *En particulier si* $b = -\infty$ *ou* ∞, *on obtient respectivement* $\lim\limits_{x\to c}\ln y = 0$ *ou* $\lim\limits_{x\to c}\ln y = \infty$.

Exemple 3.4.13.

Calculons les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)^{x^2-4}$. *Il s 'agit d'une forme indeterminee* 0^0. *Calculons par consequent :*

$$\lim_{x\to 2^+}\ln(x-2)^{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+}(x^2-4)\ln(x-2) = \lim_{x\to 2^+}\frac{\ln(x-2)}{\frac{1}{x^2-4}}.$$

Il s'agit d'une forme $\dfrac{\infty}{\infty}$ *et nous pouuons appliquer la regle de l'Hospital :*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+}\frac{\ln(x-2)}{\frac{1}{x^2-4}} &= \lim_{x\to 2^+}\frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{-2x}{(x^2-4)^2}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x^2-4)^2}{-2x(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 2^+}\frac{2x(x^2-4)}{-4x+4} = \frac{0}{4} = 0\end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)^{x^2-4} = e^0 = 1$.

2 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+x^2)^{1/x}$. *Il s 'agit d'une forme indéterminée* ∞^0. *Calculons :*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left((1+x^2)^{1/x}\right) &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\ln\left(1+x^2\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x} = 0\end{aligned}$$

et donc, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+x^2)^{1/x} = e^0 = 1$.

3.4.7 Convexité

A) Partie convexe, fonction convexe

Définition 3.4.1.
Une partie du plan est dite convexe si, dès qu'elle contient deux points A et B, elle contient tout le segment $[AB]$.
Une fonction f, définie sur un intervalle I, est convexe sur I si la partie du plan située au-dessus de la courbe est convexe ; c'est-a-dire si tout arc de sa courbe representative est situe au-dessous de la corde correspondante.
Cette definition se traduit par :

$$\forall x_1 \in I,\ \forall x_2 \in I,\ \forall t \in [0,1],\ \ f[tx_1 + (1-t)x_2] \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Si $-f$ est convexe, f est dite concave.

Exemple 3.4.14.
La fonction $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. On peut le prouver par le calcul (vous en profiterez au passage pour constater comme la chose est pénible). Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
f(ta+(1-t)b) - [tf(a)+(1-t)f(b)] &= (ta+(1-t)b)^2 - [ta^2+(1-t)b^2] \\
&= t^2a^2 + 2t(1-t)ab + (1-t)^2b^2 - [ta^2+(1-t)b^2] \\
&= t^2a^2 + 2t(1-t)ab + (1-t)^2b^2 - ta^2 - (1-t)b^2 \\
&= (t^2-t)a^2 + 2t(1-t)ab + [(1-t)^2 - (1-t)]b^2 \\
&= t(t-1)a^2 + 2t(1-t)ab + (1-2t+t^2-1+t)b^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(ta+(1-t)b) - [tf(a)+(1-t)f(b)] &= t(t-1)a^2 + 2t(1-t)ab + (-t+t^2)b^2 \\
&= t(t-1)a^2 + 2t(1-t)ab + t(t-1)b^2 \\
&= t(t-1)(a^2+2ab+b^2) \\
&= t(t-1)(a+b)^2 \\
&\leq 0 \quad \mathtt{car} \quad t \geq 0, \quad t-1 \leq 0 \quad \mathtt{et} \quad (a+b)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Par suite, $f(ta+(1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$.

Exemple 3.4.15.

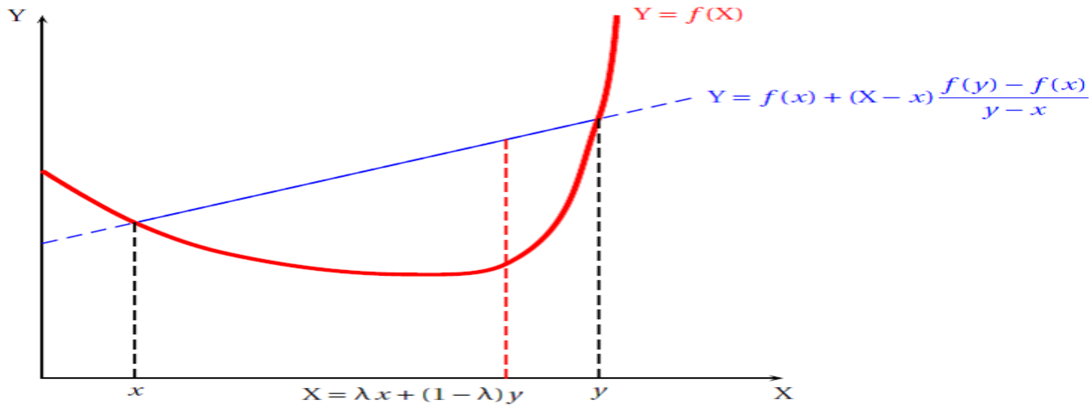


FIGURE Fonctions convexes

B) Inégalité de convexité

Proposition 3.4.4.
f etant convexe sur un intervalle I, si $x_1, \cdots, x_n$ appartiennent a I, si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, alors :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

