- ▶ Si $n = 1$, alors $A$ est **une matrice ligne**.
- ▶ Si $n \neq p$, alors $A$ est **une matrice rectangulaire de type** $(n, p)$.
- ▶ Si $n = p$, alors $A$ est **une matrice carrée d'ordre** $n$.
- ▶ L'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à cœfficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, ou encore $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- ▶ Les $a_{ii}$, $1 \leq i \leq n$, dits cœfficients diagonaux de $A$, matrice carrée d'ordre $n$, forment la diagonale principale de $A$.
- ▶ La somme des cœfficients diagonaux d'une matrice carrée $A$ d'ordre $n$ est appelée **la trace** de $A$, et notée par $tr(A)$ :
$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

**Notation :** Par convention, une matrice se note par une lettre majuscule et ses cœfficients par la même lettre en minuscule.

**Exercice 1** *On considère les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 5 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & \frac{3}{4} & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Préciser le type de chacune de ces matrices.*
2. *Donner, si elles existent, les valeurs des éléments suivants :* $a_{53}$, $a_{35}$, $b_{23}$, $b_{11}$, $c_{22}$, $d_{12}$, $e_{31}$, $e_{13}$, $h_{16}$.
3. *Préciser parmi les matrices données celles qui sont : des matrices carrées, des matrices lignes et des matrices colonnes.*

**Exercice 2** *Écrire la matrice* $C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$, *où* $c_{ij} = (-1)^{i+j}.2^i.j$, $\forall 1 \leq i, j \leq 3$.

### II.2 Matrices particulières

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors :

- ► $A$ est **<u>une matrice diagonale</u>** ssi $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$ .
- ► $A$ est **<u>une matrice unité d'ordre $n$</u>** ou **<u>une matrice identité d'ordre $n$</u>** ssi elle est diagonale et $\forall 1 \leq i \leq n$, $a_{ii} = 1$. On la note par $I_n$.
- ► $A$ est **<u>une matrice triangulaire supérieure</u>** ssi $a_{ij} = 0$, $\forall i > j$.
- ► $A$ est **<u>une matrice triangulaire inférieure</u>** ssi $a_{ij} = 0$, $\forall i < j$.
- ► $A$ est **<u>une matrice symétrique</u>** ssi $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall 1 \leq i, j \leq n$.
- ► $A$ est **<u>une matrice anti-symétrique</u>** ssi $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall 1 \leq i, j \leq n \Rightarrow a_{ii} = \cdots\cdots$

**Exercice 3** *Donner un exemple de chacune des matrices définies ci-dessus.*

## III Opérations sur les matrices

### III.1 Égalité de matrices

► Deux matrices **<u>de même type</u>**, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, sont égales, si et seulement si, $\forall 1 \leq i \leq n$, et $1 \leq j \leq p$, $a_{ij} = b_{ij}$.

**Application 1** *Déterminer respectivement la valeur de $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ pour que les deux matrices suivantes soient égales :*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta + 1 & \alpha \\ 1 & 2.\gamma + 1 \end{pmatrix}.$$

### III.2 Somme de deux matrices et produit d'une matrice par un scalaire

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, $b = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors :

- ► la somme des deux matrices $A$ et $B$, **<u>de même type</u>**, est une matrice, notée $A + B$, **<u>de même type</u>**, obtenue en additionnant $A$ et $B$ cœfficient par cœfficient :
$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$
- ► la multiplication de la matrice $A$ par un scalaire $\lambda$ se fait en mulitipliant tous les cœfficients de $A$ par $\lambda$ :
$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

Donc, $A$ et $\lambda A$ sont $\cdots\cdots\cdots$

**Application 2** *Revenons sur les images A, B et C de la Figure 1. On désigne par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les matrices associées, respectivement, aux images B et C. Quelle est la nature de la matrice $\mathcal{A} - \mathcal{C}$ ? Quelle information peut-on avoir sur l'image correspondante à la matrice $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ ?*

