2. Soit maintenant $\Delta'' = h_{(O,k)}(\Delta)$ où $h_{(O,k)}$ désigne l'homothétie de centre O et de rapport k : un zoom de Δ.

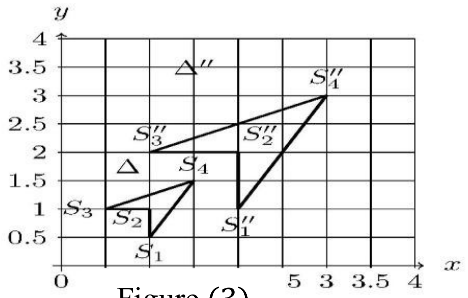


Figure (3)

Les coordonnées des sommets, de Δ'', $S_i'' = h_{(O,k)}(S_i)$ $1 \leq i \leq 4$, sont aussi données par les composantes de $\overrightarrow{OS_i}$ comme suit $\overrightarrow{OS_i'} = k.\overrightarrow{OS_i}$. Dans la Figure (3), on représente $\Delta'' = h_{(O,k)}(\Delta)$.

- Déterminer le rapport k.

La rotation et l'homothétie sont deux applications du plan $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Le plan $\mathbb{R}^2$ est un espace formé des couples (x, y) de nombres réels, dans lequel la notation (x, y) a deux interprétations géométriques : soit comme les coordonnées d'un point du plan, soit comme les composantes d'un vecteur.

Dans ce cours, les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont désormais vus comme des vecteurs qui peuvent être soumis à des transformations à travers des applications et la notation de vecteur sera généralisée dans le cadre d'espaces vérifiant certaines propriétés appelés « espaces vectoriels ».

La structure d'espace vectoriel intervient dans une grande partie de mathématiques : elle réalise un lien fondamental entre l'algèbre et la géométrie.

À l'issue de ce chapitre, l'étudiant sera capable de :

- Définir les espaces vectoriels.
- Écrire les coordonnées d'un même vecteur dans des différentes bases.
- Faire la différence entre famille libre, génératrice et base.
- Trouver la dimension d'un espace vectoriel.
- Définir et étudier une application linéaire.

II. <u>Espaces vectoriels :</u>

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) <u>Définitions :</u>

<u>Loi de composition interne :</u>

Soit E un ensemble non vide. Une loi de composition interne, notée additivement " $+$ " sur E, est une application de $E \times E$ dans E, définie par :

$$\boldsymbol{+} : \boldsymbol{E \times E \longrightarrow E}$$
$$\boldsymbol{(a, b) \longmapsto a + b}$$

On dit que $a + b$ est le composé de a et b pour la loi $+$.
la notation $(E, +)$ représente l'ensemble E muni de la loi de composition interne $+$.

Exemple(1):

Sur $E = \mathbb{Z}$,

l'addition définie par : $$\begin{aligned} + : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &\longmapsto \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \end{aligned}$$	La multiplication définie par : $$\begin{aligned} \times : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &\longmapsto \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \end{aligned}$$	Et la soustraction définie par : $$\begin{aligned} - : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &\longmapsto \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Sont des exemples de lois de composition internes sur $\mathbb{Z}$.

Ce n'est pas le cas de la division car $\frac{a}{b}$ n'est pas un entier pour tous les couples (a, b) d'entiers.

Loi de composition externe :

Soit E et $\mathbb{K}$ deux ensembles non vides. Une loi de composition externe, notée multiplicativement ". " sur E, est une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E, notée

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \boldsymbol{E} &\longrightarrow \boldsymbol{E} \\ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{a}) &\longmapsto \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{a} \end{aligned}$$

On dit que $\alpha. a$ est le composé de α et a pour la loi " $\cdot$ ".

Exemple(2):

Sur $E = M_{n,p}(\mathbb{R})$, le produit par un réel α défini par :

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times M_{n,p}(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_{n,p}(\mathbb{R}) \\ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}) &\longmapsto \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{A} \end{aligned}$$

Est une loi de composition externe sur $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

Ce n'est pas le cas du produit de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ par un nombre complexe z car $z \cdot A$ n'est pas une matrice à coefficients réels.

Un espace vectoriel $\boldsymbol{E}$ sur $\mathbb{K}$ est un ensemble muni d'une loi de composition interne, notée " $+$ ", et d'une loi de composition externe, notée " $\cdot$ ", vérifiant des conditions précises.