C) Fonctions convexes dérivables

Proposition 3.4.5.
Soit f une fonction dérivable sur I. La fonction f est convexe sur I si, et seulement si, f', est croissante.
Si f est deux fois dérivable sur I, cela correspond a f'' positive sur I.
Le graphe de toute fonction convexe dérivable est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Exemple 3.4.16.
- *La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.*
- *La fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.*
- *La fonction sinus est concave sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.*

Exemple 3.4.17.
La fonction $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x \qquad \texttt{et} \qquad f''(x) = 2 > 0.$$

Exemple 3.4.18.
Soit $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \qquad \texttt{et} \qquad f''(x) = 6x - 4.$$

Comme $f''(x) < 0$ *pour* $x < \frac{3}{2}$*, la fonction est concave sur* $]-\infty; \frac{3}{2}[$*.* $f''(x) > 0$ *pour* $x > \frac{3}{2}$ *; par conséquent, la fonction est convexe sur* $]\frac{3}{2}; \infty[$*.*

Chapitre 4

Fonctions usuelles

4.1 Fonctions logarithmes, exponentielles et puissances

4.1.1 Logarithme népérien

Définition

Définition 4.1.1.
La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & \frac{1}{x}. \end{array} \right.$ *est continue sur l'intervalle* $]0,+\infty[$*. Elle admet donc des primitives sur* $]0,+\infty[$*.*
On appelle fonction logarithme népérien l'unique primitive de f *sur* $]0,+\infty[$ *qui s'annule en* $x = 1$*. Cette fonction est notée* $\ln$*.*

Remarque 4.1.1. $\ln(1) = 0$.

Propriétés

Théorème 4.1.1 (Premières propriétés)**.**
- *La fonction* $\ln$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$ *;*
- *La fonction* $\ln$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ *;*
- *La fonction* $\ln$ *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *;*
- *La fonction* $\ln$ *est concave* $\mathbb{R}_+^*$

Corollaire 4.1.1. *Soient* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $u : I \to \mathbb{R}_+^*$ *une fonction dérivable. La fonction* $x \mapsto \ln(u(x))$ *est dérivable sur* I *et, pour tout* $x \in I$

$$(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Proposition 4.1.1 (Propriétés algébriques)**.** *Pour tout* $x,\ y \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $n \in \mathbb{Z}$*,*

① $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

② $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$

③ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$

④ $\ln(x^n) = n\ln(x)$

Limites

Proposition 4.1.2. ❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$;

❷ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$;

❸ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$;

❹ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0$;

❺ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$;

❻ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

Définition 4.1.2 (Nombre de Néper)**.** *On appelle nombre de Néper l'unique réel e vérifiant* $\ln(e) = 1$.

Remarque 4.1.2. *L'existence du nombre de Néper est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires. L'unicité est une conséquence directe continuité et de la stricte monotonie de* ln.

Remarque 4.1.3. *La tangente en* $(e, 1)$ *passe par l'origine du repère.*

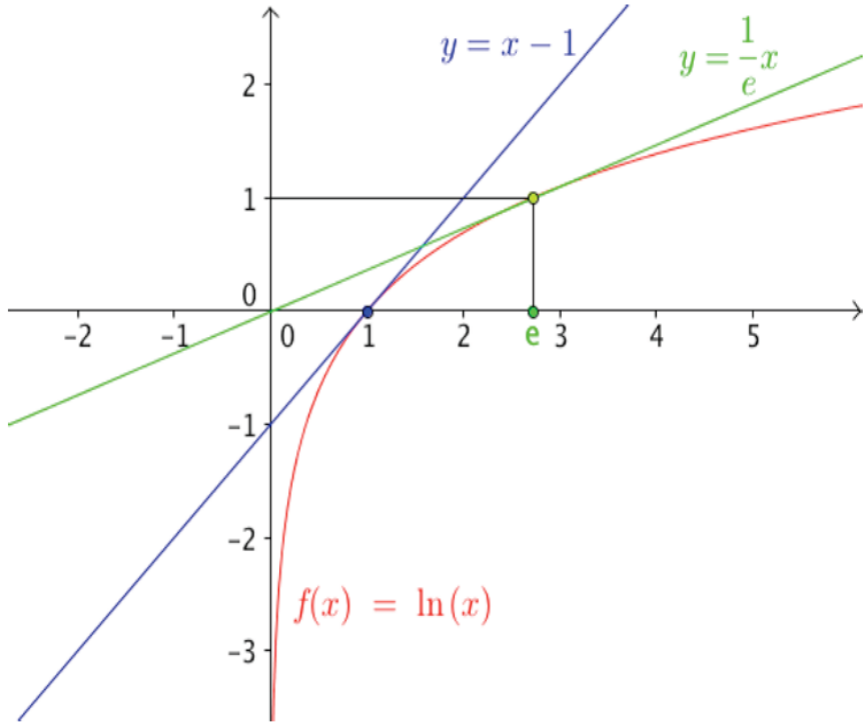
Tableau de variations et courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	+	
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Valeurs particulières : $\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$