**Exercice 4**

1. *Calculer,* $A + B$ *et* $B + A$*, où* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, *et* $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. *Conclure.*
2. *Calculer,* $\frac{1}{2}(C + D)$ *et* $\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D$*, où* $C = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 6 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$, *et* $D = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 8 & -9 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. *Conclure.*
3. *Soient* $E = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{-2}{5} \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, *et* $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. *Peut-on calculer* $2E + 3F$ *? Pourquoi ?*

**Propriétés :**

Soient $A$, $B$ et $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $\alpha$, $\beta \in \mathbb{K}$, alors :

1. $A + B = B + A$.
2. $(A + B) + C =$
3. $A + 0_{n,p} =$
4. $A + (-1)A =$
5. $\alpha(A + B) =$
6. $(\alpha + \beta)A =$
7. $(\alpha\beta)A =$

## III.3 Produit de deux matrices

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

► Le produit de la matrice $A$ par la matrice $B$ est une matrice $C = A.B$ du type $(n, q)$ et dont les cœfficients $(c_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le q}}$ sont définis par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Le principe de la multiplication est illustré dans la Figure 3.

***Attention à la condition d'existence de $A.B$ :***
***le nombre de colonnes de $A$ = le nombre de lignes de $B$.***

⚠ Cette opération n'est pas définie si $A$ et $B$ sont **de même type**, sauf si elles sont carrées de même ordre.