La loi de composition interne " $+$ " vérifie les propriétés suivantes :

1. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}$.
2. $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ **et** $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{E}$.
3. <u>Il existe</u> **un élément neutre** $\boldsymbol{0_E} \in \boldsymbol{E}$ **tel que** $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{O_E} = \boldsymbol{0_E} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}$.
4. Tout vecteur $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}$ admet **un symétrique (ou opposé)** $\boldsymbol{u}'$ tel que $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{0_E}$.
   Cet élément $\boldsymbol{u}'$ est noté $-\boldsymbol{u}$.

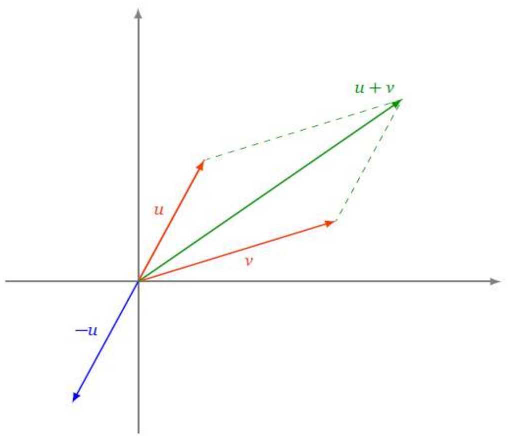
La loi de composition externe " $\cdot$ " vérifie les propriétés suivantes :

1. $\boldsymbol{1}.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{1} = \boldsymbol{u} \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}$.
2. $\boldsymbol{\alpha}.(\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{\alpha\beta}).\boldsymbol{u} \quad \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{K}, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}$.
3. $\boldsymbol{\alpha}.(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{v} \quad \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{K}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}$.

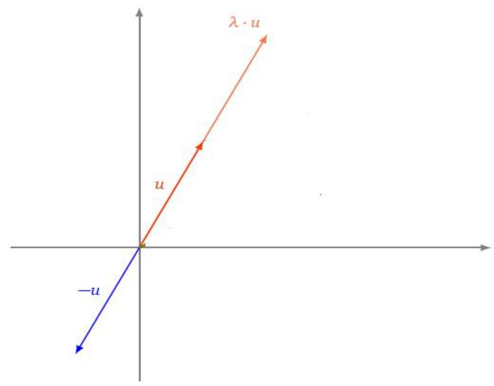
4. $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}).\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{u}\ \ \forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{K},\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{E}.$

On dit que $\boldsymbol{E}$ est **un** $\mathbb{K}$ **−espace vectoriel**, ses éléments sont appelés **vecteurs.**

<u>Exemple(3):</u> Voici un exemple de $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

<table>
<tr>
<td>


La loi interne dans $\mathbb{R}^2$:

- La somme de deux vecteurs $u=(x,y)$ et $v=(x',y')$ est un vecteur
$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}')$$
- L'élément neutre est le vecteur nul $(0,0)$.
- Le symétrique (l'opposé) de $u=(x,y)$ est le vecteur $-u=(-x,-y)$.
</td>
<td>


La loi externe dans $\mathbb{R}^2$:

- Le produit du vecteur $u=(x,y)$ par un scalaire $\lambda\in\mathbb{R}$ est un vecteur
$$\boldsymbol{\lambda u}=(\boldsymbol{\lambda x},\boldsymbol{\lambda y})$$
- Pour $\lambda=-1$, on obtient le vecteur $-u$.
</td>
</tr>
</table>

Toutes les propriétés d'un espace vectoriel sont vérifiées dans $\mathbb{R}^2$.

Dans ce cas, $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$ −espace vectoriel.

<u>Exercice(1):</u>

1. vérifier que $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ −espace vectoriel.
2. Justifier que les ensembles suivants ne sont pas des espaces vectoriels :

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ xy=0\}$$
$$F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x=1\}$$
$$G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x\geq 0\ et\ y\geq 0\}$$

Soit $\boldsymbol{E}$ un $\mathbb{K}$ −espace vectoriel, et $\boldsymbol{F}$ un sous-ensemble non vide de $\boldsymbol{E}$.

On dit que $\boldsymbol{F}$ **est un** $\mathbb{K}$ **sous-espace vectoriel de** $\boldsymbol{E}$ si et seulement si :

1. $\boldsymbol{0_E}\in\boldsymbol{F}.$
2. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{F}\quad\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{F}.$
3. $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{F}\ \ \forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{K},\ \boldsymbol{u}\in\boldsymbol{F}.$

- Tout $\mathbb{K}$ sous-espace vectoriel de E est un $\mathbb{K}$ −espace vectoriel.

