UTA **2022-2023**

Licence 1 IGL **Dr KOIVOGUI**

TD ALGEBRE 2

MATRICE ET DETERMINANT

Exercice 1 : Soit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Effectuer si possible les opérations suivantes :

A+B , A+C , C+D , B+M , M+N , N+M , -2B , iC , 3M-2N , AB , BA , AC , AD , DA , CD , DC , CD , DC , A^2 , N^2, ${}^tA$, ${}^tD$, ${}^tM$.

Exercice 2 :

Soit : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Monter qu'il existe une matrice carrée B telle que : $B = A - 3I$.
2. Calculer B^n, pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Exercice 3 :

Soit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, et vérifier que $A^2 = A + 2I$.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 4 :

Soit : $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux réels $a\ et\ b$ tels que $A = aI + bJ$.
2. Calculer J^2.
3. Calculer A^2 , $A^3 et\ A^4$ comme combinaison linéaire des matrices $I\ et\ J$.

Exercice 5 :

Soit $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $B = A - I.$

1. Calculer B^n, pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.
2. Monter que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 6 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer$A^2 - 3A + 2I.$
2. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 7 :

1. Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sachant que 546, 273 et 169 sont divisibles par 13, montrer sans calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix},$$

est divisible par 13.

Exercice 8 :

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes, en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 :

Monter que :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ 1 & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ 1 & \cos^2\theta & \sin^2\theta \end{vmatrix} = 0\,.$$

RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} lnx + e^y = -1 \\ 2lnx - 3e^y = 1 \end{cases} , \quad \begin{cases} x + y = -1 \\ 2x - 3y = 1 \\ 5x - 5y = 1 \end{cases} , \quad \begin{cases} 2y + 2x = z + 1 \\ 3x + 2z = 8 - 5y \\ 3z - 1 = x - 2y \end{cases} .$$

Exercice 2 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -4, \\ 2x_1 + 5x_2 + 10x_3 = -1. \end{cases}$$

En utilisant les formules de Cramer, puis la méthode de Gauss.

Exercice 3 :

Soit le système :

$$(S): \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 2. \end{cases}$$

1. Est-il possible de résoudre le système par la méthode de Cramer ?
2. Montrer que $(1; 1; 1)$ est une solution du système (S).
3. Résoudre le système :

$$(S'): \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

4. En déduire la solution du système (S).

Exercice 4 :

Résoudre l'équation $AX = B$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

ESPACES VECTORIELS

Exercice 1 :

On considère les deux sous-ensembles E et F de $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x = y\}, \qquad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x = -y\}.$$

1. Montrer que E et F sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
2. Vérifier que $u = (1,1) \in E$ et $v = (1, -1) \in F$. En déduire que u et v appartiennent à $E \cup F$.
3. Montrer que $u + v \notin E \cup F$. Que peut-on déduire ?

Exercice 2 :

Vérifier si les sous-ensembles suivants sont de sous espaces vectoriels.

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2z = y\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - 2z \geq 0\}$.
3. $E_3 = \{(x - y, y - x, 0);\ \ x, y \in \mathbb{R}\}$.
4. $E_4 = \{(x - y, 2y, 1);\ \ x, y \in \mathbb{R}\}$.
5. $F_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R});\ a + d = -b\right\}$.
6. $F_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & x - z \\ x + z & -z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R});\ \ x, z \in \mathbb{R}\right\}$.
7. $F_3 = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ A = {}^tA\right\}$. (Ensemble des matrices symétriques)
8. $G_1 = \{P \in \mathbb{R}_2(X);\ P + 2P' = 0\}$.
9. $G_2 = \{P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2(X);\ a_1 - a_2 = 0\}$.

Exercice 3 :

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les deux familles de vecteurs :

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1, -1,1), u_3 = (1,1,0)\}.$$

$$\mathcal{F} = \{v_1 = (1,0,1), v_2 = (2,2,1), v_3 = (1,1,0), v_4 = (-1, -1,1)\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est libre et génératrice. Que peut-on déduire ?
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $u = (3,3,2)$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Montrer que les vecteurs v_1, v_2, v_3 *et* v_4 sont linéairement dépendants, puis déterminer une relation linéaire entre ces vecteurs.
4. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice puis extraire de cette famille une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer en utilisant une deuxième méthode que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

APPLICATIONS LINEAIRES

Exercice 1 :

1. Montrer que les familles de vecteurs $\mathcal{F} = \{(1,1,2),(2,1,1),(1,2,1)\}$, et $\mathcal{B} = \{1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ forment des bases de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
   $f(1,1,2) = (1,1,0)$, $f(2,1,1) = (1,1,1)$, $f(1,2,1) = (2,1,0)$.
   a. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{B}$, et son inverse.
   b. Déterminer la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$.
3. L'application f est-elle bijective ? Justifier.

Exercice 2 :

Soit : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z).$$

1. Ecrire la matrice M associée à f dans la base canonique $\{e_1,e_2,e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire que f est bijective et déterminer $\mathcal{M}(f^{-1})$.
3. Déduire la matrice de f^2 dans la base canonique. Déterminer l'application f^2.
4. Quel est le rang de A ?
5. Soit $\mathcal{B} = \{v_1,v_2,v_3\}$ et $\mathfrak{C} = \{w_1,w_2,w_3\}$. Avec :

$$v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_1 - e_2 + e_3, v_3 = e_2 - e_3,$$

$$w_1 = (-1,1,-1), w_2 = (1,0,-1), w_3 = (1,0,0).$$

   a. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$, et la matrice de passage Q de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathfrak{C}$.
   b. En déduire la matrice M' associée à f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathfrak{C}$.
   c. Si les coordonnées d'un vecteur u dans la base canonique sont $(1,2,-2)$, alors déterminer les coordonnées de u dans la base $\mathfrak{C}$.