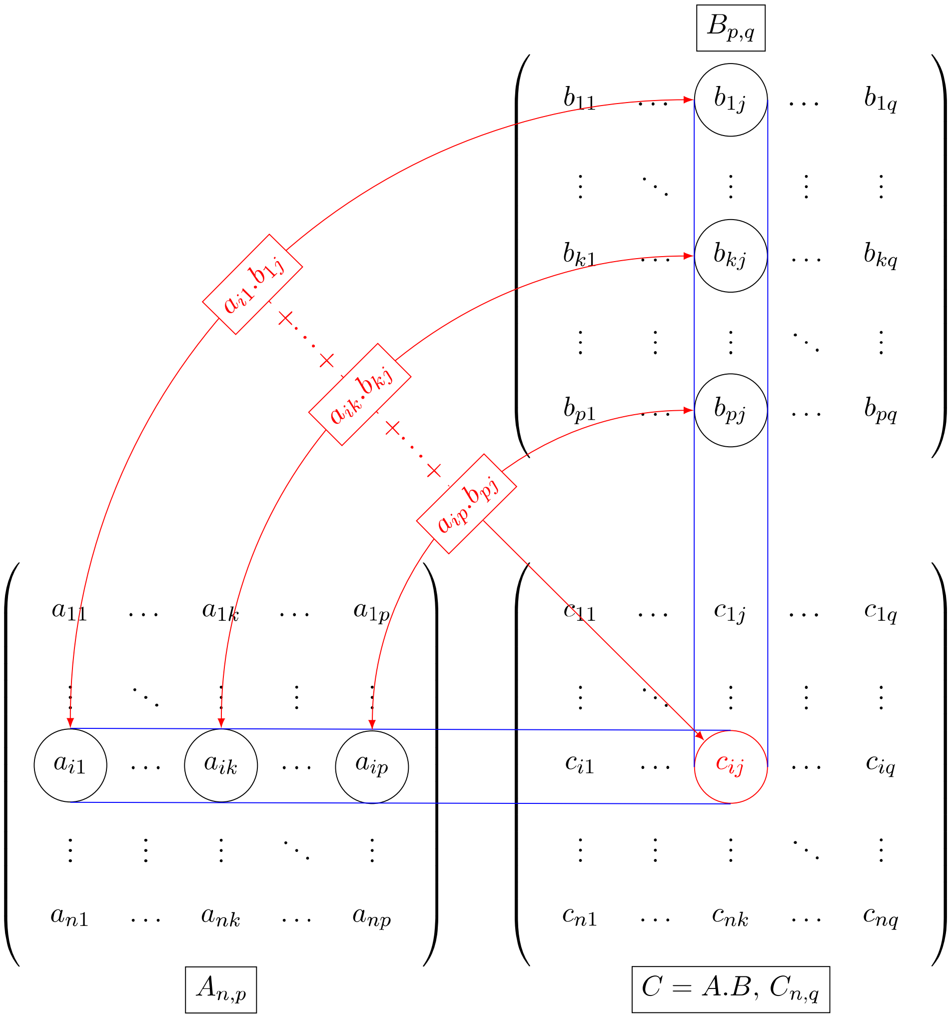


FIGURE 3 – Multiplication matricielle

**Exercice 5**

1. *Comparer* $A.(B.C)$ *et* $(A.B).C$, *avec* $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, *et* $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. *Comparer* $A.(B+C)$ *et* $(A.B)+(A.C)$, *avec* $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, *et* $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
3. *Calculer* $A.I_p$, *avec* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Conclure.*
4. *Comparer* $A.B$ *et* $B.A$, *avec* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, *et* $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. *Conclure.*
5. *Calculer* $A.B$, *avec* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Conclure.*

**Propriétés :**

1. $A.(B.C) = (A.B).C$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{\cdots,\cdots}(\mathbb{K})$, et $C \in \mathcal{M}_{q,l}(\mathbb{K})$.
2. $A.I_p = I_n.A = A$, avec $A \in \mathcal{M}_{\cdots,\cdots}(\mathbb{K})$
3. $A.(B+C) = (A.B) + (A.C)$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,\cdots}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et $C \in \mathcal{M}_{\cdots,\cdots}(\mathbb{K})$.
4. $(A+B).C = (A.C) + (B.C)$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{\cdots,\cdots}(\mathbb{K})$, et $C \in \mathcal{M}_{\cdots,q}(\mathbb{K})$.
5. Il existe $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A.B \cdots B.A$.
6. $A.B = 0_{n,q}$ ne signifie pas que $A = 0_{n,p}$ ou $B = 0_{p,q}$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
7. $A^p = \underbrace{A.A.\cdots.A}_{pfois}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

### III.4 Transposée d'une matrice

► La transposée de la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice notée ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont les lignes sont les colonnes de $A$ et les colonnes sont les lignes de $A$. Autrement dit, si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ alors ${}^tA = (\widetilde{a}_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}}$, avec $\forall 1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq n$, $\widetilde{a}_{ij} = a_{ji}$.

**Propriétés :**

1. ${}^t({}^tA) = A$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
2. ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
3. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$, avec $A,\ B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
4. ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

**Application 3** *Que serait la nature d'une matrice $A$ si :* $\begin{array}{l} 1)\ \ A = {}^tA \\ 2)\ \ A = -{}^tA \end{array}$

## IV Opérations élémentaires sur les matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On désigne par $L_i$ la $i^{\text{ème}}$ ligne de $A$, avec $1 \leq i \leq n$ et $C_j$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de $A$, avec $1 \leq j \leq p$. Les opérations élémentaires sur les lignes (resp. sur les colonnes) de la matrice $A$ sont de trois types :

1. Permutation de deux lignes (resp. de deux colonnes). Cette opération se code par :

$$L_i \longleftrightarrow L_j \text{ (resp. } C_i \longleftrightarrow C_j). \tag{1}$$

2. Multiplication d'une ligne (resp. d'une colonne) par une constante non nulle. Cette opération se code par :

$$L_i \longleftarrow \lambda L_i \text{ (resp. } C_i \longleftarrow \lambda C_i). \tag{2}$$

3. Ajout d'un multiple d'une ligne (resp. d'une colonne) à une autre ligne (resp. à une autre colonne). Cette opération se code par :

$$L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j \text{ (resp. } C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j). \tag{3}$$

***Attention : les opérations effectuées sur la matrice $A$ conduisent à une matrice qui n'est pas égale à $A$.***

## V Déterminant d'une matrice

À toute matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est associé un unique scalaire qui la représente. Ce scalaire, appelé **déterminant de $A$** et noté $det(A)$ ou encore $|A|$.

