UTA, 2022 - 2023
LICENCE 1
ALGEBRE1

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1
Soit $A = 1, 2, 3$ complèter par $\in, \notin, \nsubseteq, \subseteq$

a) $1 \ A$

a) $\{1\} \ A$

a) $\{4\} \ A$

a) $\{1\} \ \mathcal{P}(A)$

a) $\emptyset \ A$

a) $\emptyset \ \mathcal{P}(A)$

a) $\{1, 2\} \ A$

a) $A \ \mathcal{P}(A)$

a) $\{1, 5\} \ \mathcal{P}(A)$

Exercice 2
Disposer les éléments 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 das un diagramme de Venn sachant que $.A \cap C = \{1, 4, 5\}$ $B \backslash A = \{0, 3, 6\}$, $A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A \cap B = \{2, 4, 5, 7\}$ $C \backslash A = \{0, 8\}$ $A \cap B \cap C = \{4, 5\}$

Exercice 3
Soit $A = \{1, 2, 3, 7\}$, $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $C = \{n \in \mathbb{N}/0 \leq n \leq 4\}$ et $D = \{0, 2\}$, déterminer les ensembles : $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cup B$, $B \cup C$, $D \cap (A \cap B)$, $A \triangle B \triangle C$

Exercice 4
A, B et C désignent des parties d'un ensemble E, montrer que :

a) $\overline{\overline{A}} = A$

b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

c) $A \cup \overline{A} = E$

d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Exercice 5
Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$; dans chacun des cas suivants, dire si la famille de parties est une partition de E.

a. $A_1 = \{a, b, e\}$, $A_2 = \{c, g\}$ et $A_3 = \{d\}$

b. $B_1 = \{c, e, g\}$, $B_2 = \{a, d, f\}$ et $B_3 = \{b, e\}$

c. $C_1 = \{a, b, e, g\}$, $C_2 = \{c, d\}$

Exercice 6

En notant P et Q les affirmations suivantes :
P : Jean est fort en Maths.
Q : Jean est fort en Chimie.
Représenter les affirmations suivantes sous forme symbolique, à l'aide des lettres P et Q et des connecteurs usuels.

d. Jean est fort en Maths mais faible en Chimie.
b. Jean est fort en Math ou il est à la fois fort en chimie et faible en Maths.
c. Jean n'est fort ni en Math ni en Chimie.
d. Jean est fort en Maths s'il est fort en Chimie.

Exercice 7

Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée ;
2. f est bornée ;
3. f est paire ;
4. f est impaire ;
5. f ne s'annule jamais ;
6. f est périodique ;
7. f est croissante ;
8. f est strictement décroissante ;
9. f n'est pas la fonction nulle ;
10. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distcincts ;
11. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$;
12. f est inférieure à g ;
13. f n'est pas inférieure à g.

Exercice 8

Soient les quatre assertions suivantes :

1. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0,$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0,$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x,$
4. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, |x| < \alpha \Rightarrow |x^2| < \varepsilon.$

Les assertions 1, 2, 3 et 4 sont elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations.

Exercice 9

Soit P, Q et R trois assertions.

a) A l'aide de tables de vérités, montrer que l'assertion $non(P\ et\ Q)$ et l'assertion $(non\ P)\ ou\ (non\ Q)$ sont équivalentes ;

b) A l'aide de tables de vérités, montrer que l'assertion $non(P\ ou\ Q)$ et l'assertion $(non\ P)\ et\ (non\ Q)$ sont équivalentes ;

c) A l'aide de tables de vérités, montrer que $(P$ ou $Q)$ ou $R \Leftrightarrow P$ ou $(Q$ ou $R)$.

d) A l'aide de tables de vérités, montrer que

$$\Big((P\ ou\ Q)\ et\ (P \ \Rightarrow\ R)\ et\ (Q \ \Rightarrow\ R)\Big) \ \Rightarrow\ R.$$

Exercice 10

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*.\ 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) Montrer par l'absurde que $\forall x \neq -2, \qquad \dfrac{x+1}{x+2} \neq 1$

c) Montrer par un raisonnement par contraposée que s'il existe $a, n \in$ $mathbbN$ vérifiant $a^2 + 9 = 2^n$ alors a est impair.

d) Montrer par contraposition que l'implication suivante : $x \neq y \Rightarrow x^3 + x \neq y^3 + y$ est vraie.

Exercice 11

Soit $E = \{1; 2; 3; 4\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E dont le graphe est

$$\{(1;1);\ (1;2);\ (2;1);\ (2;2);\ (3;3);\ (3;4);\ (4;3);\ (4;4)\}$$

1. Vérifier que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Faire la liste des classes d'équivalences distinctes et donner l'ensemble quotient

Exercice 12

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y.$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence et déterminer les classes d' équivalence de cette relation.

Exercice 13

1. Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même définie par :

$$f(1) = 4, \qquad f(2) = 1 \qquad , f(3) = 2, \qquad f(4) = 2.$$

   Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1, 2\}$, $A = \{3\}$.
2. Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$.
   (a) Déterminer $g(B)$ lorsque $B = [-2; -1]$, $B = [1, 2]$
   (b) Déterminer $g^{-1}(C)$ lorsque $C = \{1\}$, $C = [1, 2]$.

Exercice 14

On dï¿½finit sur $\mathbb{R}$ les lois $*$ et $\top$ par :
$x * y = ax + by - 1$, $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$, $x \top y = x + y - x \times y$
avec $+$ et $\times$ les opérations usuelles sur $\mathbb{R}$.

1) Déterminer les conditions sur a et$b$ pour que $*$ soit commutative dans $\mathbb{R}$.

2) Déterminer les conditions sur a et$b$ pour que $*$ soit associative dans $\mathbb{R}$.

On pose pose $a = b = 1$

3) Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif

4) Montrer que la loi $\top$ est distrbutive par rapport à la loi $*$

5) $(\mathbb{R}, *, \top)$ est -il un corps commutatif ?