Activité(1):

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F, G \subset E$.

a) Vérifier que F est un $\mathbb{K}$ sous-espace vectoriel de E si et seulement si $u + \alpha v \in F \quad \forall u, v \in F, \alpha \in \mathbb{K}$.

b) Vérifier que si F est un $\mathbb{K}$ sous-espace vectoriel de E et G un $\mathbb{K}$ sous-espace vectoriel de F alors G est un $\mathbb{K}$ sous-espace vectoriel de E.

c) Vérifier que si F et G sont deux $\mathbb{K}$ sous-espace vectoriels de E alors $F \cap G$ est un $\mathbb{K}$ sous-espace vectoriel de E.

- Soit $\boldsymbol{E}$ un $\mathbb{K}$ −espace vectoriel, $\boldsymbol{F}$ et G deux sous-ensembles de $\boldsymbol{E}$.

Si F est un $\mathbb{K}$ sous-espace vectoriel de E et G un $\mathbb{K}$ sous-espace vectoriel de F alors G est un sous-espace vectoriel de E.

- Soient $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ deux $\mathbb{K}$ sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $\boldsymbol{E}$.

L'ensemble $\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}$ est un $\mathbb{K}$ sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$ défini par :

$$\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E} \;/\; \boldsymbol{u} \in \cdots \wedge \; \boldsymbol{u} \in \cdots\}$$

Exercice(2):

A. Déterminer lesquels de ces ensembles sont des $\mathbb{R}$ sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
   1. $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 1\}$.
   2. $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = 0\}$.
   3. $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$.

B. Déterminer lesquels de ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
   1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 7y = z\}$.
   2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 0\}$.
   3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$.

2) Dépendance et indépendance linéaire :

Soit $\boldsymbol{E}$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel

Combinaison linéaire :

Soit $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \{\boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_n}\}$ une famille d'éléments de E.
On dit qu'un vecteur $\boldsymbol{u}$ de E est **une combinaison linéaire** d'éléments de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ s'il existe des scalaires $\boldsymbol{\alpha_1}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n}$ dans $\mathbb{K}$ tels que :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\alpha_1} . \mathbf{u_1} + \boldsymbol{\alpha_2} . \mathbf{u_2} + \cdots + \boldsymbol{\alpha_n} . \mathbf{u_n}$$

Les scalaires $\boldsymbol{\alpha_1}$ ... $\boldsymbol{\alpha_n}$ sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exercice(3):

- Montrer que le vecteur $v = (-3, 3, 2)$ de $\mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1, 2, -3)$, $v_2 = (1, 1, -2)$ et $v_3 = (1, -1, 1)$.
- Montrer que le vecteur $w = (4, -1, 8)$ n'est pas une combinaison lineaire de $u = (1,2,-1)$ et $v = (6,4,2)$.

Famille Génératrice :

Soit $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \{\boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_n}\}$ une famille de vecteurs de $\boldsymbol{E}$**.**

$\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est **une famille génératrice de** $\boldsymbol{E}$, **s**i tout vecteur $\boldsymbol{u}$ de $\boldsymbol{E}$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$.

En d'autres termes :

$$\forall\, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}, \exists\, \boldsymbol{\alpha_1}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n}\ , \textbf{tq}\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\alpha_1} . \mathbf{u_1} + \boldsymbol{\alpha_2} . \mathbf{u_2} + \dots + \boldsymbol{\alpha_n} . \mathbf{u_n}$$

On dit que $\boldsymbol{E}$ est **engendré** par la famille $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, et on note $\boldsymbol{E} = <\boldsymbol{\mathcal{F}}>$ **(ou** $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{vect}(\boldsymbol{F})$**).**

Exercice(4):

1. Montrer que la famille $\{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.
2. Trouver une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$.
   Montrer que $\{(1,-1,0), (0,0,1)\}$ est une famille génératrice de E.
4. Trouver une famille génératrice de chacun des espaces vectoriels trouvés dans l'exercice 2.
5. Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$.
   - Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   - Donner 3 familles génératrices différentes de F.

Famille Libre et famille liée :

Soit $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \{\boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_n}\}$ une famille de vecteurs de $\boldsymbol{E}$**.**

- $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est dite une **famille libre** (ou **linéairement indépendante**) si la seule manière d'obtenir 0_E dans une combinaison linéaire de vecteurs de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est d'imposer à tous les coefficients d'être nuls.