► Si $n = 1$, alors

$$det(A) = det(a_{11}) = a_{11}.$$

► Si $n = 2$, alors

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

► Si $n = 3$, alors on peut calculer $det(A)$ par rapport à une ligne ou une colonne choisie en respectant la répartition des signes suivante :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Exemple : calcul de $det(A)$ suivant la première ligne :

$$\begin{aligned} det(A) &= \begin{vmatrix} \overset{+}{a}_{11} & \overset{-}{a}_{12} & \overset{+}{a}_{13} \\ \overset{-}{a}_{21} & \overset{+}{a}_{22} & \overset{-}{a}_{23} \\ \overset{+}{a}_{31} & \overset{-}{a}_{32} & \overset{+}{a}_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, nous pouvons aussi utiliser la règle de Sarus dont le principe est illustré dans la Figure 4.

***Attention : la règle de Sarus ne concerne que les déterminants d'ordre 3.***

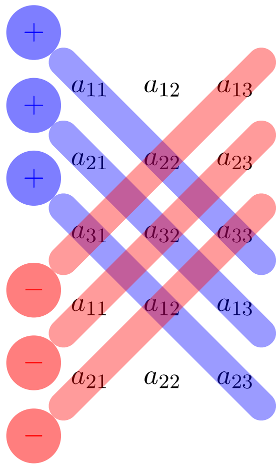


FIGURE 4 – Règle de Sarus pour le calcul du déterminant d'une matrice du type $(3,3)$

**Exercice 6** *Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Généralisation du calcul du déterminant d'une matrice :**

On considère la matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.

- On appelle **mineur du cœfficient** $a_{ij}$, $1 \leq i,j \leq n$, le réel $M_{ij}$ représentant le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $A$.
- On appelle **cofacteur du cœfficient** $a_{ij}$, $1 \leq i,j \leq n$, le réel $C_{ij}$ défini par :
$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$
- On appelle **comatrice de** $A$, la matrice, notée par $com(A)$, et composée par les cofacteurs des cœfficients de $A$ :
$$com(A) = (C_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}.$$
- Dans un cadre plus général, le déterminant de la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ se calcul, suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne, comme suit :
$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}, \quad \forall 1 \leq i \leq n. \tag{4}$$

**Exemple 1 (illustratif)** *Nous calculons le déterminant de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

*Pour ce faire, nous fixons d'abord un indice* $1 \leq i \leq 4$, *avec lequel nous calculons* $det(A)$ *en utilisant l'équation* (4) *(pour* $n = 4$*). Il est important de noter que l'indice* $i$ *correspond à la ligne de la matrice* $A$ *pour laquelle nous déterminons les cofacteurs. Prenons par exemple* $i = 3$. *Nous sommes ainsi amenés à calculer les cofacteurs* $C_{3j}$ *en fonction des mineurs* $M_{3j}$ *avec* $1 \leq j \leq 4$. *Commençons par calculer les mineurs comme suit :*

$$\begin{aligned} M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} &= 1.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-1).\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1.(-2) + 1.(-6) + 0.(-2) = -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} &= 2.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-1).\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2.(-2) + 1.(3) + 0.(0) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} &= 2.\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - (1).\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2.(-6) - 1.(3) + 0.(3) = -15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{34} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} &= 2.\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (1).\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2.(-2) - 1.(2) - 1.(3) = -9 \end{aligned}$$