4.1.2 Logarithme de base quelconque

Définition 4.1.3 (Logarithme de base a)**.** *Soit a un réel strictement positif et différent de 1 : $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle logarithme de base a l'application notée $\log_a$ définie par*

$$\log_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array} .$$

Remarque 4.1.4.
- *Si $a = 10$, on obtient le logarithme décimal qu'on note $\log$;*
- *Si $a = e$, $\log_a = \ln$;*
- $\log_a(1) = 0$ *et* $\log_a(a) = 1$.

Proposition 4.1.3. *Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x,\ y \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$.*

① $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

② $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a(x)$

③ $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$

④ $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$

Proposition 4.1.4. *Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, la fonction $\log_a$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \log_a'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

- *Si $a \in]1; +\infty[$, $\log_a$ est strictement croissante et concave ;*
- *Si $a \in]0; 1[$, $\log_a$ est strictement décroissante et convexe.*

4.1.3 Exponentielle népérienne

Définition - propriétés

Proposition 4.1.5. *La fonction $\ln$ définie une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur son image $\mathbb{R}$. L'application réciproque est appelée fonction exponentielle népérienne et est notée $\exp$.*

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ y & \mapsto & \exp(y) \end{array}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \exp(\ln(x)) = x \quad \textit{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \qquad \ln(\exp(y)) = y.$$

La fonction $\exp$

- *est strictement croissante et strictement positive ;*
- *est continue $\mathbb{R}$;*
- *est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$;*
- *est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.*

Remarque 4.1.5. $\exp(0) = 1$ *et* $\exp(1) = e$.

Proposition 4.1.6 (Propriétés algébriques)**.** *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$*

① $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$;

② $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$;

③ $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$;

④ $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

Notation 4.1.1. *D'après la formule 4, $\exp(n) = \exp(1.n) = (\exp(1))^n = e^n$, on conviendra de noter pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \exp(x)$.*

Proposition 4.1.7. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geq 1 + x$.

Limites

Proposition 4.1.8. ① $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$;

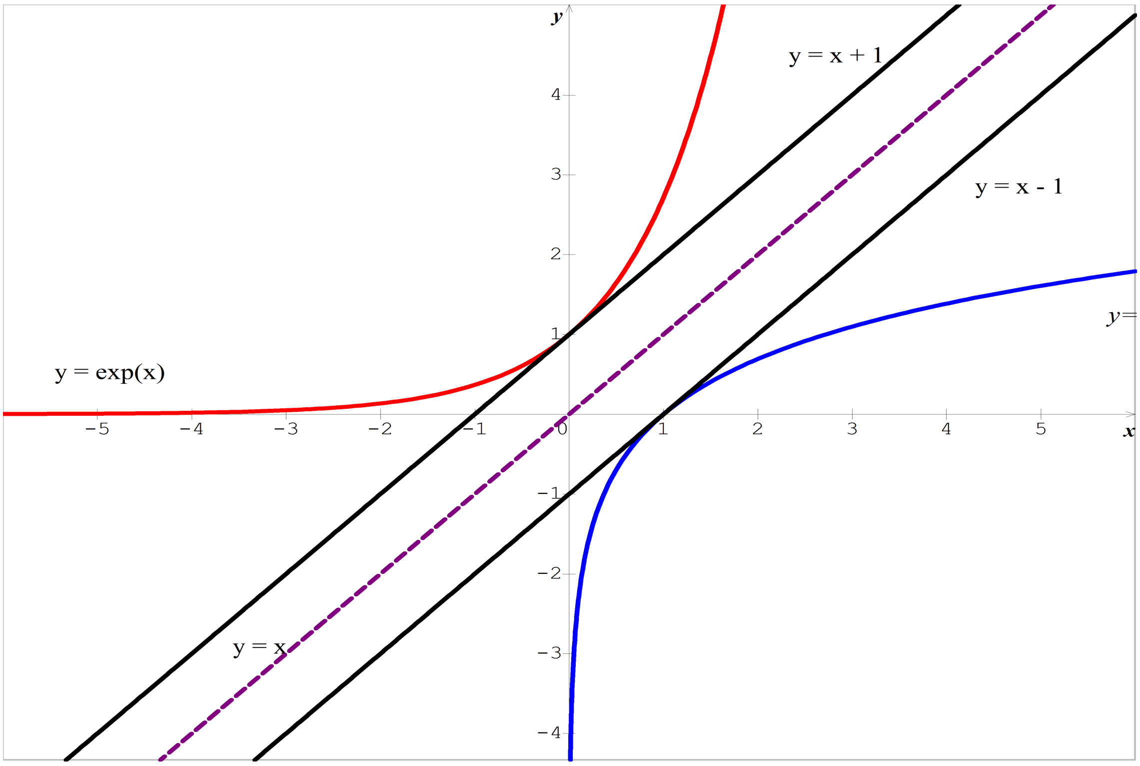
② $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$;

③ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$;

④ $\lim_{x \to -\infty} x \exp(x) = 0$;

⑤ $\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.