En d'autres termes :

$$\textbf{Si}\ \boldsymbol{\alpha_1}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n} \in \mathbb{K}\ \textbf{vérifient}\ \boldsymbol{\alpha_1} . \boldsymbol{u_1} + \dots + \boldsymbol{\alpha_n} . \boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{0_E}\ \textbf{alors}\ \boldsymbol{\alpha_1} = \dots = \boldsymbol{\alpha_n} = \boldsymbol{0}.$$

- Dans le cas contraire, la famille est dite **liée** (ou **linéairement dépendante**).

En d'autres termes, une famille de vecteurs est **liée** si elle contient au moins un vecteur qui est une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Exercice(5):

a. Soit F une famille de $\mathbb{R}^4$ telle que $F = \{(1,1,00), 0_{\mathbb{R}^4}, (1,0,0,0), (0,0,1,0)\}$. F est-elle une famille libre.
   Que peut-on déduire.

b. $F_1 = \{(1,3,-5), (6,0,4)\}$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$.

c. $F_2 = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^2$.

d. $F_3 = \{(1,2,1,2,1), (2,1,2,1,2), (1,0,1,1,0), (0,1,0,0,1), (0,0,0,0,1)\}$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^5$.

Cas particulier dans $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ **:**

Soit $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \{\boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_n}\}$ une famille à n vecteurs de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ avec $u_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})\ \forall i = 1 \dots n$.

La famille $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est **libre** dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si la matrice carrée d'ordre n dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est **inversible.**

$$\text{La famille } \boldsymbol{\mathcal{F}} \text{ est } \textbf{libre} \text{ dans } \mathbb{R}^n \iff \det\left(\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & \dots & u_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \end{array}\right) \neq 0$$

<u>Conséquence :</u> Sachant que le déterminant d'une matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, est non nul, les vecteurs colonnes de telles matrices sont libres.

De tels systèmes de vecteurs sont dits **systèmes à pivots**.

<u>Applications :</u> Soit $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \{\boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_n}\}$ une famille à n vecteurs de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$**.** Pour étudier leur dépendance linéaire, on cherche au moyen des opérations élémentaires à transformer le système de vecteurs en un système à Pivots. Si au bout de quelques transformations, on y arrive alors le système est libre sinon il apparaitra un vecteur exprimé sous la forme de combinaison linéaire des autres et le système est alors lié.

<u>Exercice(6):</u>

Soit $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}\}$ une famille de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$ avec $u_1 = (1,2,3), u_2 = (1,6,4)$ et $u_3 = (5,18,17)$.

En utilisant la méthode du système à pivot, $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est-elle libre.

<u>Base d'un espace vectoriel :</u>

Soit $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_n}\}$ une famille de vecteurs de $\boldsymbol{E}$**.**

$\boldsymbol{\mathcal{B}}$ est **une base** de E, si $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est une famille **<u>génératrice</u> et <u>libre</u>**.

<u>Plus précisément :</u>

$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_n}\}$ est **une base de $\boldsymbol{E}$** si pour tout élément u de E il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, vérifiant :

$$\boldsymbol{u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n.}$$

$(\boldsymbol{\alpha_1}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n})$ sont appelés **les composantes du vecteur $\boldsymbol{u}$ dans la base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$** et on note

$$\boldsymbol{u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}.}$$

<u>Remarque :</u>

- Tout espace vectoriel admet plusieurs bases, mêmes une infinité de bases sauf pour l'espace vectoriel réduit à l'élément neutre.
- Toutes les bases d'un même espace vectoriel admettent toutes le même nombre de vecteurs.

<u>Exercice (7):</u>

Pour chacun des espaces vectoriels suivants donner une base :

$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = 0\}$, $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 7y = z\}$ et
$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$.

<u>Exercice (8):</u>

Soit F et G deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ avec

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 3y + z = 0\}$$
$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + 2z = 0\}$$

- Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer des bases de F et de G.
- Écrire l'espace $D = F \cap G$.

- Déterminer une base de D.

3) Changement de coordonnées :

Exemple (4) :

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, trouvons les coordonnées de $v = (2,3)_{\mathcal{B}}$ dans la nouvelle base $\mathcal{B}' = \{u_1 = (0,2), u_2 = (1,1)\}$.