*Passons maintenant à calculer les cofacteurs :*

$$\begin{aligned} C_{31} &= (-1)^{3+1}M_{31} = (-1)^4.(-8) = -8 \\ C_{32} &= (-1)^{3+2}M_{32} = (-1)^5.(-1) = 1 \\ C_{33} &= (-1)^{3+3}M_{33} = (-1)^6.(-15) = -15 \\ C_{34} &= (-1)^{3+4}M_{34} = (-1)^7.(-9) = 9 \end{aligned}$$

*Enfin,*

$$det(A) = a_{31}.C_{31} + a_{32}.C_{32} + a_{33}.C_{33} + a_{34}.C_{34} = 2.(-8) + 1.1 - 1.(-15) - 2.9 = -18.$$

**Propriétés :**

On pose $\Delta = det(C_1, C_2, \cdots, C_n)$, où $C_i$, $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, désignent les colonnes de $\Delta$.

$\boldsymbol{P_1}$**) :** $det(C_1, C_2, .., C_i + C, .., C_n) = \underbrace{det(C_1, C_2, .., C_i, .., C_n)}_{\Delta} + det(C_1, C_2, .., C_{i-1}, C, C_{i+1}, .., C_n)$,

avec $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & \mathbf{3} & -1 \\ 2 & \mathbf{4} & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & \mathbf{1} & -1 \\ 2 & \mathbf{2} & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{0} & 1 \\ 1 & \mathbf{2} & -1 \\ 2 & \mathbf{2} & 2 \end{vmatrix}$$

$\exists A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ det(A + B) \neq det(A) + det(B)$.

$\boldsymbol{P_2}$**) :** $det(C_1, C_2, .., \boldsymbol{\alpha} C_i, .., C_n) = \boldsymbol{\alpha}\ \underbrace{det(C_1, C_2, .., C_i, .., C_n)}_{\Delta}$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{20} & \underline{200} \\ 2 & \mathbf{30} & \underline{700} \\ 3 & \mathbf{50} & \underline{800} \end{vmatrix} = \mathbf{10} \times \underline{100} \times \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{2} & \underline{2} \\ 2 & \mathbf{3} & \underline{7} \\ 3 & \mathbf{5} & \underline{8} \end{vmatrix}$$

$\boldsymbol{P_3}$**) :** Si on permute deux colonnes de $\Delta$, le signe de $\Delta$ change :
$det(C_1, C_2, .., C_i, .., C_k, .., C_n) = -det(C_1, C_2, .., \underbrace{C_k}_{colonne\ i}, .., \underbrace{C_i}_{colonne\ k}, .., C_n)$, $1 \leq k \leq n$.

$\boldsymbol{P_4}$**) :** Si deux colonnes de $\Delta$ sont proportionnelles : $C_i = \alpha C_k$, $1 \leq i, k \leq n$ , $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $\Delta = 0$. En particulier, si une colonne est nulle ( $\alpha = 0$) alors $\Delta = 0$.

$\boldsymbol{P_5}$**) :** La valeur de $\Delta$ ne change pas en rajoutant à l'une de ses colonnes une combinaison linéaire des autres colonnes :

$$det(C_1, C_2, .., C_i, .., C_n) = det(C_1, C_2, .., \underbrace{C}_{colonne\ i}, .., C_n),$$

avec $C = C_i + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_j C_j$ et $\alpha_j \in \mathbb{K}$.

$\boldsymbol{P_6}$**) :** $det({}^tA) = det(A)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
**$\Rightarrow$ Il en résulte que les propriétés sur le déterminant, énoncées sur les colonnes, sont aussi vraies sur les lignes (les colonnes de $\boldsymbol{det({}^tA)}$).**

$\boldsymbol{P_7}$**) :** Si $A$ est triangulaire supérieure ou inférieure alors son déterminant est égal au produit de ses cœfficients diagonaux.