Tableau de variations et courbe représentative



4.1.4 Exponentielle de base a

Définition - propriétés

Définition 4.1.4.
Soit a un nombre réel strictement positif. On appelle fonction exponentielle de base a la fonction notée $\exp_a$ définie par

$$\exp_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & a^x \end{array} .$$

où $a^x = e^{x \ln(a)}$.

Proposition 4.1.9. *Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. La fonction $\log_a$ définie une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $\exp_a$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ est la bijection réciproque de $\log_a$.*
De plus, $\exp_a$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp_a'(x) = \ln(a) \exp_a(x).$$

Proposition 4.1.10. *Pour tout* $a, b \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$ *:*

① $\exp_a(0) = 1$ *et* $\exp_a(1) = a$

② $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \exp_a(y)$

③ $\exp_a(x - y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$

④ $\exp_a(nx) = (\exp_a(x))^n$

⑤ $\exp_a(x) \exp_b(x) = \exp_{ab}(x)$

⑥ $\frac{\exp_a(x)}{\exp_b(x)} = \exp_{\frac{a}{b}}(x)$

Remarque 4.1.6. – *On retrouve la notation précédente* $\exp(x) = e^x$.

– *Remarquons aussi que* $1^x = \exp(x \ln 1) = 1$.

La propriété précédente peut être donnée sous la forme

Proposition 4.1.11. *Pour tout* $a,\ b \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, $x,\ y \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$ *:*

① $a^0 = 1$ *et* $a^1 = a$

② $a^{x+y} = a^x a^y$

③ $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

④ $a^{nx} = (a^x)^n$

⑤ $a^x b^x = (ab)^x$

⑥ $\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$.

Limites

Proposition 4.1.12. *Si* $a > 1$ *alors :* $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ *;*
Si $0 < a < 1$ *alors :* $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

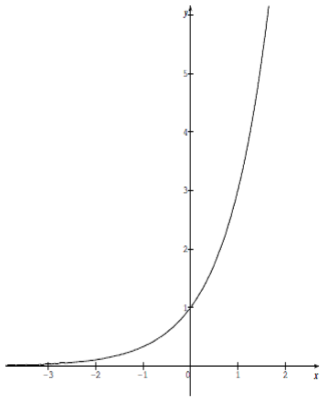
Tableau de variations et courbe représentative

Cas où $a > 1$

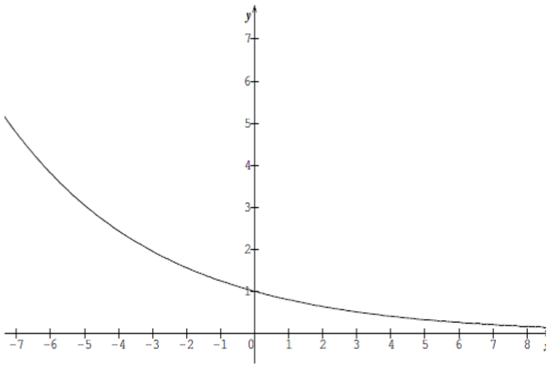
x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$		$+$
f	0 $\nearrow$	1	$+\infty$

Cas où $0 < a < 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$-$		$-$
f	$+\infty$ $\searrow$	1	0



Représentation graphique de $x \mapsto 3^x$



Représentation graphique de $x \mapsto (0{,}8)^x$

4.1.5 Fonctions puissances

Définition - propriétés

Définition 4.1.5.
Soit $a \in \mathbb{R}$ On appelle fonction puissance d'exposant a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\varphi_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^a = \exp(a\ln(x)) \end{array}.$$

Remarque 4.1.7.
- φ_0 *est la fonction constante égale à 1.*
- $\varphi_1 = Id$.

Proposition 4.1.13. *Propriétés algébriques des fonctions puissances Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$*

① $x^{a+b} = x^a x^b$

② $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

③ $(xy)^a = x^a y^a$

④ $(x^a)^b = x^{ab}$

⑤ $x^0 = 1$ *et* $1^a = 1$

⑥ $\ln(x^a) = a\ln(x)$.