On pose (α, β) les nouvelles coordonnées de v dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$, alors on a :

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = 2e_1 + 3e_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ 2\alpha + \beta = 3 \end{cases}$$

En notation matricielle, le système se traduit comme suit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On note la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = P$ **la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$** .les colonnes de la matrice P sont les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ exprimés en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Changement de coordonnées :

Le changement de coordonnées correspond à un changement de base.

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{f_1, \dots, f_n\}$ deux bases de n vecteurs de l'espace vectoriel E de dimension n et soit $u = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$ un vecteur de E donné par ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Pour trouver les coordonnées de $u = (y_1, \dots, y_n)_{\mathcal{B}'}$ dans la base $\mathcal{B}'$:

- Écrire la matrice de passage P

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f_1 & \cdots & f_n \end{array} \\ P = & \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

- Résoudre le système suivant défini par cette écriture matricielle :

$$P \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exercice (9):

Soit la base canonique de $\mathbb{R}^3$, trouvez les coordonnées de $v = (1,0,2)_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}' = \{(1,1,0), (2,0,0), (2,3,2)\}$.

4) Dimension d'un espace vectoriel :

Soit $\boldsymbol{E}$ un $\mathbb{K}$ −espace vectoriel et $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ une base de $\boldsymbol{E}$.

Le nombre de vecteurs composant $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ est appelé la **dimension de E**, noté $\mathbf{dim}(\boldsymbol{E})$.

$$\boldsymbol{dim}(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{card}(\boldsymbol{\mathcal{B}})$$

Remarque : Soit E un espace vectoriel de dimension n.

- Toute famille génératrice de E admet au moins n vecteurs.
- Toute famille libre de E admet au plus n vecteurs.
- Toute famille libre de E contenant n vecteurs est une base de E.

Dimension d'un sous-espace vectoriel :

Soit F un sous espace vectoriel de E.

- $F \subset E$ si et seulement si $\dim(F) < \dim(E)$.
- $F = E$ si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.
- $F = \{O_E\}$ si et seulement si $\dim(F) = 0$.

Remarque : Il est à noter qu'il existe des espaces vectoriels dont la dimension est infinie, nous ne considérons dans ce cours que les espaces vectoriels de dimension finie uniquement.

Exemple (5) :

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- $\dim\left(M_{n,p}(\mathbb{R})\right) = np$.

Exercice (9):

Donner les dimensions des espaces mentionnés dans l'exercice(2) ci-dessus.

5) Sous-espaces supplémentaires :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

F et G sont dits **supplémentaires** dans E si et seulement si :

$$\begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ F + G = E \end{cases}$$

L'ensemble $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$ est défini comme suit :

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} : \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{F}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{G}\}$$

- Si F et G sont **supplémentaires** dans E, sont aussi dits **en somme directe** dans E.
  On le note par : $\boldsymbol{F} \oplus \boldsymbol{G} = \boldsymbol{E}$.

Propriétés :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\mathcal{B}$ est une base de F et $\mathcal{B}'$ est une base de G.

- **F et G sont supplémentaires** si et seulement si **la famille $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une base de E.**
- **Si F et G sont supplémentaires alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.**

Exercice (10):

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $a = (1, -2, 3)$ et $b = (2, 1, -1)$ deux vecteurs.

On pose $F = vect(a, b) =< a, b >$.

- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- Eet F sont-ils supplémentaires.

III. Application linéaire :

1) Définition :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application de E dans F.

On dit que f est **une application linéaire**, si et seulement si:

1. $\boldsymbol{f(u+v) = f(u) + f(v), \quad \forall\, u, v \in E.}$
2. $\boldsymbol{f(\lambda u) = \lambda . f(u), \ \forall\, u \in E, \lambda \in \mathbb{R}.}$

- **Si $\boldsymbol{E = F}$ alors $\boldsymbol{f}$ est dite un endomorphisme de $\boldsymbol{E}$.**
- **L'ensemble des applications linéaires de $\boldsymbol{E}$ dans** F est noté $\boldsymbol{\mathcal{L}(E, F)}$.
- Si $F = \mathbb{K}$ alors f est dite **une forme linéaire sur** E.

Exemple (1):

L'application identité $Id_E : E \longrightarrow E$ est un endomorphisme de E.