$\boldsymbol{P_8}$**) :** $det(A.B) = det(A).det(B)$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Exercice 7** *En utilisant les propriétés* $\boldsymbol{P_1}$, $\boldsymbol{P_2}$, *et* $\boldsymbol{P_4}$, *démontrer la propriété* $\boldsymbol{P_5}$.

**Remarque 1 (Intérêt des propriétés des déterminants )**

*Si $\Delta_n$ est un déterminant d'une matrice d'ordre $n \geq 4$, le calcul de $\Delta_n$, en utilisant la définition, peut être long et induire des erreurs de calculs (comme pour le cas de l'exemple 1 pour $n = 4$). On utilise les propriétés pour obtenir une ligne (ou colonne) de $\Delta_n$ avec* ***un unique cœfficient non nul****, afin de calculer $\Delta_n$ suivant cette ligne (ou cette colonne). Ainsi, on réduit le calcul de $\Delta_n$ à celui de $\Delta_{(n-1)}$, le déterminant de la matrice obtenue d'ordre $(n-1)$. On réitère le processus jusqu'à obtenir un déterminant d'une matrice d'ordre 3 ou 2.*

***Exemple 2*** *Revenons sur le déterminant de l'exemple 1. Nous montrons, ci-dessous, qu'en utilisant les propriétés des déterminants, son calcul est effectué en 5 étapes seulement :*

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \boxed{0} & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 \\ C_4 \longleftarrow C_4 + C_2}}{\overset{E_1}{=}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \overset{E_2}{=} (-1) \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}}_{\Delta_3} \overset{E_3}{=} (-1) \times 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_1 \longleftarrow L_1 - L_2}{\overset{E_4}{=}} -3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} \overset{E_5}{=} (-3) \times 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{\Delta_2} = (-3) \times 2 \times 3 = -18.$$

1. *On remarque l'existence de trois 0 dans $\Delta_4$. On choisit d'effectuer des transformations suivant une ligne ou une colonne contenant l'un de ces trois 0. On considère par exemple la deuxième ligne. Pour garder un seul cœfficient non nul de cette ligne, on effectue les transformations données par l'égalité $E_1$.*

2. *On ramène le calcul de $\Delta_4$ à celui de $\Delta_3$, le déterminant de la matrice obtenue d'ordre 3, comme donné par l'égalité $E_2$.*

3. *On remarque que les cœfficients de la première colonne de $\Delta_3$ sont des multiples de 3. On applique alors la propriété $\boldsymbol{P_2}$ pour avoir l'égalité $E_3$.*

4. *On applique des transformations sur la première ligne du déterminant résultant pour obtenir l'égalité $E_4$.*

5. *On ramène le calcul de $\Delta_3$ à celui de $\Delta_2$, le déterminant de la matrice obtenue d'ordre 2, comme donné par l'égalité $E_5$.*

**Exercice 8** *En utilisant les propriétés des déterminants, calculer*

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

## VI Inverse d'une matrice

▶ Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A.B = B.A = I_n,$$

alors $B$ est appelée **<u>la matrice inverse de $A$</u>**, notée par $A^{-1}$. Dans ce cas, on dit que la matrice $A$ est inversible.

**Application 4** *Montrer que la matrice* $B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$, *est la matrice inverse de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

**Exercice 9** *Montrer que la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, *n'admet pas de matrice inverse.*

**<u>Propriétés :</u>**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

▶ Si $A$ est inversible, alors son inverse est unique.

▶ Si $A$ est inversible, alors $A^{-1}$ est aussi inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

▶ la matrice $A$ est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$.

▶ Si $A$ est inversible alors $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$.