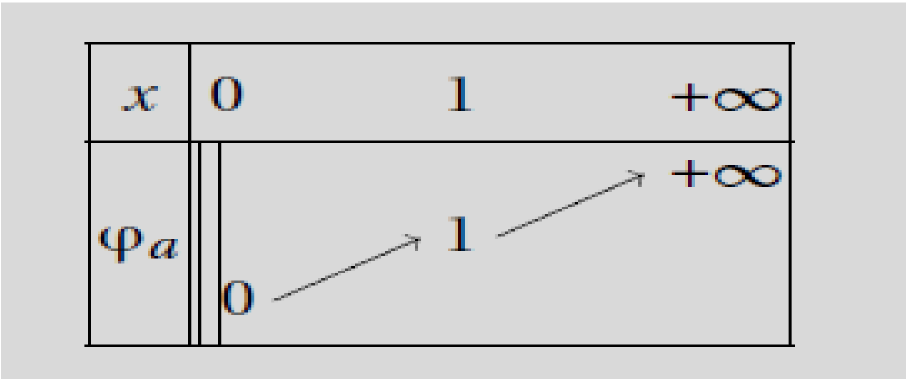
Proposition 4.1.14. *Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction* $\varphi_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^a = \exp(a\ln(x)) \end{array}$ *est*

1 *continue sur $\mathbb{R}_+^*$*

2 *dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi_a'(x) = ax^{a-1}$.*

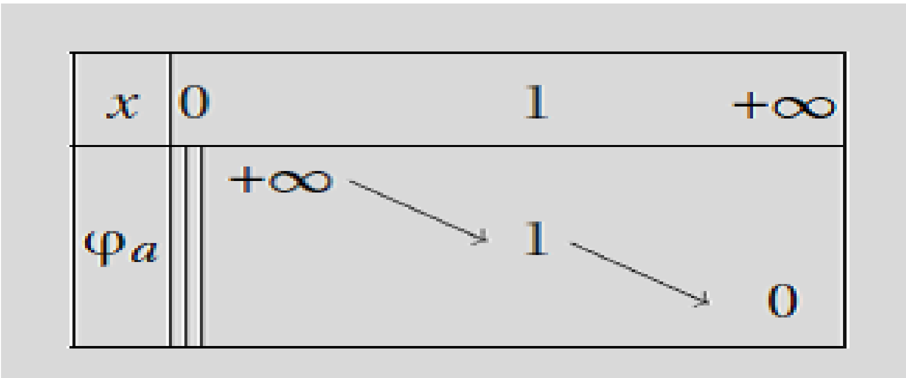
3 *de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

4 *si $a > 0$, φ_a est croissante, $\varphi_a(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ et $\varphi_a(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*



5 *Si $a = 0$, $\varphi_a : x \mapsto x^0 = 1$ est constante.*

6 *Si $a < 0$, φ_a est décroissante, $a(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $\varphi_a(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$.*



7 *Si $a > 1$ ou si $a < 0$, φ_a est convexe et si $0 < a < 1$, φ_a est concave.*

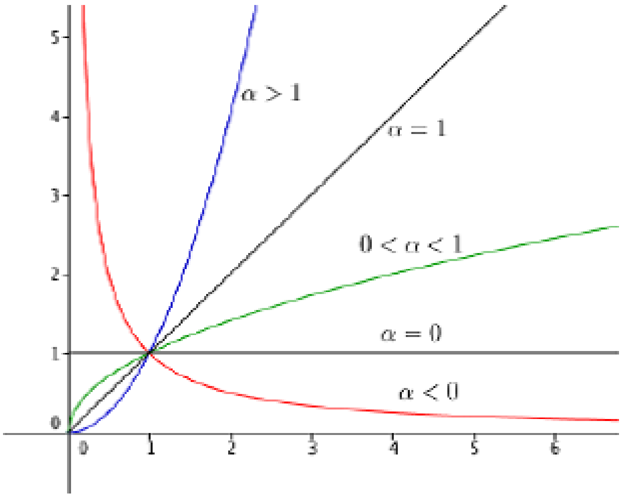
Remarque 4.1.8.
- *Si $a > 0$, on peut prolonger φ_a par continuité en 0 en posant $\varphi_a(0) = 0$.*
- *Si $a > 1$, φ_a est même dérivable en 0 : $\varphi_a'(0) = 0$.*
- *Si $0 < a < 1$, $\varphi_a'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ et le graphe de φ_a possède une tangente verticale à l'origine.*

Remarque 4.1.9. *Pour dériver une fonction de la forme $w(x) = u(x)^{v(x)}$ (là où elle est définie et dérivable...), il faut au préalable la mettre sous la forme $w(x) = \exp(v(x)\ln(u(x)))$*

puis utiliser la formule de dérivation des fonctions composées. A titre d'exercice, on montrera que :

$$w'(x) = w(x)\Big(v'(x)\ln(u(x)) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\Big).$$

Courbe représentative



4.1.6 Comparaison des fonctions logarithmes, puissances et exponentielles

Proposition 4.1.15 (Croissance comparée)**.** *Pour tout* $\alpha, \beta > 0$, *pour tout* $\gamma \in \mathbb{R}$

1 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(\ln(x))^\beta} = +\infty$

2 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\gamma} = +\infty$

3 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\alpha |\ln(x)|^\beta = 0$

4 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^\gamma e^{\alpha x} = 0$

4.2 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

4.2.1 Fonctions circulaires directes

Proposition 4.2.1 (Rappels et formulaire de trigonométrie circulaire)**.** *On a :*