Remarque :

- On peut réunir les deux axiomes de la définition ci-dessus en un seul :

Pour tout couple $\boldsymbol{(u, v)}$ de $\boldsymbol{E^2}$ et tout $\boldsymbol{\lambda}$ de $\mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)}$$

- Pour toute $f \in \boldsymbol{\mathcal{L}(E, F)}$, $f(0_E) = 0_F$.

Exercice (1) :

1. Montrer que l'application, ci-dessous, est une application linéaire

$$\begin{aligned} h_\alpha : E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto \alpha \cdot u \end{aligned}$$

Cette application s'appelle **une homothétie de rapport $\boldsymbol{\alpha}$.**

- Si $\alpha = 0$, h_0 est l'application ...
- Si $\alpha = 1$, h_1 est l'application ...

2. Soit, pour $i = 1,2$, f_i une application définie par :

$$\begin{aligned} f_i : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

Montrer que f_i est une application linéaire $\forall i = 1,2$.

$\forall i = 1,2$, f_i est dite **la i-ème projection canonique.**

3. Soit $C^0([0,1], \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f \ est \ continue \ sur \ [0,1]\}$ et
$C^1([0,1], \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f \ est \ dérivanle \ et \ à \ derivée \ continue \ sur \ [0,1]\}$.

Soit l'application D définie par :

$$\begin{aligned} D : C^1([0,1], \mathbb{R}) &\longrightarrow C^0([0,1], \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

Montrer que D est une application linéaire.

4. Parmi les applications suivantes, indiquer celles qui sont linéaires.

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \longmapsto -x + 2y + 5z$$
$$f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \longmapsto (2x + y, y - z)$$

$$f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \longmapsto (x^2 - y, y + z)$$
$$f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \longmapsto (2xy, y + 3x)$$

2) Matrice associée à une application linéaire :

Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire définie par $f(x_1, \dots, x_p) = (y_1, \dots, y_n)$ tel que :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{cases}$$

En notation matricielle, on obtient :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix}$$

La matrice associée au système d'équations linéaires est la matrice associée à f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$. Cette matrice est rectangulaire du type $(n, p), n = \dim(\mathbb{R}^n)$ et $p = \dim(\mathbb{R}^p)$.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_1 = (f_1, \dots f_n)$ une base de F.

La matrice de l'application linéaire f ans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ est la matrice, notée par $Mat_{(\mathcal{B},\mathcal{B}_1)}(f)$, définie par :

$$A = Mat_{(\mathcal{B},\mathcal{B}_1)}(f) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque :

- La taille de la matrice $Ma\ _{(\mathcal{B},\mathcal{B}_1)}(f)$ dépend uniquement de la dimension de E et de F.
- Les coefficients de la matrice dépendent du choix de la base $\mathcal{B}$ de E et de $\mathcal{B}_1$ de F.

$$f(x_1, \dots, x_p) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ . \\ x_p \end{pmatrix}$$

- Soit $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'_1$ deux nouvelles bases respectivement de E et F et $M = Mat_{(\mathcal{B}',\mathcal{B}'_1)}(f)$.

$$M = P_2^{-1} A P_1$$

Où P_1 est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ et P_2 est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1'$ à $\mathcal{B}_1$.

Exercice (2) :

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f: \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (x + y - z, x - 2y + 3z) \end{array}$$

a) Quelle est la matrice de f dans les bases canonique $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
b) Soient $\mathcal{B}_1 = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_2 = (\psi_1, \psi_2)$ une nouvelle base de $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$\phi_1 = (1,1,0), \phi_2 = (1,0,1) \; et \; \phi_3 = (0,1,1)$$
$$\psi_1 = (1,0) \; et \; \psi_2 = (1,1)$$

Quelle est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

3) Produit matriciel et composition :

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ −espaces vectoriels munis respectivement des bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$.

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

- L'application $g \circ f$ est une application linéaire.
- $Mat_{(\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G)}(g \circ f) = Mat_{(\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G)}(g) \times Mat_{(\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)}(f)$

Exercice (3) :

Soient f et g deux applications linéaires définies par :

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad\qquad g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (2x, x + y, -x + 2y) \qquad (x, y, z) \mapsto (z, 2x + y - z)$$

- Donner l'expression de l'application linéaire $g \circ f$.
- Donner la matrice associée à $g \circ f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

4) Image et noyau d'une application linéaire :

Activité (2):

Soit $f: E \longrightarrow F$ une application linéaire.

a. Écrire l'ensemble $f(E)$ et montrer que c'est un sous-espace vectoriel de F.
b. Soit $\ker(f)$ un ensemble défini par :

$$\boldsymbol{ker(f)} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} | \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{0_F}\}$$

Vérifier que $\boldsymbol{ker(f)}$ est un sous espace vectoriel de E.