▶ Si $A$ est inversible alors ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

▶ Si $A$ et $B$ sont inversibles alors $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

### VI.1 Méthode de la comatrice pour le calcul de l'inverse d'une matrice

▶ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, une matrice inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\,{}^tcom(A).$$

**Application 5** *Revenons sur la matrice $A$ de l'exemple 1.*

1. *Justifier pourquoi $A$ est inversible.*
2. *Calculer son inverse en utilisant la méthode de la comatrice.*

### VI.2 Méthode du pivot de Gauss pour le calcul de l'inverse d'une matrice

La méthode du pivot de Gauss consiste à effectuer des opérations élémentaires sur une matrice $A$, carrée d'ordre $n$ et inversible, afin de la transformer en une matrice identité. Les mêmes opérations sont aussi effectuées sur la matrice $I_n$. Lorsque $A$ devient $I_n$, $I_n$ à son tour devient $A^{-1}$. Nous décrivons le principe de cette méthode en se basant sur l'exemple suivant :

1. Opération 1 : Déterminer un premier pivot non nul et le réduire à 1.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad L_1 \longleftarrow \frac{1}{2} L_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4.$$

   **Remarque 2** *Si le cœfficient $a_{11} = 0$, il faut permuter la premier ligne $L_1$ avec une ligne $L_i$ telle que $a_{i1} \neq 0$, $i \in \{1, \cdots, 4\}$.*

2. Opération 2 : Annuler tous les cœfficients situant en dessous du premier pivot.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Opération 3 : Passer au pivot suivant, vérifier qu'il est non nul et le réduire à 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{-3}{2}} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad L_2 \longleftarrow \frac{-2}{3} L_2 \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Opération 4 : Annuler tous les cœfficients situant en dessous du deuxième pivot.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad L_4 \longleftarrow L_4 - 3L_2 \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Opération 5 : Passer au pivot suivant, vérifier qu'il est non nul et le réduire à 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{0} & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad L_3 \longleftrightarrow L_4 \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le pivot trouvé est nul. Nous permutons alors la ligne 3 de la matrice obtenue par $L_4$.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \longleftarrow \frac{1}{3}L_3 \\ L_4 \longleftarrow \frac{-1}{2}L_4 \end{array} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Remarque 3** *À ce stade d'opérations effectuées, la matrice $A$ est devenue triangulaire supérieure à diagonale unité. Nous continuons les opérations pour la transformer en $I_4$.*

6. Opération 6 : Annuler tous les cœfficients situant en dessus de la diagonale.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 + \frac{2}{3}L_4 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{5}{3}L_4 \end{array} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \longleftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + \frac{1}{3}L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-7}{6} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \longleftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 \quad \begin{pmatrix} \frac{-1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{18} & \frac{-4}{9} & \frac{-1}{18} & \frac{1}{9} \\ \frac{-7}{6} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{-2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{5}{18} & \frac{-4}{9} & \frac{-1}{18} & \frac{1}{9} \\ \frac{-7}{6} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Finalement, nous obtenons la matrice inverse de $A$. Nous pouvons vérifier que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_4$.

## VII Résolution de systèmes d'équations linéaires

- Un système de $n$ équations à $n$ inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$, à cœfficients $a_{ij}$, et seconds membres $b_i$ $1 \leq i, j \leq n$, est de la forme :

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots & \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

- Le système $(S)$ peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B},$$

  où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ représente la matrice des cœfficients de $(S)$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ représente la solution de $(S)$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ représente le second membre du système.

- Si $A$ est inversible alors le système $AX = B$ admet une unique solution donnée par $X = A^{-1}.B$.

- Si $A$ est non inversible alors le système $AX = B$ ou bien il n'admet pas de solutions ou bien il admet une infinité de solutions.