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ *;*

2) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *;*

3) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z})$, $cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ *;*

4) *les fonctions* cos, sin, tan *et cotan sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition. ;*

5) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$;

6) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z})$, $cotan'(x) = -1 - cotan^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$;

7) *pour tout* $(a; b) \in \mathbb{R}^2$,

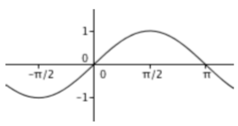
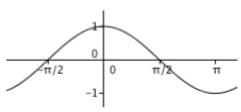
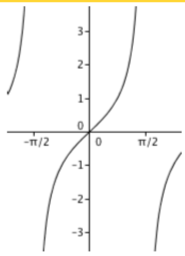
$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b); \\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b); \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a); \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a). \end{aligned}$$

8) *lorsque ces expressions ont un sens :*

$$\begin{aligned} \tan(a+b) &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \\ \tan(a-b) &= \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)} \end{aligned}$$

Tableau récapitulatif

Fonctions sinus, cosinus, tangente

Nom	sinus	cosinus	tangente
Notation	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
Départ et arrivée	$\mathbb{R} \to [-1,1]$	$\mathbb{R} \to [-1,1]$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$
Parité	Impaire	Paire	Impaire
Période	2π	2π	π
Dérivée	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
Monotonie	Croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$	Décroissante sur $[0, \pi]$	Croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$
Courbe représentative			

4.2.2 Fonctions circulaires réciproques

Fonction arcsin

L'application $\sin : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$ est continue, strictement croissante. C'est donc une bijection continue strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1; 1]$. La fonction sin admet donc une fonction réciproque, notée $\arcsin : [-1;1] \to [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. On a ainsi

$$\forall (x,y) \in [-1;1] \times [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}], \qquad y = \arcsin(x) \Leftrightarrow \sin(y) = x.$$

$\arcsin$ est impaire. De plus, comme $\sin$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $\sin'(x) = \cos(x) > 0$, $\arcsin$ est dérivable et

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il en résulte que $\arcsin$ est de classe C^∞ sur $]-1;1[$.

Exemple 4.2.1.

$$\arcsin(0) = 0 \qquad \arcsin(1/2) = \frac{\pi}{6} \qquad \arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4} \qquad \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3} \qquad \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Fonction $\arccos$

L'application $\cos : [0;\pi] \to [-1;1]$ est continue, strictement décroissante. C'est donc une bijection continue strictement décroissante de $[0;\pi] dans [-1;1]$. La fonction $\cos$ admet donc une fonction réciproque, notée $\arccos : [-1;1] \to [0;\pi]$. On a ainsi

$$\forall (x,y) \in [-1;1] \times [0;\pi], \qquad = \arccos(x) \Leftrightarrow \cos(y) = x.$$

$\arccos$ n'est ni paire ni impaire. De plus, comme $\cos$ est dérivable sur $]0;\pi[$ et que $\forall x \in]0;\pi[$, $\cos'(x) = -\sin(x) < 0$, $\arccos$ est dérivable et

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il en résulte que $\arccos$ est de classe C^∞ sur $]-1;1[$.

Fonction $\arctan$

L'application $\tan :]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante,

$$\lim_{x \to +-\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty \qquad et \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty.$$

C'est donc une bijection continue strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. La fonction $\tan$ admet donc une fonction réciproque, notée $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. On a ainsi

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[, \qquad y = \arctan(x) \Leftrightarrow \tan(y) = x.$$

$\arctan$ est impaire. De plus, comme $\tan$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$, $\arctan$ est dérivable et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

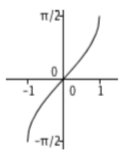
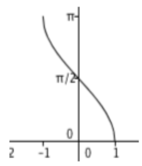
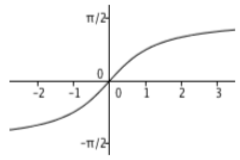
Il en résulte que $\arctan$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4.2.2. *On a la formule suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2} signe(x).$$

Tableau récapitulatif

Fonctions arcsin, arccosinus, arctangente

Nom	arcsinus	arccosinus	arctangente
Notation	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$
Départ et arrivée	$[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$	$[-1,1] \to [0,\pi]$	$\mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$
Lien avec les fonctions circulaires	$y = \arcsin x \iff \begin{cases} x = \sin y \\ y \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$	$y = \arccos x \iff \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0,\pi] \end{cases}$	$y = \arctan x \iff \begin{cases} x = \tan y \\ y \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$
Parité	Impaire	Ni paire, ni impaire	Impaire
Période	2π	2π	π
Dérivée	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$
Monotonie	Croissante	Décroissante	Croissante
Limites	Sans objet	Sans objet	$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
Courbe représentative			
Formules	$\forall x \in [-1,1], \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$		$\forall x \geq 0,\ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$

4.2.3 Fonctions hyperboliques directes

Définitions - propriétés

Définition 4.2.1.
On appelle :

1) *sinus hyperbolique l'application* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

2) *cosinus hyperbolique l'application* $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Proposition 4.2.3. *Les fonctions* $\cosh$ *et* $\sinh$ *sont de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ *De plus :*

1) $\forall x \in \mathbb{R}$,, $\sinh'(x) = \cosh(x)$ *et* $\cosh'(x) = \sinh(x)$ *;*

2) *La fonction* $\sinh$ *est impaire, strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*, strictement négative sur* $\mathbb{R}_-^*$ *et strictement positive sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et s'annule en* 0.