Soit $f: E \longrightarrow F$ une application linéaire.

- L'ensemble $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F appelé **image de f** et noté $\boldsymbol{Im(f)}$**.**

Sa dimension est appelée **rang** de f et noté $\boldsymbol{rg(f)}$ **:**

$$\boldsymbol{rg(f)} = \boldsymbol{dim}\big(\boldsymbol{Im(f)}\big)$$

- L'ensemble $\ker(f)$ est un sous espace vectoriel de E appelé le **noyau de f.**
- Si $\mathcal{B}$ est une base de E alors $f(\mathcal{B})$ est la famille génératrice de $Im(f)$.

Remarque : soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = Ma_{\ (\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)}(f)$.

$$rg(f) = rg(A)$$

Où $rg(A)$ désigne le nombre de colonnes linéairement indépendantes de la matrice A.

Exercice(4):

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, définie par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans une certaine base.

1. Déduire de A la base de $Im(f)$.
2. Donner une base de $\ker(f)$.

Exercice(5):

Soit f l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ vérifiant :

$$f(1,0,0) = (1,0,1,1)$$
$$f(0,1,0) = (1,1,0,2)$$
$$f(0,0,1) = (0,1,1,1)$$

1) Déterminer $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
2) Donner le noyau de f.
3) Soit $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, sous quelle conditions sur x, y et z, le vecteur v appartient à $\ker(f)$.
4) Donner une base de $\ker(f)$ et en déduire sa dimension.
5) Donner la famille génératrice de $Im(f)$ et déterminer son rang.

Théorème du rang :

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f: E \longrightarrow F$ une application linéaire. On a alors

$$\mathbf{dim}(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{rg}(\boldsymbol{f}) + \mathbf{dim}(\boldsymbol{ker}(\boldsymbol{f}))$$

Exercice(6):

Soit E une espace vectoriel et F, G deux sous-espaces de E. On définit l'application

$f: E_1 \times E_2 \to E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

a) Montrer que f est linéaire.
b) Montrer que $\ker(f) = E_1 \cap E_2$.
c) Montrer que $Im(f) = E_1 + E_2$
d) Que donne le théorème du rang ?

Soit $f: E \longrightarrow F$ une application linéaire.

- f est dite **une application injective** si

$$\forall(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{E}^2, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$$

- f est dite **une application surjective** si

$$\forall v \in F, \exists u \in E \text{ vérifiant } f(u) = v$$

- f est dite **une application bijective** si f est à la fois **injective** et **surjective.**

$$\forall v \in F, \exists!\, u \in E \text{ vérifiant } f(u) = v$$

On appelle **isomorphisme de E dans F** une application linéaire bijective de E dans F.

Un **endomorphisme bijectif** est appelé **automorphisme.**

Propriétés :

a. $f: E \longrightarrow F$ est dite **injective** si et seulement si $ker(f) = \{0\}$.

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \dim(ker(f)) = 0.$$

b. $f: E \longrightarrow F$ est dite **surjective** si et seulement si $Im(f) = F$.

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \dim(F) = rg(f) = \dim(\quad (f)).$$

c. $\ker(f) = \{0\}$ et $Im(f) = F \Leftrightarrow f$ est …………..

d. Si E et F sont de meme dimension finie(en particulier si $F = E$) alors

$$\ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow f \text{ est bijective}$$

e. soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F de même dimension et $A = Ma_{\ (\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)}(f)$.

f est un **isomorphisme** de E sur F si et seulement si la matrice **A est inversible**.

$$A^{-1} = Mat_{(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E)}(f^{-1})$$

Exercice (7) :

1. Soit $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
   Montrer que f est un automorphisme.
   Donner la matrice associée à f^{-1}.
2. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Soit $w_1 = (1, -2, 0), w_2 = (-1, 2, 0), w_3 = (0, 0, 2)$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $g(e_1) = w_1, g(e_2) = w_2$ et $g(e_3) = w_3$.
   a. Exprimer w_1, w_2 et w_3 en fonction de e_1, e_2 et e_3.
   b. Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $g(v)$.
   c. Trouver une base de $\ker(g)$. g est-elle injective.
   d. $\ker(g)$ et $Im(g)$ sont-ils supplémentaires.