**Exemple 3** *On considère le système d'équations linéaires $(S_\alpha)$ dépendant de la valeur du réel $\alpha$ :*

$$(S_\alpha)\quad \begin{cases} x + y = & 1 \\ x + \alpha^2 y = & \alpha \end{cases}$$

*La résolution de $(S_\alpha)$ dépend de la valeur de $\alpha$. En effet, la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 \end{pmatrix}$ associée à $(S_\alpha)$ est de déterminant $\Delta_\alpha = \alpha^2 - 1$. Ainsi, trois cas de figure se présentent :*

1. *Si $\alpha \in \mathbb{R}/\{\mp 1\}$ $(\Delta_\alpha \neq 0)$ alors $(S_\alpha)$ admet une solution unique.*

2. *Si $\alpha = -1$ $(\Delta_{-1} = 0)$ alors $(S_{-1})$ n'admet pas de solutions.*

3. *Si $\alpha = 1$ $(\Delta_1 = 0)$ alors $(S_1)$ admet une infinité de solutions.*

**Règle de Cramer pour la résolution des systèmes d'équations linéaires :**

On considère le système linéaire $A.X = B$, avec $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice inversible, $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $B = (b_i)_{1\leq i\leq n}$ deux matrices colonnes représentant respectivement la solution et le second membre du système.

- ▶ Les cœfficients de la solution $X$ du système $A.X = B$ sont donnés par :

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}, \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

où $A_i$ est obtenue en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de $A$ par $B$.

**Exercice 10** *Résoudre le système d'équations linéaires suivant de deux manières différentes :*

$$(S) \begin{cases} x - 2z = & 3 \\ -y + 3z = & 1 \\ 2x + 5z = & 0 \end{cases}$$

# VIII Applications

**Application 6 (Matrice de Leontief)**

*Soit un pays fictif sans échanges extérieurs, dont l'économie très simplifiée se décompose en deux branches seulement : l'agriculture et l'industrie.*

*Pour l'agriculture, la production est de* 500.000€ *répartie en consommations intermédiaires :*

- 200.000€ *consommés par l'industrie (industrie agro-alimentaire,.....).*
- 50.000€ *consommés par l'agriculture elle-même (engrais verts,....).*
- *le reste en demande finale, soit* 250.000€ *, disponible pour satisfaire les besoins de la population*

.

*Pour l'industrie : la production est de* 2.500.000€ *répartie en consommations intermédiaires :*

- 150.000€ *consommés par l'agriculture (engrais chimiques, énergie, machines,.....).*
- 550.000€ *consommés par l'industrie elle-même (énergie, machines,....)*
- *le reste en demande finale, soit* 1.800.000€ *, disponible pour satisfaire les besoins de la population.*

1. *Donner le vecteur colonne $P$ des productions totales.*
2. *Donner le vecteur colonne $DF$ des demandes finales.*
3. *Donner la matrice $E$ d'échanges inter-branches : le nombre inscrit à l'intersection de la ligne $i$ et de la colonne $j$ est la partie de la production de la branche $i$, consommée par la branche $j$, avec $i, j \in \{1, 2\}$.*

4. *Donner la matrice carrée $C$ d'ordre 2 des coefficients techniques telle que le cœfficient $c_{ij}$ est définie de la manière suivante :*

$$c_{ij} = \frac{\textit{consommation intermédiaire de produit i par la branche j}}{\textit{production de la branche j}}.$$

5. *Calculer le produit $C.P$. Que retrouve t-on ?*
6. *En admettant que :*

   *"production totale=consommations intermédiaires + demandes finales",*

   *justifier l'égalité suivante :*

$$(I_2 - C).P = DF.$$

   *La matrice $L = I_2 - C$ est appelée **la matrice de Leontief**.*

7. *Que serait la production totale des deux branches si l'on double les sommes des demandes finales ?*

### Application 7

*On considère la grille de la figure ci-dessous composée de tiges métalliques. Soient $T_i$, $1 \leq i \leq 4$, les températures aux quatres nœuds intérieurs du quadrillage de la figure. La température en un nœud est à peu près égale à la moyenne des températures aux quatre nœuds voisins (au-dessus,à gauche à droite et en dessous). La température aux extrémités est fixée telle qu'indiquée sur la figure.*
*Écrire un système d'équations dont la solution donne une estimation des températures $T_i$, $1 \leq i \leq 4$.*