3) *La fonction* $\cosh$ *est paire, strictement positive sur* $\mathbb{R}$*, strictement décroissante sur* $\mathbb{R}_-^*$ *et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$ *;*

4) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) \geq 1$.

***Preuve*.** en exercice. $\square$

Proposition 4.2.4. *On a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) + \sinh(x) = e^x, \quad \textit{et} \quad \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Remarque 4.2.1. *Si l'on considère l'hyperbole (H) d'équation $x^2 - y^2 = 1$, la proposition précédente montre qu'elle admet une représentation paramétrique :* $\begin{cases} x(t) &= \varepsilon\cosh(t) \\ y(t) &= \sinh(t) \end{cases}$ *avec $\varepsilon = \pm 1$ selon que l'on veuille paramétrer la branche "haute" ou la branche "basse".*

Définition 4.2.2.
On appelle :

1) *tangente hyperbolique l'application* $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\tanh x = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

2) *cotangente hyperbolique l'application* $\coth : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\coth x = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

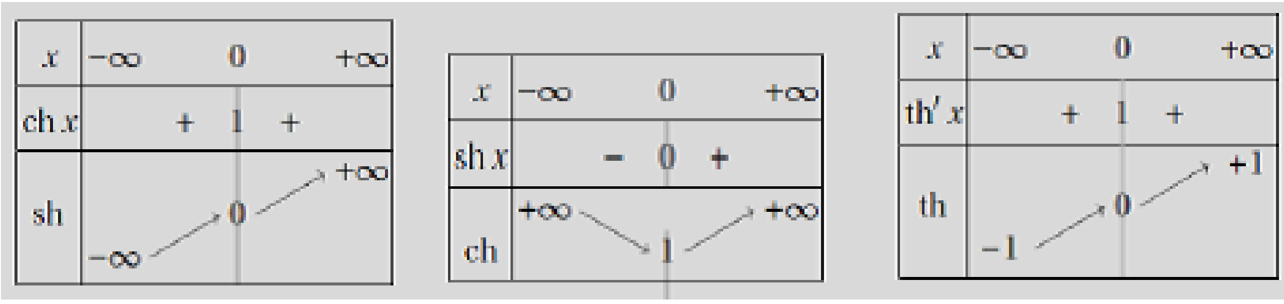
Proposition 4.2.5. *Les fonctions* $\tanh$ *et* $\coth$ *sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ respectivement. De plus :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\coth'(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x)$,
2. $\tanh$ *et* $\coth$ *sont impaires.*

Proposition 4.2.6. *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a :*

1. $\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$
2. $\cosh(a-b) = \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\sinh(b)$
3. $\sinh(a+b) = \cosh(a)\sinh(b) + \cosh(b)\sinh(a)$
4. $\sinh(a-b) = -\cosh(a)\sinh(b) + \cosh(b)\sinh(a)$
5. $\tanh(a+b) = \dfrac{\tanh(a) + \tanh(b)}{1 + \tanh(a)\tanh(b)}$
6. $\tanh(a-b) = \dfrac{\tanh(a) - \tanh(b)}{1 - \tanh(a)\tanh(b)}$

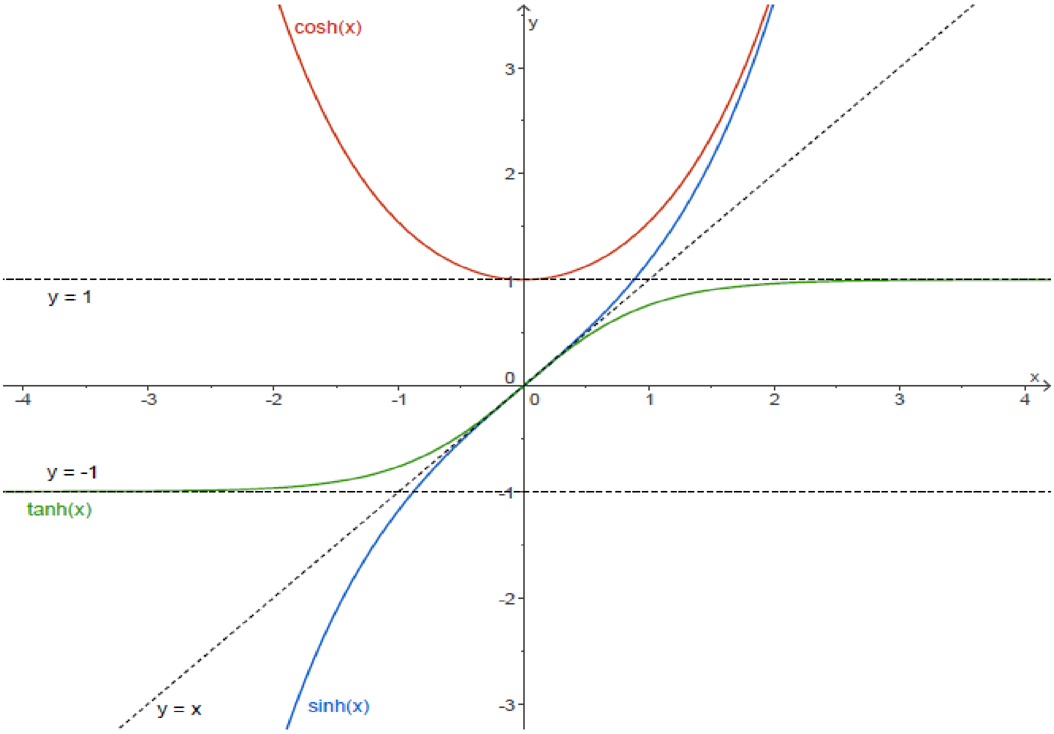
Tableaux de variations et courbes représentatives



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{ch}\, x$		$+$	1	$+$	
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{sh}\, x$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{th}'\, x$		$+$	1	$+$	
th	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$



4.2.4 Fonctions hyperboliques réciproques

Fonction $argsh$

L'application $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante et $\lim_{n\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \sinh(x) = \infty$. C'est donc une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction $\sinh$ admet donc une fonction réciproque, notée $argsh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a ainsi

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad y = argsh(x) \Leftrightarrow \sinh(y) = x.$$

$argsh$ est impaire. De plus, comme $\sinh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sinh'(x) = \cosh(x) \geq 1$, $argsh$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad argsh'(x) = \frac{1}{\sinh'(argsh(x))} = \frac{1}{\cosh(argsh(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Il en résulte que $argsh$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4.2.7 (expression logarithmique de $argsh$)**.** *On a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad argsh(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Fonction $argch$

L'application $\cosh : [0; +\infty[\to [1; +\infty[$ est continue, strictement croissante et $\lim_{n \to +\infty} \cosh(x) = +\infty$. C'est donc une bijection continue strictement croissante de $[0; +\infty[$ dans $[1; +\infty[$. La fonction $\cosh$ admet donc une fonction réciproque, notée $argch : [1; +\infty[\to [0; +\infty[$. On a ainsi

$$\forall (x, y) \in [1; +\infty[\times [0; +\infty[, \qquad y = argch(x) \Leftrightarrow \cosh(y) = x.$$

De plus, comme $\cosh$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que $\forall x \in]0; +\infty[$, $\cosh'(x) = \sinh(x) > 0$, $argch$ est dérivable et

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad argch'(x) = \frac{1}{\cosh'(argch(x))} = \frac{1}{\sinh(argch(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Il en résulte que argch est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$.

Proposition 4.2.8 (expression logarithmique de argch)**.** *On a :*

$$\forall x \in]1; +\infty[, \qquad argsh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Fonction argth

L'application $\tanh : \mathbb{R} \to]-1; 1[$ est continue, strictement croissante, $\lim_{n \to -\infty} \tanh(x) = -1$ et $\lim_{n \to +\infty} \tanh(x) = 1$. C'est donc une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-1; 1[$. La fonction $\tanh$ admet donc une fonction réciproque, notée argth $:]-1; 1[\to \mathbb{R}$. On a ainsi

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad y = \text{argth}(x) \Leftrightarrow \tanh(y) = x.$$

$argth$ est impaire. De plus, comme $\tanh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) > 0$, argth est dérivable et

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \text{argth}'(x) = \frac{1}{\tanh'(argth(x))} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Il en résulte que argsh est de classe C^∞ sur $]-1; 1[$.

Proposition 4.2.9 (expression logarithmique de argth)**.** *On a :*

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad argth(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Bibliographie

[1] **A. Bodin** : *Analyse*. Exo 7 (2016).

[2] **B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet** : *Cours d'analyse*. Armand Colin - collection U (1977).

[3] **C. Deschamps, A. Warusfel, F. Moulin, J. François Ruaud, A. AAiquel, J-C Sifre** : *Mathématiques TOUT-EN-UN • I^{e} année : cours exercices corrigés MPSI-PCSI*. Dunod, Paris, (2003).

[4] **D. Fredon** : *Mathématiques Résumé du cours en fiches MPSI - MP*. Dunod, Paris, (2010).

[5] **M. Allano Chevalier, X. Oudot** : *Maths MPSI*. Hachette, (2008).

[6] **C. Bertault** : *Mathématiques en MPSI.*

[7] **T. Pierron** : *Mathématiques MPSI*. ENS Ker Lann.